

Filtrado en el Dominio de la Frecuencia

En el apunte de *Filtrado Espacial* se presentaron las diferentes técnicas usadas generalmente para el realce de una imagen en el dominio espacial. Ahora afrontaremos el problema desde el dominio de la frecuencia, más precisamente, con la transformada de Fourier.

Introducción a la Transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia

La transformada de Fourier, $F(u)$, de una sola variable, de una función continua, $f(x)$, se define como

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi \cdot u \cdot x} dx$$

De la misma forma, dada $F(u)$, podemos obtener $f(x)$ a través de la transformada inversa de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{j2\pi \cdot u \cdot x} du$$

Las expresiones anteriores pueden extenderse fácilmente a dos variables, u y v :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \cdot (u \cdot x + v \cdot y)} dx dy$$

Y, similarmente, la transformada inversa queda definida como

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \cdot (u \cdot x + v \cdot y)} du dv$$

Ahora bien, en el procesamiento de imágenes se trata con funciones discretas. Por esta razón, presentamos la transformada de Fourier de una función discreta (TDF) de una variable, $f(x)$, con $x=0, 1, \dots, M-1$:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot u \cdot x}{M}}$$

Para $u=0, 1, \dots, M-1$. Análogamente, dada $F(u)$, la transformada discreta de Fourier inversa está definida como

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \cdot e^{\frac{j2\pi \cdot u \cdot x}{M}}$$

Para $x=0, 1, \dots, M-1$. Cada uno de los M términos de $F(u)$ es llamado componente de frecuencia de la transformada. Los valores de u en los que la $F(u)$ está definida se llama dominio de la frecuencia.

Una propiedad importante de la TDF (y su inversa) es que, a diferencia del par continuo, aquéllas siempre existen. Lo mismo sucede con la TDF para una función de dos variables. En algunos casos, es conveniente expresar la TDF, $F(u)$, en coordenadas polares:

$$F(u) = |F(u)| \cdot e^{-j\phi(u)}$$

donde

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

es llamado *magnitud* de la transformada de Fourier, y

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

se denomina *fase* o *argumento* de la transformada de Fourier. $R(u)$ e $I(u)$ son la parte real y la imaginaria de $F(u)$, respectivamente.

Transformada discreta de Fourier bidimensional

La transformada discreta de Fourier de una función (imagen) $f(x, y)$ de tamaño $M \times N$ está dada por la siguiente expresión:

$$F(u, v) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left[\frac{u \cdot x}{M} + \frac{v \cdot y}{N} \right]} \quad (1)$$

Similarmente, dada $F(u, v)$, obtenemos $f(x, y)$ a través de la transformada de Fourier inversa, definida por la siguiente expresión:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \left[\frac{u \cdot x}{M} + \frac{v \cdot y}{N} \right]}$$

Para $x=0, 1, \dots, M-1$ e $y=0, 1, \dots, N-1$. Las variables u y v son las variables transformadas o de frecuencia, y x e y son las variables espaciales o de imagen. Como en la sección anterior, definimos el espectro de Fourier, la fase y la magnitud:

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \quad \phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

donde $R(u, v)$ e $I(u, v)$ son la parte real y la imaginaria de $F(u, v)$, respectivamente.

En la práctica es común multiplicar a función $f(x, y)$ (imagen) por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. Debido a las propiedades de las exponenciales se puede demostrar que

$$TDF\{f(x, y) \cdot (-1)^{x+y}\}(u, v) = F(u - M/2, v - N/2) \quad (2)$$

donde $TDF()$ representa la transformada discreta de Fourier. Esta expresión coloca al origen de la TDF de $f(x, y) \cdot (-1)^{x+y}$ [o sea, $F(0, 0)$] en $u=M/2$ y $v=N/2$. En otras palabras, multiplicando $f(x, y)$ por $(-1)^{x+y}$ se traslada el origen de $F(u, v)$ a las coordenadas $(M/2, N/2)$, las cuales coinciden con el centro del área de $M \times N$ ocupada por la transformada discreta de Fourier bidimensional.

El valor de la transformada en $(u, v)=(0, 0)$ está dado por la ecuación (1),

$$F(0,0) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3)$$

de la cual vemos que es el promediado de $f(x, y)$. En otras palabras, si $f(x, y)$ es una imagen, el valor de la transformada en el origen es promediado de los niveles de gris de la imagen. Dado que ambas frecuencias son cero en el origen, $F(0,0)$ es llamado a veces *componente continua (dc)* del espectro.

Si $f(x, y)$ es real, es fácil demostrar que su TDF es hermítica y que la magnitud de ésta es simétrica.

La figura 1 (a) muestra un rectángulo blanco de 20x40 píxeles sobre un fondo negro de 512x512. La imagen fue multiplicada por $(-1)^{x+y}$ antes de aplicarle la TDF de manera que la frecuencia cero quede en el centro del espectro (figura 1 (b)). Antes de mostrar la TDF, se le aplicó una transformación logarítmica, $F'(u, v) = c \cdot \log(1 + F(u, v))$, para realzar el detalle en los niveles de gris.

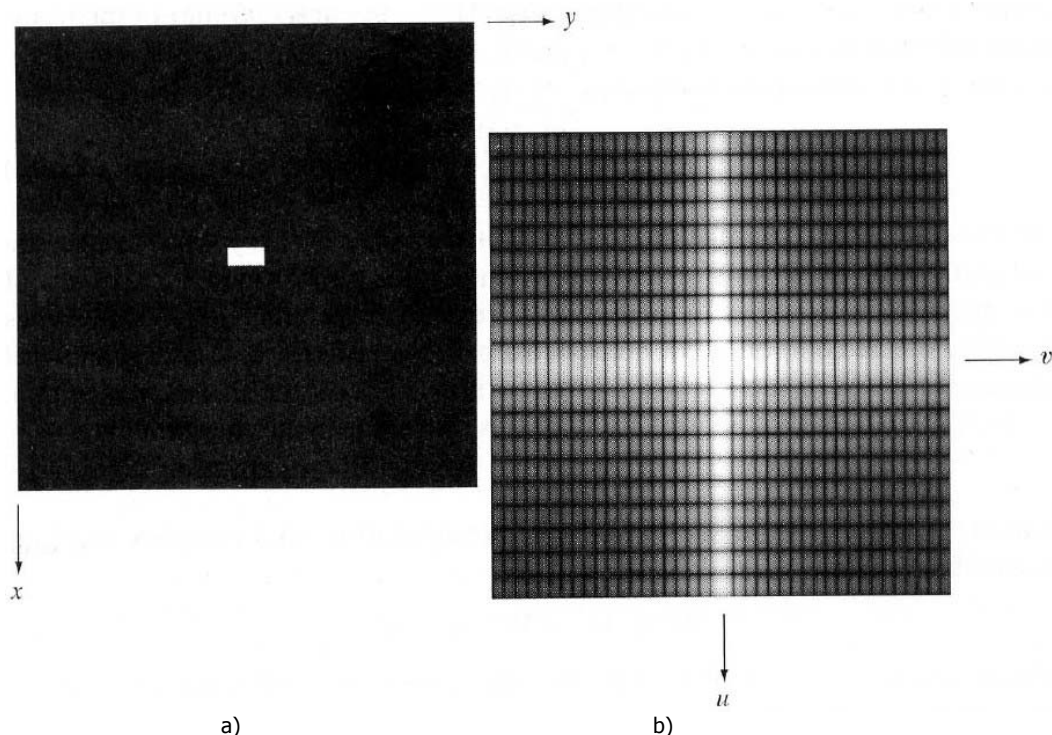


Figura 1: a) Imagen de un rectángulo de 20x40 sobre un fondo negro. b) Espectro de Fourier centrado (con la aplicación de una transformación logarítmica).

Algunas deducciones básicas del dominio de la frecuencia

Como la frecuencia está directamente relacionada con la velocidad de los cambios en el nivel de gris, es fácil asociar intuitivamente las frecuencias en la TDF con patrones en las variaciones de la intensidad del nivel de gris. Como mencionamos, la componente de frecuencia de variación más lenta ($u=v=0$) corresponde al promediado de los niveles de gris en la imagen. A medida que nos alejamos del origen de la transformada, la frecuencia

de las componentes va aumentando correspondiendo a variaciones en la intensidad cada vez más rápidas.

Procedimiento para filtrar en el dominio de la frecuencia

Para filtrar en el dominio de la frecuencia se deben seguir los siguientes pasos:

- i) Multiplicar la imagen de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformada, como lo indica la ecuación (2).
- ii) Calcular la TDF de la imagen, $F(u,v)$, mediante la ecuación (1).
- iii) Multiplicar $F(u,v)$ por una función $H(u,v)$ que actúe como filtro.
- iv) Calcular la TDF inversa del resultado hallado en (iii).
- v) Obtener la parte real del resultado de (iv).
- vi) Multiplicar el resultado de (v) por $(-1)^{x+y}$.

La razón por la que $H(u,v)$ actúa como filtro es que esta función elimina o atenúa ciertas frecuencias en la transformada y deja a otras sin cambios.

Consideremos que $f(x,y)$ es la imagen de entrada del paso (i) del procedimiento antes descrito, y $F(u,v)$ su transformada de Fourier. Entonces, la transformada de Fourier de la imagen filtrada está dada por:

$$G(u,v) = H(u,v).F(u,v)$$

La multiplicación de H y F involucra funciones bidimensionales, o sea, es el resultado de multiplicar elemento a elemento dos matrices. En general, los elementos de F son números complejos pero los filtros ($H(u,v)$) que se usan frecuentemente son reales. Estos filtros multiplican de igual forma la parte real y la imaginaria de los elementos de F y, por lo tanto, sólo modifican la magnitud de la transformada manteniendo invariable el argumento.

La imagen filtrada se obtiene aplicando la transformada inversa de Fourier a $G(u,v)$ y multiplicando el resultado por $(-1)^{x+y}$. Cuando la imagen $f(x,y)$ y el filtro $H(u,v)$ son reales, la transformada inversa de Fourier de $G(u,v)$ debería ser real, pero en la práctica no es así ya que existen componentes complejos parásitos que aparecen como consecuencia del error numérico computacional. Estos componentes deben ser ignorados (son despreciables pero pueden influir en cálculos posteriores).

Algunos filtros básicos

Filtro Notch

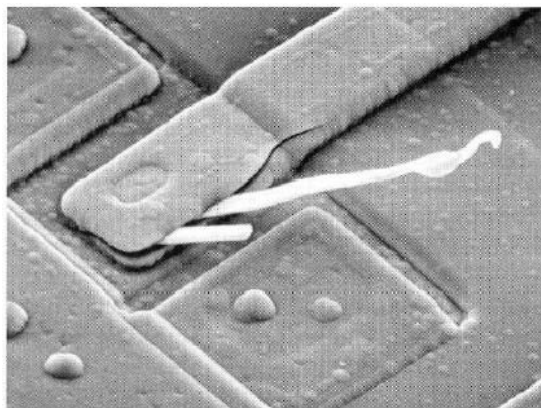
Supongamos que queremos poner a cero el nivel de gris promedio de una imagen. De acuerdo con la ecuación (3), el nivel de gris promedio de una imagen está dado por $F(0,0)$. Si hacemos que esta componente sea cero en el dominio de la frecuencia y calculamos la TDF inversa, entonces el nivel de gris promedio de la imagen resultante será cero. Consideremos ahora que hemos centrado la transformada según la ecuación (2). El procedimiento anterior de filtrado se realiza multiplicando $F(u,v)$ por la siguiente función filtro:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \Leftrightarrow (u, v) \neq (M/2, N/2) \end{cases}$$

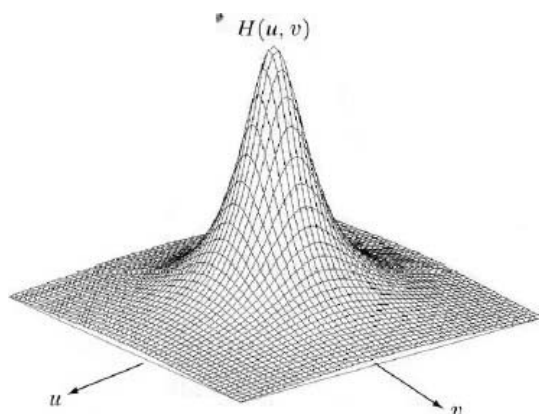
Los filtros notch son herramientas excepcionalmente útiles cuando es posible identificar efectos espaciales en la imagen causados por componentes de frecuencias específicos y localizados.

Como lo discutimos en el apunte de “*Filtrado Espacial*”, las frecuencias bajas en la TDF son responsables del nivel de gris general de las áreas suaves en una imagen, mientras que las frecuencias altas son responsables de los detalles (bordes y ruido). Un filtro que atenúa las altas frecuencias mientras que *deja pasar* las bajas lo denominábamos *filtro pasa-bajos*. Un filtro que tiene las características opuestas a las del anterior lo denominábamos *pasa-altos*.

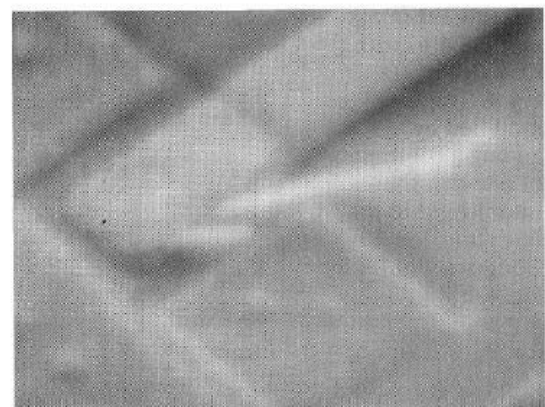
La figura 2 muestra los efectos del filtrado con un pasa-bajos y con un pasa-altos. Ambos filtros $H(u, v)$, figura 2 (b) y 2 (d), son circularmente simétricos. Como era de esperar, la imagen filtrada con el pasa-bajos de la figura 2 (b) que se exhibe en 2 (c) se ve que está suavizada o borronada con respecto a la original de la figura 2 (a). De igual forma, la imagen filtrada con el pasa-altos de la figura 2 (d) que se exhibe en 2 (e) muestra muy poca variación suave de nivel de gris que la original ($F(0, 0)$ fue forzada a cero) pero con mayor detalle en los bordes y las formas.



a)

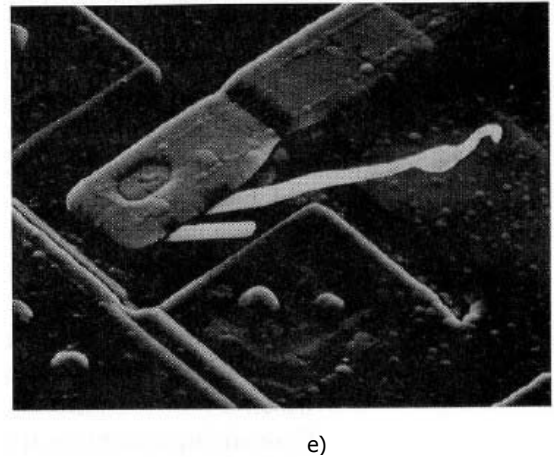
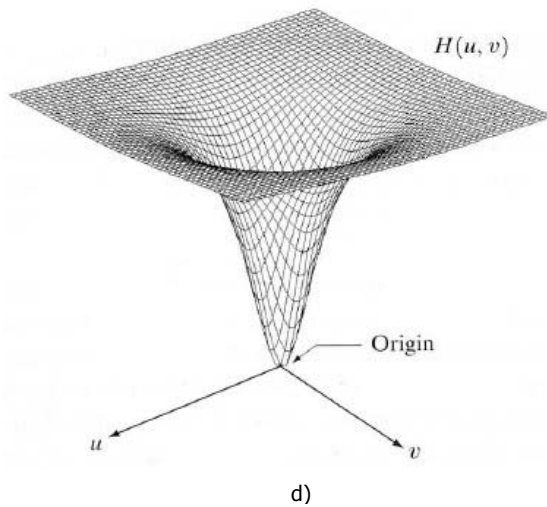


b)



c)

Figura 2: a) Imagen original. b) Filtro pasa-bajos bidimensional (espectro centrado). c) Resultado de filtrar la imagen (a) con el pasa-bajos (b). d) Filtro pasa-altos bidimensional (espectro centrado). e) Resultado de filtrar la imagen (a) con el pasa-altos (d).



Correspondencia entre el filtrado en el dominio del espacio y de la frecuencia Teorema de la convolución

En el apunte de “*Filtrado Espacial*” presentamos una expresión que utilizaríamos para calcular la convolución entre una imagen $f(x, y)$ de $M \times N$ y una máscara de $h(x, y)$ de $m \times n$. Es la siguiente:

$$g(x, y) = \sum_{i=-a}^a \sum_{j=-b}^b f(x+i, y+j) \cdot h(i, j) \quad a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$$

Ahora presentaremos la expresión más formal para la convolución discreta entre dos funciones $f(x, y)$ y $h(x, y)$ de tamaño $M \times N$ denotada por $f(x, y) * h(x, y)$:

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(x-m, y-n) \cdot h(m, n) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h(x-m, y-n)$$

Con la excepción de los límites de la sumatoria, el signo menos y la constante, esta expresión es similar a la dada en el apunte anterior. En particular, el signo menos lo que hace es reflejar f o h sobre su origen; es algo inherente en la definición de convolución.

Si $F(u, v)$ y $H(u, v)$ denotan la TDF de $f(x, y)$ y $h(x, y)$, respectivamente, una parte del teorema de la convolución establece que la convolución $f(x, y) * h(x, y)$ y el producto $F(u, v)H(u, v)$ son un par transformado de Fourier, esto es

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

O sea que la convolución espacial de $f(x, y)$ con $h(x, y)$ puede obtenerse calculando la TDF inversa del producto $F(u, v)H(u, v)$. La otra parte del teorema establece que el producto $f(x, y)h(x, y)$ y la convolución $F(u, v) * H(u, v)$ constituyen también un par transformado de Fourier, esto es,

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

Filtros Ideales

Pasa-bajos

El filtro pasa-bajos más simple que podemos imaginar es aquel que elimina todas las componentes de alta frecuencia de la transformada de Fourier que se encuentren a una distancia D_0 del origen del espectro (centrado). Este filtro está dado por

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \Leftrightarrow D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

donde D_0 es un número no negativo (a veces llamado *frecuencia de corte*) y $D(u, v)$ es la distancia del punto (u, v) al centro del espectro. Debido a que, como mencionamos anteriormente en este apunte, es más práctico trabajar con un espectro centrado (la frecuencia cero de la TDF en el centro), el centro del espectro está dado por $(u, v) = (M/2, N/2)$.

El nombre de *filtro ideal* se debe a que todas las frecuencias que se encuentran en el interior del círculo de radio D_0 ‘pasan’ sin atenuación mientras que las que se encuentran fuera del círculo son completamente atenuadas. Como se sabe, los filtros ideales no pueden realizarse físicamente mediante componentes electrónicos, pero sí pueden ser implementados en una computadora.

Pasa-altos

El filtro pasa-altos ideal es el opuesto al pasa-bajos ideal en el sentido de que el primero fuerza a cero todas aquellas frecuencias interiores al círculo de radio D_0 mientras ‘deja pasar’ sin atenuación a aquellas que se encuentren afuera. Su definición es la siguiente:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \Leftrightarrow D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Los filtros ideales tienen características que generalmente son contraproducentes. Un ejemplo de esto son las oscilaciones indeseadas que aparecen en la imagen filtrada. Estos efectos son conocidos como **ringing** en el idioma inglés. La figura 3 ilustra lo comentado en este párrafo.

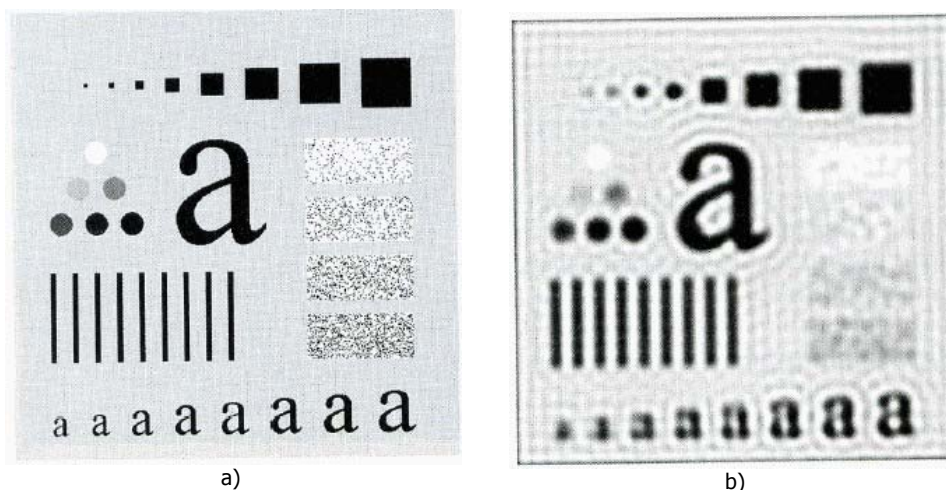


Figura 3: a) Original. b) Resultado de filtrar la imagen original con un pasa-bajos ideal con $D_0 = 30$. Aquí se puede ver el efecto conocido como *'ringing'* (oscilaciones).

Filtro Butterworth

Pasa-bajos

La función de transferencia de un filtro Butterworth pasa-bajos de orden n , y con una frecuencia de corte a una distancia D_0 del origen, está definida por

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

En la figura 4 (a) se puede ver la forma de un filtro Butterworth pasa-bajos, en la 4 (b) se muestra al filtro como una imagen, mientras que en la 4 (c) se presenta el perfil del filtro Butterworth para distintos n .

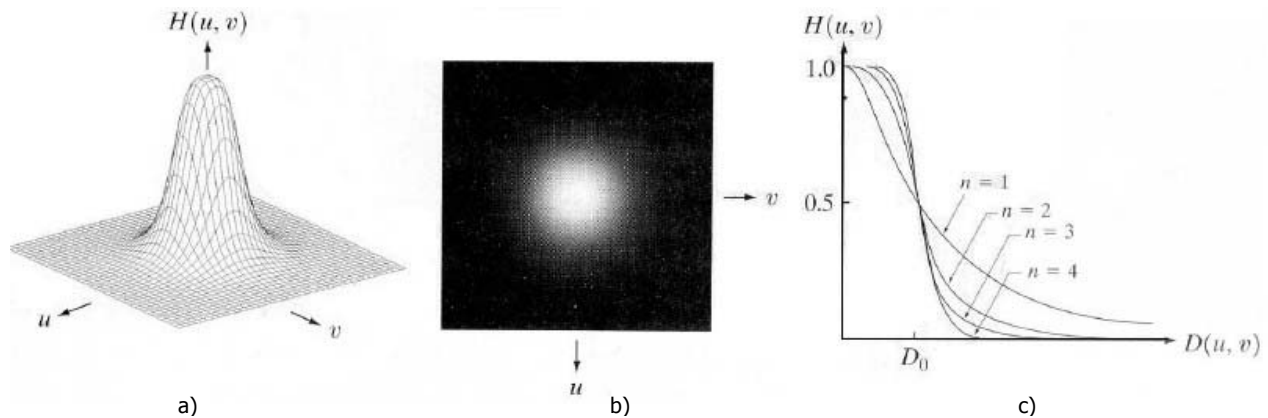


Figura 4: a) Perspectiva de un Butterworth pasa-bajos. b) El filtro mostrado como una imagen. c) Perfil del filtro para distintos n .

A diferencia del filtro ideal pasa-bajos, la función de transferencia del filtro Butterworth no tiene una discontinuidad evidente que establezca una frecuencia de corte bien determinada. Para aquellos filtros que tienen una función transferencia continua (o suavizada) es común definir una frecuencia de corte en un punto tal que $H(u, v)$ esté por debajo de una cierta fracción de su máximo. En el caso del filtro Butterworth, $H(u, v)=0.5$ (50% de su máximo valor, o sea, 1) cuando $D(u, v)=D_0$.

Para $n=1$, el filtro Butterworth no presenta oscilaciones; para $n=2$, las oscilaciones son casi imperceptibles; mientras que para $n>2$, los filtros Butterworth presentan oscilaciones indeseadas. Si bien se utilizan diferentes n para el cálculo del filtro Butterworth, el de segundo orden ($n=2$) es el que generalmente se elige ya que tiene un buen compromiso entre un filtrado pasa-bajos efectivo y oscilaciones de intensidad aceptable.

Pasa-altos

La función de transferencia de un filtro Butterworth pasa-altos de orden n , y con una frecuencia de corte a una distancia D_0 del origen, está definida por

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Filtros basados en funciones Gaussianas

Este tipo de filtro es de particular importancia ya que su forma está fácilmente especificada y porque tanto su TDF como su TDF inversa son funciones Gaussianas reales.

Filtro Gaussiano Pasa-bajos

La forma de este filtro está dada por:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2 \cdot \sigma^2} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2}$$

donde $D(u, v)$ es la distancia al origen del punto (u, v) (asumiendo que se ha centrado la transformada). Como vemos, este tipo de filtro tiene su máximo en $(0, 0)$ que es 1, y luego su valor comienza a disminuir según la función Gaussiana cuya dispersión (o apertura) está dada por la constante σ . Una expresión más familiar del filtro Gaussiano es aquella en donde aparece la frecuencia de corte D_0 :

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2 \cdot D_0^2} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2}$$

Cuando $D(u, v) > D_0$, los valores del filtro están por debajo del 60,7% de su máximo.

Otra de las particularidades del filtro Gaussiano es que la TDF inversa de este tipo de filtro no presenta los efectos conocidos como *ringing*, algo que sí sucedía para el caso de los filtros Butterworth (para $n > 1$).

Filtro Gaussiano Pasa-altos

La función transferencia del filtro Gaussiano pasa-altos con frecuencia de corte ubicada a una distancia D_0 del origen está dada por la siguiente expresión:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2 \cdot D_0^2} \quad D(u, v) = \sqrt{(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2}$$

Filtrado Homomórfico

Una imagen $f(x, y)$ puede expresarse como el producto de la iluminación y los componentes de reflectancia (la reflectancia es una función que depende de las características de reflexión de un objeto, vale 0 para las superficies totalmente opacas y 1 para aquellas que reflejan toda la luz que incide sobre ellas):

$$f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$$

donde $i(x, y)$ denota la iluminación y $r(x, y)$ la reflectancia.

El modelo iluminación-reflectancia recién descripto puede usarse para desarrollar un procesamiento en el dominio de la frecuencia que mejore la apariencia de una imagen por medio de la compresión del nivel de gris y del realce del contraste.

La expresión anterior no se puede usar directamente para operar separadamente sobre los componentes de frecuencia de la iluminación y la reflectancia debido a que la transformada de Fourier de dos funciones no es separable. Es decir,

$$TDF \{f(x, y)\} \neq TDF \{i(x, y)\} \cdot TDF \{r(x, y)\}$$

Supongamos, sin embargo, que definimos

$$z(x, y) = \ln[f(x, y)] = \ln[i(x, y)] + \ln[r(x, y)]$$

Entonces

$$TDF \{z(x, y)\} = TDF \{\ln[f(x, y)]\} = TDF \{\ln[i(x, y)]\} + TDF \{\ln[r(x, y)]\}$$

O

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

donde $F_i(u, v)$ y $F_r(u, v)$ son la transformada de Fourier de $\ln[i(x, y)]$ y $\ln[r(x, y)]$, respectivamente.

Si filtramos $Z(u, v)$ por medio de una función $H(u, v)$, como lo veníamos haciendo, entonces

$$S(u, v) = H(u, v) \cdot Z(u, v) = H(u, v) \cdot F_i(u, v) + H(u, v) \cdot F_r(u, v)$$

donde $S(u, v)$ es la transformada de Fourier del resultado. En el dominio espacial,

$$s(x, y) = TDFI \{S(u, v)\} = TDFI \{H(u, v) \cdot F_i(u, v)\} + TDFI \{H(u, v) \cdot F_r(u, v)\} \quad (4)$$

donde $TDFI$ representa la transformada (discreta) de Fourier inversa. Si ahora suponemos que

$$i'(x, y) = TDFI \{H(u, v) \cdot F_i(u, v)\} \quad r'(x, y) = TDFI \{H(u, v) \cdot F_r(u, v)\}$$

la ecuación (4) se puede expresar de la siguiente forma

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

Finalmente, dado que $z(x, y)$ se definió tomando el logaritmo de la imagen original $f(x, y)$, la operación inversa, o sea, la exponencial, nos dará como resultado la imagen realzada (filtrada), $g(x, y)$; esto es

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)} \cdot e^{r'(x, y)} = i_0(x, y) \cdot r_0(x, y)$$

donde

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)} \quad r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$

son la componente de iluminación y reflectancia de la imagen resultante, respectivamente.

La componente de iluminación de una imagen generalmente está caracterizada por variaciones espaciales lentas, mientras que la componente de reflectancia tiende a variar abruptamente, en particular, en las uniones de objetos disímiles. Estas características permiten asociar las bajas frecuencias de la transformada de Fourier del logaritmo de una imagen con la iluminación y las altas frecuencias con la reflectancia. Aunque esta relación es una aproximación, puede utilizarse como ventaja en el realce de imagen.

Con un filtro homomórfico se puede ganar mucho control sobre la componente de iluminación y reflectancia. Este control requiere la especificación de un filtro $H(u, v)$ que afec-

te las bajas y las altas frecuencias de diferente forma. La figura 5 muestra la sección de un filtro homomórfico. Si los parámetros γ_L y γ_H se eligen de manera que $\gamma_L < 1$ y $\gamma_H > 1$, el filtro mostrado en la figura 5 tiende a disminuir la contribución hecha por las bajas frecuencias (iluminación) y a aumentar la contribución hecha por las altas frecuencias (reflectancia). El resultado de esto es la compresión del rango dinámico y el realce del contraste.

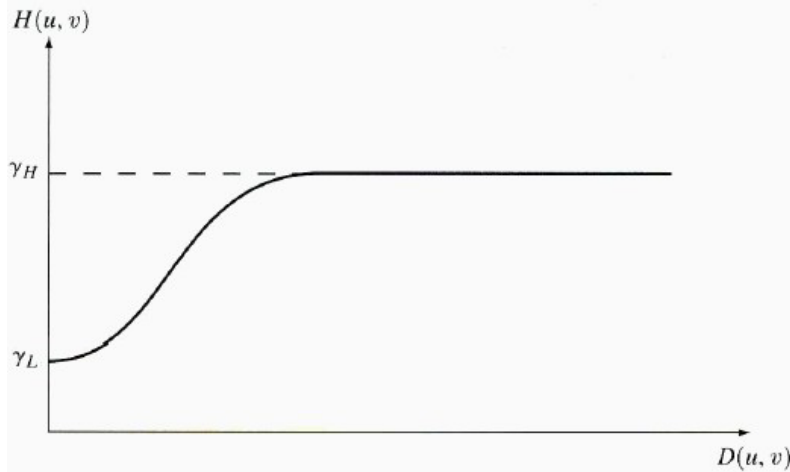


Figura 5: Perfil de un filtro circularmente simétrico. $D(u, v)$ es la distancia al origen (transformada centrada).

La curva de la figura 5 puede aproximarse usando la expresión básica de cualquiera de los filtros pasa-altos presentados anteriormente. Por ejemplo, usando una forma ligeramente modificada del filtro Gaussiano dada por

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \cdot \left(1 - e^{-c \cdot (D^2(u, v) / D_0^2)}\right) + \gamma_L$$

donde $D(u, v)$ es la distancia al origen de la transformada (centrada) y la constante c fue introducida para controlar la pendiente del filtro en la transición de γ_L a γ_H .

Referencias

Digital Image Processing Second Edition, Rafael C. Gonzalez – Richard E. Woods, capítulo 4

Apéndice

A continuación se presentarán algunos algoritmos hechos en scripts de Matlab para procesar una imagen en el dominio de la frecuencia.

Comencemos mostrando cómo sería un algoritmo que calcule la transformada discreta de Fourier. Para ello, usaremos una imagen de tamaño chico dado que el cálculo de la TDF para las imágenes grandes puede llevar algunos minutos.

```
A=fix(255*rand(20));
[f,c]=size(A);

for u=1:f
    for v=1:c
        FA(u,v)=0;
        for x=1:f
            for y=1:c
                FA(u,v)=FA(u,v) + A(x,y)*exp( -j*2*pi*(u*x/f + v*y/c) );
            end
        end
    end
end
FA=fftshift(FA); % Colocamos la frecuencia cero en el centro del espectro

figure, mesh(abs(log(FA+1)))
title('Transformada Discreta de Fourier (algoritmo propio)')
```

Comparemos el resultado obtenido con el que nos brinda la función **fft2** de Matlab:

```
FA_mat=fft2(A);
FA_mat=fftshift(FA_mat); % Colocamos la frecuencia cero en el centro del
                        % espectro
figure, mesh(abs(log(FA_mat+1)))
title('Transformada Discreta de Fourier (funcion de Matlab "fft2")')
```

Para centrar la TDF hemos utilizado la función de Matlab **fftshift**. Esta misma tarea se podría realizar con un algoritmo propio, de la siguiente forma:

```
for i=1:f
    for j=1:c
        Aaux(i,j)=A(i,j)*(-1)^(i+j);
    end
end
```

Los resultados serían los mismos.

Veamos, ahora, una de las maneras en que se puede proceder para filtrar una imagen con un pasa-bajos ideal.

```
A=double(imread('circuit.tif','tif'));
[f,c]=size(A);
```

```
% Calculo la transformada discreta de Fourier (DFT)
DFT_A=fft2(A);

% Centro el espectro
DFT_A=fftshift(DFT_A);

% Construyo un filtro ideal pasabajos
D0=f/2/15;
PasabajosIdeal=zeros(f,c);
for i=1:f
    for j=1:c
        D=sqrt((i-f/2)^2+(j-c/2)^2);% Determino la distancia al centro del
                                   % punto (i,j)
        if D<D0
            PasabajosIdeal(i,j)=1;
        end
    end
end

% Multiplico la transformada de la imagen por el filtro ideal
DFT_A_filtrada=DFT_A.*PasabajosIdeal; % Multiplico elemento a elemento

% Aplico la DFT inversa
A_filtrada=ifft2(DFT_A_filtrada);

% Tomo el modulo para descartar cualquier residuo de tipo complejo
A_filtrada=abs(A_filtrada);

figure, imshow(uint8(A))
title('Imagen original')

figure, mesh(abs(log(DFT_A+1)))
title('Espectro de la imagen original')

figure, mesh(abs(log(DFT_A_filtrada+1)))
title('Espectro de la imagen filtrada')

figure, imshow(uint8(A_filtrada))
title('Imagen filtrada')

figure, imshow(PasabajosIdeal)
title('Filtro pasabajos ideal')
```