

Tema 3

Sistemas Trifásicos

Damián Laloux, 2003

Índice

- ❑ Definiciones y diagramas vectoriales
 - Sistema trifásico equilibrado
 - Secuencia de fases
 - Conexión en estrella
 - ❑ Tensiones de fase (simples), corrientes de fase (de línea)
 - Conexión en triángulo
 - ❑ Tensiones compuestas (de línea), corrientes de rama
- ❑ Teorema de Kennelly:
 - Equivalencia estrella-triángulo
- ❑ Circuito monofásico equivalente
- ❑ Conexión estrella-triángulo estandarizada
- ❑ Potencia en sistemas trifásicos

Índice (y II)

- ❑ Red infinita con carga desequilibrada
 - Concepto de red infinita
 - Carga desequilibrada en triángulo
 - Carga desequilibrada en estrella
- ❑ Medida de potencias y energía trifásicas
 - Métodos de medida de potencia activa
 - ❑ Un vatímetro (tetrafilar y trifilar)
 - ❑ Dos vatímetros (Aron)
 - ❑ Tres vatímetros (tetrafilar y trifilar)
 - Medida de reactiva
 - Medida de energía
- ❑ Comparación entre el transporte en monofásica y en trifásica

Definición

- ❑ Un sistema trifásico equilibrado de tensiones (corrientes) está formado por:

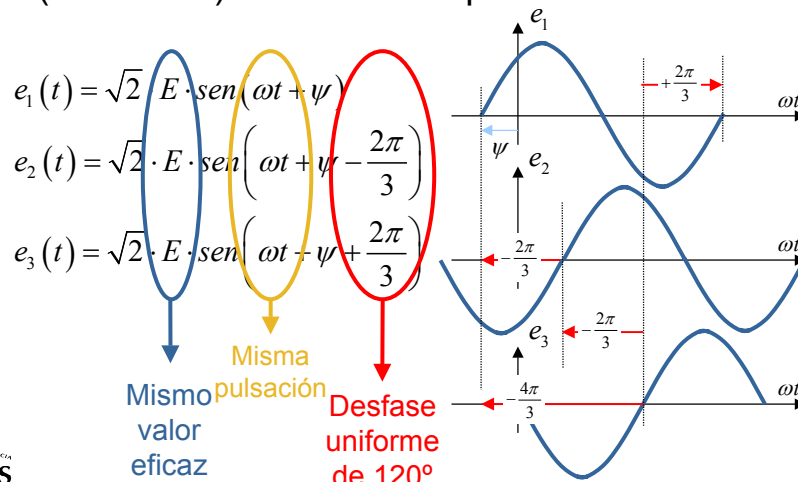
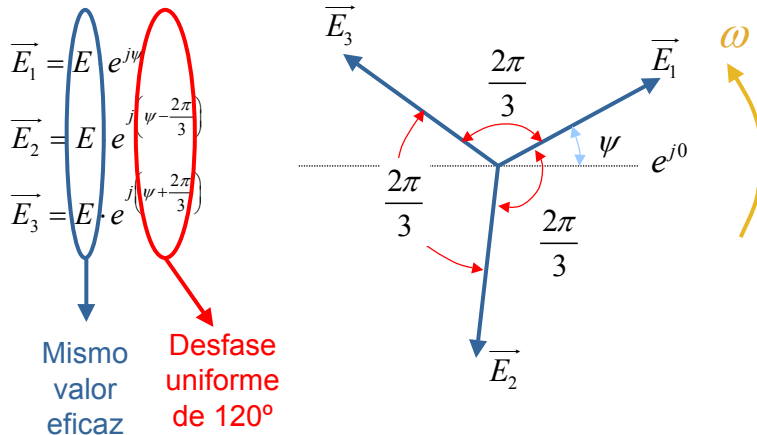


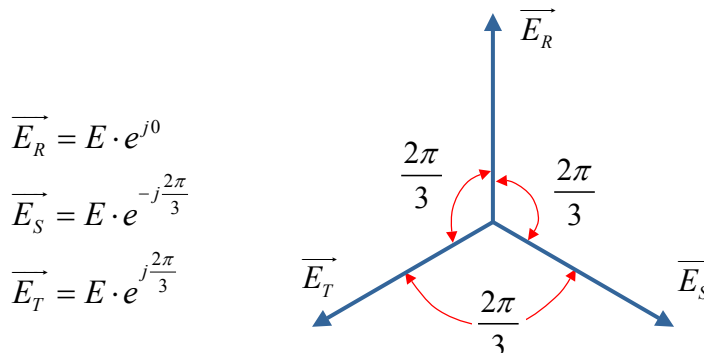
Diagrama vectorial

- Un sistema trifásico equilibrado de tensiones (corrientes) se suele representar en su forma vectorial simbólica:



Secuencia de fases R S T

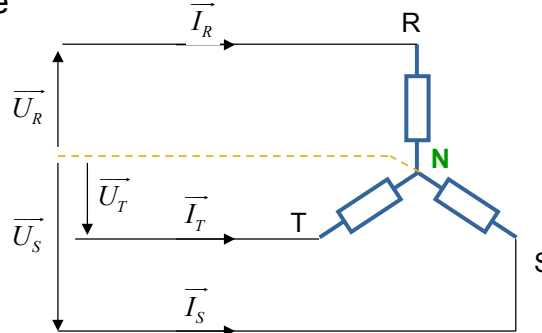
- Los sistemas trifásicos de tensiones y corrientes se suelen notar empleando las letras R, S y T:



La secuencia de fases RST se denomina **Secuencia Directa**

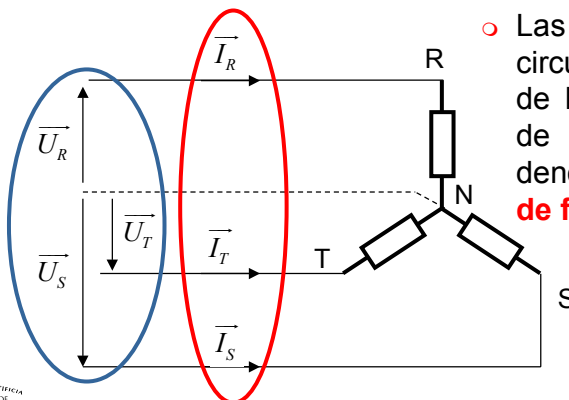
Conexión en estrella (Y)

- Los tres elementos de una estrella se unen en un punto común denominado habitualmente “**neutro**” (N)
 - Sistema trifásico **tetrafilar**: 3 fases RST **con** neutro N
 - Sistema trifásico **trifilar**: 3 fases RST **sin** neutro accesible



Tensiones y corrientes en la estrella

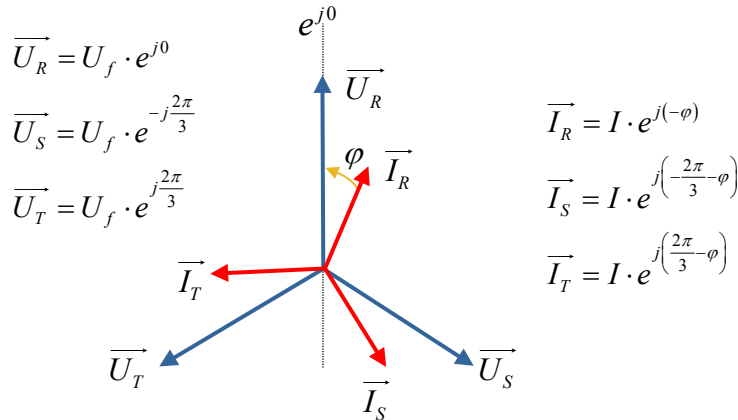
- Las tensiones que soportan cada uno de los tres elementos de la estrella se denominan **tensiones de fase** o **simples**



- Las corrientes que circulan por cada uno de los tres elementos de la estrella se denominan **corrientes de fase** o **de línea**

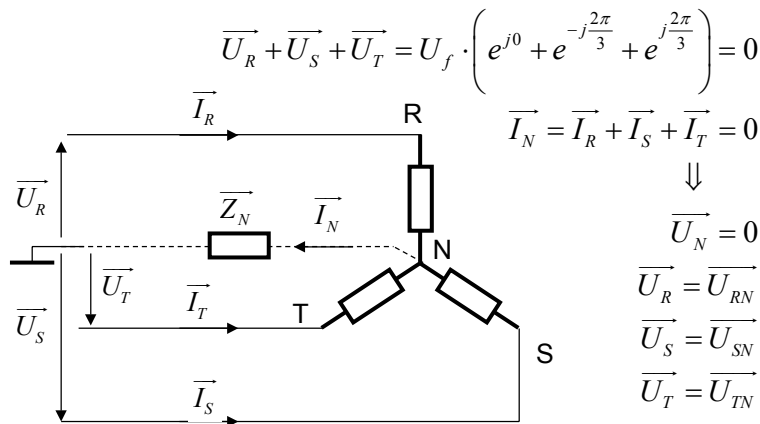
Diagramas vectoriales en la estrella

- Considerando que la **corriente** de cada fase está retrasada un ángulo φ respecto de su correspondiente **tensión** de fase:



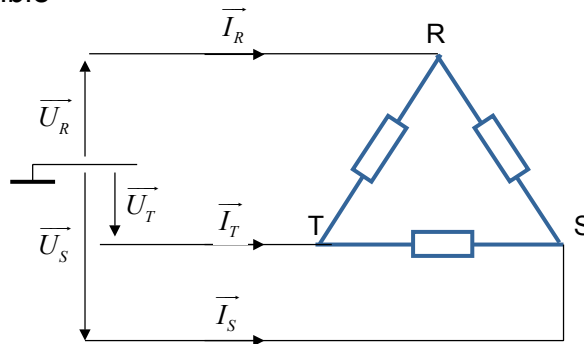
Tensión del neutro en la estrella

- Al tratarse de un sistema trifásico **equilibrado** de tensiones e intensidades, se verifica que:



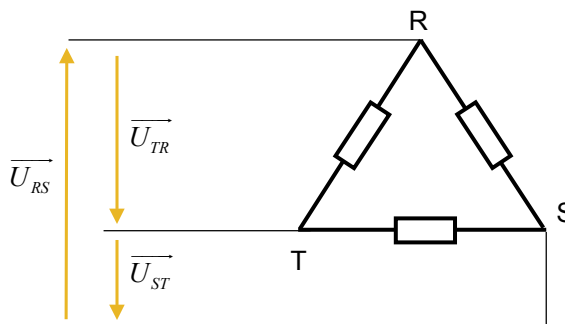
Conexión en triángulo (D o Δ)

- Los tres elementos de un triángulo se conectan en serie formando un circuito cerrado, por lo que no existe neutro
 - Sistema trifásico trifilar: tres fases RST **sin** neutro accesible

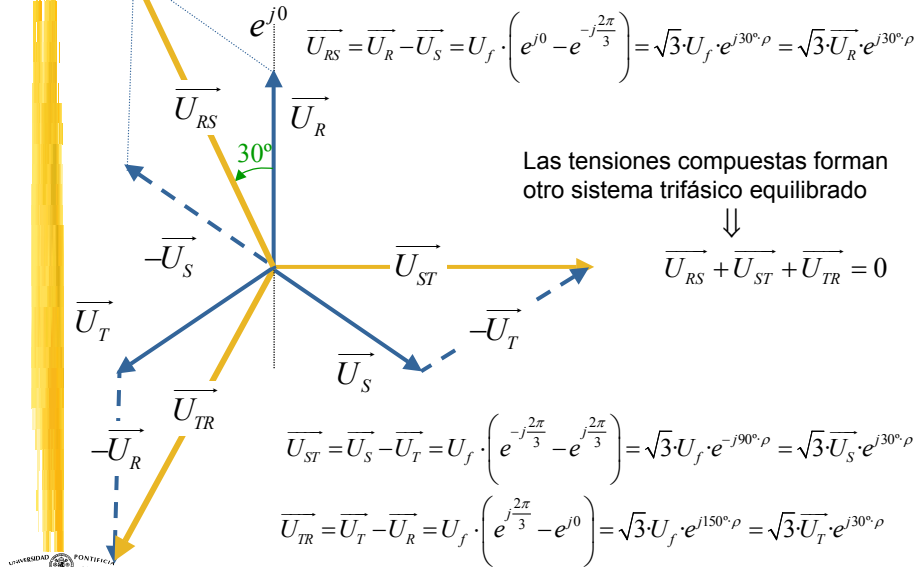


Tensiones en el triángulo

- Las tensiones que soportan cada uno de los tres elementos del triángulo se denominan **tensiones de línea** o **compuestas**



Tensiones en el triángulo (II)

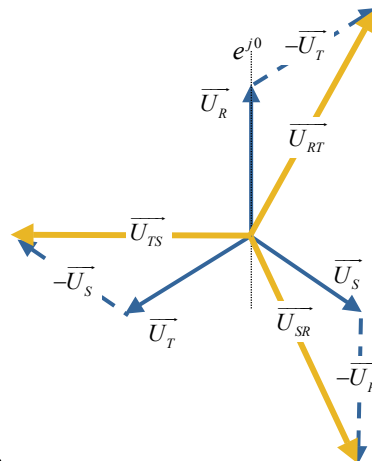
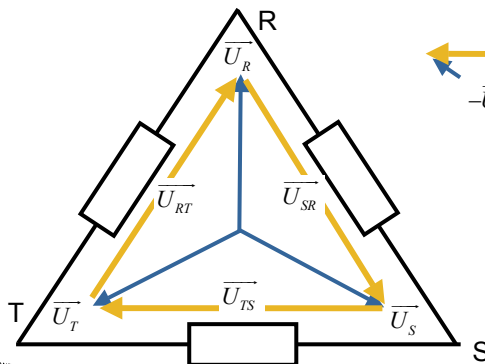


Tensiones en el triángulo (y III)

$$\vec{U}_{RT} = \vec{U}_R - \vec{U}_T = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$\vec{U}_{SR} = \vec{U}_S - \vec{U}_R = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot e^{-j150^\circ}$$

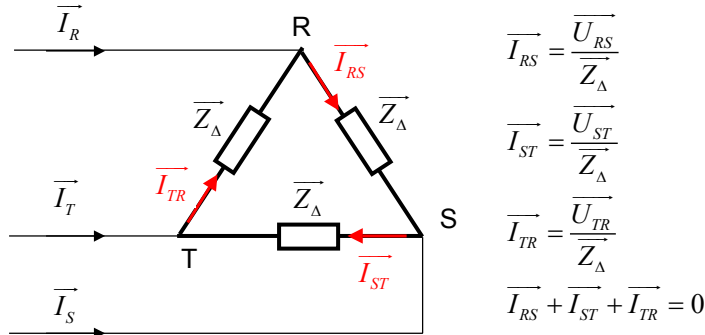
$$\vec{U}_{TS} = \vec{U}_T - \vec{U}_S = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot e^{-j90^\circ}$$



$$\vec{U}_{RT} + \vec{U}_{SR} + \vec{U}_{TS} = 0$$

Corrientes en el triángulo

- Las corrientes que circulan por cada uno de los elementos del triángulo se denominan **corrientes de rama**



También forman un sistema trifásico equilibrado

Corrientes en el triángulo (II)

- Las **corrientes de rama** son $\sqrt{3}$ veces menores que las de **línea**:

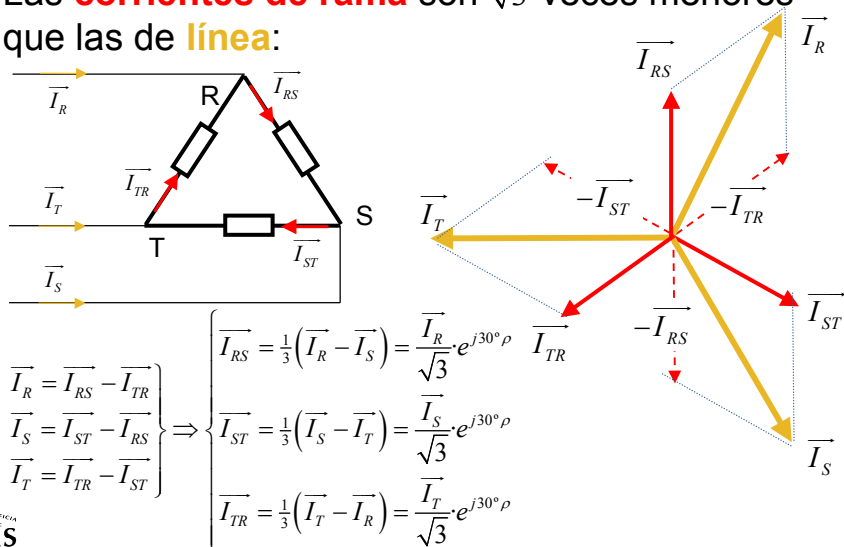
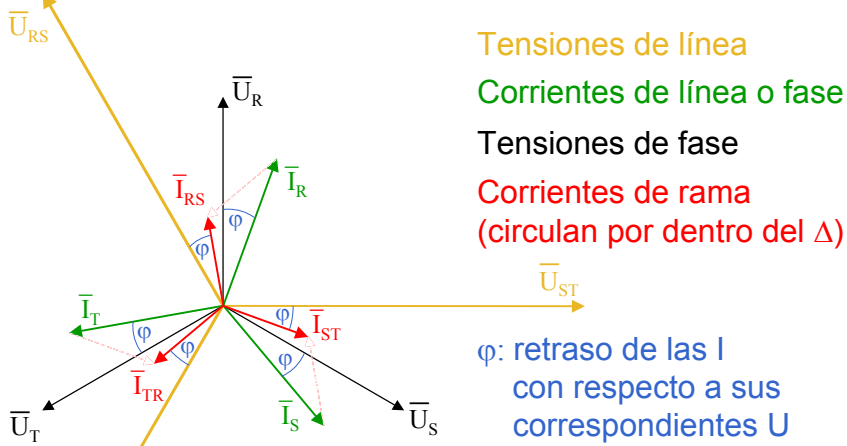
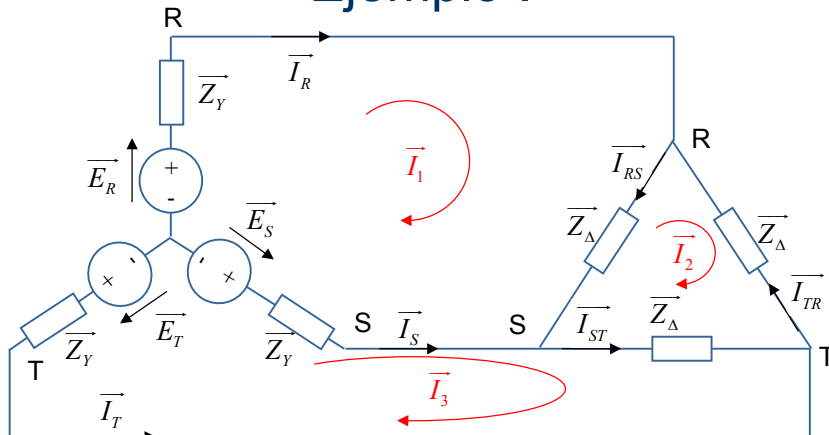


Diagrama vectorial del triángulo



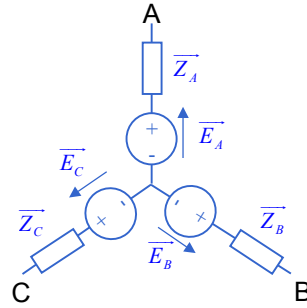
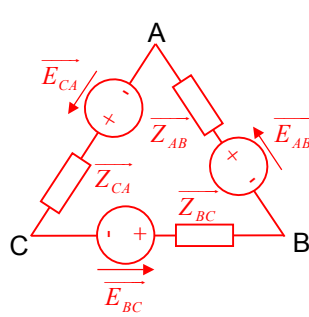
Se considera carga equilibrada con $\bar{Z}_{\Delta} = Z_{\Delta} \angle \varphi$

Ejemplo I



$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_R - \bar{E}_S &= (2 \cdot \bar{Z}_Y + \bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_1 - (\bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_2 - (\bar{Z}_Y) \cdot \bar{I}_3 \\ 0 &= -(\bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_1 + (3 \cdot \bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_2 - (\bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_3 \\ \bar{E}_S - \bar{E}_T &= -(\bar{Z}_Y) \cdot \bar{I}_1 - (\bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_2 + (2 \cdot \bar{Z}_Y + \bar{Z}_{\Delta}) \cdot \bar{I}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \bar{I}_R = \bar{I}_1 &= \bar{E}_R / (\bar{Z}_Y + \frac{1}{3} \cdot \bar{Z}_{\Delta}) \\ \bar{I}_S = \bar{I}_3 - \bar{I}_1 &= \bar{E}_S / (\bar{Z}_Y + \frac{1}{3} \cdot \bar{Z}_{\Delta}) \\ \bar{I}_R = -\bar{I}_3 &= \bar{E}_T / (\bar{Z}_Y + \frac{1}{3} \cdot \bar{Z}_{\Delta}) \end{aligned} \right.$$

Teorema de Kennelly

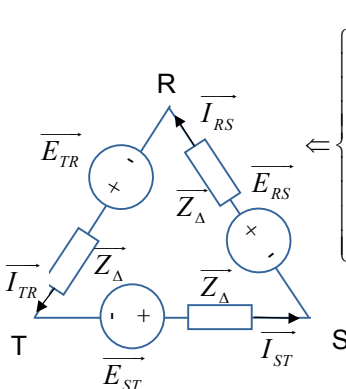


$$\begin{aligned}\overline{Z}_{AB} &= \frac{\overline{Z}_A \cdot \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_A}{\overline{Z}_C} & \overline{E}_{AB} &= \overline{E}_A - \overline{E}_B \\ \overline{Z}_{BC} &= \frac{\overline{Z}_A \cdot \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_A}{\overline{Z}_A} & \overline{E}_{BC} &= \overline{E}_B - \overline{E}_C \\ \overline{Z}_{CA} &= \frac{\overline{Z}_A \cdot \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_A}{\overline{Z}_B} & \overline{E}_{CA} &= \overline{E}_C - \overline{E}_A\end{aligned}$$

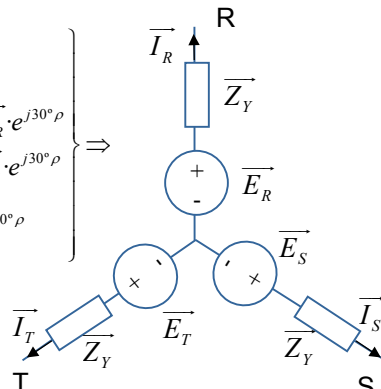
$$\begin{aligned}\overline{Z}_A &= \frac{\overline{Z}_{AB} \cdot \overline{Z}_{CA}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} & \overline{E}_A &= \overline{Z}_A \left(\frac{\overline{E}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} - \frac{\overline{E}_{CA}}{\overline{Z}_{CA}} \right) \\ \overline{Z}_B &= \frac{\overline{Z}_{AB} \cdot \overline{Z}_{BC}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} & \overline{E}_B &= \overline{Z}_B \left(\frac{\overline{E}_{BC}}{\overline{Z}_{BC}} - \frac{\overline{E}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} \right) \\ \overline{Z}_C &= \frac{\overline{Z}_{BC} \cdot \overline{Z}_{CA}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} & \overline{E}_C &= \overline{Z}_C \left(\frac{\overline{E}_{CA}}{\overline{Z}_{CA}} - \frac{\overline{E}_{BC}}{\overline{Z}_{BC}} \right)\end{aligned}$$

Equivalencia estrella-triángulo

- Todo circuito trifásico conectado en triángulo tiene una estrella equivalente y viceversa:
 - Esta equivalencia es **extremadamente útil**



$$\left\{ \begin{aligned}\overline{Z}_Y &= \frac{\overline{Z}_\Delta}{3} \\ \overline{U}_{RS} &= \sqrt{3} \cdot \overline{U}_R \cdot e^{j30^\circ \rho} \\ \overline{E}_{RS} &= \sqrt{3} \cdot \overline{E}_R \cdot e^{j30^\circ \rho} \\ \overline{I}_{RS} &= \frac{\overline{I}_R}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ \rho}\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



Circuito monofásico equivalente

- Conectando cargas trifásicas equilibradas a tensiones trifásicas equilibradas, el circuito sigue siendo equilibrado y se **desacopla** en tres:

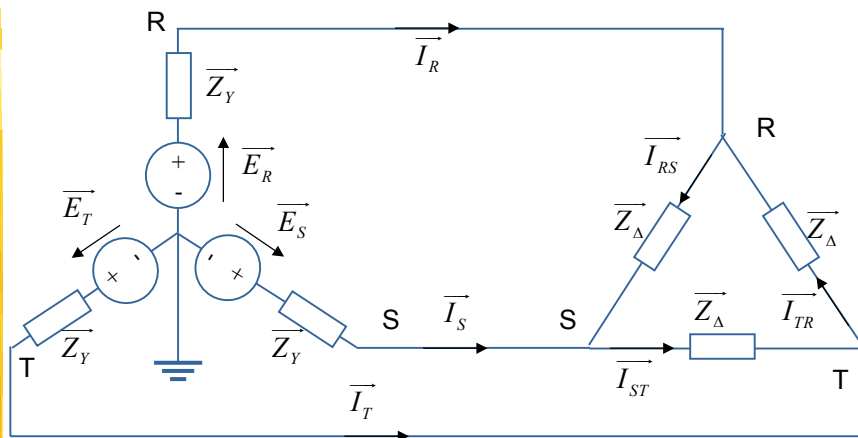
$$\left. \begin{aligned} \overline{E}_R &= E \cdot e^{j0} \\ \overline{E}_S &= E \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \overline{E}_T &= E \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \overline{I}_R &= I \cdot e^{j(-\varphi)} \\ \overline{I}_S &= I \cdot e^{j(-\frac{2\pi}{3}-\varphi)} \\ \overline{I}_T &= I \cdot e^{j(\frac{2\pi}{3}-\varphi)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{I}_N = 0$$

- Resolviendo **una sola** fase, típicamente la R, se conocen todas las tensiones y corrientes:

$$\left. \begin{aligned} \overline{U}_R &= U \cdot e^{j0} \\ \overline{I}_R &= I \cdot e^{j(-\varphi)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \overline{U}_S &= \overline{U}_R \cdot e^{j(-\frac{2\pi}{3})}; \overline{U}_T = \overline{U}_R \cdot e^{j(\frac{2\pi}{3})} \\ \overline{I}_S &= \overline{I}_R \cdot e^{j(-\frac{2\pi}{3})}; \overline{I}_T = \overline{I}_R \cdot e^{j(\frac{2\pi}{3})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \overline{U}_{RS} &= \sqrt{3} \cdot \overline{U}_R \cdot e^{j30^\circ} \\ \overline{I}_{RS} &= \frac{\overline{I}_R}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} \end{aligned} \right.$$

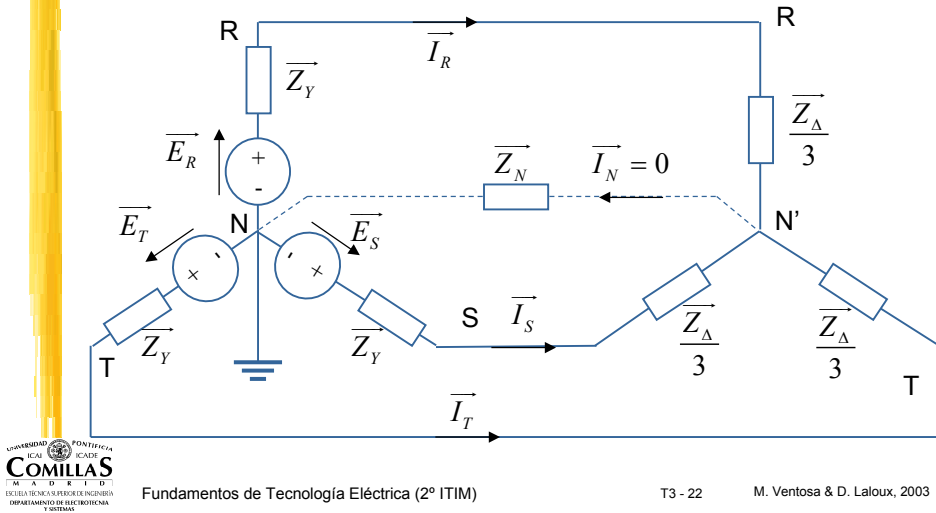
Ejemplo II

- Resolución del circuito del ejemplo I:



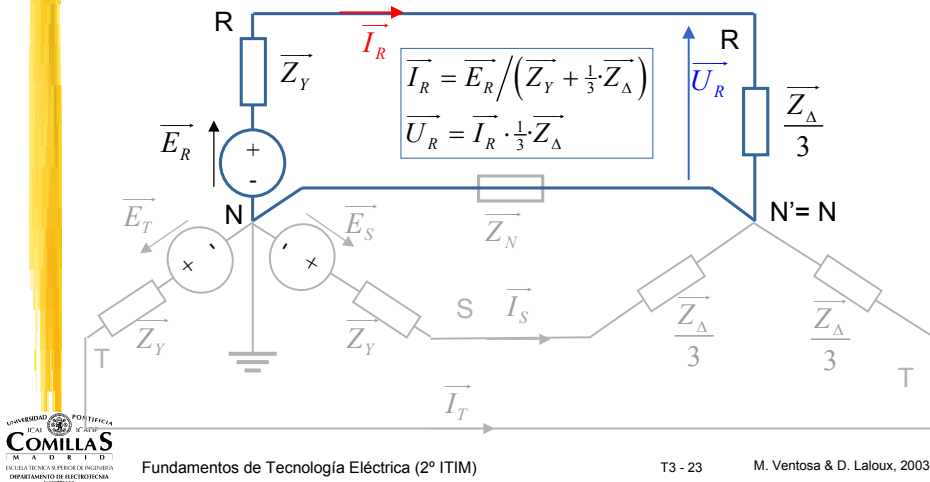
Ejemplo II a

- Los triángulos se transforman en sus estrellas equivalentes:



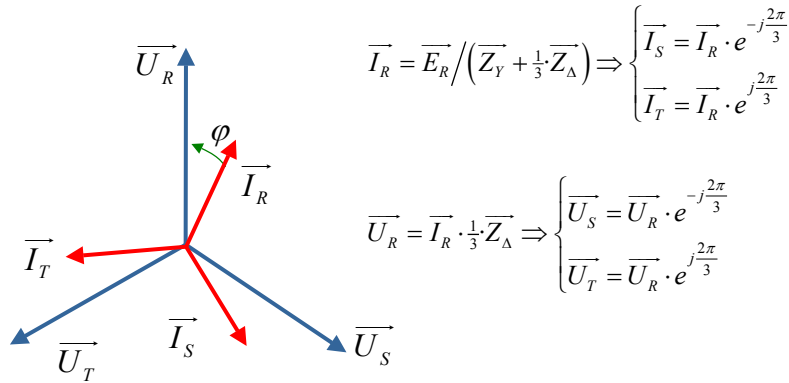
Ejemplo II b

- Se resuelve una fase fácilmente al conocer la tensión de todos los neutros: $U_{NN'} = 0$



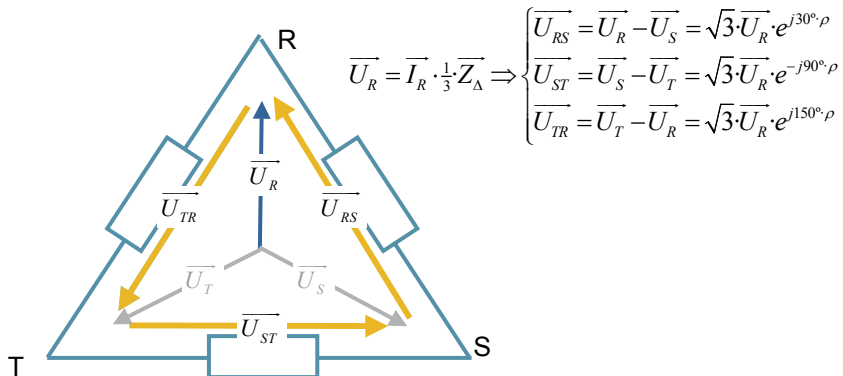
Ejemplo II c

- Se calculan, si es necesario, las corrientes y tensiones de las otras fases:



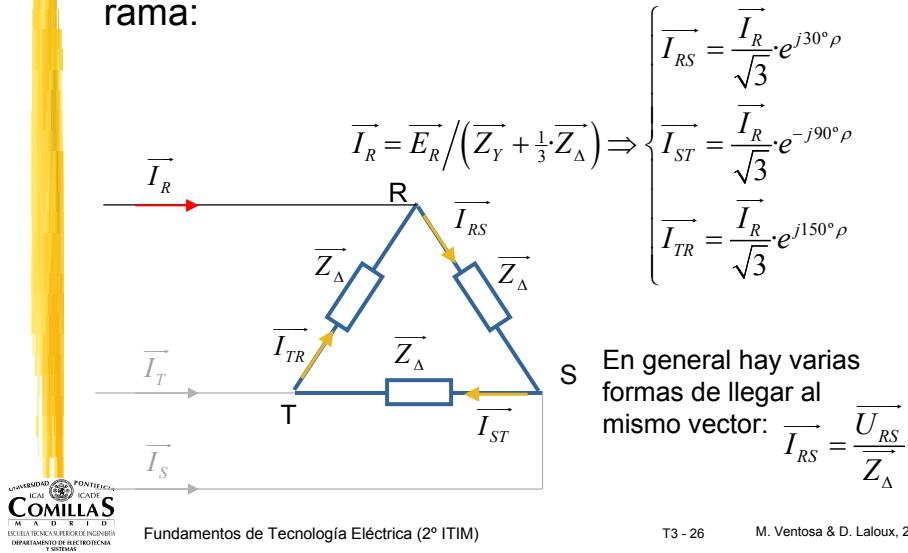
Ejemplo II d

- Se calculan, si es necesario, las tensiones compuestas:

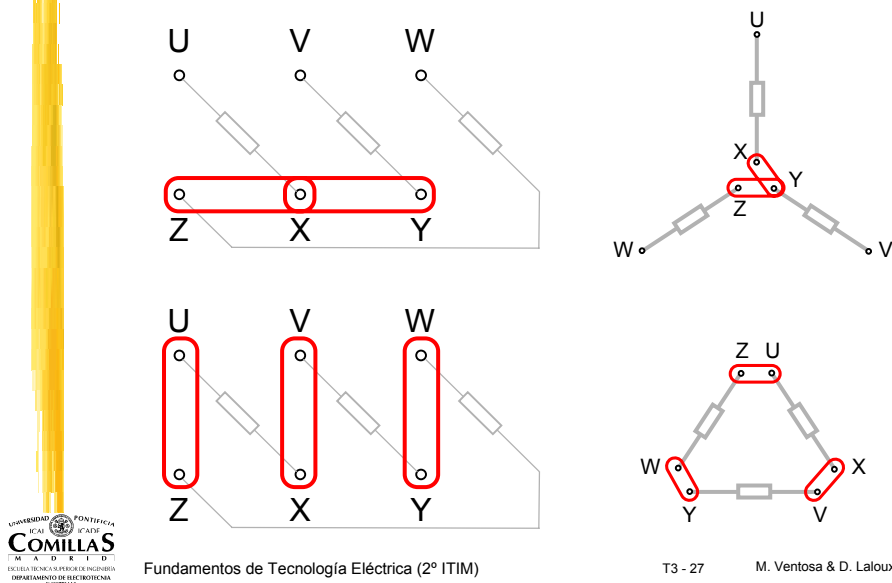


Ejemplo II e

- Se calculan, si es necesario, las corrientes de rama:



Conexión Y-Δ estandarizada



Potencia instantánea trifásica

- En trifásica, la potencia instantánea es la suma de las potencias instantáneas de cada fase:

$$p(t) = p_R(t) + p_S(t) + p_T(t) = u_R(t)i_R(t) + u_S(t)i_S(t) + u_T(t)i_T(t)$$

- Y si es **equilibrada**, en las tres fases pasa lo mismo:

$$\begin{aligned} p(t) = & \sqrt{2}U_f \sin(\omega t) \cdot \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi) + \\ & + \sqrt{2}U_f \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ & + \sqrt{2}U_f \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Potencia instantánea trifásica (y II)

- Operando, resulta:

$$\begin{aligned} p(t) = & U_f I (\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)) + \\ & + U_f I \left(\cos\varphi - \cos\left(2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi\right) \right) + \\ & + U_f I \left(\cos\varphi - \cos\left(2\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi\right) \right) \end{aligned}$$

- ¡La potencia instantánea **NO** depende del tiempo!

$$p(t) = 3 U_f I \cos\varphi = \sqrt{3} U I \cos\varphi = \text{cte.}$$

- Es una de las **ventajas** de la trifásica

Potencias activa, reactiva y aparente

- **Activa:** valor medio de la instantánea:

$$P = \frac{1}{T} \int p(t) dt = p(t) = 3 U_f I \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

- o suma de las activas de cada fase:

$$P = P_R + P_S + P_T$$

- **Reactiva:** Σ de las reactivas de cada fase:

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = 3 U_f I \sin \varphi = \sqrt{3} UI \sin \varphi$$

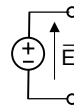
- **Aparente:** Σ de las aparentes de cada fase:

$$\bar{S} = \bar{S}_R + \bar{S}_S + \bar{S}_T = \bar{U}_R \bar{I}_R^* + \bar{U}_S \bar{I}_S^* + \bar{U}_T \bar{I}_T^* = \sqrt{3} UI e^{j\varphi} = P + jQ$$

Concepto de red infinita

- Una **red** (o nudo de potencia) **infinita** conserva la tensión y la frecuencia independientemente de la **carga** que se le conecte

- Su dipolo de Thévenin equivalente es una fuente de tensión ideal. ($Z_{Th} = 0$)

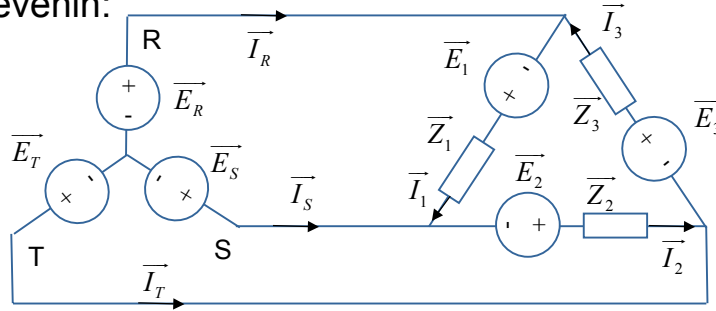


- Proviene de considerar **infinitos** generadores reales de la misma tensión, en paralelo:

- Z_{Th} sería el paralelo de las **infinitas** impedancias internas de los generadores $\rightarrow 0$

Carga desequilibrada en triángulo

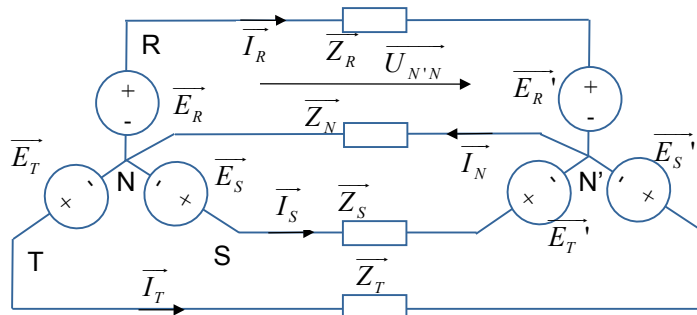
- Caso general: cada rama del Δ es un dipolo de Thévenin:



- Las tensiones de las ramas del Δ están determinadas:
⇒ ninguna dificultad especial
- Nótese que **NO** se puede plantear un circuito monofásico equivalente

Carga desequilibrada en estrella

- Caso general: cada rama de la estrella es un dipolo de Thévenin y el neutro tiene Z_N



- Si $Z_N = 0$, las tensiones de las ramas de la estrella están determinadas: ⇒ ninguna dificultad especial
- Si $Z_N \neq 0$, en primer lugar hay que determinar $U_{N'N}$ (o I_N)

Método del desplazamiento del centro de estrella

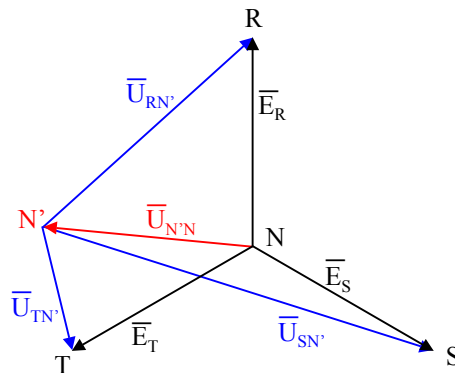
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{E_R} &= \overrightarrow{E_R'} + \overrightarrow{Z_R I_R} + \overrightarrow{U_{N'N}} \\ \overrightarrow{E_S} &= \overrightarrow{E_S'} + \overrightarrow{Z_S I_S} + \overrightarrow{U_{N'N}} \\ \overrightarrow{E_T} &= \overrightarrow{E_T'} + \overrightarrow{Z_T I_T} + \overrightarrow{U_{N'N}} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{I_R} &= \overrightarrow{Y_R} (\overrightarrow{E_R} - \overrightarrow{E_R'}) - \overrightarrow{Y_R U_{N'N}} \\ \overrightarrow{I_S} &= \overrightarrow{Y_S} (\overrightarrow{E_S} - \overrightarrow{E_S'}) - \overrightarrow{Y_S U_{N'N}} \\ \overrightarrow{I_T} &= \overrightarrow{Y_T} (\overrightarrow{E_T} - \overrightarrow{E_T'}) - \overrightarrow{Y_T U_{N'N}} \end{aligned} \right.$$

Y como: $\overrightarrow{Y_N U_{N'N}} = \overrightarrow{I_N} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_S} + \overrightarrow{I_T}$

Resulta:
$$\overrightarrow{U_{N'N}} = \frac{\sum_{k=R,S,T} \overrightarrow{Y_k} (\overrightarrow{E_k} - \overrightarrow{E_k'})}{\overrightarrow{Y_N} + \sum_{k=R,S,T} \overrightarrow{Y_k}}$$

- 1º) Calcular el “desplazamiento del centro de estrella” $\overrightarrow{U_{N'N}}$
- 2º) Obtener $\overrightarrow{I_R}$, $\overrightarrow{I_S}$, $\overrightarrow{I_T}$ y el resto de incógnitas

Desplazamiento del centro de estrella: Diagrama vectorial



Potencias en sist. desequilibrados

- ❑ La potencia **instantánea** ya **NO** es **constante**
- ❑ La potencia **activa**, ya no es igual a $\sqrt{3} U I \cos\varphi$:

$$P = P_R + P_S + P_T = U_R I_R \cos\varphi_R + U_S I_S \cos\varphi_S + U_T I_T \cos\varphi_T$$

- ❑ La potencia **reactiva** tampoco es $\sqrt{3} U I \sin\varphi$:

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = U_R I_R \sin\varphi_R + U_S I_S \sin\varphi_S + U_T I_T \sin\varphi_T$$

- ❑ Ni la potencia **aparente** es $\sqrt{3} U I$:

$$\bar{S} = \bar{S}_R + \bar{S}_S + \bar{S}_T = \bar{U}_R \bar{I}_R^* + \bar{U}_S \bar{I}_S^* + \bar{U}_T \bar{I}_T^* = P + jQ$$

- ❑ Y el **factor de potencia** (equivalente) es:

$$F.P. = \frac{P}{S} = \frac{P_R + P_S + P_T}{\sqrt{(P_R + P_S + P_T)^2 + (Q_R + Q_S + Q_T)^2}}$$

Medida de potencia activa trifásica

- ❑ Los distintos métodos se basan en alguna de las ecuaciones:

$$P = P_R + P_S + P_T = 3U_f I \cos\varphi = \sqrt{3} U I \cos\varphi$$

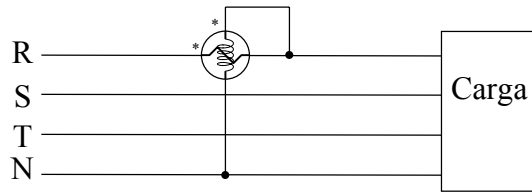
- ❑ Hay que tener en cuenta distintos condicionantes:

- Si son válidos con **tensiones desequilibradas**;
- Si son válidos con **corrientes desequilibradas**;
- Si se dispone de **tres o cuatro hilos**;
- **Cuántos** vatímetros se necesitan

- ❑ Aparecerán **constantes de multiplicación**:

- Debidas al propio método
- Debidas a los aparatos: trafos de intensidad, etc...

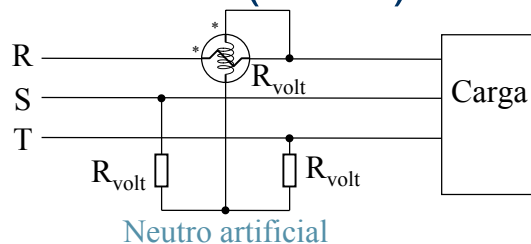
Un vatímetro con tensión simple



$$P_{\text{med}} = U_R I_R \cos \varphi_R \quad P = K_m P_{\text{med}} = 3 U_R I_R \cos \varphi_R$$

- ❑ Válido si hay **equilibrio** en tensiones y en intensidades
- ❑ Necesita **cuatro hilos**

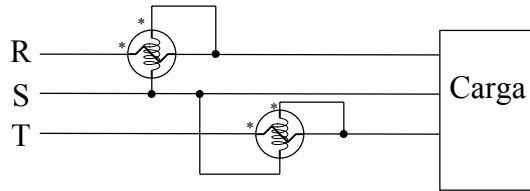
Un vatímetro con tensiones simples (trifilar)



$$P_{\text{med}} = U_R I_R \cos \varphi_R \quad P = K_m P_{\text{med}} = 3 U_R I_R \cos \varphi_R$$

- ❑ Válido si hay **equilibrio** en tensiones y en intensidades
- ❑ En **trifilar**, se crea un **neutro artificial** con una estrella equilibrada de resistencias con el valor de la bobina voltimétrica

Dos vatímetros. (Método de Aron)



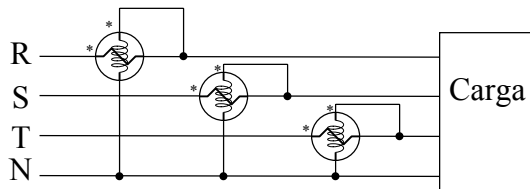
$$p = u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T = u_R i_R + u_S (-i_R - i_T) + u_T i_T =$$

$$= (u_R - u_S) i_R + (u_T - u_S) i_T = u_{RS} i_R + u_{TS} i_T$$

$$P = P_{med_1} + P_{med_2}$$

- ❑ Válido con **desequilibrada**
- ❑ Sólo en sistemas **trifilares** ($\Rightarrow i_S = -i_R - i_T$)

Tres vatímetros (tetrafilar)



$$P_{med_1} = P_R$$

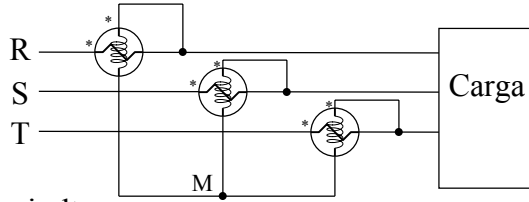
$$P_{med_2} = P_S$$

$$P_{med_3} = P_T$$

$$P = P_{med_1} + P_{med_2} + P_{med_3}$$

- ❑ Válido con **desequilibrada**
- ❑ Necesita **cuatro hilos**

Tres vatímetros (trifilar)



$$P_{med_1} = \frac{1}{T} \int u_{RM} i_R dt$$

$$P_{med_2} = \frac{1}{T} \int u_{SM} i_S dt$$

$$P_{med_3} = \frac{1}{T} \int u_{TM} i_T dt$$

$$P_{med_1} + P_{med_2} + P_{med_3} =$$

$$= \frac{1}{T} \int (p_R + p_S + p_T - u_M (i_R + i_S + i_T)) dt$$

$$P = P_{med_1} + P_{med_2} + P_{med_3}$$

❑ Válido con **desequilibrada**. M cualquiera

❑ Debe ser **trifilar**. Pero Aron lo supera

Medida de potencia activa trifásica. Resumen

Método	3 Hilos	4 Hilos	Desequilibrada
1 vatímetro	Sí (ntro. art.)	Sí	No válido
2 vatímetros (Aron)	Sí	No	Válido
3 vatímetros	(Sí)	Sí	Válido

Vatímetros trifásicos

- ❑ En los casos anteriores, hay que **sumar** las lecturas o multiplicarlas por constantes
- ❑ Puede ocurrir que algún aparato indique al revés y haya que **cambiar su polaridad**
- ❑ Estos inconvenientes se evitan con vatímetros trifásicos de **dos o tres equipos** vatimétricos, pero un solo indicador
- ❑ Suelen estar conectados internamente siguiendo los métodos descritos:
 - 2 equipos: método de Aron
 - 3 equipos: método de los tres vatímetros

Convertidores de potencia activa

- ❑ Son instrumentos **electrónicos** de precisión:
 - Señal AC ➡ Señal DC ppnal. y fácilmente medible
 - ❑ Entrada: transformador + rectificador + filtro
 - ❑ Salida: fuente ideal de corriente (o tensión)
- ❑ Los convertidores de potencia activa monofásicos tienen dos entradas independientes: **U** e **I**
 - Presentan buena precisión y bajo consumo
- ❑ Los convertidores polifásicos se componen de dos o tres equipos monofásicos y aplican los métodos vistos anteriormente

Varímetro electrodinámico monofásico

- Se puede considerar que es un **vatímetro “trucado”**:
 - Por la bobina **voltimétrica** (móvil) circula una i proporcional a la $u(t)$ de interés pero **retrasada 90°**
 - Con ello la desviación de la aguja es proporcional a Q :
$$\alpha = K U I \cos(\varphi - 90^\circ) = K U I \sin\varphi = K Q$$
 - El desfase de 90° se consigue mediante bobinas o condensadores
 - Las impedancias dependen de la frecuencia: sólo se consiguen los 90° a la **frecuencia de diseño**

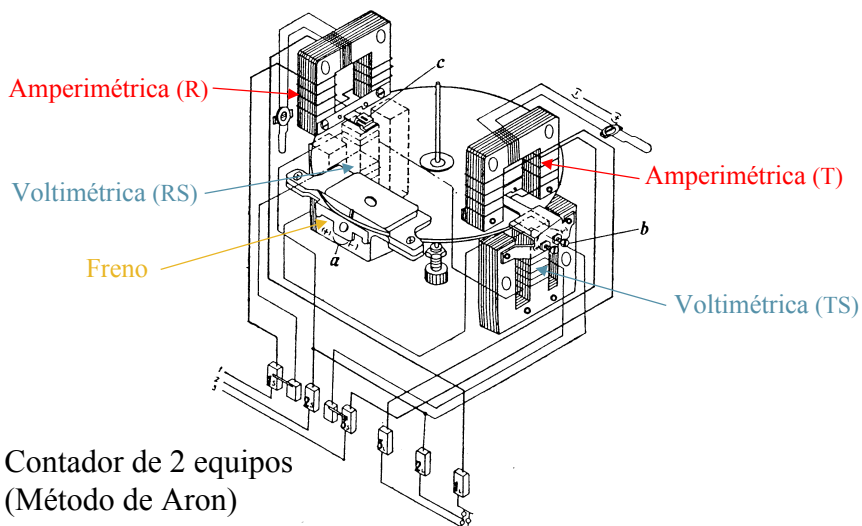
Métodos de medida de potencia reactiva

- La potencia reactiva puede medirse:
 - Con los **mismos montajes** que para potencia activa, sustituyendo los **vatímetros** por **varímetros**
 - (Salvo los que utilizan neutro artificial: $\bar{Z}_{\text{volt.}} \neq R_{\text{volt.}}$)
 - Midiendo la activa con vatímetros, la aparente con voltímetros y amperímetros y **deduciendo Q** :
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$
 - Utilizando vatímetros con **conexiones particulares**
 - Típicamente retrasando las tensiones 90°

Medida de energía en sistemas trifásicos

- ❑ Se suele medir con **contadores de inducción de dos o tres** equipos:
 - **Dos** motores vatimétricos conectados según el método de Aron para sistemas **trifilares**
 - ❑ Los dos motores y el freno de imán permanente actúan sobre uno o dos discos, sumando sus efectos
 - **Tres** motores vatimétricos conectados uno a cada fase para sistemas **tetrafilares**
 - ❑ Los tres motores y el freno de imán permanente se reparten entre dos discos montados sobre un mismo eje

Contador de inducción trifásico



Contador de 2 equipos
(Método de Aron)

Comparación entre el transporte en monofásica y en trifásica

- ❑ Queremos transportar energía eléctrica:
 - una potencia aparente **S**,
 - a una distancia **L**,
 - a una tensión fase-neutro **U**,
 - utilizando un conductor de resistividad ρ ,
 - que soporta una densidad de corriente máxima δ .
- ❑ Realizamos un análisis **muy simplificado**, pero cualitativamente **significativo**

Monofásica vs. trifásica (II)

- ❑ En **monofásica**:
$$\left. \begin{array}{l} S_1 = S \\ U_1 = U \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \frac{S}{U}$$
 - Sección del conductor: $A_1 = \frac{I_1}{\delta} = \frac{S}{\delta \cdot U}$
 - Cantidad de material conductor (\Rightarrow **coste de inversión**)

$$M_1 = 2 \cdot A_1 \cdot L = \frac{2 \cdot S \cdot L}{\delta \cdot U}$$

- Resistencia de 1 conductor: $R_1 = \rho \cdot \frac{L}{A_1} = \frac{\rho \cdot L \cdot \delta \cdot U}{S}$
- Pérdidas (\Rightarrow **coste de explotación**):

$$P_1 = 2 \cdot R_1 \cdot I_1^2 = \frac{2 \cdot S \cdot \rho \cdot \delta \cdot L}{U}$$

Monofásica vs. trifásica (III)

□ En **trifásica**:
$$\left. \begin{array}{l} S_{\text{III}} = S \\ U_{\text{III}} = \sqrt{3}U \end{array} \right\} \Rightarrow I_{\text{III}} = \frac{S_{\text{III}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{III}}} = \frac{S}{3 \cdot U}$$

- Sección del conductor: $A_{\text{III}} = \frac{I_{\text{III}}}{\delta} = \frac{S}{3 \cdot \delta \cdot U}$
- Cantidad de material conductor (\Rightarrow **coste de inversión**)

$$M_{\text{III}} = 3 \cdot A_{\text{III}} \cdot L = \frac{S \cdot L}{\delta \cdot U} = \frac{M_I}{2}$$

- Resistencia de 1 conductor: $R_{\text{III}} = \rho \cdot \frac{L}{A_{\text{III}}} = \frac{3 \cdot \rho \cdot L \cdot \delta \cdot U}{S}$

- Pérdidas (\Rightarrow **coste de explotación**) :

$$P_{\text{III}} = 3 \cdot R_{\text{III}} \cdot I_{\text{III}}^2 = \frac{S \cdot \rho \cdot \delta \cdot L}{U} = \frac{P_I}{2}$$

Monofásica vs. trifásica (y IV)

- Análisis de sensibilidad:

- Era obvio que los costes aumentan con **L** y con **S**
- Reducir **ρ** suele implicar un conductor más caro
 - Cobre frente a aluminio, por ejemplo
- Aumentar **δ** depende del conductor y de su refrigeración, que incrementa mucho el coste
- Se observa que aumentar **U** sólo aporta beneficios
 - Por ello se realiza el transporte en alta tensión
 - Las limitaciones suelen ser de orden técnico
 - Este ejemplo no considera los costes que conlleva: mayor aislamiento y tamaño de las torres, etc...