Análisis Numérico
Tercero de Grado en Matemáticas, Curso 2020/2021.
Convocatoria de Septiembre
17 de Septiembre de 2021.

Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_1(t,x,y), \\ y' = f_2(t,x,y), \\ x(1) = 1, \\ y(1) = e^{-1}, \end{cases}$$

siendo

$$f_1(t,x,y) = \frac{1}{x} - \frac{e^{t^2}}{t^2}y - t, \quad f_2(t,x,y) = \frac{1}{y} - e^{t^2} - 2te^{-t^2}.$$

La solución exacta es

$$x_{ex}(t) = \frac{1}{t}, \quad y_{ex}(t) = e^{-t^2}.$$

1. Resuelva el problema con el método RK4 en el intervalo $[1,2]$ usando una partición uniforme de $N = 1000$ subintervalos. Calcule el error tomando el mayor entre los errores máximos cometidos en las variables x e y y póngalo en pantalla. Compare la solución exacta con la aproximación obtenida en dos gráficas, una para la variable x y otra para la variable y (use el comando `subplot` para que ambas gráficas aparezcan en una misma ventana).

2. Repita el apartado anterior usando particiones uniformes de $N = 20, 40, 80, 160, 320, 640$ intervalos. Compare la solución exacta con las aproximaciones obtenidas en dos gráficas, una para la variable x y otra para la variable y (use nuevamente el comando `subplot` para que ambas gráficas aparezcan en una misma ventana). Calcule los errores cometidos (tome nuevamente el mayor entre los errores máximos cometidos en las variables x e y) y estudie el orden aproximado: ¿es lo que cabría esperar en un método de cuarto orden?

3. Resuelva el problema con el método RK23 en el mismo intervalo con tolerancia 10^{-6} y paso inicial $h_0 = 0.01$. Calcule y ponga en pantalla el error que se comete (medido como en los apartados anteriores) y dibuje las siguientes gráficas:

   - Gráfica de x_{ex} y aproximación obtenida.
   - Gráfica de y_{ex} y aproximación obtenida.
   - Órbita exacta y aproximación obtenida.
   - Gráfica de los pasos h_k usados por el método en las distintas iteraciones en función de t_k.

   (hago uso de nuevo del comando `subplot` para que las cuatro gráficas aparezcan en una sola ventana).

4. Se considera la matriz Jacobiana del sistema:

$$J(t,x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(t,x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t,x,y) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(t,x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(t,x,y) \end{bmatrix}.$$

   Calcule los autovalores λ_1, λ_2 de $J(2, x_{ex}(2), y_{ex}(2))$. Dibuje la frontera de la región de estabilidad D_A del método RK4 y estime gráficamente para que valor de h se tiene

$$h\lambda_i \in D_A, i = 1, 2.$$

   Si encuentra alguna relación entre el valor estimado y los resultados obtenidos en los apartados 2 y 3, coméntelo brevemente.

Instrucciones:

- Entregue un único fichero `control.py` que contenga los programas hechos para resolver el Ejercicio así como las instrucciones para ejecutarlos y los comentarios que quiera hacer.

- Entregue el fichero `control.py` a través del campus **SIN COMPRIMIR**, para evitar posibles problemas de descompresión.
- El fichero `control.py` tiene que estar hecho de manera que, cuando se ejecute (es decir, cuando se le da al triángulo verde en Spyder) se ejecuten los progamas, salga en pantalla lo que se pide y se generen las gráficas que se piden **sin que sea necesario tener que quitar comentarios** o escribir líneas nuevas. **Sólo se evaluarán las partes del ejercicio que se ejecuten automáticamente al ejecutar el fichero:** si hay líneas de programa comentadas se interpretará que no se desea que sean corregidas, salvo que sean comentarios sobre los resultados.
- Las gráficas que corresponden a distintos apartados tienen que estar separadas.