

ELEMENTOS DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Dra. Patricia Kisbye

Dr. Alejandro L. Tiraboschi

INTRODUCCIÓN

Estas notas han sido elaboradas con el objetivo de ofrecer al ingresante a las carreras de la FaMAF un curso introductorio a la lógica elemental y teoría de conjuntos. Los temas abarcados son, a grandes rasgos, nociones básicas de conjuntos, operaciones entre conjuntos y producto cartesiano; proposiciones, conectivos lógicos y cuantificadores. Gran parte de los contenidos y ejercicios han sido extraídos de los primeros capítulos de nuestras notas *Elementos de Lógica y Computación*, Trabajos de Informática, No. 1/99.

Cada capítulo contiene un desarrollo teórico, variados ejemplos y una completa lista de ejercicios de aplicación.

Alejandro Tiraboschi

Patricia Kisbye

Índice general

Capítulo 1. TEORÍA BÁSICA DE CONJUNTOS	7
1. Conjuntos y pertenencia	7
2. Subconjuntos	9
3. Ejercicios	15
Capítulo 2. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS	19
1. La unión de conjuntos	19
2. La intersección	20
3. Complemento de un conjunto	21
4. Diferencia	22
5. Ejercicios	24
Capítulo 3. PRODUCTO CARTESIANO	27
1. Pares ordenados y producto cartesiano	27
2. Representación en ejes cartesianos	28
3. Ejercicios	31
Capítulo 4. LÓGICA	35
1. Proposiciones	35
2. Conectivos lógicos	36
3. Negación	36
4. Conjunción	37
5. Disyunción	38
6. Los conectivos y las operaciones entre conjuntos	39
7. Propiedades de la conjunción y la disyunción	39
8. Ejercicios	40
Capítulo 5. CUANTIFICADORES	43
1. Funciones proposicionales	43
2. Cuantificadores	44
3. Negación de cuantificadores	45
4. Ejercicios	46

Capítulo 6. OTROS CONECTIVOS	47
1. Condicional o implicación	47
2. Bicondicional o doble implicación	48
3. Argumentos y demostraciones	49
4. Combinación de proposiciones con conectivos lógicos	50
5. Ejercicios	51

CAPÍTULO 1

TEORÍA BÁSICA DE CONJUNTOS

Cualquier colección de objetos o individuos se denomina *conjunto*. En el contexto de la matemática, el término *conjunto* no tiene una definición sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Córdoba y de los peces en los océanos. Nuestro objetivo será estudiar aquellos conjuntos que están relacionados con el campo de la matemática, especialmente los conjuntos numéricos. La teoría de conjuntos es fundamental en matemática y de suma importancia en informática, donde encuentra aplicaciones en áreas tales como inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

1. Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* está integrado por objetos y los objetos que integran el conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto. Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la Fa.M.A.F.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.

Un conjunto sin elementos se denomina *conjunto vacío*.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece a A* o *a es un elemento de A*. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$ y se lee *a no pertenece a A* o *a no es elemento de A*. Los símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

\mathbb{N} : el conjunto de los números naturales.

\mathbb{Z} : el conjunto de los números enteros.

\mathbb{Q} : el conjunto de los números racionales.

\mathbb{R} : el conjunto de los números reales.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más

simple, pero que no siempre es posible, es por *extensión*, es decir listando todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves:

$$A = \{1, 2, 3, 5, \pi\}, \quad U = \{a, e, i, o, u\}, \quad M = \{\text{Talleres, Instituto, Belgrano}\}.$$

El orden en el cual se enumeran los elementos del conjunto es irrelevante, y los elementos se consideran una sola vez.

EJEMPLO 1.1. $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$ y $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ describen al mismo conjunto.

En algunos casos no se listan *todos* los elementos, pero se nombran los suficientes y se usan los puntos suspensivos “...” para sugerir los elementos faltantes:

$$\text{EJEMPLO 1.2. } B = \{3, 5, 7, \dots\}, C = \{2, 4, \dots, 2^5\}.$$

Sin embargo esta forma de nombrarlos es siempre ambigua, no puede saberse de antemano qué elementos son los que se han omitido. Por ejemplo, B podría ser el conjunto de los números impares, o podría ser el conjunto de los números primos mayores que 2. Del mismo modo, C podrían ser todos los pares entre 2 y 2^5 o bien todas las potencias de 2 comprendidas en el intervalo natural $[2, 2^5]$.

Otra forma de describir un conjunto es *por comprensión*, es decir enunciando una propiedad de los elementos que lo integran:

$$A = \{x \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Esto se lee: “el conjunto de los x tales que x cumple la propiedad P .”

EJEMPLO 1.3. El conjunto

$$B = \{x \mid x \text{ es natural e impar y } x \geq 3\}$$

está formado por todos los números naturales impares mayores o iguales a 3. En este caso se trata de un conjunto con un número infinito de elementos, y por lo tanto no podemos definirlo por extensión.

EJEMPLO 1.4. El conjunto

$$C = \{x \mid x \text{ es natural y } 2 \leq x \leq 2^6 \text{ y } x \text{ es potencia de } 2\}$$

es el conjunto formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64. El conjunto C se define también por extensión como

$$C = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}.$$

Al *conjunto vacío* se lo denota con el símbolo \emptyset o $\{ \}$.

EJEMPLO 1.5. El conjunto $A = \{x \mid x > 0 \text{ y } x < 0\}$ no tiene elementos, ya que ningún número es positivo y además negativo. Por lo tanto A es un conjunto vacío, y lo denotamos

$$A = \emptyset \quad \text{o} \quad A = \{ \}.$$

1.1. Diagramas de Venn. Es frecuente utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. Por ejemplo, el diagrama de Venn para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ es

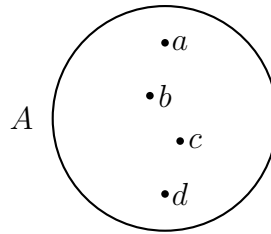


FIGURA 1. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

2. Subconjuntos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad \text{y} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Como podemos ver, los elementos de A : 1, 2 y 3, también son elementos de B . Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B , o que A está *incluido en* B .

Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B .
Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B .

En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo.

EJEMPLO 1.6. $A = \{1, 3, 5\}$ está incluido en A , y lo escribimos $A \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si los elementos de A son elementos de B , y viceversa. Es decir, si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *distintos* si no son iguales.

Es posible que la definición de conjuntos iguales y distintos resulta un tanto obvia, sin embargo es necesaria y no siempre es tan sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

EJEMPLO 1.7. Consideremos los conjuntos $A = \{1, -3\}$ y $B = \{n \mid n^2 - 4n = -3\}$.

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no podemos asegurar si son iguales o distintos.

Los elementos de A son 1 y -3 . Notemos que 1 y -3 verifican la propiedad que define a B . En efecto

$$1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \quad \text{y} \quad 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3.$$

Luego podemos afirmar que

$$A \subseteq B.$$

Además, los elementos de B son los números que satisfacen la ecuación

$$n^2 - 4n + 3 = 0,$$

y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y -3 . Por lo tanto también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A , es decir

$$B \subseteq A.$$

Concluimos entonces que $A = B$.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos pero tener uno o más elementos en común. Por ejemplo, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 4, 6\}$ son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común.

EJEMPLO 1.8. Los conjuntos $C = \{2, 4, 6\}$ y $D = \{1, 3, 5, 7\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B , pero distinto de B , se dice que A es un *subconjunto propio* de B . La notación $A \subseteq B$ es correcta, pero si queremos resaltar que A y B son distintos, escribimos

$$A \subset B \quad \text{o} \quad A \subsetneq B.$$

EJEMPLO 1.9. Consideremos los conjuntos $A = \{x \mid x \text{ es un natural par y } x < 10\}$, y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

En este caso, todo elemento de A es un elemento de B , y por lo tanto A es un subconjunto de B : $A \subseteq B$.

Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A , por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos $A \subsetneq B$ o $A \subset B$.

EJEMPLO 1.10. El conjunto \mathbb{N} de los números naturales es un subconjunto del conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, y se escribe $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Además \mathbb{N} es un subconjunto propio de \mathbb{Z} , ya que existen números enteros que no son naturales. Denotamos esto escribiendo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ o $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos¹. Es decir que para todo conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.

Si además A no es el conjunto vacío, podemos afirmar que $\emptyset \subsetneq A$.

2.1. Intervalos de números reales. Un *intervalo* de números reales es un subconjunto de \mathbb{R} que tiene la siguiente propiedad: dados dos números a y b en el intervalo, todos los números comprendidos entre a y b también pertenecen al intervalo.

Gráficamente, un intervalo se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos, o con toda la recta real.

EJEMPLO 1.11. El conjunto

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8.

EJEMPLO 1.12. El conjunto

$$\{x \mid x > -5\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en -5, sin contar este extremo.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

El intervalo cerrado $[a, b]$, con a y b números reales, es el subconjunto de \mathbb{R} definido como

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

En particular, a y b son elementos de $[a, b]$.

¹Se sigue de las reglas de la implicación lógica, que veremos más adelante.

El intervalo abierto (a, b) , con a y b números reales, es el subconjunto de \mathbb{R} definido como

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

En este caso, a y b no son elementos de (a, b) .

Los subconjuntos de la forma $\{x \mid x > a\}$ y $\{x \mid x < a\}$, también se llaman intervalos abiertos, y para éstos se utiliza la notación (a, ∞) y $(-\infty, a)$, respectivamente. Al símbolo ∞ se lo denomina *símbolo de infinito*. El conjunto \mathbb{R} es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty, \infty)$.

Por último, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$, siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \\ [a, \infty) &= \{x \mid x \geq a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.13. Si $a = -2$, y $b = 3$, entonces $[-2, 3) = \{x \mid -2 \leq x < 3\}$, y $(-2, 3] = \{x \mid -2 < x \leq 3\}$.

EJEMPLO 1.14. Si tomamos $a = b$, por ejemplo $a = b = 5$, el intervalo cerrado $[5, 5]$ tiene un sólo elemento:

$$[5, 5] = \{x \mid 5 \leq x \leq 5\} = \{5\},$$

y este conjunto se representa como un punto en la recta real.

2.2. El conjunto Universal. No necesariamente los elementos de un conjunto son de la misma naturaleza, por ejemplo, *el conjunto C formado por la Torre Eiffel y el número π* es válido como conjunto. Sin embargo, es muy poco interesante en la teoría. En general nos referiremos a conjuntos cuyos elementos tienen una propiedad en común.

EJEMPLO 1.15.

$$A = \{x \mid x \text{ es un natural par}\}, \quad B = \{x \mid x \text{ es un natural mayor que } 4\}$$

$$\text{y } C = \{x \mid x \text{ es un natural menor que } 23\},$$

son conjuntos cuyos elementos son números naturales.

EJEMPLO 1.16. Los elementos de los conjuntos X , Y y Z ,

$$X = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo}\}, \quad Y = \{\text{triángulo, hexágono}\}$$

$$\text{y } Z = \{\text{decágono, eneágono, octógono, heptágono}\}$$

tienen la propiedad de ser polígonos.

Resulta entonces conveniente considerar *un* conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal*, y lo denotamos con la letra \mathcal{U} .

En el Ejemplo 1.15 todos los conjuntos son subconjuntos de \mathbb{N} , y podemos considerar a \mathbb{N} como conjunto universal:

$$\mathcal{U} = \mathbb{N}.$$

Notemos que A , B y C son también subconjuntos del conjunto \mathbb{Z} de números enteros, por lo que también podría fijarse $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Por ello siempre debe dejarse expresado explícitamente el conjunto universal que se desee considerar.

EJEMPLO 1.17. Si denotamos con P al conjunto formado por todos los polígonos, entonces en el Ejemplo 1.16 podemos tomar $\mathcal{U} = P$. Pero también podemos considerar

$$\mathcal{U} = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo, triángulo, hexágono, decágono, eneágono, octógono, heptágono}\}.$$

En un diagrama de Venn el conjunto universal se representa con un rectángulo y el conjunto que nos interesa representar, digamos A , se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. La Fig. 2 ejemplifica lo explicado.

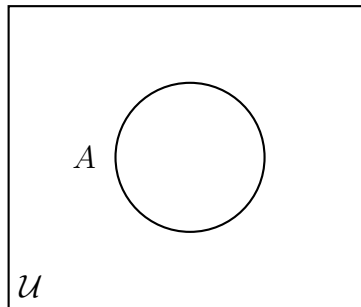
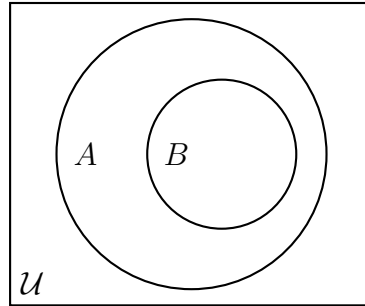


FIGURA 2. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma gráfica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 3 representamos que todo elemento de B , es también elemento de A .

FIGURA 3. Los elementos de B también pertenecen a A .

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota.

2.3. Cardinalidad: Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto *finito* y llamaremos *cardinal de A* al número de elementos de A . El cardinal del conjunto vacío es 0, y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota $|A|$ o también $\#A$.

EJEMPLO 1.18.

1. Si $A = \{a, b, c, 5, 4\}$, entonces $|A| = 5$.
2. Si $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 2\}$, entonces $|B| = 0$.
3. Si $C = \{a, a, b\}$, entonces $|C| = 2$.
4. $|\mathbb{Z}|$ es infinito.

2.4. El conjunto de partes. El *conjunto de partes* de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son *todos* los subconjuntos de A . Lo denotamos $\mathcal{P}(A)$.

EJEMPLO 1.19. $A = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

EJEMPLO 1.20. $B = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B\} = \{\emptyset, \{a\}\}$.

EJEMPLO 1.21. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{2, 3\}, \dots\}$, tiene infinitos elementos.

Si A es un conjunto finito, digamos de n elementos, entonces el cardinal² del conjunto de partes es 2^n . Por ejemplo, para $A = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $|A| = 3$ y $|\mathcal{P}(A)| = 8$. Para $B = \{a\}$, tenemos $|B| = 1$ y $|\mathcal{P}(B)| = 2$. También se cumple que $|\emptyset| = 0$, y $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$.

²Esta propiedad se estudiará en la asignatura Álgebra I y Matemática Discreta I.

3. Ejercicios

1. Define por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación ' \dots ' cuando sea necesario:

- a) $\{x \mid x \text{ es entero y } -3 < x < 4\}$
- b) $\{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es múltiplo de } 3\}$
- c) $\{x \mid (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
- d) $\{x \mid x \text{ es un entero y } (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
- e) $\{x \mid 2x \text{ es entero positivo}\}$

2. Enumera cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{n \mid n \text{ es natural y } n \text{ es divisible por } 5\}$
- b) $\{\frac{1}{n} \mid n \text{ es primo}\}$
- c) $\{2^n \mid n \text{ es natural}\}$
- d) $\{r \mid r \text{ es racional y } 0 < r < 1\}$

3. Describe por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe \emptyset si son vacíos:

- a) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 9\}$
- b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 = 9\}$
- c) $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } 3 < |n| < 7\}$
- d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ y } x \geq 2\}$
- e) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3\}$
- f) $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 6\}$.

4. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Lista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{z \mid z = 2x \text{ y } x \in X\}$
- b) $\{z \mid z = x + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$
- c) $\{z \mid z \in X \text{ o } -z \in X\}$
- d) $\{z \mid x = z + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$
- e) $\{z \mid z \text{ es entero y } z^2 \in X\}$

5. Determina la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{x \mid x \text{ es entero y } 1/8 < x < 17/2\}$
- b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } \sqrt{x} \text{ es entero}\}$
- c) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \text{ o } 2x^2 = 1\}$
- d) $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- e) $\{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

6. Describe por comprensión los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.
- b) El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados perfectos.
- c) El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.
- d) $\{a, e, i, o, u\}$

7. Defina por extensión los siguientes subconjuntos de \mathbb{N} :

- a) $\{x \mid x + 1 \text{ es par y } x < \frac{19}{3}\}$
- b) $\{x \mid x + 1 \text{ es impar y } x < \frac{22}{3}\}$
- c) $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } x < \frac{32}{5}\}$
- d) $\{3x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } 5 \leq x \leq 8\}$
- e) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } 2n + 3 < 15\}$

8. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos A y B definir por extensión A y B y decir si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ o ninguna de las anteriores.

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x^2 \leq 149\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \text{ es impar y } x \leq 10\},$
- b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar y } x^2 \leq 130\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \text{ es par y } x \leq 12\},$
- c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar y } x^2 \geq 4 \text{ y } x^2 \leq 141\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ es par y } x \leq 9\},$
- d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x^2 \leq 150\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ es impar y } x \leq 11\}$

9. En cada uno de los siguientes casos establece si $x \in A$, $x \subseteq A$, ambas cosas o ninguna:

- a) $x = \{1\}$ $A = \{1, 2, 3\}$
- b) $x = \{1\}$ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
- c) $x = \{1\}$ $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- d) $x = \{1, 2\}$ $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- e) $x = \{1\}$ $A = \{\{1, 2, 3\}\}$
- f) $x = 1$ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

10. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y descríbelos por comprensión:

- | | | |
|---------------------|--------------------------|---------------------|
| <i>a)</i> $[1, 5]$ | <i>c)</i> $[-1, \infty)$ | <i>e)</i> $(2, 7]$ |
| <i>b)</i> $(-2, 4)$ | <i>d)</i> $(-\infty, 5]$ | <i>f)</i> $[-4, 0)$ |

11. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, lista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a)* $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 2 elementos}\}$
- b)* $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 1 elemento}\}$
- c)* $\{A \mid A \text{ es subconjunto propio de } X\}$
- d)* $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } 1 \in A\}$

12. En cada uno de los siguientes casos, muestra que $A \subseteq B$, es decir, que todo elemento de A es un elemento de B .

- a)* $A = \{x \mid 2x^2 + 5x = 3\}$
 $B = \{x \mid 2x^2 + 17x + 27 = 18/x\}$
- b)* $A = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es par}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x^2 \text{ es par}\}$
- c)* $A = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es un m\u00faltiplo de 6}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es m\u00faltiplo de 3}\}$

13. Describe por extensi\u00f3n el conjunto de partes de cada uno de los siguientes conjuntos y calcula su cardinal:

- a)* $A = \{1\}$,
- b)* $B = \{a, b\}$,
- c)* $S = \{1, 2, 3\}$,
- d)* $C = \{1, a, x, w\}$.

CAPÍTULO 2

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, también existen operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto.

Fijemos un conjunto universal \mathcal{U} y consideremos todos los subconjuntos de \mathcal{U} . Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de \mathcal{U} .

1. La unión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B .

Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$.

En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 1).

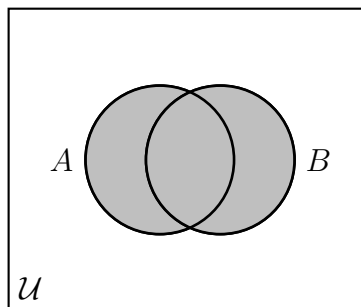


FIGURA 1. La unión de los conjuntos A y B .

EJEMPLO 2.1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

EJEMPLO 2.2. Si consideramos el intervalo abierto $(0, 1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, entonces $(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$

Si A es un subconjunto de B , esto es, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

EJEMPLO 2.3. Si $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

EJEMPLO 2.4. Si $A = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } 5\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } 10\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } 5\},$$

dado que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $B \subseteq A$.

La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el mismo conjunto A , puesto que \emptyset no tiene elementos:

$$A \cup \emptyset = A.$$

La unión de un conjunto A con A es el mismo conjunto A :

$$A \cup A = A.$$

2. La intersección

Sean A y B dos conjuntos.

La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y pertenecen a B .

Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

EJEMPLO 2.5. Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n \text{ es primo}\}$ y $B = \{n \mid n \text{ es impar y } n \leq 20\}$, entonces

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

EJEMPLO 2.6. Si consideramos los intervalos $[0, 5]$ y $(3, 6]$, entonces

$$[0, 5] \cup (3, 6] = [0, 6] \quad \text{y} \quad [0, 5] \cap (3, 6] = (3, 5).$$

Si A es un subconjunto de B , esto es $A \subseteq B$, entonces

$$A \cap B = A.$$

En particular, $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

EJEMPLO 2.7. La intersección del intervalo $(0, 1)$ con el conjunto $\{0, 1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío:

$$(0, 1) \cap \{0, 1\} = \emptyset,$$

es decir que $(0, 1)$ y $\{0, 1\}$ son conjuntos disjuntos.

En particular, dos conjuntos son *disjuntos* si y sólo si su intersección es vacía.

En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior de las curvas cerradas que determinan los conjuntos. Esta región se la destaca con un sombreado (ver Figura 2). Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y sólo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

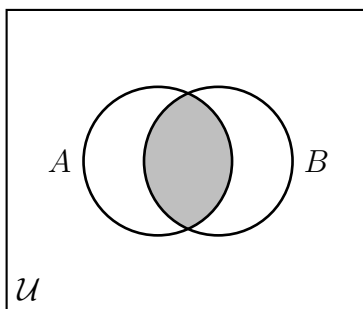


FIGURA 2. Intersección de A y B .

3. Complemento de un conjunto

Fijemos \mathcal{U} un conjunto universal y A un subconjunto de \mathcal{U} .

El complemento de A con respecto a \mathcal{U} es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de \mathcal{U} que no pertenecen a A y se denota por A^c .

En símbolos,

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado.

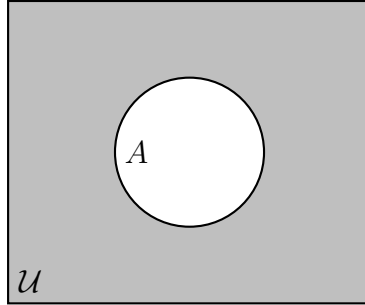


FIGURA 3. Complemento de A .

EJEMPLO 2.8. Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y \mathbb{P} es el conjunto de los números pares, entonces \mathbb{P}^c es el conjunto de los números naturales impares.

EJEMPLO 2.9. Si \mathcal{U} es un plano, y P es un punto en el plano, entonces P^c es el plano sin el punto P .

EJEMPLO 2.10. Sea $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.

4. Diferencia

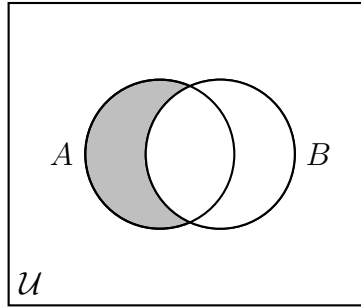
Sean A y B dos conjuntos.

La diferencia o complemento relativo $A - B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Observemos que $A^c = \mathcal{U} - A$. En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B , destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 4).

EJEMPLO 2.11. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq 0\}$.

FIGURA 4. Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B .

EJEMPLO 2.12. $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5\}$

EJEMPLO 2.13. $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

4.1. Propiedades de las operaciones. Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

Propiedad asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propiedad distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran estas propiedades.

EJEMPLO 2.14. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$, entonces

$$(A \cap B) \cap C = \{2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

EJEMPLO 2.15. Sea $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y sean $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Entonces,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0, 6\} \cup \emptyset = \{0, 6\},$$

$$A \cap (B \cup C) = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\} = \{0, 6\},$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 9\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

EJEMPLO 2.16. Si A , B y \mathcal{U} son como en el Ejemplo 2.15, entonces

$$(A \cup B)^c = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}^c = \{1, 5, 7\} \quad \text{y}$$

$$A^c \cap B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{1, 5, 7\}.$$

$$(A \cap B)^c = \{0, 6\}^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \quad \text{y}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, y no es suficiente para demostrar que la misma se cumple para cualquier par de conjuntos A y B .

5. Ejercicios

1. Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es el conjunto universal y $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, defina por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$

h) $B \cap C$

b) $A - B$

i) $A \cup \emptyset$

c) A^c

j) $A \cap (B \cup C)$

d) \mathcal{U}^c

k) $(A \cap B) \cup C$

e) $B \cap \mathcal{U}$

l) $A \cap B - C$

f) $B^c \cap (C - A)$

m) $(A \cup B) - (C - B)$

g) $(A \cap B)^c \cup C$

2. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $D = \{2, 4, 8\}$. Determine los conjuntos

a) $A \cup B$

c) $(A \cup B) \cap C^c$

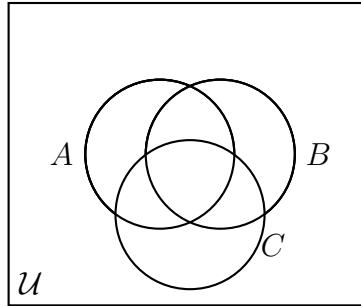
e) $C - D$

b) $A \cap C$

d) $A - B$

f) $(B - D) \cup (D - B)$

3. En diagramas de Venn como el de la figura, sombree los conjuntos siguientes:



- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| a) $A \cup B$ | f) $(A - B) \cap C$ |
| b) $A \cap B$ | g) $(A \cap C) \cup C^c$ |
| c) $(A \cup C) \cap B$ | h) $(A \cap B \cap C)^c$ |
| d) $A \cap B \cap C$ | i) $(A - B) - C$ |
| e) $(A \cup C)^c$ | j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

4. De un total de 60 alumnos de un colegio:

- 15 estudian francés solamente,
- 11 estudian francés e inglés;
- 12 estudian alemán solamente;
- 8 estudian francés y alemán;
- 10 estudian inglés solamente;
- 5 estudian inglés y alemán; y
- 3 los tres idiomas.

Determina:

- a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
- b) ¿Cuántos estudian alemán?
- c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?
- d) ¿Cuántos estudian francés?

5. Describe por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y grafícalo en la recta real. Indica si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso represéntalo en la notación de intervalos.

- a) $[-1, \infty] \cap (-3, 2)$.
- b) $(-\infty, 2) \cup [0, \infty)$
- c) $(-3, 1] \cap (2, \infty)$
- d) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1)$
- e) $[-3, 0) \cap (-2, 3)$

6. Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la unión y la intersección, y las Leyes de Morgan, compruebe las siguientes identidades. Ilustre cada caso con un diagrama de Venn. Recuerde que $A - B = A \cap B^c$.

$$a) (A^c \cap B)^c = A \cup B^c$$

$$d) (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$$

$$b) A \cap (B \cup A)^c = \emptyset$$

$$e) (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$$

$$c) (A - B) - C = (A - C) - (B - C)$$

7. Simplifique la expresión de modo que A , B y C aparezcan a lo sumo una vez:

$$a) ((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$$

$$b) (A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$$

Solución: a) $(A \cap C) \cup B^c$, b) \emptyset

CAPÍTULO 3

PRODUCTO CARTESIANO

1. Pares ordenados y producto cartesiano

Dos elementos dados en cierto orden forman un par ordenado. Por ejemplo, un punto geográfico está determinado por las coordenadas latitud y longitud, una fecha en el año está dada por dos números: el mes y el día. En general, si x e y son dos objetos, se puede formar el par ordenado de x e y , y este par se denota como (x, y) . De esta manera, la fecha (10,03) significa “3 de octubre”, mientras que (03,10) indica el “10 de marzo”. Como vemos, el orden en que se dan los elementos es relevante.

Los elementos que forman un par ordenado pueden o no pertenecer a un mismo conjunto. Por ejemplo, en el caso de las fechas, el primer elemento del par es un número natural entre 1 y 12, mientras que el segundo es un natural entre 1 y 31.

Pero también podemos formar los pares ordenados de la forma

(apellido, nro. de documento),

donde el primer elemento del par es un apellido tomado de un conjunto de personas, y el segundo elemento del par es un número. En este caso, los elementos del par son de distinta naturaleza.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. El conjunto de todos los pares ordenados tales que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B , se llama el producto cartesiano de A por B y se escribe $A \times B$.

En símbolos, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

EJEMPLO 3.1. Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, el producto cartesiano de A por B es

$$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

EJEMPLO 3.2. Si $A = \{\alpha, \beta\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces:

$$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$$

$$A \times A = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Si los conjuntos tienen una cantidad finita de elementos puede resultar útil el uso de una tabla de doble entrada, como la siguiente:

$A \times B$	1	2	3
α	$(\alpha, 1)$	$(\alpha, 2)$	$(\alpha, 3)$
β	$(\beta, 1)$	$(\beta, 2)$	$(\beta, 3)$

$B \times A$	α	β
1	$(1, \alpha)$	$(1, \beta)$
2	$(2, \alpha)$	$(2, \beta)$
3	$(3, \alpha)$	$(3, \beta)$

Así, en la tabla del producto cartesiano $X \times Y$ de dos conjuntos finitos X e Y , tenemos que la fila correspondiente al elemento x de X contiene todos los pares ordenados de $X \times Y$ cuyo primera coordenada es x , mientras que la columna correspondiente al elemento y de Y contiene todos los pares ordenados de $X \times Y$ cuya segunda coordenada es y .

Si A y B son conjuntos finitos, entonces el cardinal de $A \times B$ es el número de elementos de A por el número de elementos de B

2. Representación en ejes cartesianos

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales, entonces resulta útil la representación gráfica del producto cartesiano en *ejes cartesianos*. Los ejes cartesianos están formados por dos rectas perpendiculares, donde una de ellas representa el *eje de las abscisas* y el otro el *eje de las ordenadas*. En ambas rectas se representan los números reales y el punto de intersección de ambas corresponde *usualmente* al origen de coordenadas, en el sentido que corresponde al 0 en ambos ejes. Al lado de cada eje se deja indicada una letra que sugiere qué coordenada se representa en dicho eje. Las “flechas” dibujadas indican el sentido creciente en cada una de las rectas (Figura 1).

Dado un punto P en el plano, trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de estos ejes por el punto P . Los puntos de intersección de cada una de estas rectas con los ejes de las abscisas y de las ordenadas se denominan *abscisa* y *ordenada* del punto P , respectivamente, o también primera y segunda coordenada. De este modo, cada punto P del plano está en correspondencia con un par ordenado (x, y) , donde x es la abscisa de P e y es la ordenada. A su vez, a cada par ordenado (a, b) le corresponde un punto del plano cuya abscisa es a y cuya ordenada es b .

En la Figura 2 podemos ver la representación gráfica en ejes cartesianos de (una parte de) los siguientes conjuntos:

$$C = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n^2\}$$

$$L = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } y = x + 1\}$$

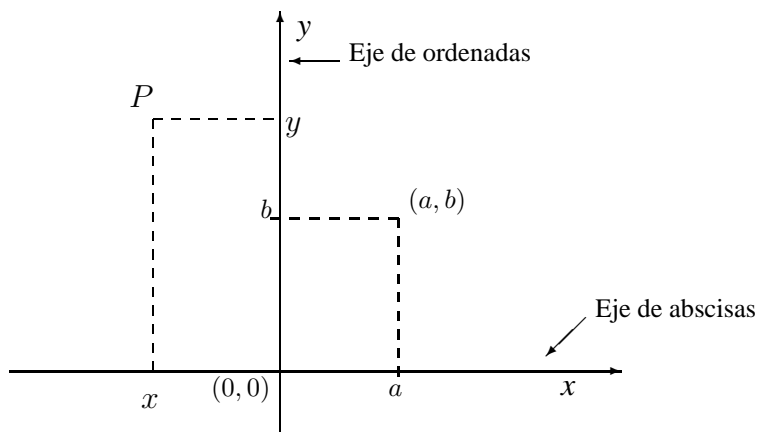
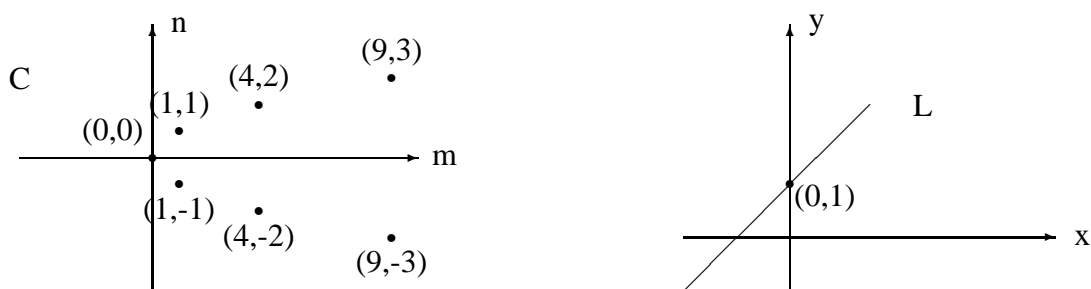


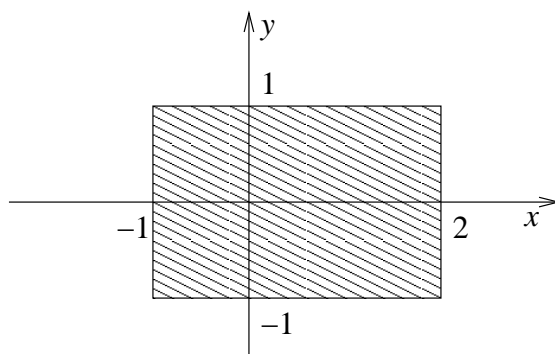
FIGURA 1. Representación de puntos en ejes cartesianos

FIGURA 2. Representación gráfica de los conjuntos C y L

Notemos que C es un conjunto infinito de puntos *separados*, pues sus coordenadas son números enteros, mientras que L es una recta continua de puntos.

También podemos graficar regiones del plano, como muestra la Figura 3, siendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}.$$

FIGURA 3. Representación gráfica del conjunto R .

Pueden ser también regiones no acotadas. Por ejemplo, la banda infinita

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq y < 3\},$$

representada en la Figura 4.

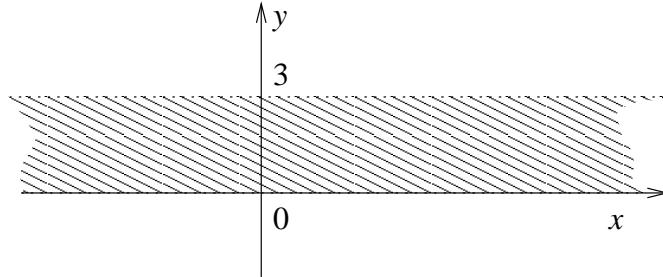


FIGURA 4. Representación gráfica del conjunto A .

La línea punteada en el borde superior de la banda indica que los puntos con segunda coordenada igual a 3 no pertenecen a A , mientras que la línea llena inferior indica que los puntos con segunda coordenada 0 sí pertenecen.

Siempre que representemos puntos o conjuntos de puntos en un diagrama cartesiano, debemos elegir una escala apropiada en cada uno de los ejes. La escala elegida dependerá del conjunto a representar. Por ejemplo, si queremos representar el conjunto

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 0,01, 0 \leq y \leq 0,005\}$$

será conveniente tener escalas en cada uno de los ejes en la que 0,01 y 0,005 puedan ser representados a una cierta distancia del 0. De lo contrario nuestra gráfica se parecerá más a un punto que a un rectángulo.

O si por ejemplo, queremos representar el conjunto

$$B = \{(x, y) \mid -10^6 < x < 10^6, y > 10^3\},$$

será conveniente usar escalas distintas en el eje de las abscisas que en el de las ordenadas, ya que 10^6 es mil veces el número 10^3 . (Figura 5).

También puede ocurrir que los datos que se quieren representar tienen una o ambas coordenadas muy alejadas del 0. En este caso se suele convenir que el punto de intersección de ambos ejes coordenados no sea el $(0, 0)$ sino otro punto. Este punto nuevamente dependerá del problema en cuestión.

Por ejemplo, si queremos representar

$$D = \{(x, y) \mid -1010 < x < -1000, y \leq 5\},$$

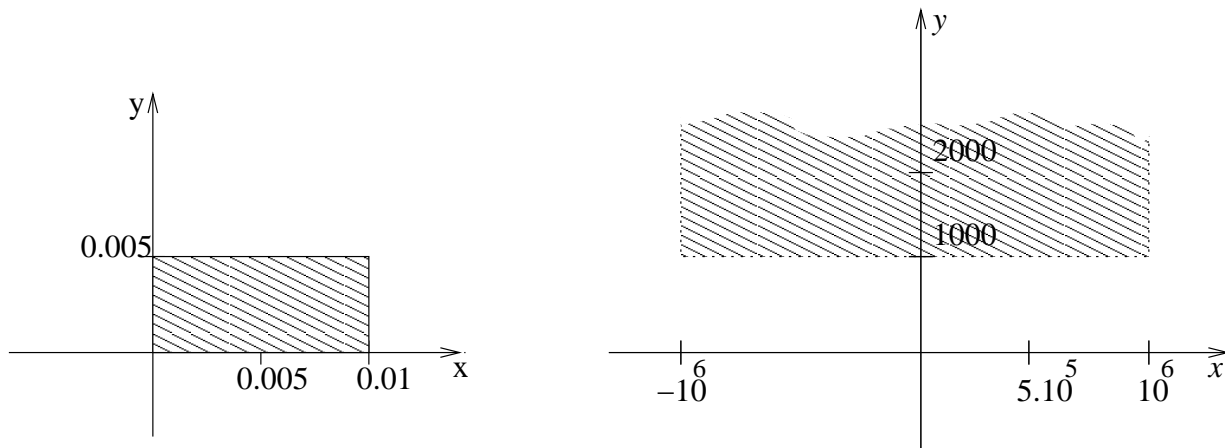


FIGURA 5. Uso de escalas apropiadas

será conveniente desplazar el origen en el eje de las x como muestra la Figura 6.

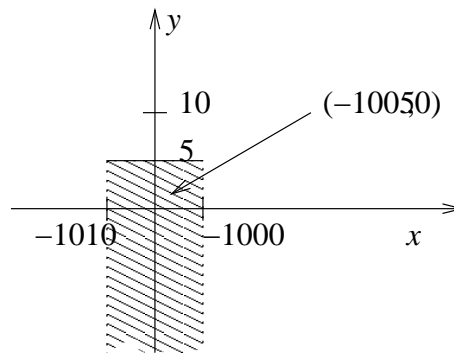


FIGURA 6. Desplazamiento del origen

En este caso hemos elegido las coordenadas de modo que el punto de intersección de los ejes corresponda al punto -1005 en el eje de las abscisas y a 0 en el eje de las coordenadas.

3. Ejercicios

1. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, d\}$.
 - a) Liste los pares ordenados de $A \times A$.
 - b) Liste los pares ordenados de $A \times B$.
 - c) Liste los elementos del conjunto $\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ y } x = y\}$
2. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 5, 10\}$ Describa por extensión los siguientes conjuntos:
 - (i) $\{(a, b) \in A \times B \mid a + b < 11\}$.

(ii) $\{(a, b) \in A \times B \mid a + b \geq 11 \text{ y } a + b \text{ es par}\}$.

3. Sea $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{0, 2, 4\}$.

a) ¿ Cuántos pares ordenados hay en $S \times T$? ¿ En $T \times S$?

b) Liste los elementos de

- 1) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m < n\}$
- 2) $\{(m, n) \mid (m, n) \in T \times S \text{ y } m < n\}$
- 3) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n \geq 3\}$
- 4) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m \cdot n \geq 4\}$
- 5) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n = 10\}$

c) Para cada uno de los ítems anteriores, represente el conjunto en un diagrama de ejes cartesianos.

4. Defina por extensión los subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ representados en la Figura 7:

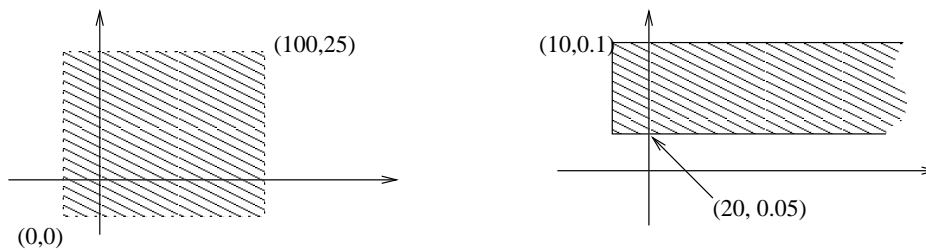


FIGURA 7

5. Grafique en ejes cartesianos las siguientes regiones o conjuntos:

- a) $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -2 < y < 3\}$ d) $\{(x, y) \mid x > 2\}$
 b) $\{(x, y) \mid x = 2\}$ e) $\{(x, y) \mid y < 3\}$
 c) $\{(x, y) \mid x \leq y\}$ f) $\{(x, y) \mid 0 < x < y\}$

g) El conjunto de puntos interiores del triángulo con vértices en $(-1, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, 0)$

6. Describa por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- a) El eje de las ordenadas.
 b) El eje de las abscisas.
 c) El segundo cuadrante.
 d) El conjunto de puntos interiores al rectángulo con vértices en $(-1, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, -1)$ y $(2, 3)$.
 e) El borde del rectángulo dado en el ítem 6d.

7. Elija escalas adecuadas en cada uno de los ejes como así también el punto de intersección de los mismos para representar los siguientes conjuntos:

- a) $\{(x, y) \mid -5000 \leq x \leq 500, y \leq 1\}$
 b) $\{(x, 10^4) \mid -200 < x < 500\}$
 c) $\{(10^4, 10^4 + 1), (10^4, 10^4 + 2), (10^4 + 1, 10^4 - 3), (10^4 - 2, 10^4 - 6)\}$
 d) $\{(0,5, 0,6), (0,5, 0,7), (0,2, -0,3), (0,05, -0,125)\}$

8. Considere los conjuntos:

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 4\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x + 3y = 9\} \text{ y}$$

$$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}.$$

Describa y grafique los siguientes conjuntos:

- (a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$
 (c) $B \cap C$ (d) $A^c \cup C^c$

CAPÍTULO 4

LÓGICA

Uno de los procesos por los cuales adquirimos conocimiento es el proceso de razonamiento. A su vez, hay una variedad de modos o formas mediante las cuales razonamos o argumentamos a favor de una conclusión. Ciertas formas de razonamiento parecen mostrar que si se suponen ciertas premisas, entonces la conclusión se sigue necesariamente. A tales razonamientos se los ha denominado deductivos y forman el objetivo central de lo que clásicamente se ha denominado lógica.

En un sentido amplio, el término *lógica* hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscripto al estudio del razonamiento deductivo.

Cierto tipo de razonamiento deductivo se basa en la lógica proposicional. Lo que caracteriza a la lógica proposicional es que toma como unidades básicas a las proposiciones y que tiene en cuenta cómo se combinan entre ellas por medio de conectivos lógicos para formar argumentos válidos.

1. Proposiciones

Una *proposición* es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. También podríamos decir que una proposición es una sentencia que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes. Por ejemplo:

- Hoy es sábado.
- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25 + 24 = 49$.
- Juan va al trabajo en tren .

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla < ENTER >

no son proposiciones puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

La veracidad V o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* y viene dada por algún criterio independiente de la proposición.

Algunas proposiciones parecieran tener distintos valores de verdad según el caso. Por ejemplo, si decimos: *Hoy es sábado*, es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábados. O por ejemplo, *Nalbandián ganó* depende de qué partido nos estemos refiriendo. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la información que está implícita. La palabra *hoy* está indicando una fecha particular, aunque no se esté diciendo explícitamente cuál. Un titular en un periódico que diga *Nalbandián ganó*, se está refiriendo a un determinado partido.

2. Conectivos lógicos

En el cálculo proposicional se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r, \dots para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: \neg , la conjunción: \wedge , la disyunción: \vee , la disyunción exclusiva: $\underline{\vee}$, la implicación: \Rightarrow y la doble implicación: \Leftrightarrow . La negación modifica *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los otros se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

EJEMPLO 4.1. Consideremos las proposiciones p : “4 es positivo” y q : “ $\sqrt{2}$ es racional”. Algunas posibles combinaciones de p y q son:

$$\begin{aligned}\neg p &: 4 \text{ **no** es positivo.} \\ p \wedge q &: 4 \text{ es positivo **y** } \sqrt{2} \text{ es racional.} \\ \neg p \wedge q &: 4 \text{ **no** es positivo **y** } \sqrt{2} \text{ es racional.} \\ p \vee q &: 4 \text{ es positivo **o** } \sqrt{2} \text{ es racional.} \\ p \Rightarrow q &: \text{Si } 4 \text{ es positivo **entonces** } \sqrt{2} \text{ es racional.} \\ p \Leftrightarrow q &: 4 \text{ es positivo **si y sólo si** } \sqrt{2} \text{ es racional.}\end{aligned}$$

3. Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.

La *negación* es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera.

EJEMPLO 4.2. Si p simboliza la proposición *estamos en la clase de Álgebra*, entonces $\neg p$ es *no estamos en la clase de Álgebra*.

En la siguiente tabla mostramos la relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Una tabla de este tipo, en la que se listan simultáneamente los valores de verdad de la proposición p y la que resulta de aplicar un conectivo se llama *tabla de verdad*.

EJEMPLO 4.3. Consideremos la proposición

p : “10 es múltiplo de 5”.

Entonces el valor de p es V . Su negación debe ser una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, por lo tanto $\neg p$ debe expresar exactamente lo contrario a lo que expresa p :

$\neg p$: “10 no es múltiplo de 5”.

EJEMPLO 4.4. Consideremos la proposición

q : “Todos los perros son blancos”.

No debe confundirse la negación con decir algo diferente, por ejemplo

r : “Algunos perros son blancos”.

La proposición r no es la negación de q , puesto que si q es verdadera también r lo es.

Si decimos

s : “Ningún perro es blanco”

tampoco s es la negación de q , puesto que si existiera un único perro de color blanco y los demás fueran marrones, entonces tanto q como s serían proposiciones falsas.

La negación de q puede ser enunciada de la siguiente manera:

$\neg q$: “Algunos perros no son blancos”.

Así, si q es verdadera, $\neg q$ es falsa, mientras que si $\neg q$ es verdadera entonces q es falsa.

4. Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que un solo término de la conjunción sea falso para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la ‘y’, de comas o de una combinación de éstas, o palabras como ‘pero’. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene mar.

La siguiente tabla corresponde a la tabla de verdad de la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 4.5. Si p es “algunas aves vuelan” y q es “el gato es un ave”, entonces $p \wedge q$ expresa “algunas aves vuelan y el gato es un ave”, que es obviamente falsa pues los gatos no son aves. Por otro lado la proposición $p \wedge \neg q$ que dice “algunas aves vuelan y el gato no es un ave” es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

5. Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y la *disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\underline{\vee}$.

La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas y se indica con el símbolo \vee . En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el “o inclusivo”. A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es excluyente o incluyente. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

“Los alumnos regularizan la materia si aprueban tres parciales o si aprueban dos parciales y tienen un 80 % de asistencia.”

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si en un restaurante con menú fijo se nos dice que tenemos como postre ‘helado o flan’ normalmente no significa que podamos pedir ambos, siendo en este caso la disyunción exclusiva.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es incluyente (excluyente respectivamente) terminando la frase con *o ambas* (respectivamente *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \underline{\vee} q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \underline{\vee} q$	p	q	$p \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

6. Los conectivos y las operaciones entre conjuntos

Recordemos que la unión entre conjuntos se define como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Dado que el nexos o no es excluyente, podemos utilizar la notación lógica y escribir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

De manera análoga, la intersección entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

A su vez, fijado un conjunto universal \mathcal{U} , el complemento de un conjunto A se define como

$$A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}.$$

7. Propiedades de la conjunción y la disyunción

Los conectivos lógicos binarios combinan, como su nombre lo indica, dos proposiciones. Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q = q \wedge p, \quad p \vee q = q \vee p \quad \text{y} \quad p \underline{\vee} q = q \underline{\vee} p.$$

Si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, entonces no importa cuál es el orden en que se realicen las operaciones. Por ejemplo, la conjunción entre tres proposiciones p , q y r :

$$p \wedge q \wedge r$$

puede efectuarse operando $(p \wedge q) \wedge r$ o $p \wedge (q \wedge r)$. Es decir, la conjunción y la disyunción son operaciones *asociativas*.

En cambio, si utilizamos dos o más conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r ; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si $p = F$, $q = V$ y $r = V$, entonces $(p \wedge q) \vee r = V$ y $p \wedge (q \vee r) = F$, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$.

Las siguientes propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes, y se dejan como ejercicio para el lector.

Propiedad asociativa

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Propiedad distributiva

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Leyes de Morgan

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

8. Ejercicios

1. Evalúa cada proposición según los valores de verdad $p = F$, $q = V$, $r = F$.

a) $p \vee q$

c) $\neg p \vee q$

e) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

b) $\neg p \vee \neg q$

d) $p \vee \neg(q \wedge r)$

f) $\neg p \wedge (q \vee r)$

2. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indica si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribe correctamente la negación.

a) El pizarrón es verde.

j) $b \in A \cap B$

b) 4 es múltiplo de 8.

k) $c \in A^c$

c) El conjunto A tiene un solo elemento.

l) $d \notin G^c$

d) A es un conjunto vacío.

a) El pizarrón es negro.

e) $a \leq b$

b) 4 no es múltiplo de 8.

f) $a \geq b$

c) El conjunto A es vacío.

g) $a < b \leq c$

d) A tiene al menos un elemento.

h) $a < b \leq c$

e) $a > b$

i) $a \in A \cup B$

f) $a \leq b$

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| <i>g)</i> $a > b \geq c$ | <i>j)</i> $b \in (A \cap B)^c$ |
| <i>h)</i> $a \geq b \text{ o } b > c$ | <i>k)</i> $c \in A$ |
| <i>i)</i> $a \in A^c \cup B^c$ | <i>l)</i> $d \in G$ |

3. Suponga que a , b y c son números reales. Represente en forma simbólica los enunciados dados tomando: $p : a < b$, $q : b < c$, $r : a < c$.
- a)* $a < b < c$.
 - b)* $(a \geq b \text{ y } b < c) \text{ o } a \geq c$.
 - c)* No es cierto que $(a < b \text{ y } a < c)$.
 - d)* (No es verdad que $(a < b \text{ y } (a < c \text{ o } b < c))$) o $(a \geq b \text{ y } a < c)$.
4. Suponiendo p y q verdaderos, y r y s falsos, indica los valores de verdad de las siguientes expresiones:
- a)* $p \vee (q \wedge r)$
 - b)* $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$
 - c)* $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$
5. Compruebe a través de las tablas de verdad, las propiedades distributivas de la disyunción y de la conjunción, y las leyes de Morgan.

CAPÍTULO 5

CUANTIFICADORES

1. Funciones proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

q : El perro es un animal.

r : La rosa es un animal.

s : La vaca es un animal.

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* “es un animal”, y tienen diferente el *sujeto*. La frase “es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

x es un animal

obtenemos una oración que no es una proposición dado que su valor de verdad dependerá del valor de x . Así, si a x le damos el valor $x = \text{“El perro”}$ obtenemos la proposición

El perro es un animal

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor $x = \text{“La rosa”}$ obtenemos la proposición

La rosa es un animal

que es falsa.

En este ejemplo, la frase

x es un animal

es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso*. Entonces, las funciones proposicionales *no* son proposiciones, pero para cada valor que le demos a x obtenemos una proposición. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$P(x)$: x es un animal.

También podemos tener funciones proposicionales con más de una variable, por ejemplo

x es mayor que y .

El valor de verdad en estos casos dependerá de los valores que tomen las variables x e y . Así, si $x = 0$ e $y = 3$, la proposición *0 es mayor que 3* es falsa, mientras que si $x = 4$ e $y = \pi$, la proposición *4 es mayor que π* es verdadera.

2. Cuantificadores

Los *cuantificadores* nos permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$$P(x) : x \text{ es mayor que } 0,$$

podemos particularizar esto diciendo:

$$\text{Existe un número real que es mayor que } 0,$$

o generalizarlo diciendo

$$\text{Todos los números reales son mayores que } 0.$$

Notemos que tanto en la particularización como en la generalización se especifica un conjunto en donde toma valores la variable, en este ejemplo el conjunto son los números reales.

Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid x > 0,$$

que se lee *existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que x es mayor que 0*; mientras que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

se lee *para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que x es mayor que 0*.

El símbolo \forall se llama *cuantificador universal* y el símbolo \exists es el *cuantificador existencial*

Como ya lo hemos afirmado, un cuantificador transforma una función proposicional en una proposición, a la cual se le asigna un valor de verdad.

EJEMPLO 5.1. Consideremos la función proposicional $P(x)$: $2x$ es par. Entonces la proposición

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

es decir, “para todo n natural se cumple que $2 \cdot n$ es par”, es equivalente a enunciar

$$2 \cdot 1 \text{ es par y } 2 \cdot 2 \text{ es par y } 2 \cdot 3 \text{ es par y } 2 \cdot 4 \text{ es par y } \dots$$

Por lo tanto esta proposición será verdadera si todas las proposiciones $P(n)$ son verdaderas, y será falsa si al menos una de ellas es falsa.

EJEMPLO 5.2. Dada la función proposicional

$$P(x) : x \text{ es un número mayor que } 1,$$

entonces la proposición

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$$

nos está enunciando que cualquiera sea el número natural x , se cumple que x es mayor que 1. Por lo tanto la proposición es falsa ya que 1 es un número natural que no es mayor que 1, es decir, la proposición $P(1)$ es falsa. No importa que para todos los demás valores de x la proposición $P(x)$ sea verdadera.

Si aplicamos el cuantificador existencial y enunciamos

$$\exists x \in \mathbb{N} \mid P(x),$$

es equivalente a enunciar

1 es mayor que 1 o 2 es mayor que 1 o 3 es mayor que 1 o 4 es mayor que 1 o ...

y así siguiendo. Esta proposición es verdadera, pues al menos existe un número natural, por ejemplo el 3, para el cual se cumple $P(3)$ verdadero, es decir, 3 es mayor que 1.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición

$$\forall x \in A, P(x)$$

es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *todos* los $a \in A$.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición

$$\exists x \in A \mid P(x)$$

es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *algún* $a \in A$.

3. Negación de cuantificadores

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que a su vez puede describirse con un cuantificador. La proposición $p : (\forall x)P(x)$ es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadero para todo x . Su negación es una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, y que es verdadera siempre que p sea falsa.

Luego $\neg p$ es la proposición que es verdadera si $P(x)$ es falsa para algún valor de x , y que es falsa si $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x . Dicho de otro modo, es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para algún valor de x , es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para todos los valores de x . Luego

$$\neg (\forall x, P(x)) \equiv \exists x \mid \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Todos los números son positivos* es: *existe un número que no es positivo*.

Análogamente, la negación de la proposición $\exists x \mid P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(x)$ es falsa para todo x , y falsa si $P(x)$ es verdadera para algún x . Equivalentemente, $\neg(\exists x \mid P(x))$ es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para todo x , y es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para algún x . Luego

$$\neg(\exists x \mid P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Existe un número que es primo* es la proposición: *Todos los números cumplen que no son primos*, o lo que coloquialmente es equivalente: *Ningún número es primo*.

4. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes proposiciones analice el valor de verdad de las mismas y escriba, en forma simbólica, su negación. Asuma que las variables toman valores en el conjunto de los números reales.

- | | |
|--|---|
| a) $\exists x, 3 \cdot x - 2 = -4x + 1$ | i) $\forall x, x + x = 0$ |
| b) $\forall x, 3 \cdot x - 2 \neq -4x + 1.$ | j) $\forall x, (\exists y \mid x^2 + y^2 = (x + y)^2)$ |
| c) $\exists x \mid x^2 + x + 1 = 0$ | k) $\forall x, (\forall y, x + y = y + x)$ |
| d) $\forall x, (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$ | l) $\exists x \mid (\forall y, x + y = 0)$ |
| e) $\exists x \mid x^2 + 1 \geq 0$ | m) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 2$ |
| f) $\forall x, x^2 + 3x + 2 = 0$ | n) $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{9}{8} < x < \frac{5}{4}$ |
| g) $\exists x \mid x = -x$ | ñ) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{3}{2} \text{ o } x \geq \frac{8}{5}$ |
| h) $\exists x \mid x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 1)$ | |

2. Escriba las siguientes frases con notación lógica y escriba también sus negaciones. Cuando use cuantificadores especifique los universos, utilice \mathbb{R} si no se especifica ningún universo:

- a) Para toda $x > 0$, existe n en \mathbb{N} tal que $n > x$ y $x > 1/n$.
- b) Para toda $m, n \in \mathbb{N}$ existe p en \mathbb{N} tal que $m < p$ y $p < n$.
- c) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $un = n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
- d) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$.
- e) Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n$ y $n < 2^{m+1}$.

CAPÍTULO 6

OTROS CONECTIVOS

1. Condicional o implicación

Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: “si se cumple p entonces se cumple q ”, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con \Rightarrow .

EJEMPLO 6.1. Supongamos que para regularizar cierta materia es necesario contar con el 80 % de asistencia. Entonces podemos conectar las proposiciones

p : “He regularizado la materia”,

q : “He asistido al 80 % de las clases”,

con el conectivo condicional \Rightarrow :

$p \Rightarrow q$: Si he regularizado la materia entonces he asistido al 80 % de las clases.

La proposición q en la implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es lo que se afirma que ocurre si se cumple la proposición p . También decimos que p es el *antecedente* y q es el *consecuente*. El condicional es verdadero si el antecedente p es falso, o si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos. La implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es falsa sólo si p es verdadera y q es falsa.

La siguiente tabla corresponde a los valores de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En una implicación $p \Rightarrow q$, p es la *condición suficiente* para q y q es la *condición necesaria* para p . Es decir, es *suficiente* que ocurra p para que ocurra q , y *necesariamente* ocurrirá q si ocurre p .

A diferencia de los otros conectivos, la tabla de verdad del condicional no se condice con el uso que hacemos de este tipo de expresiones en el lenguaje natural. Por ejemplo, para el lenguaje cotidiano, la expresión: *Si llueve entonces Juan usa paraguas* pareciera que indica que

si no llueve entonces Juan no usa paraguas. Es decir, no sería verdadera la proposición si el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Sin embargo, para la lógica esto es verdadero.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*. Las tablas de verdad para $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$ y $\neg q \Rightarrow \neg p$ son:

p	q	$q \Rightarrow p$	p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$	p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son *lógicamente equivalentes*.

Debemos notar que hay otras formas de expresar un condicional que no es necesariamente el *si ... entonces*. Los siguientes ejemplos también son condicionales de la forma $p \Rightarrow q$:

- *Viajo en taxi si estoy apurado.* (p : “Estoy apurado”, q : “Viajo en taxi”.)
- *Sólo si es sábado voy al cine.* (p : “Voy al cine”, q : “Es sábado”.)
- *Es suficiente que llueva para que me quede en casa.* (p : “LLueva”, q : “Me quedo en casa”.)

2. Bicondicional o doble implicación

Una proposición bicondicional será verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee *p si y sólo si q*. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

EJEMPLO 6.2. Supongamos que para aprobar un parcial de Álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples

p : “Apruebo un parcial”,

q : “La nota es mayor que 4”,

y el conectivo \Leftrightarrow formamos la proposición compuesta

$$p \Leftrightarrow q: \text{“ Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4”}.$$

La siguiente tabla corresponde a la doble implicación $p \Leftrightarrow q$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta tabla coincide con la tabla de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

3. Argumentos y demostraciones

En las futuras clases de álgebra, análisis, y otras materias de nuestras carreras, veremos a menudo enunciados con el nombre de Teoremas, Lemas, Proposiciones, Corolarios, etc. Este tipo de enunciados afirman que dadas ciertas hipótesis se cumple una conclusión. Estos enunciados no son decretos ni leyes, sino que deben ser demostrados, y la demostración o prueba de los mismos hace uso de la lógica. Por ejemplo, si afirmamos que *si un número es múltiplo de 4 entonces es múltiplo de 2*, esto tiene como hipótesis que cierto número es múltiplo de 4, y como conclusión que el número es múltiplo de 2.

Para demostrar que la conclusión es cierta, se suelen usar uno de los siguientes caminos: la demostración directa o la demostración indirecta. La demostración directa es aquella que nos muestra que siempre que las hipótesis sean verdaderas se cumple que la conclusión lo es. Por ejemplo, si un número n es múltiplo de 4, es porque $n = 4 \cdot k$, para cierto entero k . Pero entonces $n = (2 \cdot 2) \cdot k$, y por la asociatividad del producto resulta $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$, es decir que n es múltiplo de 2.

En la demostración indirecta o demostración por el absurdo se hace uso del hecho que la implicación $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$. Es decir, se demuestra que siempre que el consecuente es falso también el antecedente lo es. Así, en nuestro ejemplo, deberíamos probar que si n no es múltiplo de 2 entonces tampoco es múltiplo de 4.

No es el objetivo de este curso *aprender a probar o a demostrar*, pero al menos dar una breve introducción sobre qué significa hacer la demostración o prueba de un teorema u otro enunciado, ya que muy pronto veremos muchos de estos casos y diversas formas de demostrar.

Por ejemplo, en los ejercicios y futuros exámenes, suelen aparecer preguntas del tipo: determine si el siguiente enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta dando una prueba o un contraejemplo, según corresponda.

¿Qué significa esto?

Justificar dando una *prueba* significa dar una demostración directa o indirecta de lo que queremos probar; es decir, argumentar que a partir de las hipótesis y siguiendo un razonamiento lógico se puede llegar a la conclusión, o bien mostrar que si la conclusión no es cierta entonces alguna de las hipótesis no se cumple.

En cambio la justificación mediante un *contraejemplo* consiste en dar un ejemplo en el cual se cumplen las hipótesis pero no se cumple la conclusión.

Por ejemplo, ante la afirmación *si un número es natural entonces es par*, basta con notar que el número 3, que cumple con la hipótesis de ser natural, no es un número par. Este contraejemplo sirve para mostrar que la afirmación es falsa.

4. Combinación de proposiciones con conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$(4.1) \quad p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (4.1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. La conexión \neg tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de las conexiones binarias el orden de prioridades, de mayor a menor, es \wedge , \vee , \Rightarrow y \Leftrightarrow . Pese a que la prioridad de \wedge es mayor que la de \vee , suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre \Rightarrow y \Leftrightarrow . Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión (4.1) es ambigua, y debe distinguirse si se trata de $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos.

EJEMPLO 6.3. Dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

5. Ejercicios

1. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:

p : “está lloviendo”

q : “el sol está brillando”

r : “hay nubes en el cielo”.

Traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

a) Está lloviendo y el Sol está brillando”.

b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.

c) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.

d) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.

e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.

2. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traduzca lo siguiente a oraciones en español.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

b) $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$

c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

d) $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$

e) $\neg(p \vee q) \wedge r$

3. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?
- Si llueve entonces Juan usa paraguas.
 - Si Juan usa paraguas entonces llueve.
 - Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
 - Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
 - Si no llueve entonces Juan usa paraguas.
4. Escriba la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones:
- Si 4 es par entonces $1 > 0$.
 - $2 + 3 = 5$ si $1 + 1 < 3$.
 - Si 4 es impar entonces $1 > 0$.
 - Si $1 + 1 < 3$ entonces $2 = 4$.
5. Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.
- Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$.
 - Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 8$.
 - Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 6$.
 - Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 6$.
6. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indica los valores de verdad para
- $p \wedge q$
 - $p \vee q$
 - $q \Rightarrow p$
7. Sabiendo que la proposición compuesta $(\neg q) \vee (q \Rightarrow p)$ es falsa, indique cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q .
8. Indique para qué valores de verdad de p y q resulta verdadera la proposición compuesta $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$.
9. Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:
- $\neg(p \wedge q)$
 - $\neg(p \vee q)$
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge q)]$
 - $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$
 - $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg q \wedge p)$
 - $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$
 - $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

