

– Práctica 5 –
Integración numérica

El objetivo de esta práctica es la implementación de algunas fórmulas de cuadratura, simples y compuestas, para aproximar la integral definida de una función dada,

$$\int_a^b f(x) dx.$$

En el caso de las fórmulas simples, los argumentos de entrada serán la función a integrar f y los extremos de integración a y b . En el caso de las fórmulas compuestas, a los anteriores argumentos de entrada se añadirá N , el número de subintervalos de $[a, b]$ considerados.

Las fórmulas implementadas se utilizarán para aproximar la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

para cuyo integrando no es posible calcular una primitiva usando funciones elementales.

La aproximación obtenida en cada caso se comparará con la obtenida con la función quad de Python, que se utilizará como solución de referencia.

1. **Fórmula del punto medio.** Programar una función que implemente la regla del punto medio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

aplicarla al ejemplo indicado y comparar el valor obtenido con el que ofrece la función predefinida quad de Python.

2. **Fórmula del trapecio.** Repetir el ejercicio anterior para la regla del trapecio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

3. **Fórmula de Simpson.** Volver a repetirlo para la regla de Simpson,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

4. **Fórmula del punto medio compuesta.** Programar una función que implemente la regla del punto medio compuesta. Usarla para aproximar la integral definida del ejemplo con $N = 10, 20, 40, 80$, comparando los valores obtenidos con el dado por quad. Comentar los resultados obtenidos.
5. **Fórmula del trapecio compuesta.** Repetir el ejercicio anterior para la regla del punto medio compuesta.
6. **Fórmula de Simpson compuesta.** Volver a repetirlo para la regla de Simpson compuesta.
7. **Fórmula de Gauss de 3 puntos.** Programar una función que implemente la fórmula de Gauss de 3 puntos, de nuevo con argumentos de entrada f , a y b , y de modo que, a partir de los nodos y los pesos correspondientes a dicha fórmula en el intervalo $[-1, 1]$, calcule los nodos y pesos correspondientes al intervalo $[a, b]$, para posteriormente evaluar la expresión de la fórmula de cuadratura en ese intervalo. Utilizarla para aproximar la integral del ejemplo y comparar el valor obtenido con el ofrecido por quad.