Representación de Vibraciones Armónicas Mediante Fasores: Isomorfismo de Espacios Vectoriales

José María Rico Martínez[a] y Jaime Gallardo[b]
[a]José María Rico Martínez
Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Guanajuato
Carretera Salamanca-Valle de Santiago km 3.5+1.8
E-mail: jrico@ugto.mx

[b]Departamento de Ingeniería Mecánica
Instituto Tecnológico de Celaya
Celaya, Gto. 38000, México
E-mail: gjaime@itc.mx

Abstract

Estas notas muestran, de manera formal, como es posible representar vibraciones armónicas como fasores; es decir, mediante vectores rotatorios. Para este propósito, se emplean algunos conceptos fundamentales del álgebra lineal como lo son: Espacios vectoriales, transformaciones lineales e isomorfismo de espacios vectoriales.

1 Espacios Vectoriales Involucrados

En esta sección se presentarán los espacios vectoriales involucrados en la prueba.

1. A_ω, el espacio vectorial de funciones armónicas de frecuencia circular ω. De manera formal, se probará que el conjunto

$$A_\omega = \{f(t) \mid f(t) = x_0 Sen(\omega t + \phi), \quad \text{donde} \quad x_0 \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi)\}^1$$

junto con las operaciones

- Adición de funciones. Sean $f_1(t), f_2(t) \in A_\omega$. Entonces

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad \forall t.$$

- Multiplicación por escalar. Sea $f(t) \in A_\omega$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces

$$(\lambda f)(t) = \lambda(f(t)) \quad \forall t.$$

constituyen un espacio vectorial real.

2. $\mathbf{R}^2$, el espacio vectorial de parejas ordenadas de números reales. De manera formal se probará que el conjunto

$$\mathbf{R}^2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

junto con las operaciones

[1]Debe notarse que el ángulo ϕ se define módulo 2π. Es decir $\phi = \phi + 2n\pi$, donde n es entero.

- Adición de parejas ordenadas. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$, entonces

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

- Multiplicación por escalar. Sean $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$, y $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

constituyen un espacio vectorial real.

3. V^2, el espacio vectorial de vectores geométrico, "flechas", en el plano. De manera formal, V^2 está formado por flechas, $\vec{a}$, que se dibujan desde un origen arbitrariamente seleccionado, de longitud a, donde $a \in [0, \infty)$ y tal que la flecha forma un ángulo ϕ con el semieje positivo x, donde $\phi \in [0, 2\pi)$, vea la Figura 1.

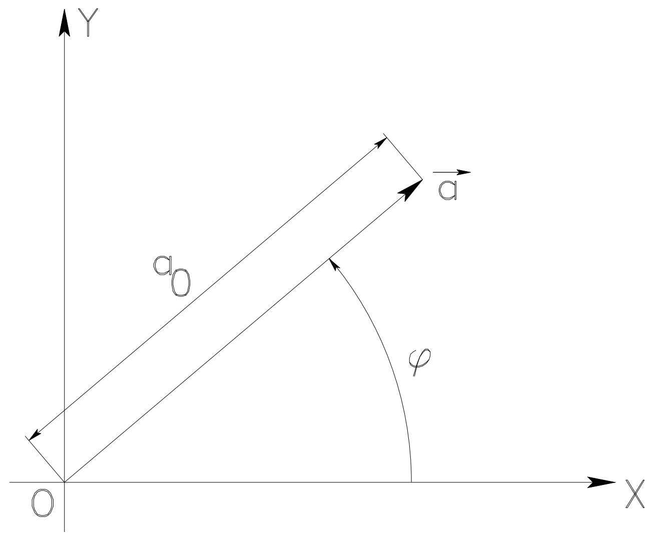

Figure 1: Vector Geométrico en el Plano.

De manera formal se probará que este conjunto de vectores geométricos junto con las operaciones de multiplicación por escalar y adición de vectores geométricos, definidas graficamente en la Figura 2, constituyen un espacio vectorial.

1.1 Clausura de los Conjuntos Bajo las Operaciones Indicadas

Debido a restricciones de espacio, exclusivamente se probará que los dos primeros conjuntos, A_ω y $\mathbf{R}^2$, están cerrados respecto a la suma y multiplicación por un escalar real. La clausura del último conjunto, V^2, bajo la multiplicación por escalar y la adición de vectores es evidente de la definición gráfica de las operaciones mostrada en la Figura 2. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el resto de los axiomas de un espacio vectorial, que incluyen la asociatividad de la adición, la commutatividad de la adición, la existencia de un idéntico aditivo, la existencia de inversos aditivos, la pseudoasociatividad de la multiplicación por escalar, la distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición deben añadirse para una prueba completa.

I. A_ω, el espacio vectorial de funciones armónicas de frecuencia circular ω.

- Clausura respecto a la multiplicación por escalar.

  Sea $f(t) = x_0 Sen(\omega t + \phi) \in A_\omega$, y $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$\lambda[f(t)] = \lambda[x_0 Sen(\omega t + \phi)] = (\lambda x_0) Sen(\omega t + \phi)$$

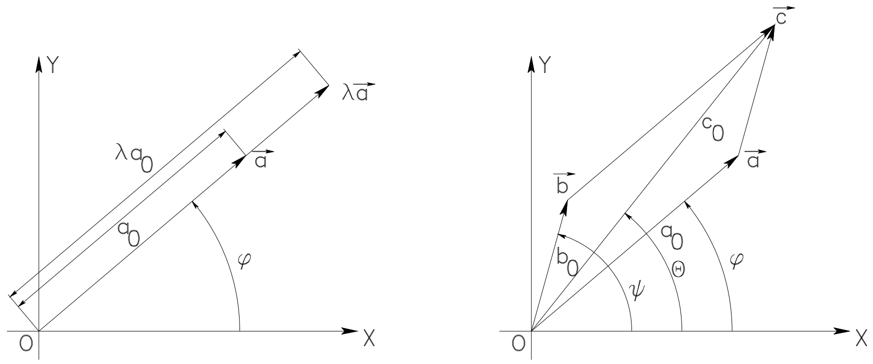

Figure 2: Definición de la Multiplicación por Escalar y Adición de Vectores Geométricos.

Puesto que $\lambda x_0 \in [0, \infty)$, resulta que $\lambda[f(t)] \in A_\omega$.[2]

- Clausura respecto a la adición.

  Sean $f_1(t) = x_{01}Sen(\omega t + \phi), f_2(t) = x_{02}Sen(\omega t + \psi), \in A_\omega$, entonces

$$\begin{aligned}
f_1(t) + f_2(t) &= [x_{01}Sen(\omega t + \phi)] + [x_{02}Sen(\omega t + \psi)] \\
&= x_{01}[Sen(\omega t)Cos\phi + Cos(\omega t)Sen\phi] + x_{02}[Sen(\omega t)Cos\psi + Cos(\omega t)Sen\psi] \\
&= Sen(\omega t)[x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi] + Cos(\omega t)[x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi] \\
&= \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)} \\
&\quad \left[\frac{(x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi)Sen(\omega t)}{\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)}} + \frac{(x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi)Cos(\omega t)}{\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)}} \right] \\
&= x_{0s}Sen(\omega t + \theta)
\end{aligned}$$

donde

$$x_{0s} = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)},$$

y

$$\theta = tan^{-1}\frac{x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi}{x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi}$$

Puesto que, $x_{0s} \in [0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ es evidente que $f_1(t) + f_2(t) \in A_\omega$.

II. $\mathbf{R}^2$, el espacio vectorial de parejas ordenadas de números reales.

- Clausura respecto a la multiplicación por escalar.

  Sean $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$, y $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Puesto que $\lambda x_1, \lambda x_2 \in \mathbf{R}$, resulta que $\lambda\vec{x} \in \mathbf{R}^2$.

- Clausura respecto a la adición. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$, entonces

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Puesto que $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbf{R}$, resulta que $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{R}^2$.

[2] Si $\lambda \leq 0$, entonces

$$\lambda[f(t)] = \lambda[x_0Sen(\omega t + \phi)] = (\mid \lambda \mid x_0)Sen(\omega t + \phi + \pi).$$

Entonces, puesto que $\mid \lambda \mid x_0 \in [0, \infty)$, la clausura se mantiene. Además, note que $\phi + \pi \in [0, 2\pi)$ módulo 2π.

2 Dimensiones de los Espacios Vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$

En esta sección se determinarán las dimensiones de los espacios vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$. Para tal fín se incluyen las siguientes dos definiciones

Definición 1. Una base $\mathbf{B}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un conjunto de vectores de $\mathbf{V}$ que satisfacen dos propiedades

1. El conjunto es linealmente independiente. Es decir, la única combinación lineal de esos vectores que es igual al idéntico aditivo es la trivial, –todos los escalares son iguales a 0–.

2. El conjunto es un conjunto generador del espacio vectorial. Es decir, cualquier vector del espacio vectorial $\mathbf{V}$ puede escribirse como una combinación lineal de esos vectores.

Definición 2. La dimensión de un espacio vectorial $\mathbf{V}$, es el número de vectores en cualesquiera de sus bases.[3]

A continuación se mostrará que la dimension de ambos espacios vectoriales, A_ω y $\mathbf{R}^2$, es 2.

I. A_ω, el espacio vectorial de funciones armónicas de frecuencia circular ω.

Considere el siguiente conjunto de funciones armónicas $B = \{f_1(t) = Sen(\omega t),\, f_2(t) = Sen(\omega t + \frac{\pi}{2}) = Cos(\omega t)\}$. Es fácil probar que B es un conjunto generador de A_ω, pues si $f(t) = x_0 Sen(\omega t + \phi) \in A_\omega$ es arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= x_0 Sen(\omega t + \phi) = x_0[Sen(\omega t)Cos(\phi) + Cos(\omega t)Sen(\phi)] \\ &= [x_0 Cos(\phi)]Sen(\omega t) + [x_0 Sen(\phi)]Cos(\omega t) \end{aligned}$$

Que es una combinación lineal de los elementos de B. Similarmente, es fácil probar que B es un conjunto linealmente independiente mediante el Wronskiano.

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} Sen(\omega t) & Cos(\omega t) \\ \omega Cos(\omega t) & -\omega Sen(\omega t) \end{vmatrix} = -\omega\left[Sen(\omega t)^2 + Cos(\omega t)^2\right] = -\omega \neq 0.$$

Finalmente, puesto que B es una base de A_ω, y B tiene dos elementos, la dimensión de A_ω, es 2.

II. $\mathbf{R}^2$, el espacio vectorial de parejas ordenadas de números reales.

Considere el siguiente conjunto de parejas ordenadas de números reales $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Es fácil probar que B es un conjunto generador de $\mathbf{R}^2$, pues si $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ es arbritario, entonces

$$\vec{x} = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1).$$

Que es una combinación lineal de los elementos de B. Similarmente, es fácil probar que B es linealmente independiente, pues la ecuación

$$\vec{0} = (0,0) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2),$$

tiene como única solución

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0.$$

Es decir, la trivial. Siguiendo los mismos argumentos que en el caso anterior, se deduce que la dimensión de $\mathbf{R}^2$ es 2.

3 Isomorfismo Entre A_ω y $\mathbf{R}^2$

En esta sección, se presentará un isomorfismo entre los espacios vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$. De esa manera, se mostrará que ambos espacios vectoriales son isomórficos. Por lo tanto, las operaciones que pueden hacerse con funciones armónicas de frecuencia ω pueden realizarse mediante parejas ordenadas de números reales.

Definición 3. Una transformación lineal $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$ es una transformación tal que, para todo $f_1(t), f_2(t) \in A_\omega$ y $\lambda \in \mathbf{R}$

$$T[f_1(t) + f_2(t)] = T[f_1(t)] + T[f_2(t)], \quad \text{y} \quad T[\lambda f_1(t)] = \lambda T[f_1(t)].$$

[3]Un desarrollo formal, debiera mostrar que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. Un curso "decente" de Álgebra Lineal, en ingeniería, debe incluir la prueba de este resultado.

La primera condición se conoce como **aditividad**, la segunda condición se conoce como **homogeneidad**. A continuación se define la transformación lineal entre los espacios vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$.

Definición 4. Una transformación lineal $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$ es se dice que es un isomorfismo de espacios vectoriales si

1. Es una transformación lineal.
2. Es biyectiva. Es decir es inyectiva –también conocida como uno a uno– y sobreyectiva –también conocida como sobre–.

Si $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces los espacios vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$ se dice que son isomórficos.[4]

Proposición 5. Considere la transformación $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$, definida por

$$T[f(t)] = T[x_0 Sen(\omega t + \phi)] = (x_0 Cos\phi, x_0 Sen\phi).$$

Entonces, puede probarse que la transformación es lineal.

Prueba: Se probará que la transformación es aditiva y homogenea.

- Aditividad. Sean $f_1(t) = x_{01} Sen(\omega t + \phi), f_2(t) = x_{02} Sen(\omega t + \psi), \in A_\omega$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces

  $$T[f_1(t) + f_2(t)] = T[x_{0s} Sen(\omega t + \theta)]$$

  donde

  $$x_{0s} = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)},$$

  y

  $$\theta = tan^{-1} = \frac{x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi}{x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi}$$

  Por lo tanto

  $$\begin{aligned} T[f_1(t) + f_2(t)] &= (x_{0s}Cos(\theta), x_{0s}Sen(\theta)) \\ &= (\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)} \frac{x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi}{\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)}}, \\ &\quad \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)} \frac{x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi}{\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}Cos(\psi - \phi)}}), \\ &= (x_{01}Cos\phi + x_{02}Cos\psi, x_{01}Sen\phi + x_{02}Sen\psi) \\ &= (x_{01}Cos\phi, x_{01}Sen\phi) + (x_{02}Cos\psi, x_{02}Sen\psi) \\ &= T[f_1(t)] + T[f_2(t)]. \end{aligned}$$

- Homogeneidad

  $$\begin{aligned} T[\lambda f_1(t)] &= T[(\lambda x_0)Sen(\omega t + \phi)] = (\lambda x_0 Cos(\phi), \lambda x_0 Sen(\phi)) \\ &= = \lambda(x_0 Cos(\phi), x_0 Sen(\phi)) = \lambda T[f_1(t)]. \end{aligned}$$

Para finalizar el desarrollo, necesitamos auxiliarnos de dos resultados del álgebra lineal.

Proposición 6. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva si y sólo si $\vec{0} \in \mathbf{V}$ es el único elemento de $\mathbf{V}$ que mapea sobre el $\vec{0} \in \mathbf{W}$.

Proposición 7. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una transformación lineal, tal que ambos espacios vectoriales, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ tienen la misma dimensión entonces T es biyectiva si y sólo si es inyectiva.

Entonces, a fín de probar que $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y que por lo tanto los espacios vectoriales A_ω y $\mathbf{R}^2$ son isomórficos es necesario completar el siguiente resultado.

[4]Si dos espacios vectoriales son isomórficos, matematicamente hablando, son iguales. Los elementos pueden "lucir" diferentes pero la transformación lineal permite establecer una relación biunívoca entre ellos y cualesquiera operaciones que se realicen en un espacio vectorial pueden realizarse en el otro.

Proposición 8. La transformación lineal $T : A_\omega \to \mathbf{R}^2$, definida por

$$T[f(t)] = T[x_0 Sen(\omega t + \phi)] = (x_0 Cos\phi, x_0 Sen\phi).$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Prueba: Puesto que ya se probó que T es una transformación lineal, es suficiente probar que T es biyectiva. Mas aún, por las proposiciones 6 y 7 y puesto que A_ω y $\mathbf{R}^2$ tienen la misma dimensión, es suficiente probar que T es inyectiva.

Sea $f(t) = x_0 Sen(\omega t + \phi) \in A_\omega$ arbitrario entonces

$$T[f(t)] = T[x_0 Sen(\omega t + \phi)] = (x_0 Cos\phi, x_0 Sen\phi)$$

será igual $\vec{0} = (0, 0)$, si y sólo si

$$x_0 Cos\phi = 0, \quad \text{y} \quad x_0 Sen\phi = 0$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y añadiendolas término a término, se tiene que

$$x_0^2 = x_0^2(Cos^2\phi + Sen^2\phi) = 0, \quad \Longrightarrow x_0 = 0.$$

De aquí que $f(t) = x_0 Sen(\omega t + \phi) = 0 Sen(\omega t + \phi) = 0\ \forall t$. Asi pues, el único elemento de A_ω que T mapea sobre $\vec{0} \in \mathbf{R}^2$, es el idéntico aditivo de A_ω.