Números Complejos

Circuitos eléctricos en corriente alterna

Lección 2

edX | Galileo UNIVERSIDAD

La Revolución en la Educación

Números Complejos

- Un número complejo es representado como la suma de un número real y un número imaginario.

$$W = a + ib$$

  - Donde:
    - a es un número real
    - b es un número real
    - i es igual a $\sqrt{-1}$, es la unidad imaginaria

- Por lo tanto a es la parte real, y b es la parte imaginaria.
  - $Re(W) = a$
  - $Im(W) = b$

Números Complejos

- En circuitos eléctricos la letra i se utiliza para representar la corriente eléctrica por lo tanto en este curso la unidad imaginaria será representada con la letra j.

$$W = a + jb$$

Números Complejos

- Un número complejo puede ser representado de dos formas, en su forma rectangular en el plano cartesiano, y en su forma polar:

$$W = a + jb \text{ (Rectangular)}$$

$$W = |W|\angle\theta \text{ (Polar)}$$

- $|W|$ es la magnitud o módulo del vector, y θ es su ángulo en grados.

Ejemplo

Los siguientes son números complejos:

a) $3 + j7$

b) $2 - j8$

c) 99 (en este caso, la parte imaginaria es cero)

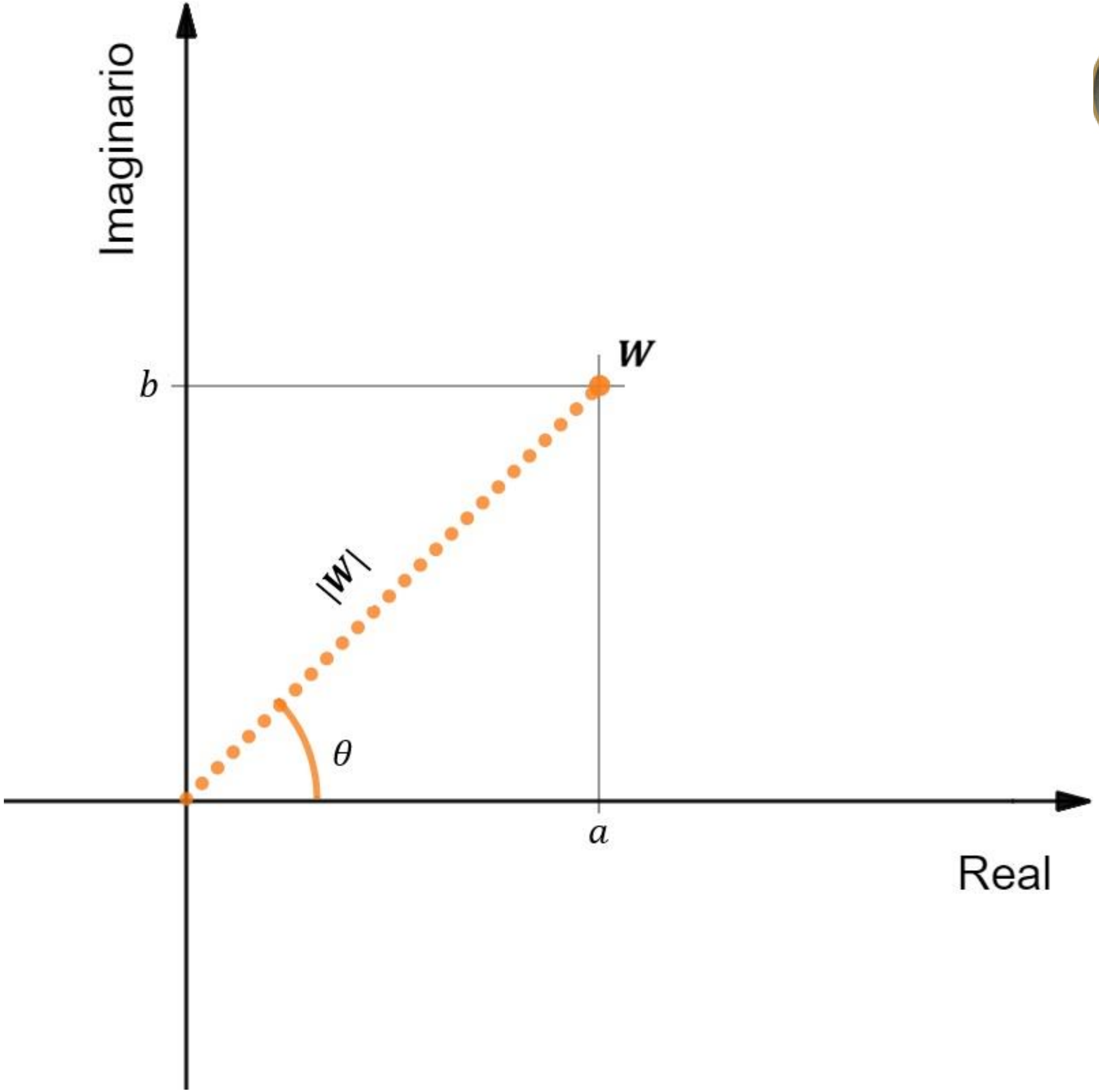
d) $j15$ (en este caso, la parte real es cero)

e) $15\angle 80°$

f) $70\angle \text{-}40°$

Plano Complejo

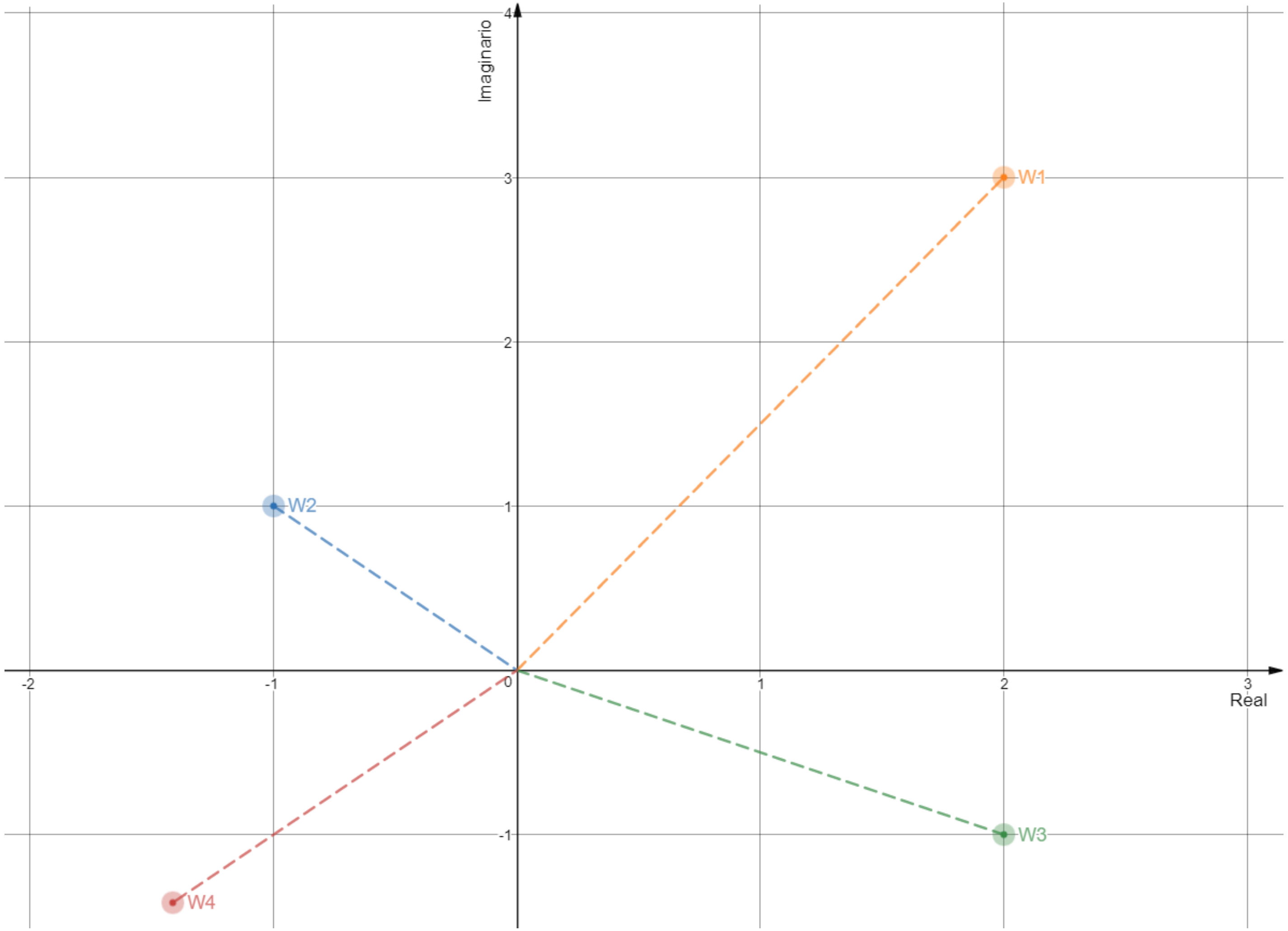
- Los números complejos típicamente se representan gráficamente.
- El plano complejo es un plano cartesiano en el cual:
  - El eje de las abscisas o eje X es el eje de la parte real (a),
  - El eje de las ordenadas o eje Y es el eje de la parte imaginaria (b).


Imaginario
W
b
|W|
θ
a
Real

Ejemplo

- Graficar los siguientes números complejos:

- $W_1 = 2 + j3$
- $W_2 = -1 + j$
- $W_3 = 2 - j$
- $W_4 = 2\angle\text{-}135°$



Conversión entre Formas

- Para convertir de forma Polar a Rectangular y viceversa se pueden utilizar operaciones trigonométricas, ya que en el plano complejo como se pudo observar se forma un triángulo.

Conversión entre formas

Rectangular a Polar

- Necesitamos encontrar el valor de $|W|$ y θ, a partir de las coordenadas rectangulares a (cateto adyacente) y b(cateto opuesto).

- Por el teorema de Pitágoras:

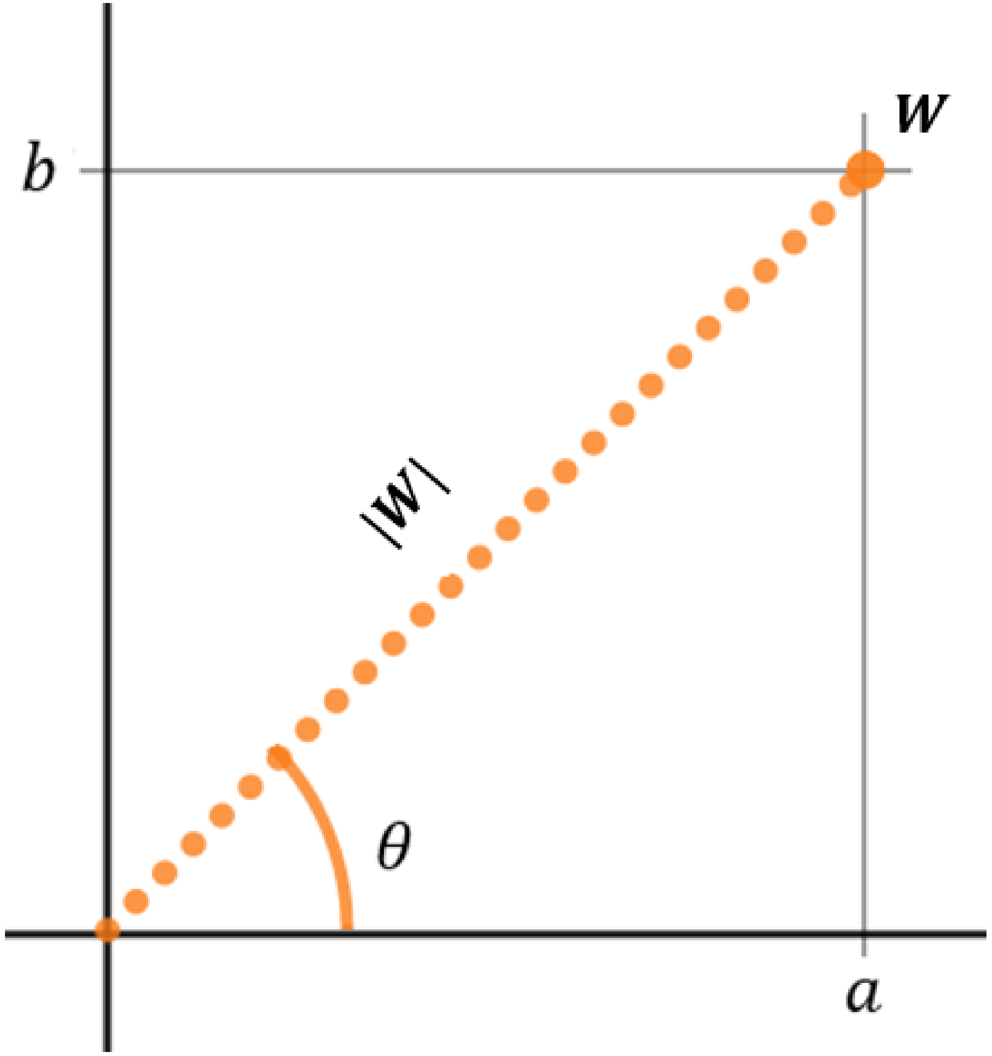
$$|W|^2 = a^2 + b^2$$

$$|W| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Razón trigonométrica de la Tangente:

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

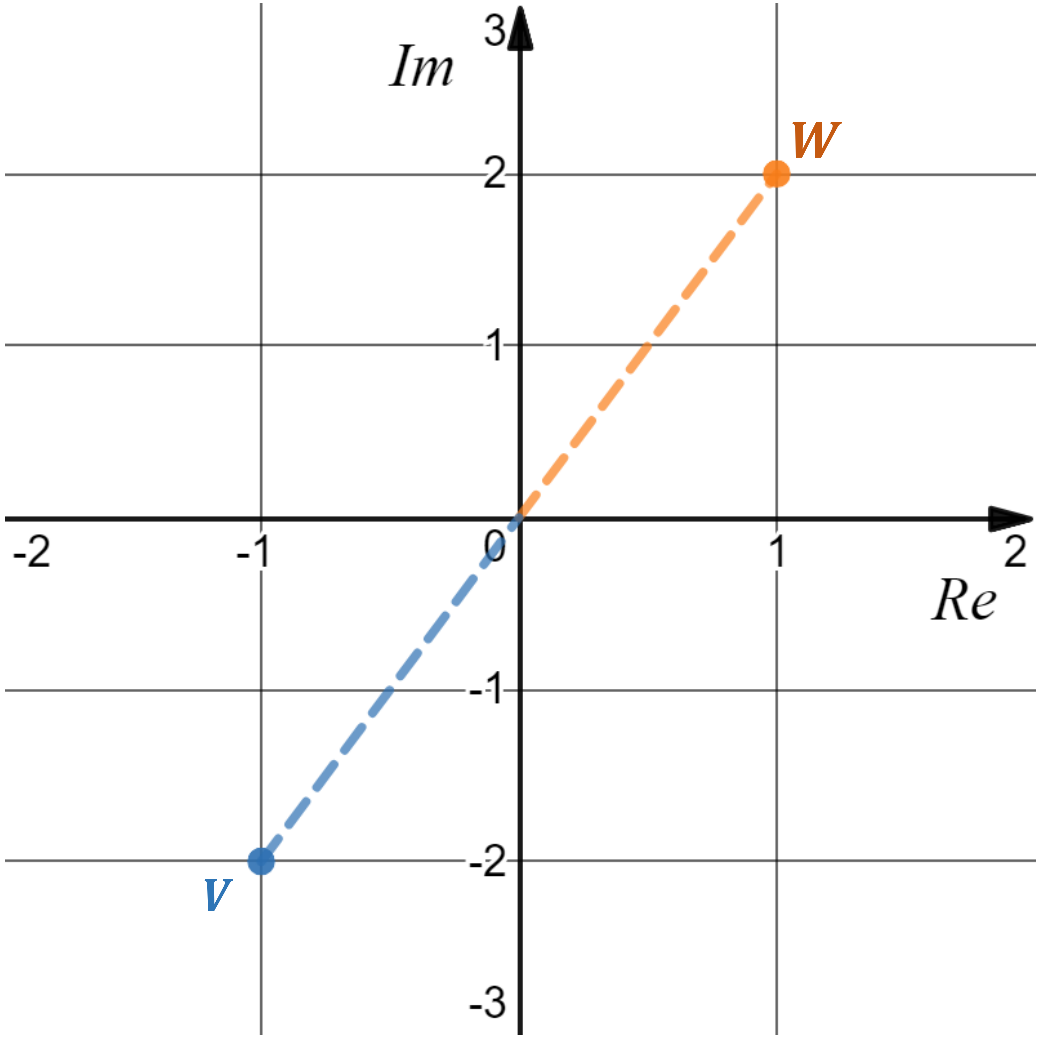
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



Conversión entre formas

- Existe un problema con la operación $\tan^{-1}$. Para explicar este problema supongamos dos números complejos $W = 1 + j2$ y $V = -1 - j2$. Como podemos W está en el primer cuadrante y V en el tercer cuadrante.

- El ángulo de W y V serían:
  - $\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4°$
  - $\tan^{-1}\left(\frac{-2}{-1}\right) = 63.4°$



Conversión entre formas

- Para el número complejo W (primer cuadrante) el resultado es correcto pero como vemos el ángulo de V debería ser mayor a 180°, por lo tanto al ángulo resultante para V hay que sumarle 180°.

  - Ángulo de W

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4°$$

  - Ángulo de V

$$\tan^{-1}\left(\frac{-2}{-1}\right) + 180° = 243.4°$$

Ángulos Negativos

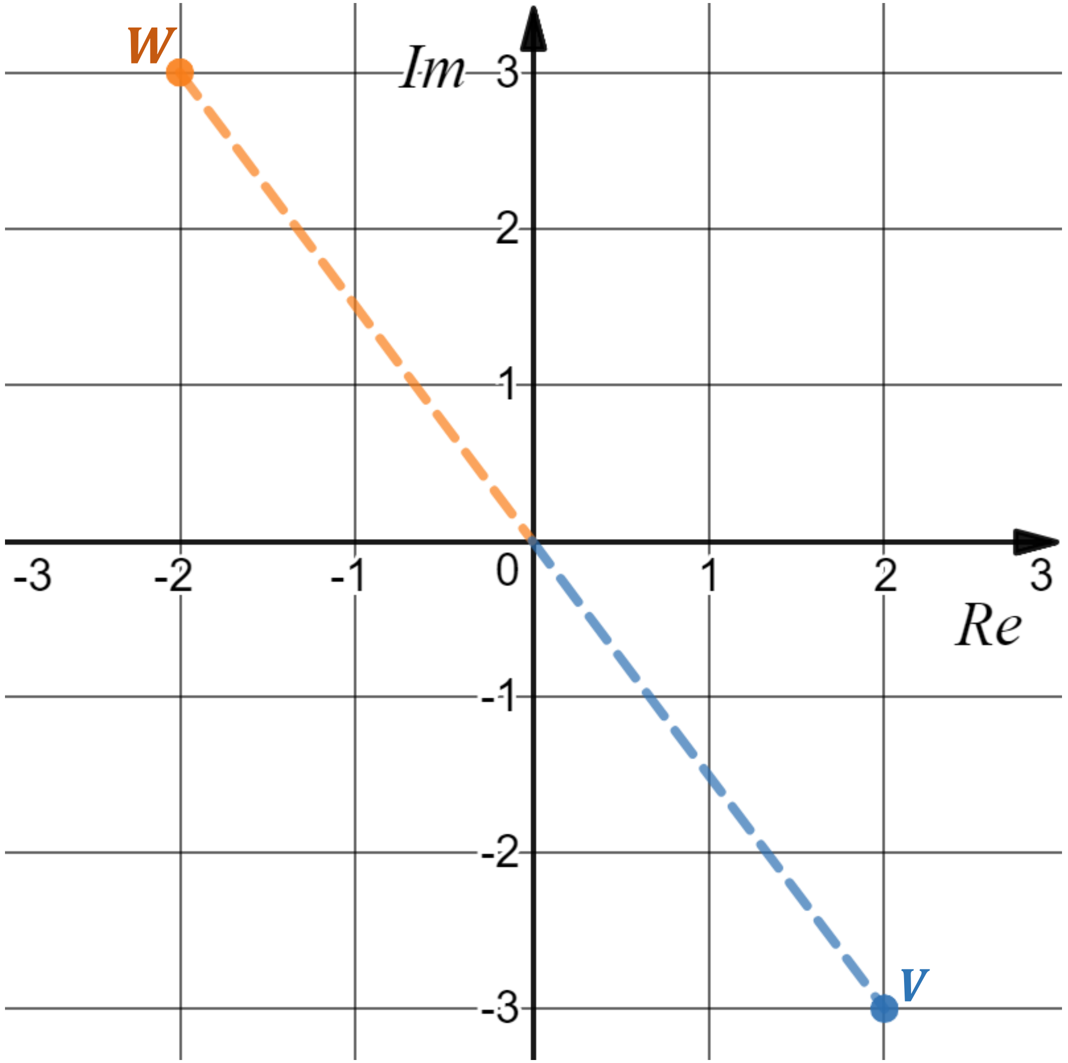
- Los ángulos mayores que 180° se pueden expresar como negativos, restándoles 360 °.
- En nuestro ejemplo:
  - Ángulo de V

$$\tan^{-1}\left(\frac{-2}{-1}\right) + 180° - 360° = 243.4° - 360° = -116.6°$$

Conversión entre formas

- El mismo problema sucede para el segundo y cuarto cuadrante. Ahora supongamos que:
  - $W = -2 + j3$
  - $V \;=\; \;\;2 - j3$

- El ángulo de W y V serían:
  - $\tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) = -56.3°$
  - $\tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) = -56.3°$



Conversión entre formas

- Para el número complejo V (cuarto cuadrante) el resultado es correcto pero como vemos el ángulo de W no coincide con lo que vemos en la gráfica. Para encontrar el ángulo correcto para W hay que sumarle al resultado 180°, por lo tanto:

  - Ángulo de W

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) + 180° = 123.7°$$

  - Ángulo de V

$$\tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) = -56.3°$$

Conversión entre formas

- Si se está usando alguna calculadora científica o programas para resolver este tipo de operaciones la solución sería usar atan2.

- Esta operación si reconoce en que cuadrante se está trabajando por lo tanto devuelve el ángulo correcto.

Ejemplo

- Convertir el número rectangular $\text{W} = 4 + j6$ a su forma polar empleando 3 cifras de detalle, que será el estándar en este curso.

  - $|W| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.21$

  - $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{4}\right) = 56.3°$

$$W = 7.21\angle 56.3°$$

Conversión entre Formas

- Polar a Rectangular
  - Necesitamos encontrar el valor de a (parte real) y b(parte imaginaria), a partir de las coordenadas polares $|W|$ (hipotenusa) y θ(ángulo).
  - Razón trigonométrica del coseno:

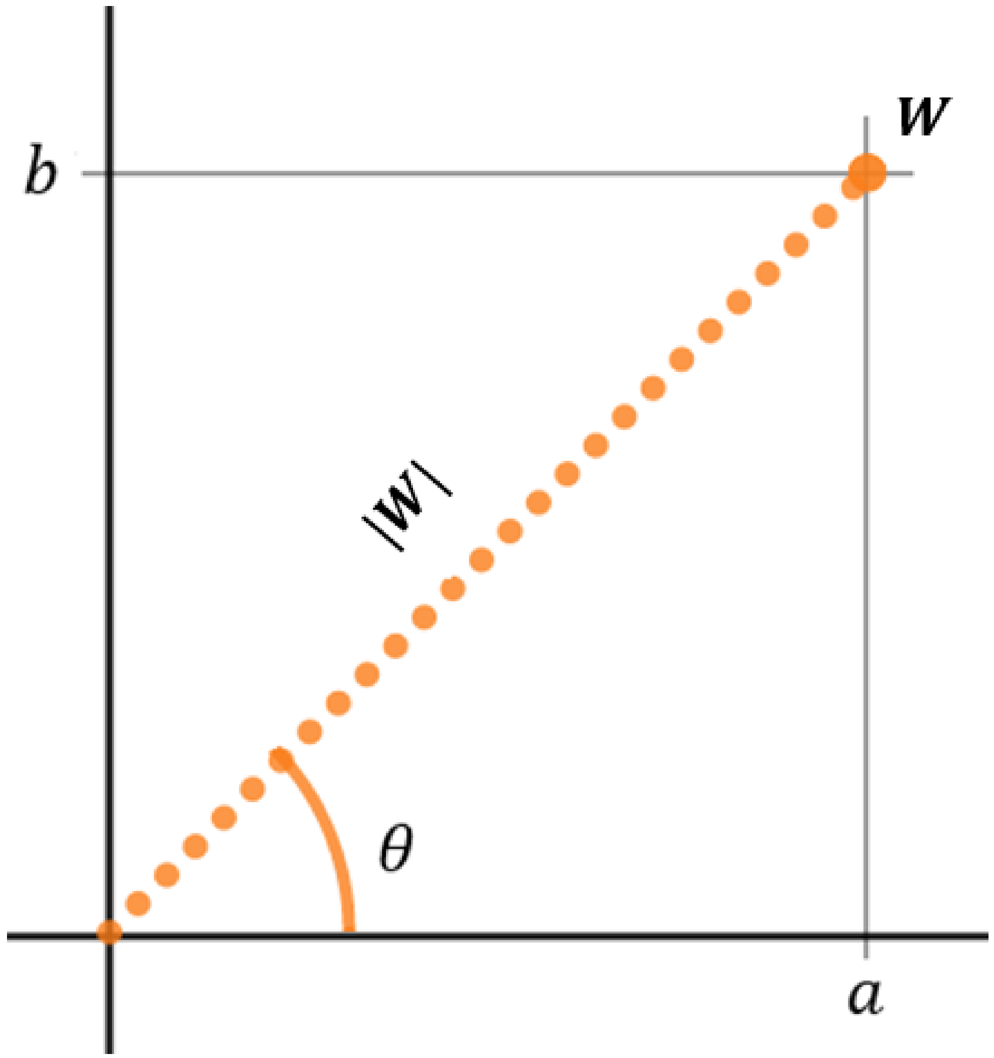
$$\cos\theta = \frac{a}{|W|}$$

$$Re(W) = a = |W|\cos\theta$$

  - Razón trigonométrica del seno:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|W|}$$

$$Im(W) = b = |W|\operatorname{sen}\theta$$



Ejemplo

- Convertir el número en polar $W = 2\angle -135°$ a su forma rectangular.

  - Parte Real

$$Re(W) = 2\cos(-135°) = (2)(-0.707) = -1.41$$

  - Parte Imaginaria

$$Im(W) = 2\,\mathrm{sen}(-135°) = (2)(-0.707) = -1.41$$

$$W = -1.41 - j1.41$$

Operaciones con número complejos

- Conjugado de un número complejo
  - Si $W = a + jb$ entonces el conjugado de W sería:

$$W^* = a \ - jb$$

    en forma rectangular cambiamos el signo de la parte imaginaria.

  - Si $W = |W|\angle\theta$ entonces el conjugado de W sería:

$$W^* = |W|\angle -\theta$$

    en forma polar cambiamos el signo del ángulo.

Ejemplo

Conjugar los siguientes número complejos

- $W_1 = -3 + j7$
- $W_2 = -2 - j4$
- $W_3 = 18\angle 95°$
- $W_4 = 35\angle -10°$

- $W_1^* = -3 - j7$
- $W_2^* = -2 + j4$
- $W_3^* = 18\angle -95°$
- $W_4^* = 35\angle 10°$

Operaciones Aritméticas con Números Complejos

- Suma:
  - Si los números complejos están en forma rectangular la suma se realiza de una forma más sencilla.

  - Suponga $W = a + jb$ y $V = c + jd$ entonces,

$$W + V = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

  - Sumamos partes reales y partes imaginarias por separado.

Ejemplo

- $W_1 = 2 + j3$
- $W_2 = 1 + j4$
- $W_3 = 3 - j6$

- $W_1 + W_2 = (2 + j3) + (1 + j4) = (2 + 1) + j(3 + 4) = 3 + j7$

- $W_1 + W_3 = (2 + j3) + (3 - j6) = (2 + 3) + j(3 - 6) = 5 - j3$

Operaciones Aritméticas con Números Complejos

- Resta:
  - Si los números complejos están en forma rectangular la resta se realiza de una forma más sencilla, como en el caso de la suma.
  - Suponga $W = a + jb$ y $V = c + jd$ entonces,

$$W - V = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

  - Restamos partes reales y partes imaginarias por separado.

Ejemplo

- $W_1 = 2 + j3$
- $W_2 = 1 + j4$
- $W_3 = 3 - j6$

- $W_1 - W_2 = (2 + j3) - (1 + j4) = (2 - 1) + j(3 - 4) = 1 - j$

- $W_2 - W_3 = (1 + j4) - (3 - j6) = (1 - 3) + j\big(4 - (-6)\big) = -2 + j10$

Operaciones Aritméticas con Números Complejos

- Multiplicación:
  - Si los números complejos están en forma polar la multiplicación se realizará de una forma más sencilla.
  - Suponga $W = |W|\angle\theta$ y $V = |V|\angle\phi$ entonces,

$$WV = (|W|\angle\theta)(|V|\angle\phi) = |W||V|\angle(\theta + \phi)$$

  - Se multiplican los módulos y se suman los ángulos.

Ejemplo

- $W_1 = 8\angle 29°$
- $W_2 = 6\angle 30°$
- $W_3 = 3\angle -55°$

- $W_1 W_2 = (8\angle 29°)(6\angle 30°) = (8)(6)\angle 29° + 30° = 48\angle 59°$

- $W_2 W_3 = (6\angle 30°)(3\angle -55°) = (6)(3)\angle 30° + (-55°) = 18\angle -25°$

Operaciones Aritméticas con Números Complejos

- División:
  - Si los números complejos están en forma polar la división se realizará de una forma más sencilla, al igual que la multiplicación.
  - Suponga $W = |W|\angle\theta$ y $V = |V|\angle\phi$ entonces,

$$\frac{W}{V} = \frac{|W|\angle\theta}{|V|\angle\phi} = \frac{|W|}{|V|}\angle(\theta - \phi)$$

  - Se dividen los módulos y se restan los ángulos (ángulo del numerador menos denominador).

Ejemplo

- $W_1 = 2\angle 15°$
- $W_2 = 6\angle 94°$
- $W_3 = 4\angle -105°$

- $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{(6\angle 94°)}{(2\angle 15°)} = \dfrac{6}{2}\angle 94° - 15° = 3\angle 79°$

- $\dfrac{W_3}{W_1} = \dfrac{(4\angle -105°)}{(2\angle 15°)} = \dfrac{4}{2}\angle -105° - 15° = 2\angle -120°$

Descargo de responsabilidad

La información contenida en esta presentación (en formato ppt) es un reflejo del material virtual presentado en la versión online del curso. Por lo tanto, sus textos, gráficos, links de consulta, acotaciones y comentarios son responsabilidad exclusiva de su(s) respectivo(s) autor(es) y su contenido no compromete a edX o a la Universidad Galileo.

Edx y Universidad Galileo no asumen responsabilidad alguna por la actualidad, exactitud, obligaciones de derechos de autor, integridad o calidad de los contenidos proporcionados y se aclara que la utilización de esta presentación se encuentra limitada de manera expresa para los propósitos educativos del curso.