Ejercicio voluntario Tema 2 (Solución)

Creado por: Juan Manuel García Delgado

1. **Para una función dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideramos la iteración definida por**

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_{k+1} - x_k), \qquad k \leq 1$$

con x_0, x_1 dados.

(a) Dar una interpretación geometrica del método.

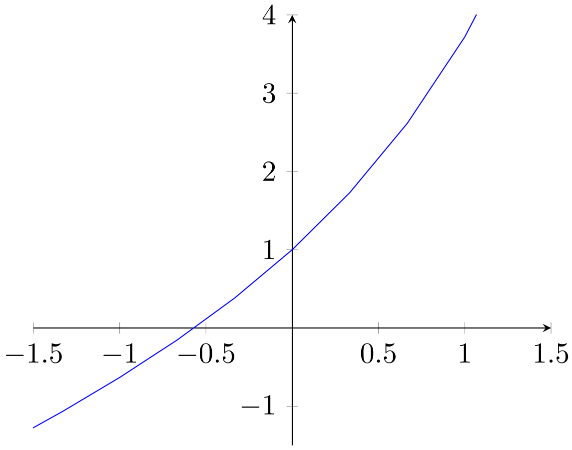
Solución. Primero de todo, despejamos el término x_{k+1}, de tal forma que nos queda:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Esa expresión coincide con el *Método de la Secante.* Dicho método trata de aproximar la solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Consiste en un algoritmo recursivo, que mientras mas iteraciones hagamos, con más precisión encontraremos un valor de la solución.

Para entender el método, vamos a estudiar un ejemplo en concreto, como puede ser la ecuación $f(x) = 0$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x + e^x$.

Como $f(-2) = -2 - e^{-2} \approx -2.13 < 0$ y $f(2) = 2 + e > 0$, y f es continua, así que por el *Teorema de Bolzano* sabemos de la existencia de al menos una solucion en $(-2, 2)$.



Para usar el método, elegimos dos puntos, en este caso $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$. Con estos dos puntos podemos hallar su recta, que tendra de ecuación:

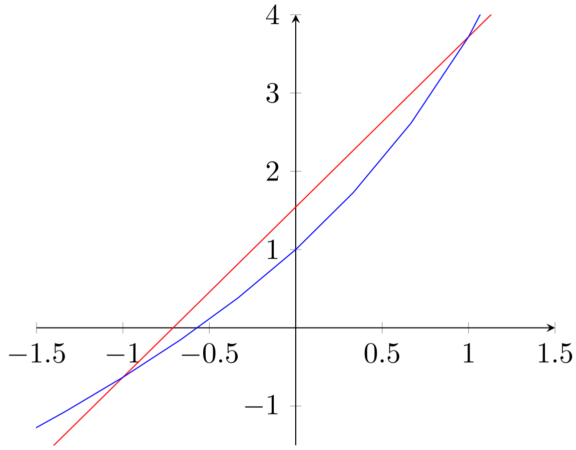
$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

Entonces, como:

$$y_0 = f(x_0) = -1 + e^{-1}, \qquad y_1 = f(x_1) = 1 + e$$

Se tiene que la ecuación de la primera recta es:

$$y + 1 - e^{-1} = \frac{-2 + e^{-1} - e}{-2}(x + 1)$$



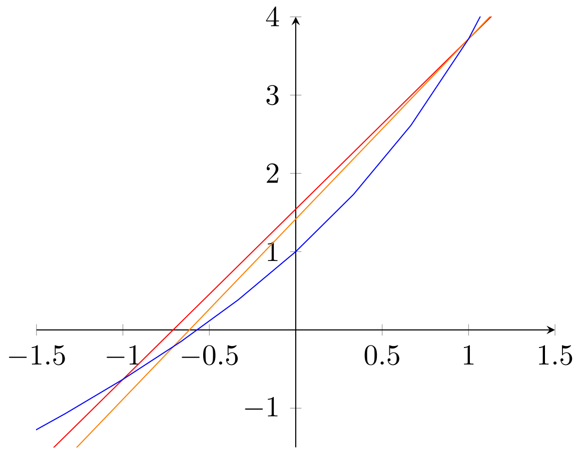
Ahora, basta con ver que punto de la recta corta con el eje x y ya tendremos el nuevo x_2, en este caso, $x_2 = -0,7093$. Observemos que $x_2 \in (-2, 2)$, luego podemos continuar con las iteraciones.

Ahora consideramos los puntos $(x_2, f(x_2))$ y $(x_1, f(x_1))$, y esta nueva recta (que la trazaremos de color naranja), la intersecamos con el eje de ordenadas $y = 0$, y obtendremos el x_3, un nuevo valor más próximo a la solución que buscamos.

$$y_2 = f(x_2) = -0,7093 + e^{-0,7093}, \qquad y_1 = f(x_1) = 1 + e$$

Luego la nueva recta es:

$$y - 1 - e = \frac{1 + e + 0,7093 - e^{-0,7093}}{1 + 0,7093}(x - 1)$$



En este caso, al intersecar como se menciona anteriormente, obtenemos el nuevo x_3, que en este caso, $x_3 = -0,6149$.

Ahora bastaría con repetir el proceso el número de iteraciones deseeadas hasta obtener una solución con el margen de precisión deseado.

En este caso, la solución es $x \approx -0.567143$. Esto se puede comprobar facilmente con un simple programa de Python como el siguiente:

```
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *

import sys
sys.setrecursionlimit(100) #para evitar errores recursivos

x0, x1, cont = -1, 1, 0

def f(x):
    return x + exp(x)

def secantMethod(x0, x1, cont):
    cont += 1
    if cont > 15:
        return x1
    else:
        xs = x1 - f(x1)*(x1 - x0)/(f(x1) - f(x0))
        return secantMethod(x1, xs, cont + 1)

print(secantMethod(x0, x1, cont))
```

(b) Si r es una raíz simple de f, demostrar que $e_k = x_k - r$ satisface, para x_k suficientemente cerca de r, que

$$e_{k+1} \approx \frac{f''(r)}{2f'(r)} e_k e_{k-1}$$

Solución. Sea r la raiz $f(x) = 0$, y sea x_k su valor aproximado usando el método de la secante tras hacer k iteraciones.

El enunciado nos dice que se verifica para un x_k lo suficientemente cerca de r, esto quiere decir, en un lenguaje "poco matemático" que la diferencia entre la raiz y la aproximación es mínima, o lo que es lo mismo, que existe un $\epsilon > 0$ tal que:

$$|r - x_k| \leq \epsilon$$

Se puede elegir un k, tal que x_k y x_{k-1} esten lo suficientemente cerca, o lo que es lo mismo, que para el mismo ϵ anterior, se cumpla:

$$|r - x_k| \leq |r - x_{k-1}| \leq \epsilon$$

Con esto, podemos aplicar el siguiente resultado, que usaremos para la prueba. La definición de derivada en un punto es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

Como x_k es una buena aproximación a r, al igual que x_{k-1}, podemos aproximar el valor de la derivada de la siguiente forma:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(r)$$

Además, por el **Teorema de Taylor**, aplicado para $n = 2$, tenemos que que para x_k y x_{k-1} lo suficientemente cerca:

$$f(x_k) \approx \cancel{f(r)} + \frac{f'(r)}{1!} e_n + \frac{f''(r)}{2!} e_n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(r)}{2!} e_n^2 \approx f(x_k) - f'(r) e_k$$

Entonces tenemos que:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - r = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} - r =$$

$$= e_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{e_k(f(x_k) - f(x_{k-1})) - f(x_k)(x_k - x_{k-1}))}{f(x_k) - f(x_{k-1})} =$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left(e_k \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - f(x_k) \right) =$$

$$\approx \frac{1}{f'(r)} \left(e_k f'(r) - f(x_k) \right) = \frac{1}{f'(r)} \frac{f''(r)}{2} e_k^2 \approx \frac{f''(r)}{2 f'(r)} e_k e_{k-1}$$

que es justo lo que queríamos probar.

NOTA: En las expresiones anteriores se ha usado la ***aproxiomación de la derivada en un punto*** *y el* ***Teorema de Taylor***

(c) Deducir a partir del apartado anterior que existe una constante $D > 0$ tal que:

$$e_{k+1} \approx D e_k^p, \qquad p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Solución. Como ocurría en el caso del *Método de Newton*, tomando una semilla x_0 lo suficientemente próxima a la raiz se obtiene la convergencia, pero en la práctica, puede ocurrir que elijamos un x_0 por el que no obtengamos la solución, es decir, que no sea convergente la sucesion de iteraciones recursivas.

En este caso, puede ocurrir lo mismo pero con dos valores x_0, x_1, es por ello que lo que nos piden es que estudiemos su ratio de convergencia.

Para determinar este orden de convergencia, suponemos que:

$$e_{n+1} \approx Ae_n^\alpha$$

donde A es una constante, luego para algún $A > 0$:

$$e_{n+1} \approx Ae_n^\alpha \;\Rightarrow\; e_n \approx Ae_{n-1}^\alpha \;\Rightarrow\; e_{n-1} = (A^{-1}e_n)^{1/\alpha}$$

Por tanto, si $C = A^2$, y por la expresión del apartado b:

$$e_{n+1} = Ae_n^\alpha = Ce_ne_{n-1} = Ce_n(A^{-1}e_n)^{1/n}$$

Luego,

$$Ae_n^\alpha = Ce_n(A^{-1}e_n)^{1/\alpha} \;\Rightarrow\; \frac{A^{1-1/\alpha}}{C} = e_n^{1-\alpha+1/\alpha}$$

Ahora, como la primera parte es un producto de constantes, la parte de la derecha debe ser también una constante, o lo que es lo mismo, que cuando $n \to \infty$, la expresión converja. Veamos para que valores de α converge.

- Si $1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$ es claro que no converge.

- Si $1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} < 0$ es claro converge a 0, pero esto no noss sirve.

Por tanto, solo nos valdrá para cuando:

$$1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que es justo lo que queríamos probar.