
– Práctica 3 –

Resolución numérica de ecuaciones escalares no lineales II

Métodos de punto fijo

El objetivo de esta práctica es implementar un método de punto fijo genérico

$$\begin{cases} x_0 \in J, \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

y aplicarlo a la búsqueda de las raíces de algunas ecuaciones de la forma

$$f(x) = 0, \quad x \in I.$$

1. Escribir un programa Python `puntofijo` que implemente el método anterior atendiendo a las siguientes características:

   - Los parámetros de entrada han de ser:
     - la función de iteración g;
     - la semilla x_0;
     - la precisión ε;
     - el número máximo de iteraciones $nmax$.
   - Se usará como criterio de parada el siguiente:

     $$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon.$$

     En consecuencia, el programa ha de ir calculando términos de la sucesión x_n hasta que se verifique la desigualdad anterior o se alcance el número máximo de iteraciones.
   - El programa debe especificar en pantalla si se ha detenido por haber alcanzado el criterio de parada o por haber alcanzado el número máximo de iteraciones sin encontrarla. En el primer caso debe mostrar, además de la aproximación de la raíz obtenida, el número de iteraciones que ha realizado.
   - En cualquier caso, devolverá como parámetro de salida el último término de la sucesión calculado.

   Comentario: La finalidad de incluir un número máximo de iteraciones es la de evitar que el algoritmo entre en un bucle infinito si no se llega a cumplir el criterio de parada. Por ello, se utilizan valores grandes para $nmax$. Que el programa se acabe porque se ha alcanzado el número máximo de iteraciones implica la sospecha de que el algoritmo pueda no ser convergente con la semilla elegida.

2. Usar el programa `puntofijo` para calcular la raíz de la ecuación

   $$x - e^{-x} = 0,$$

   con $x_0 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-7}$ y $nmax = 100$ usando los métodos:

a) $x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$

b) Método de Newton.

3. Usar el programa `puntofijo` para calcular la raíz de la ecuación de Kepler

$$K = x - \alpha \sin(x),$$

con $\alpha = 0.093$, $K = 2/3$, $x_0 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-7}$ y $nmax = 100$, usando los métodos:

a) $x_{n+1} = K + \alpha \sin(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$

b) Método de Newton.

4. Aproximar la única raíz de la ecuación

$$\cos(x) - x = 0,$$

con $x_0 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-7}$ y $nmax = 100$, usando los métodos:

a) $x_{n+1} = \cos(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$

b) Método de Newton.

5. Se desea aproximar la única solución de la ecuación

$$x^5 - 5x^3 + 1 = 0$$

que está en el intervalo [0,1] con un error menor que $\varepsilon = 10^{-7}$.

a) Aplicar el método de Newton.

b) Probar otros métodos de punto fijo hasta encontrar uno que converja.

Indicación: Para comprobar si un método es localmente convergente basta con dibujar la gráfica de la función de iteración y ver si su pendiente en el punto de corte con la función identidad es menor que 1 en valor absoluto.

6. Dada una ecuación $f(x) = 0$:

a) Modificar el programa `puntofijo` de modo que utilice como criterio de parada el siguiente:

$$|f(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

b) Para $f(x) = x + (x-1)\, e^x$, comprobar que tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$ dibujando su gráfica.

c) Utilizar el programa obtenido en el primer apartado para aproximar dicha raíz con el método de Newton, una semilla adecuada obtenida a partir de la gráfica y $\varepsilon = 10^{-8}$.

d) Aproximar la raíz usando otros métodos de punto fijo diferentes, con la misma semilla y el mismo test de parada, y comparar con los resultados obtenidos en el apartado anterior.