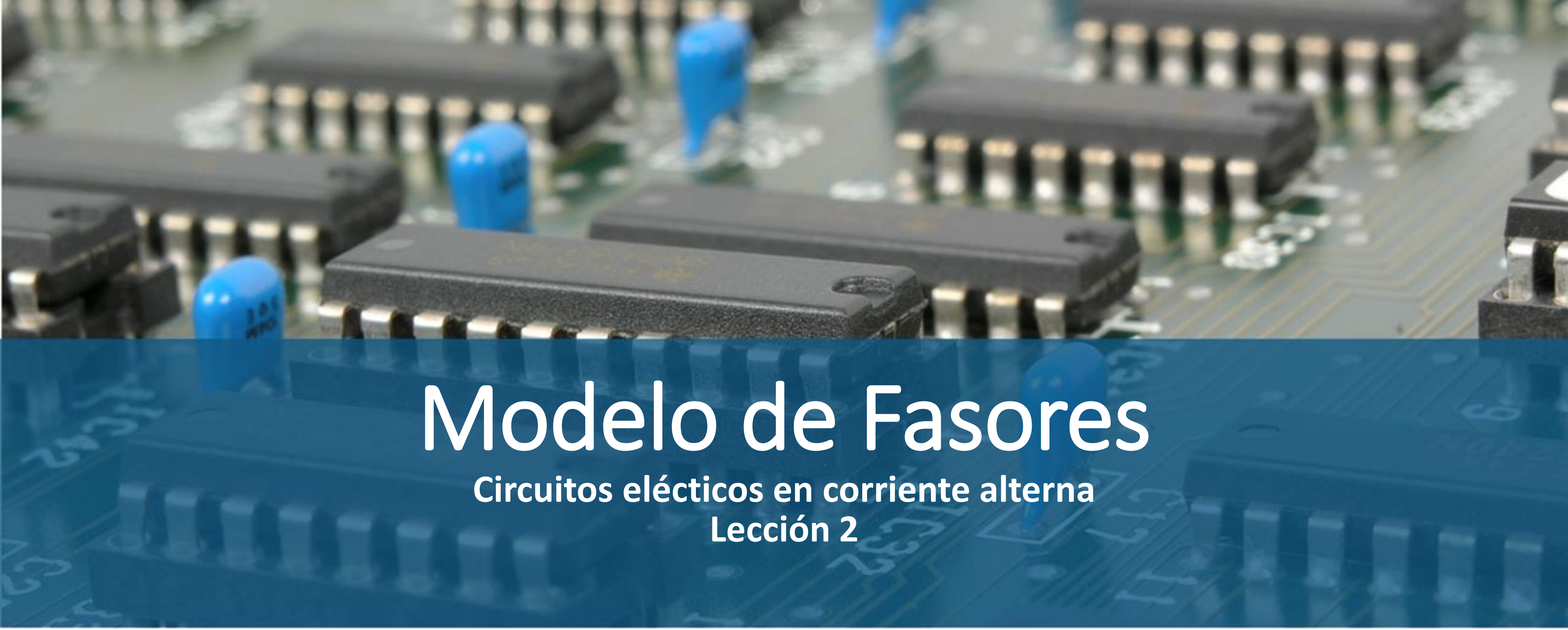


Modelo de Fasores

Circuitos elécticos en corriente alterna

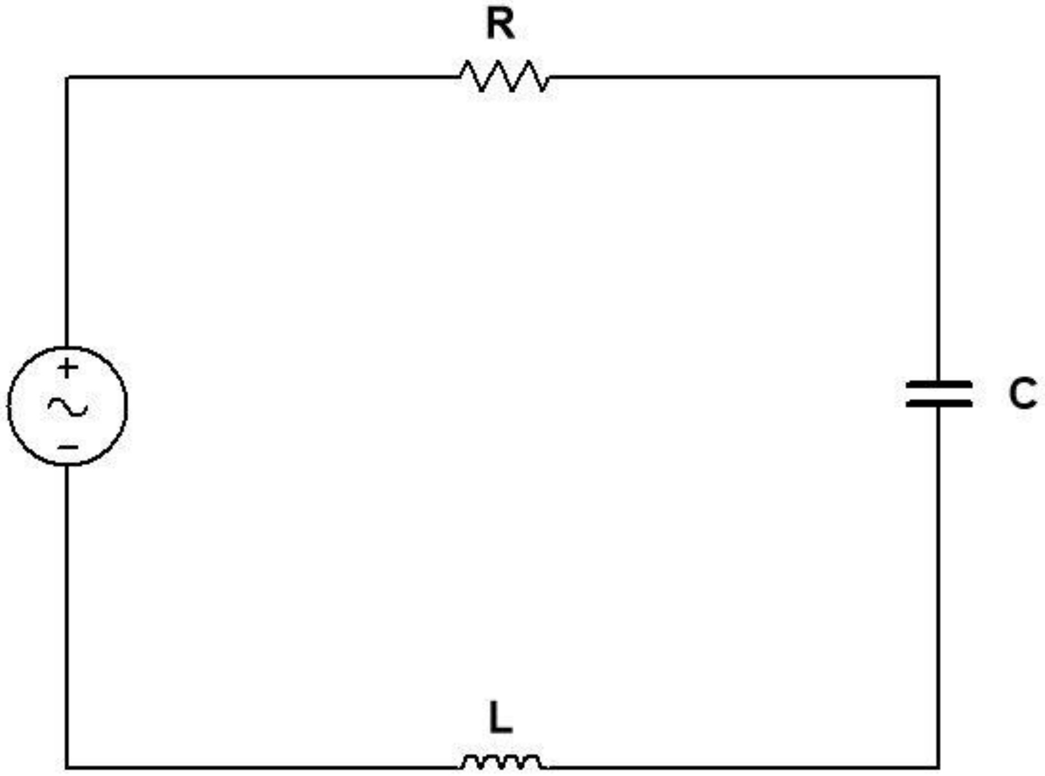
Lección 2

edX | Galileo UNIVERSIDAD La Revolución en la Educación

Circuito AC

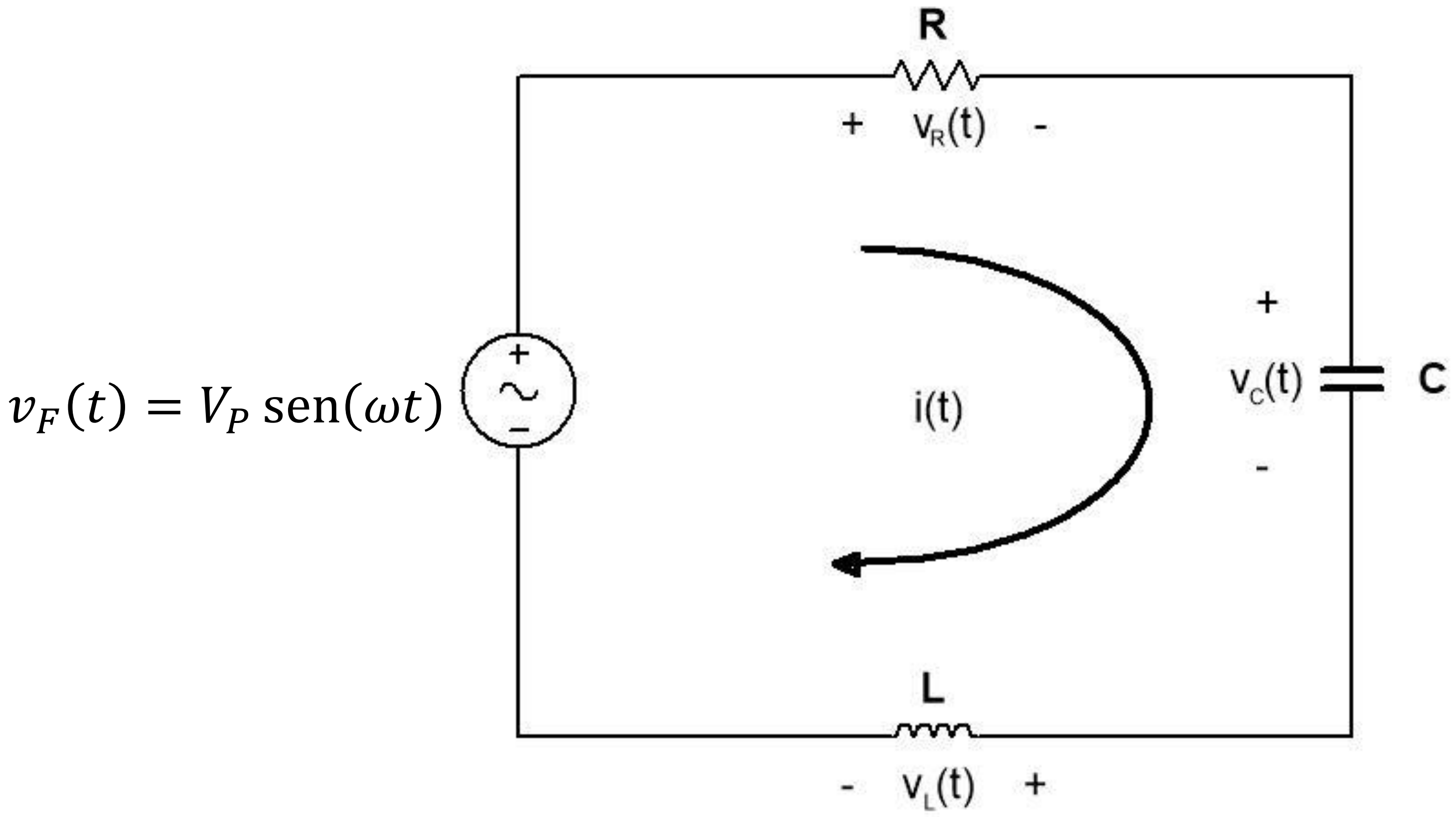
- Para entender en qué consiste el modelo de fasores veamos el siguiente circuito:

$$v_F(t) = V_P\,\mathrm{sen}(\omega t)$$



Circuito AC

Supongamos que deseamos encontrar una expresión para la corriente del circuito. El primer paso sería aplicar la Ley de Voltajes de Kirchhoff.



Circuito AC

- Si comenzamos en el nodo de la esquina inferior izquierda y recorremos el circuito en el sentido de las agujas del reloj, la sumatoria de voltajes quedaría de la siguiente manera:

$$v_F(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$$

- Despejando:

$$v_F(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t)$$

Circuito AC

- Para encontrar el voltaje en un resistor utilizamos la ley de Ohm:

$$v_R(t) = i(t)R$$

- El voltaje en un capacitor es:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

Circuito AC

- El voltaje en un inductor es:

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Circuito AC

- Sustituyendo,

$$V_P\,\mathrm{sen}(\omega t) = i(t)R + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L\frac{di(t)}{dt}$$

- La ecuación queda lista para encontrar la expresión de $i(t)$, pero es una Ecuación Diferencial de Segundo Orden que require de cierto trabajo para resolver.

- Para encontrar la solución de una manera más rápida y sencilla utilizaremos el modelo de fasores.

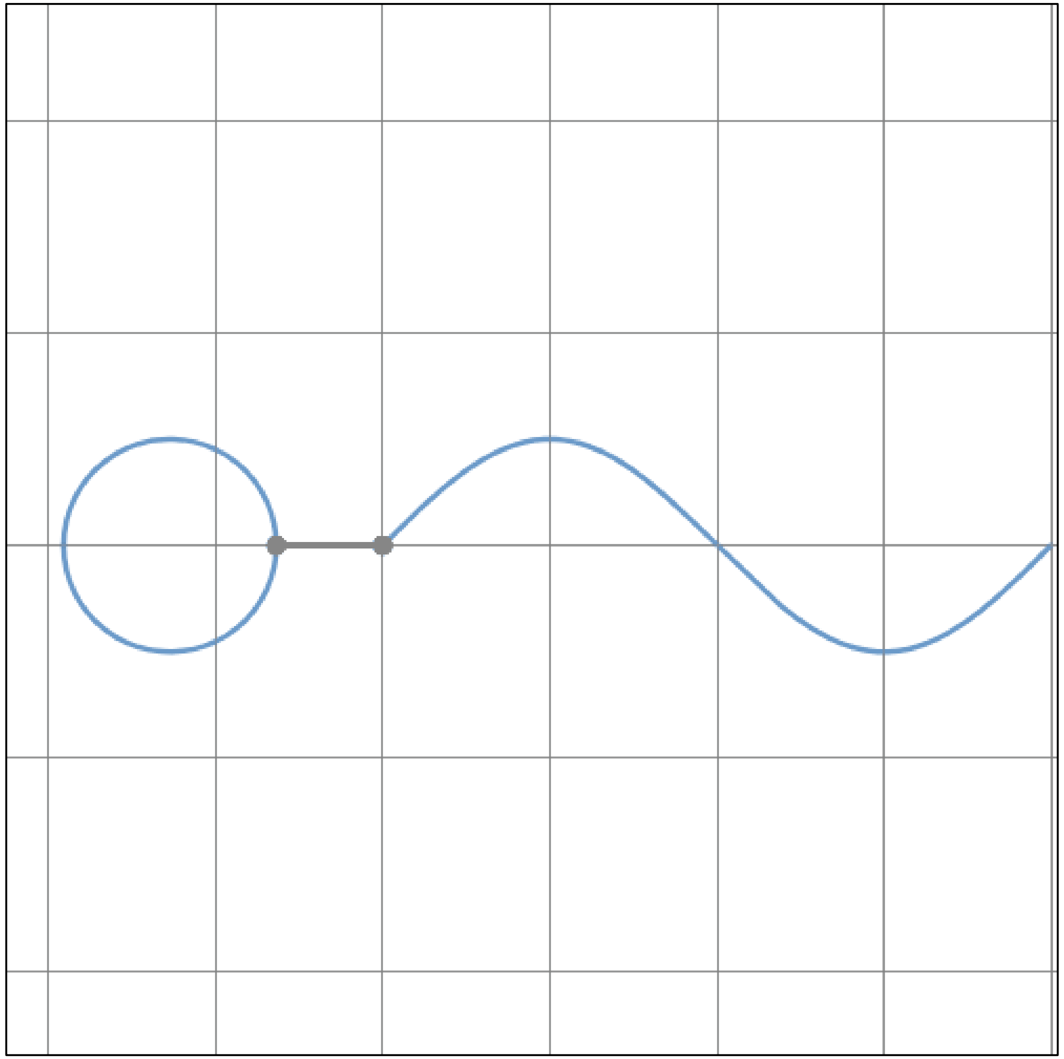
Modelo de Fasores

- Consiste en convertir todos lo elementos de la ecuación que están en términos del tiempo a fasores representados como números complejos.

- Esto es posible ya que un fasor es una manera de representar una oscilación.

- Una vez el circuito está en su modelo de fasores se pueden utilizar todas las herramientas para resolver circuitos que aplican en corriente directa utilizando aritmética de número complejos y/o fasores.

Modelo de Fasores

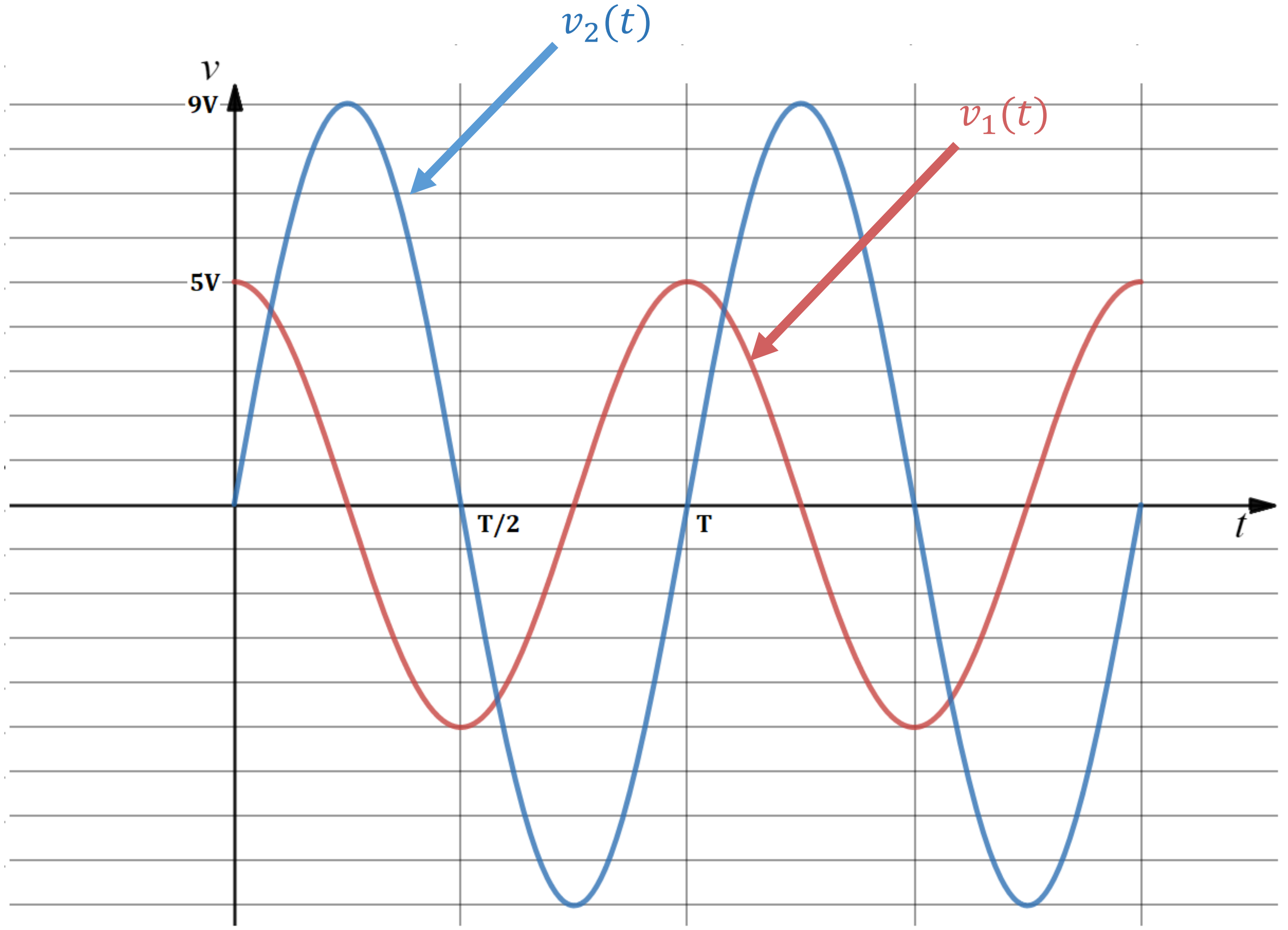


¿Por qué utilizar modelo de fasores?

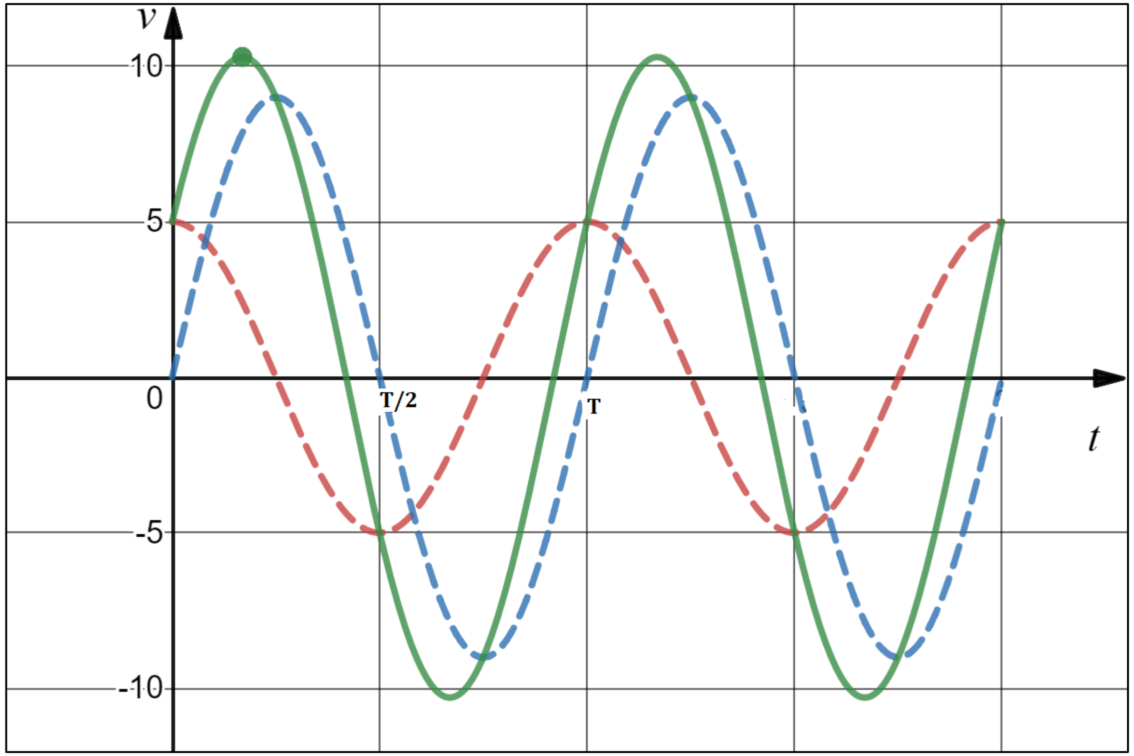
- Para ver lo conveniente que es utilizar el modelo de fasores supongamos que tenemos dos ondas sinusoidales que deseamos sumar:

$$v_1(t) = 5V\,\mathrm{sen}(\omega t + 90°)$$

$$v_2(t) = 9V\,\mathrm{sen}(\omega t)$$



$v_2(t)$
$v_1(t)$
v
9V
5V
T/2
T
t



- El resultado de la suma de los dos sinusoides es la línea solida, vemos que la amplitud es 10.3V y la fase 30° aproximadamente.

¿Por qué utilizar modelo de fasores?

- Para convertir ambas señales lo que necesitamos calcular el valor RMS de las dos señales, este será la magnitud del fasor y nos interesa el ángulo de fase.
- Para trabajar con fasores las señales deben tener la misma frecuencia.

$$v_1(t) = 5V\ \mathrm{sen}(\omega t + 90°) \rightarrow \quad 3.54V\angle 90°$$

$$v_2(t) = 9V\ \mathrm{sen}(\omega t) \rightarrow \ 6.36V\angle 0°$$

¿Por qué utilizar modelo de fasores?

- Si se suman ambos números complejos pasando ambos a su forma rectangular y luego el resultado a forma polar, el resultado de dicha suma es:

$$3.54V\angle 90° + 6.36V\angle 0° = j3.54V + 6.36V = 6.36V + j3.54V$$

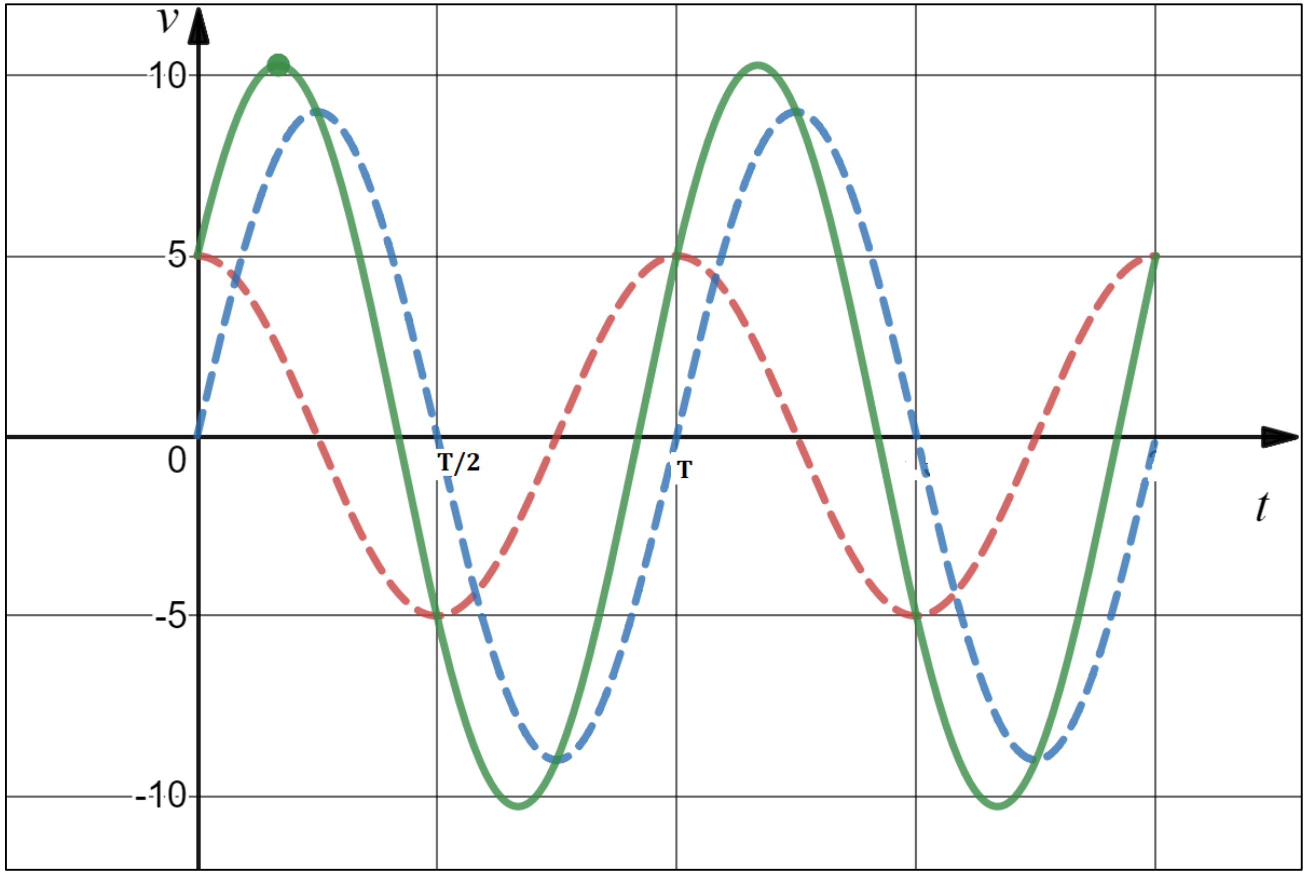
$$6.36V + j3.54V = 7.28V\angle 29.1°$$

¿Por qué utilizar modelo de fasores?

- Ahora, si convertimos ese fasor a su expresión en función del tiempo obtendremos el sinusoide resultante:

$$v_T(t) = \left(\sqrt{2}\right)(7.28V)\,\mathrm{sen}(\omega t + 29.1°)$$

$$v_T(t) = 10.3V\,\mathrm{sen}(\omega t + 29.1°)$$



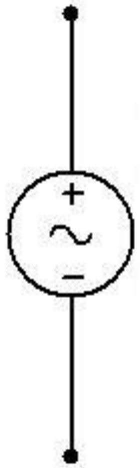
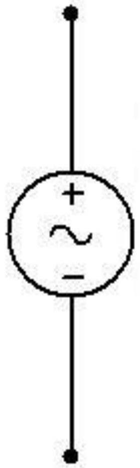
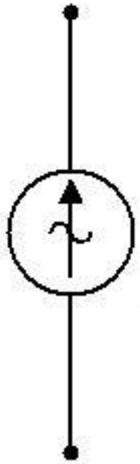
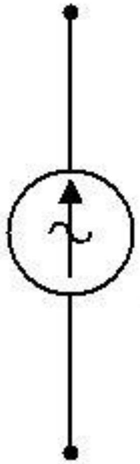
Podemos ver que encontramos la onda resultante de una manera mucho más fácil usando fasores.

¿Por qué utilizar modelo de fasores?

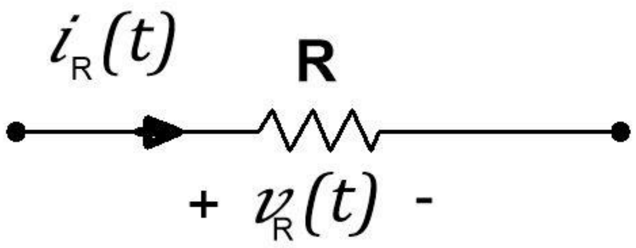
El ejemplo anterior demuestra que se puede llevar acabo una suma de dos sinusoides de manera sencilla utilizando aritmética de fasores.

Lo mismo sucederá al utilizar este método en circuitos en corriente alterna.

Modelación Fuentes de Voltaje y Corriente con Fasores

Dominio del Tiempo		Modelo utilizando Fasores	
$v_F(t) = Vp\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$		$V_F = \dfrac{\sqrt{2}\,Vp}{2}\angle\theta$	
$i_F(t) = Ip\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$		$I_F = \dfrac{\sqrt{2}\,Ip}{2}\angle\theta$	

Modelación del Resistor



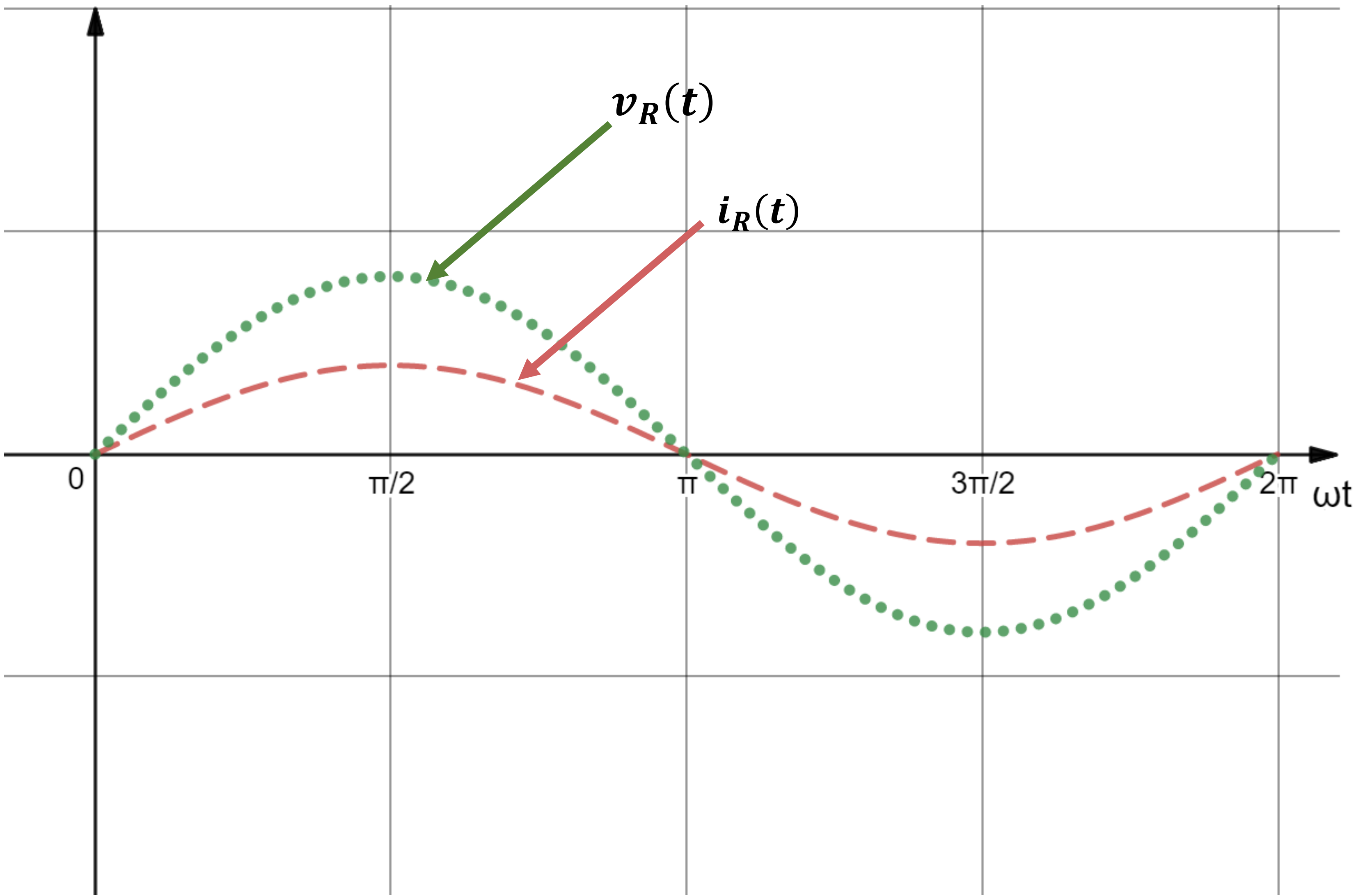
- Supongamos que:

$$v_R(t) = V_P \operatorname{sen}(\omega t)$$

- Sabemos por ley de Ohm que:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_P}{R}\operatorname{sen}(\omega t)$$

- En un resistor el voltaje y la corriente siempre estarán en fase (tienen el mismo ángulo de fase, 0°).


$v_R(t)$
$i_R(t)$
0
π/2
π
3π/2
2π
ωt

Modelación del Resistor

Voltaje y Corriente en el resistor en modelo de fasores:

$$V_R = \frac{\sqrt{2}\,V_P}{2} \angle 0°$$

$$I_R = \frac{\sqrt{2}\,V_P}{2\,R} \angle 0°$$

Modelación del Resistor

Utilizando ley de Ohm encontraríamos la oposición al paso de corriente de un resistor en el modelo de fasores.

$$\frac{V_R}{I_R} = \frac{\frac{\sqrt{2}\,V_P}{2}\angle 0°}{\frac{\sqrt{2}\,V_P}{2\,R}\angle 0°} = R\angle 0°$$

Modelación del Resistor

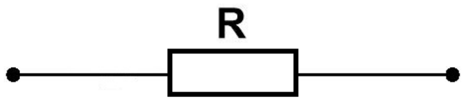
Tenemos que un resistor en el modelo de fasores es

Forma Polar	Forma Rectangular
$R\angle 0°$	R

Modelación del Resistor

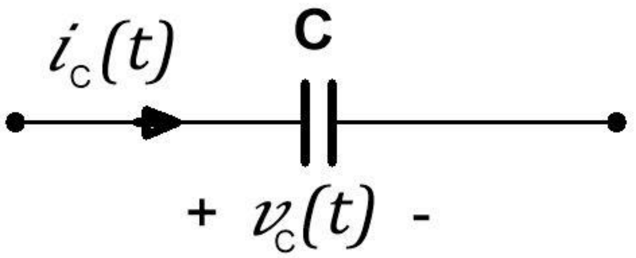
A continuación tenemos un resistor en un circuito en el dominio del tiempo y su representación en el modelo de fasores.

Dominio del tiempo



Modelo de Fasores

Modelación del Capacitor



- Supongamos que:

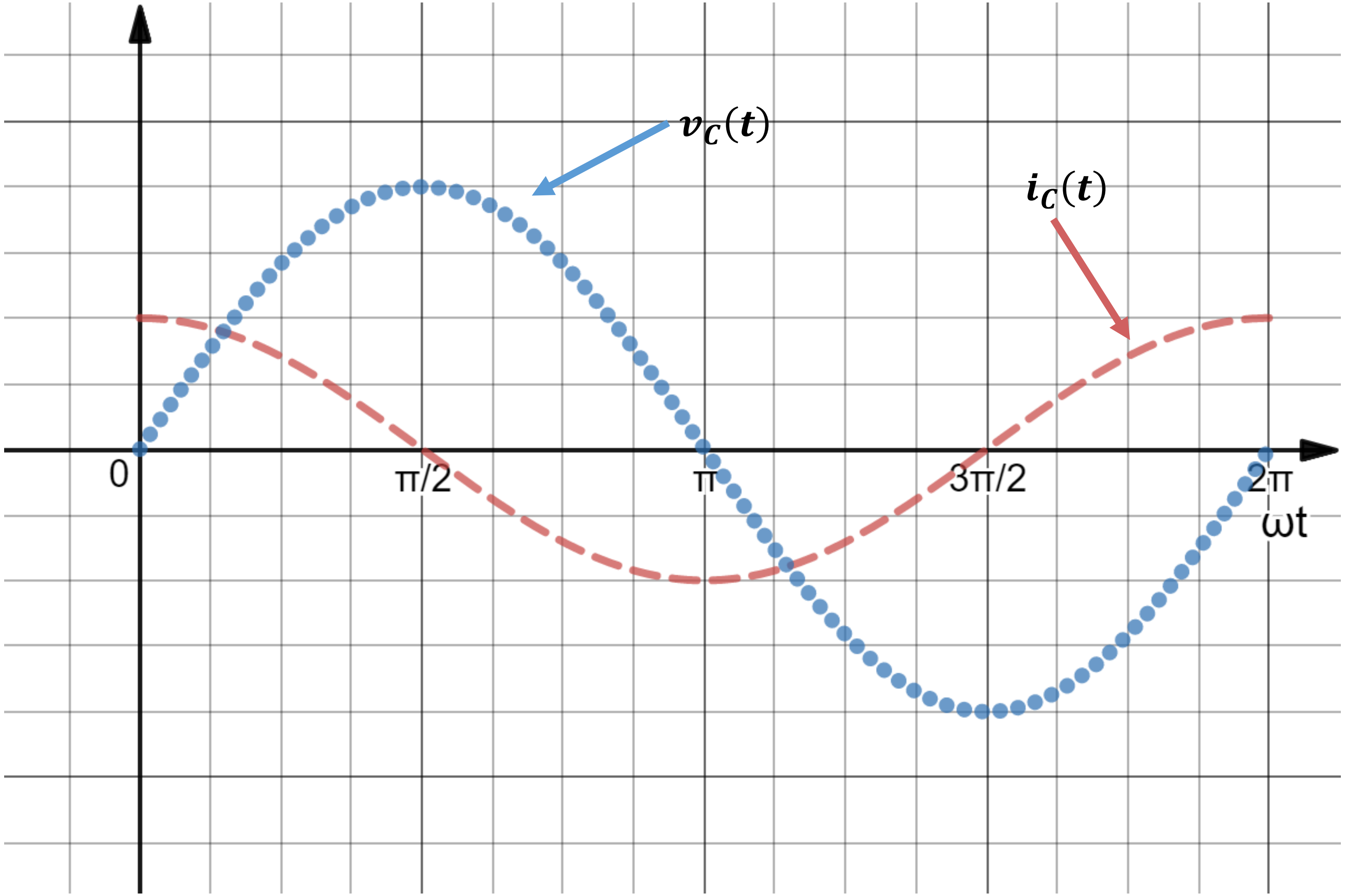
$$v_c(t) = V_P \operatorname{sen}(\omega t)$$

- Sabemos que:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\frac{dV_P \operatorname{sen}(\omega t)}{dt} = V_P\omega C\cos(\omega t)$$

$$i_C(t) = V_P\omega C \operatorname{sen}(\omega t + 90°)$$

- En un capacitor la corriente adelanta al voltaje por 90°.



$v_C(t)$
$i_C(t)$
0
π/2
π
3π/2
2π
ωt

Modelación del Capacitor

Voltaje y Corriente en el capacitor en modelo de fasores:

$$V_C = \frac{\sqrt{2}\,V_P}{2}\angle 0°$$

$$I_C = \frac{\sqrt{2}\,V_P \omega C}{2}\angle 90°$$

Modelación del Capacitor

Utilizando la ley de Ohm encontraríamos la oposición al paso de corriente de un capacitor en el modelo de fasores.

$$\frac{V_C}{I_C} = \frac{\frac{\sqrt{2}\,V_P}{2}\angle 0°}{\frac{\sqrt{2}\,V_P \omega C}{2}\angle 90°} = \frac{1}{\omega C}\angle -90°$$

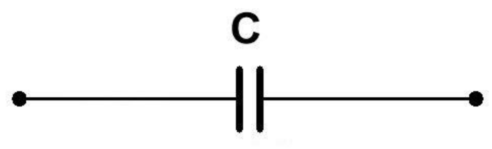
Modelación del Capacitor

Tenemos que un capacitor en el modelo de fasores es

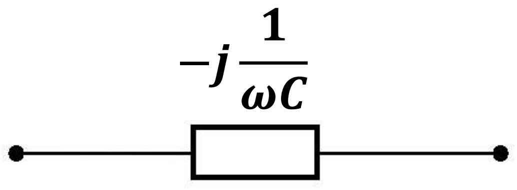
Forma Polar	Forma Rectangular
$\frac{1}{\omega C}\angle -90°$	$-j\frac{1}{\omega C}$

Modelación del Capacitor

El capacitor en un circuito en el dominio del tiempo y su representación en el modelo de fasores.

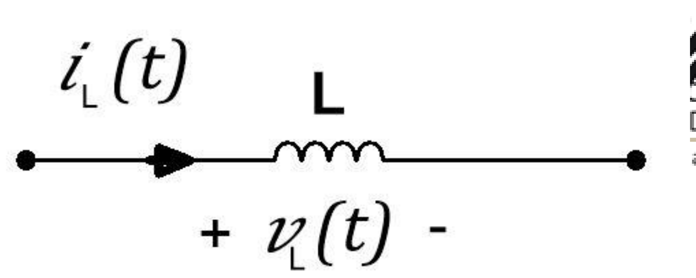


Dominio del tiempo



Modelo de Fasores

Modelación del Inductor



- Supongamos que:

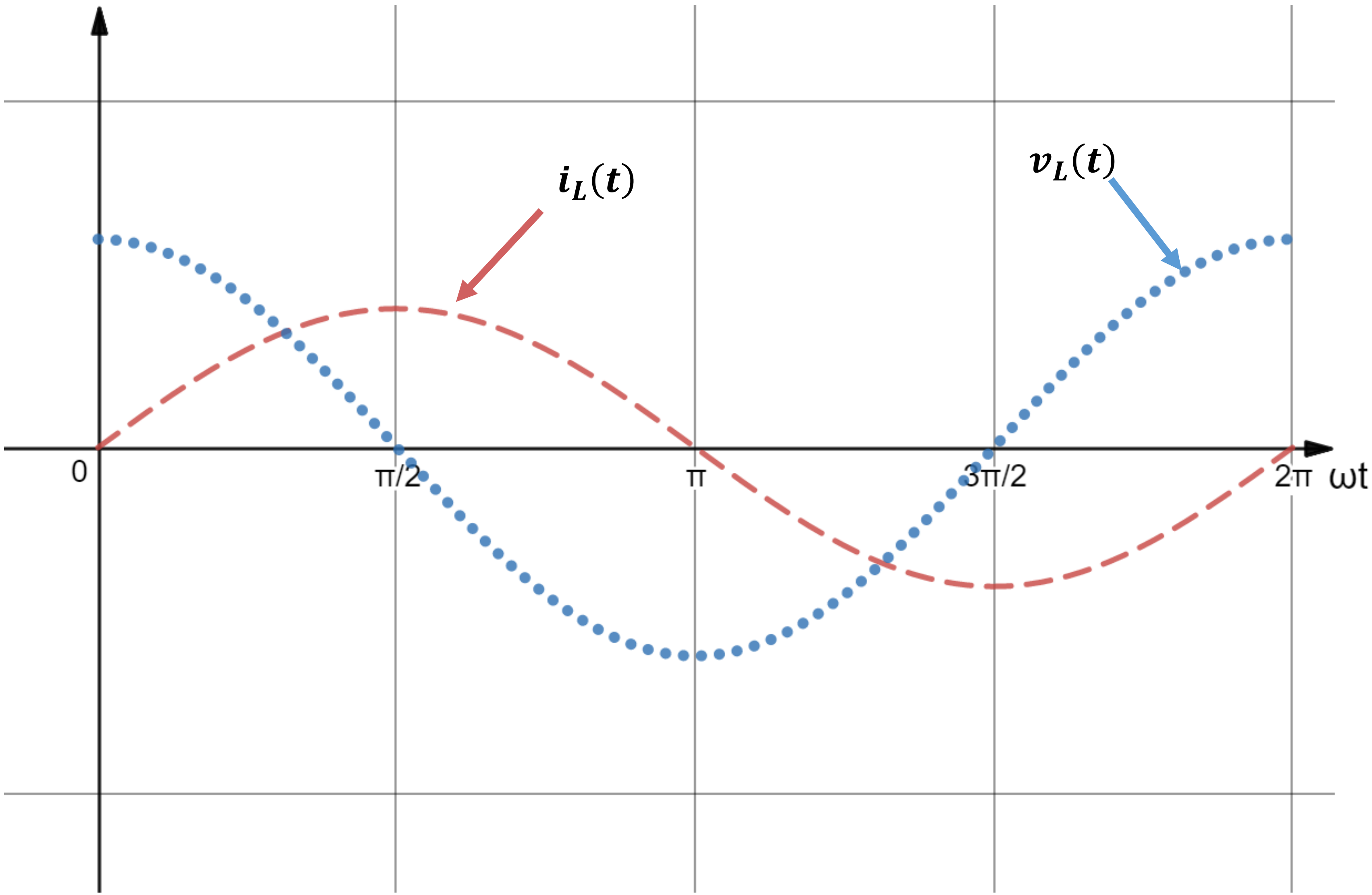
$$i_L(t) = I_P \operatorname{sen}(\omega t)$$

- Sabemos que:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{dI_P \operatorname{sen}(\omega t)}{dt} = I_P \omega L \cos(\omega t)$$

$$v_L(t) = I_P \omega L \operatorname{sen}(\omega t + 90°)$$

- Ahora vemos que en un inductor el voltaje adelanta a la corriente por 90°.


$i_L(t)$
$v_L(t)$
0
π/2
π
3π/2
2π
ωt

Modelación del Inductor

Voltaje y Corriente en el inductor en modelo de fasores:

$$V_L = \frac{\sqrt{2} I_P \omega L}{2} \angle 90°$$

$$I_L = \frac{\sqrt{2}\, I_P}{2} \angle 0°$$

Modelación del Inductor

Utilizando ley de Ohm encontraríamos la oposición al paso de corriente de un inductor en el modelo de fasores.

$$\frac{V_L}{I_L} = \frac{\frac{\sqrt{2} I_P \omega L}{2} \angle 90°}{\frac{\sqrt{2}\, I_P}{2} \angle 0°} = \omega L \angle 90°$$

Modelación del Inductor

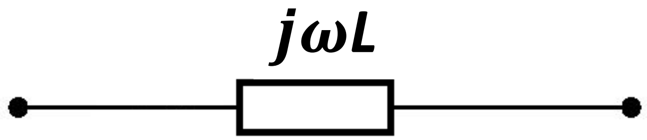
Tenemos que un inductor en el modelo de fasores es

Forma Polar	Forma Rectangular
$\omega L\angle 90°$	$j\omega L$

Modelación del Inductor

Inductor en un circuito en el dominio del tiempo y su representación en el modelo de fasores.

Dominio del tiempo



Modelo de Fasores

Impedancia

Es la oposición al paso de la corriente, la impedancia es un número complejo (fasor).

$$Z = R + j\,X$$

Impedancia

$$Z = R + j\,X$$

- R, es la Resistencia, causada por los resistores del circuito [Ω].
- X, es conocida como Reactancia. Es causada por inductores y capacitores [Ω].

$$X = X_L - X_C$$

Impedancia

- Lo que se dedujo anteriormente en la modelación de los componentes pasivos (resistor, capacitor e inductor) es la impedancia de cada uno de ellos.

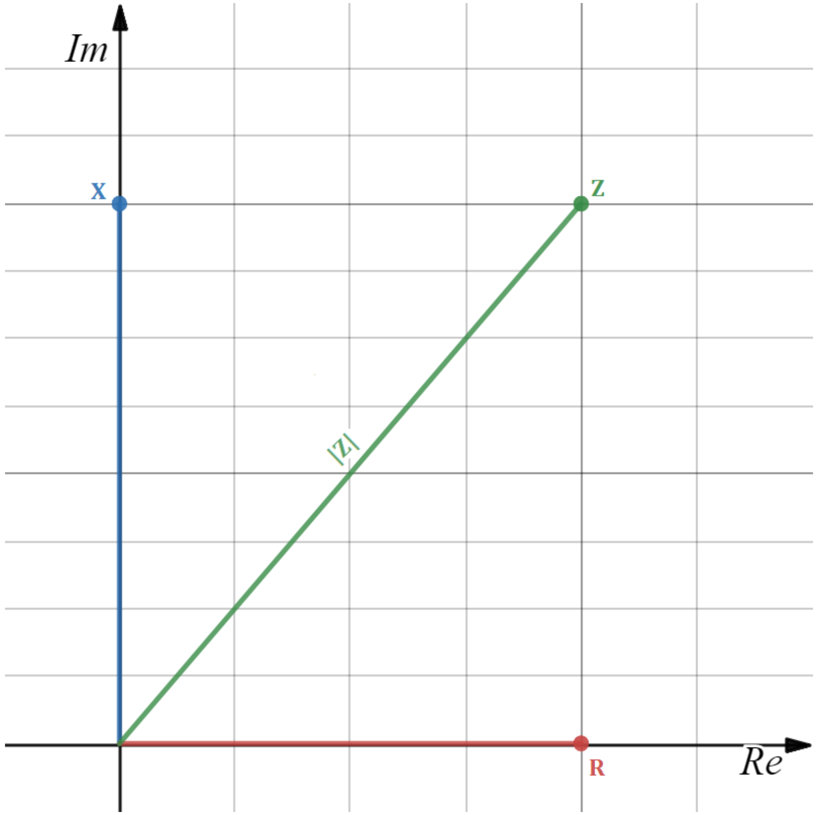
- Impedancia del Resistor $Z_R = R$

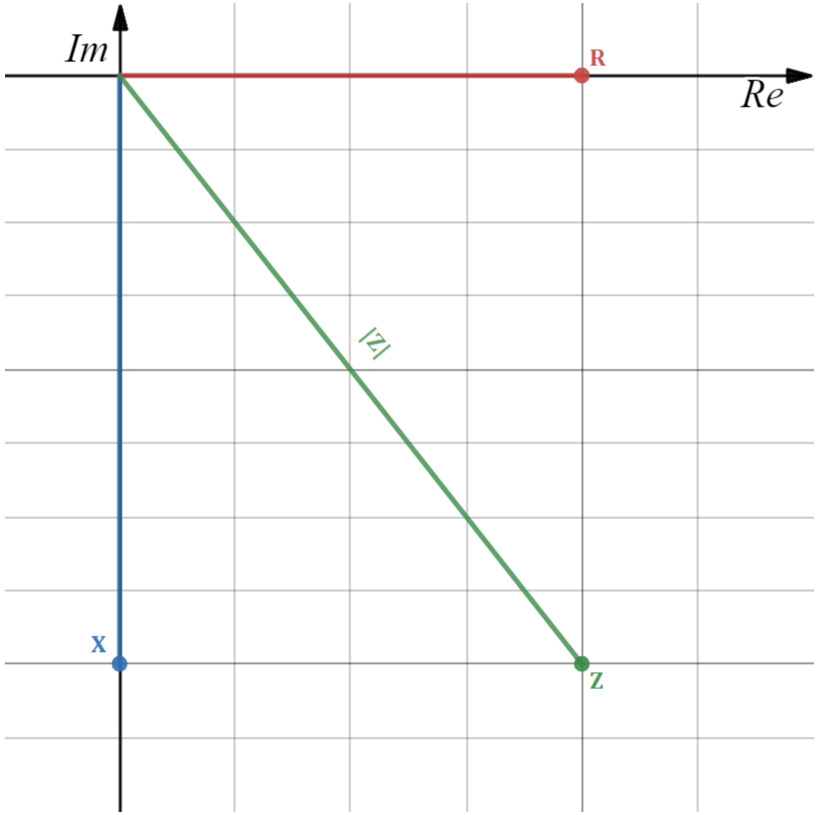
- Impedancia del Capacitor $Z_C = -jX_C$ donde, $X_C = \frac{1}{\omega C}$

- Impedancia del Inductor $Z_L = jX_L$ donde, $X_L = \omega L$

Impedancia

- La impedancia, al ser un fasor, puede representarse gráficamente.





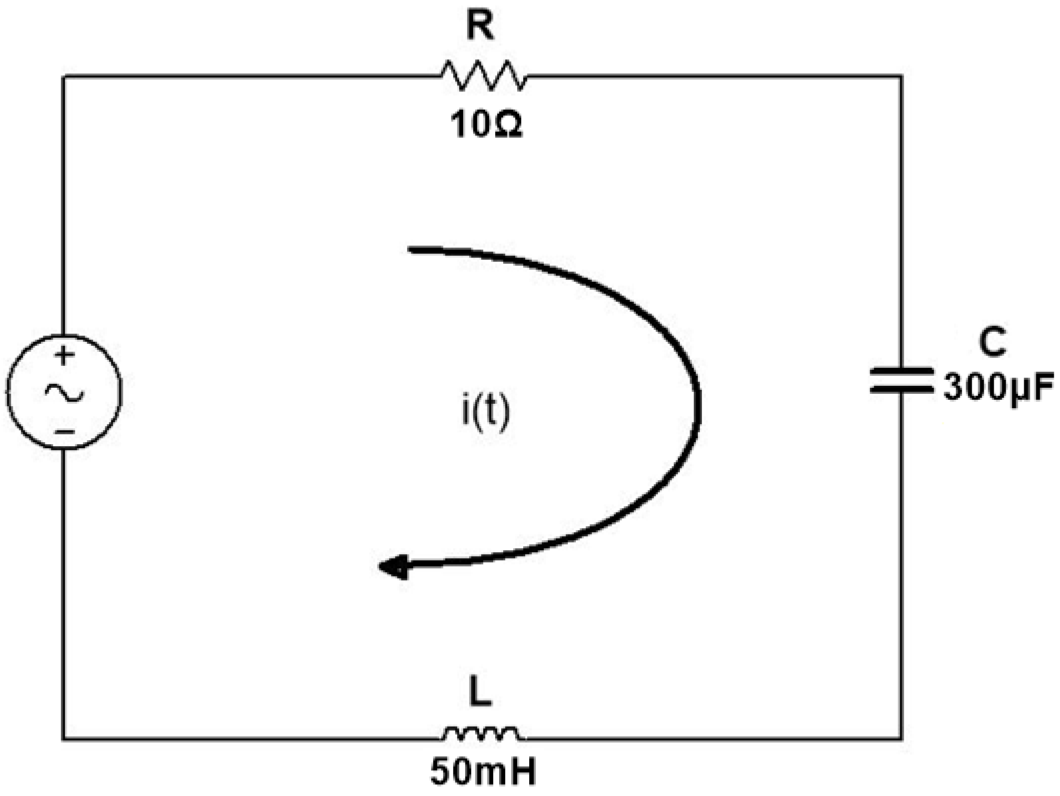
Impedancia

- La Resistencia no puede ser negativa.
- La Reactancia sí puede ser negativa cuando es capacitiva.
- Por lo tanto la impedancia puede estar solo en el primer o cuarto cuadrante.

Ejemplo

Supongamos que deseamos encontrar la corriente del siguiente circuito. El primer paso sería convertir todos los elementos en fasores:

$$v_F(t) = 170V \text{ sen}\left(377\frac{rad}{s}t\right)$$



- Fuente de Voltaje

$$V_F = \frac{\sqrt{2}\,(170V)}{2}\angle 0° = 120V\angle 0°$$

- Resistor

$$Z_R = 10\Omega$$

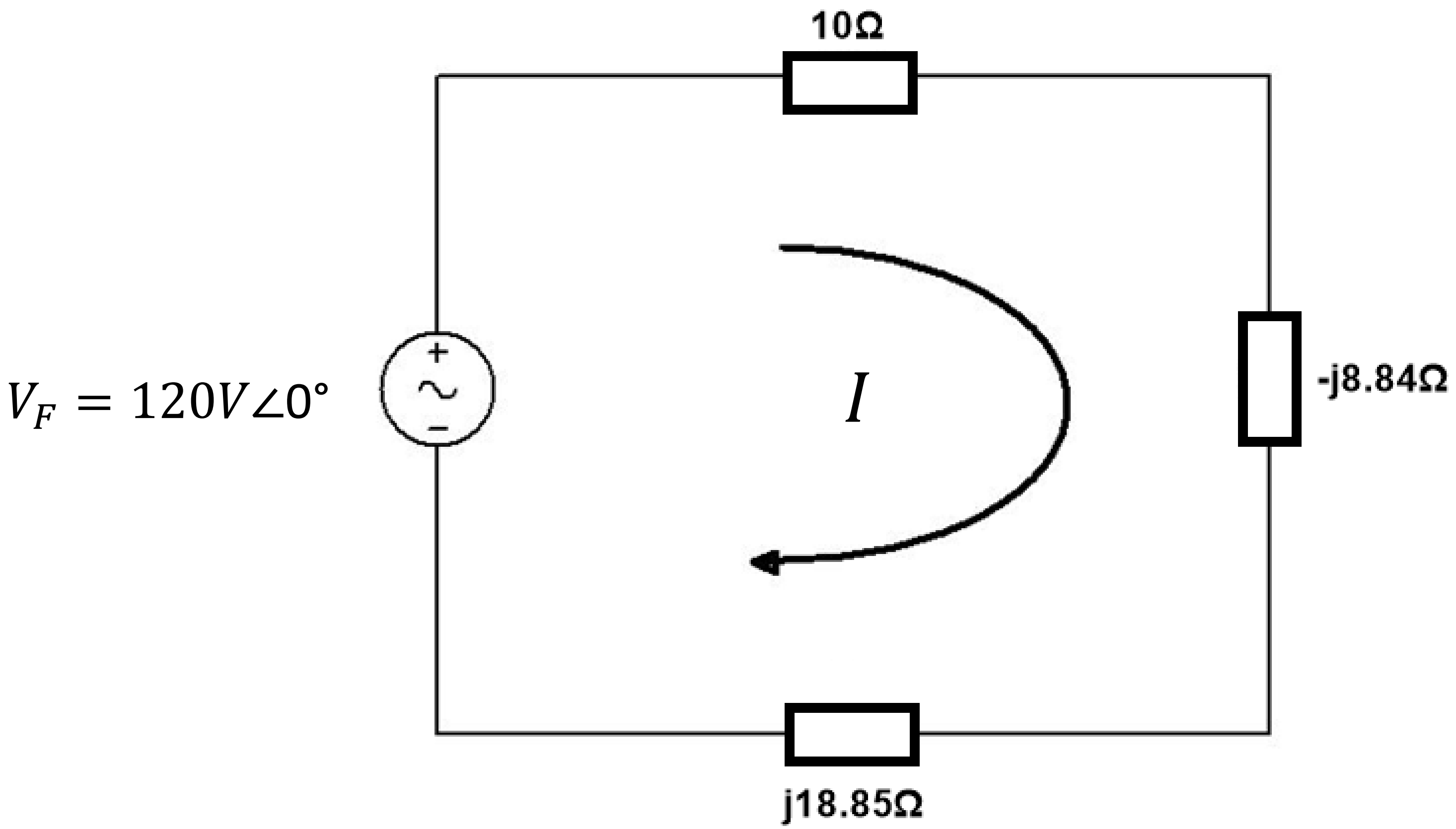
- Capacitor

$$Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{\left(377\frac{rad}{s}\right)(300\mu F)} = -j8.84\Omega$$

- Inductor

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j\left(377\frac{rad}{s}\right)(50mH) = j18.85\Omega$$

Ejemplo



Antes de continuar, haremos un recordatorio de la ley de ohm y las leyes de Kirchhoff. Estas se aplican de la misma manera que en corriente directa (DC) empleando impedancia en lugar de resistencia.

Ley de Ohm

En un circuito modelado con fasores se puede aplicar la ley de Ohm. Reemplazando la resistencia por la impedancia:

$$V = I\,Z$$

Leyes de Kirchhoff

En un circuito de corriente alterna modelado con fasores también aplican las leyes de Kirchhoff:

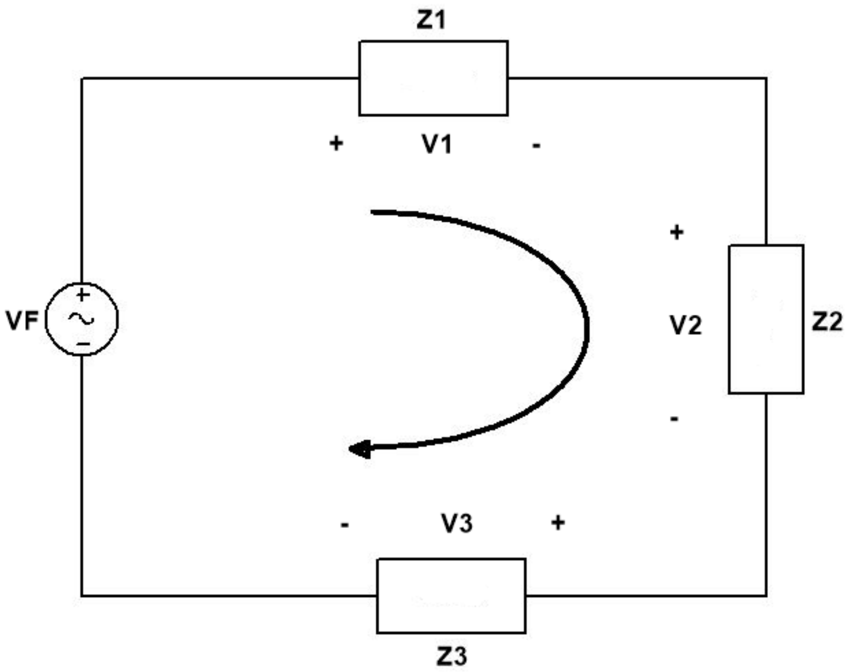
1. Ley de Voltaje de Kirchhoff

2. Ley de Corrientes de Kirchhoff

Ley de Voltajes de Kirchhoff

$$\sum V_i = 0V$$

La ley de voltajes de Kirchhoff (abreviada *LVK*) dice que la suma de voltajes alrededor de una trayectoria cerrada es igual a cero voltios



$$V_F - V_1 - V_2 - V_3 = 0V$$

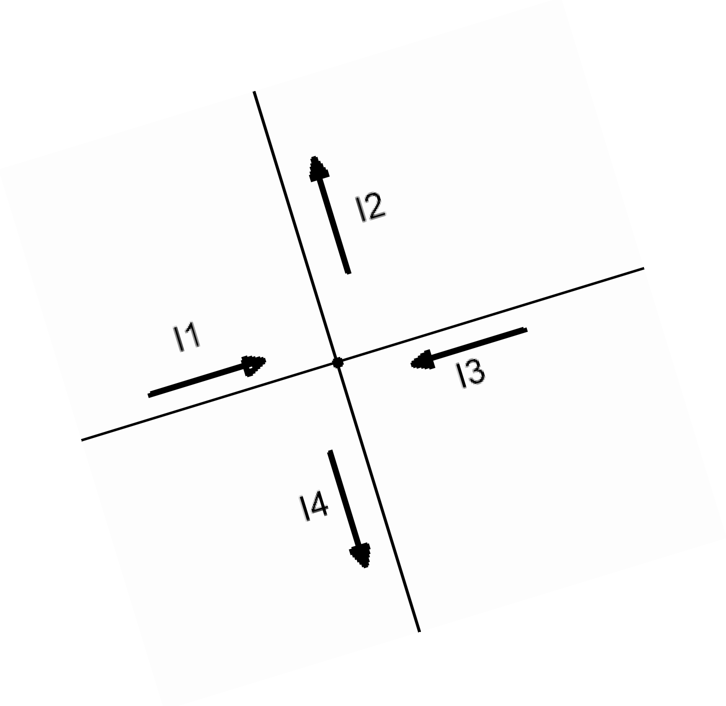
Ley de Voltajes de Kirchhoff

Esto puede interpretarse también como que la suma de los voltajes en los elementos activos es igual a la suma de los voltajes en los elementos pasivos en una trayectoria cerrada.

$$V_F = V_1 + V_2 + V_3$$

Ley de Corrientes de Kirchhoff $\sum I_i = 0A$

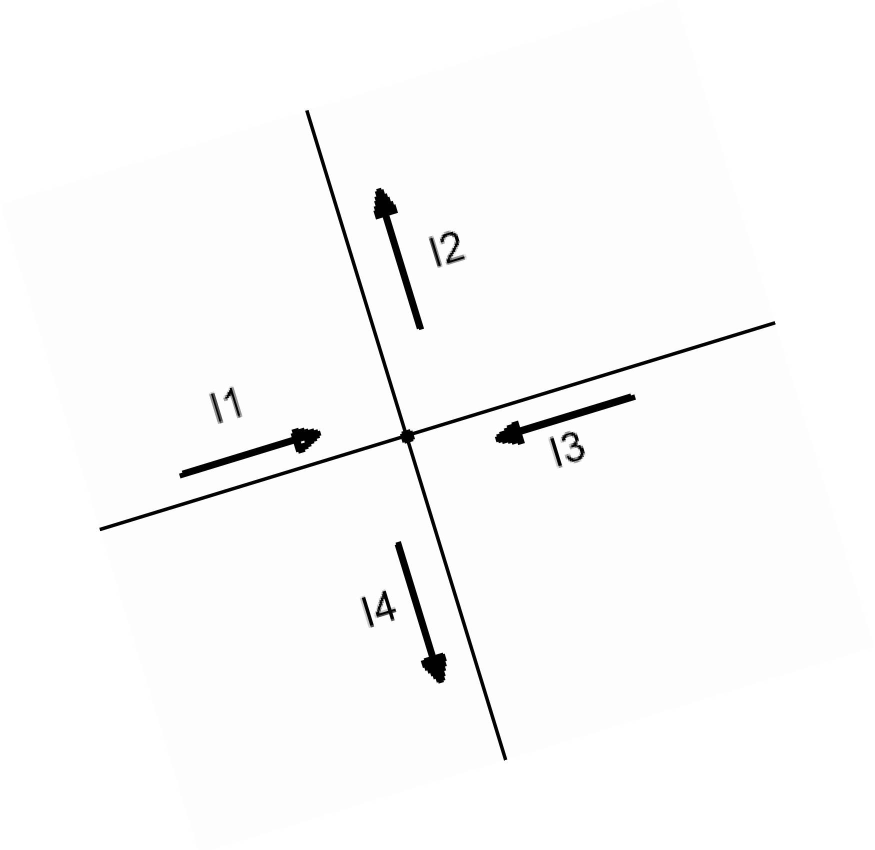
La ley de corrientes de Kirchhoff (abreviada *LCK*) indica que la suma de corrientes en un nodo es igual a cero amperios.



$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0A$$

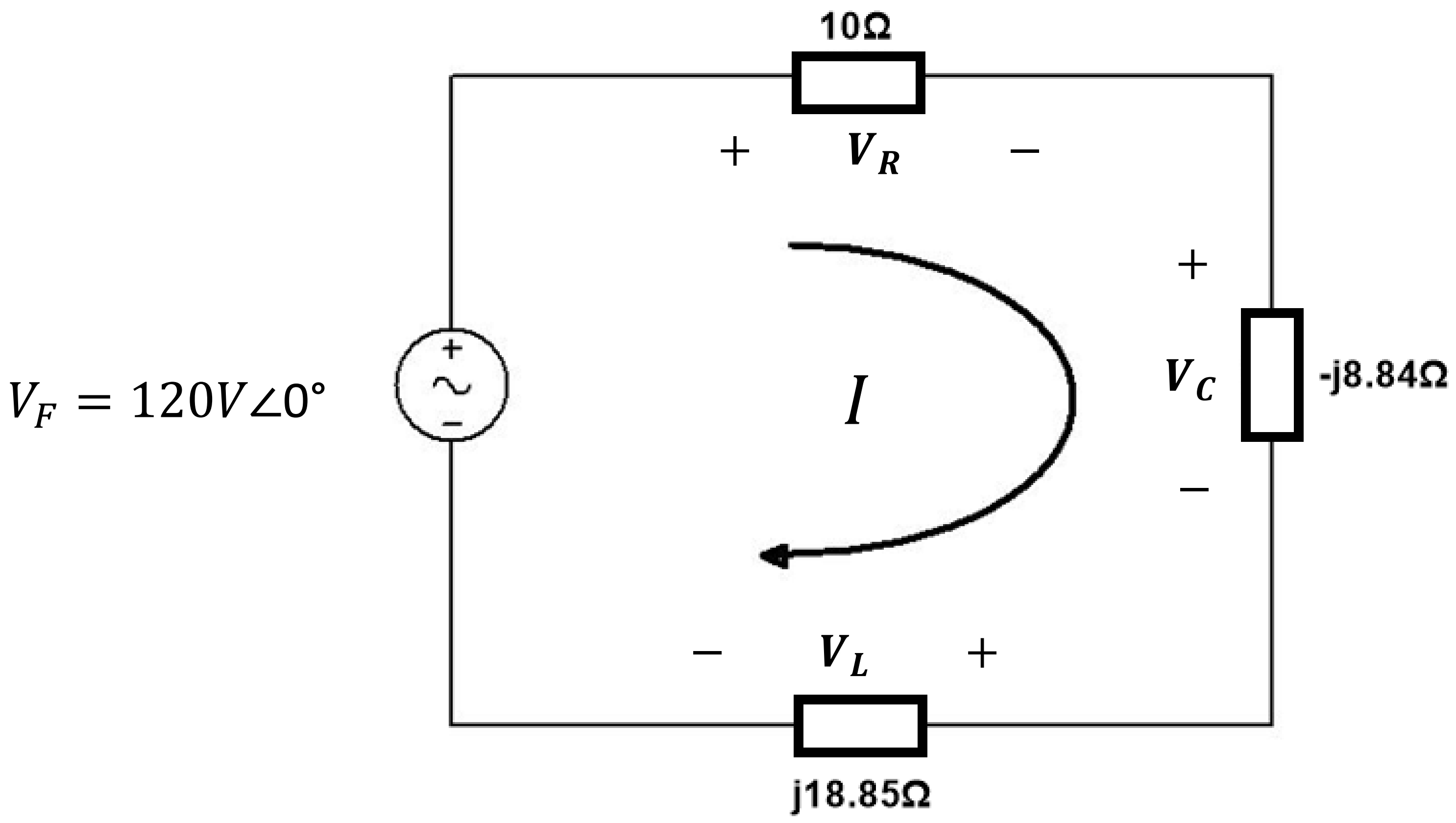
Ley de Corrientes de Kirchhoff

Esto puede interpretarse también como que la suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él.



$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Continuando con el ejemplo...



Aplicando LVK y Ley de Ohm

$$V_F - V_R - V_C - V_L = 0V$$

$$V_F = V_R + V_C + V_L$$

$$V_F = IZ_R + IZ_C + IZ_L$$

$$120V\angle 0° = I(10\Omega) + I(-j8.84\Omega) + I(j18.85\Omega)$$

Aplicando LVK y Ley de Ohm

$$120V\angle 0° = (10\Omega - j8.84\Omega + j18.85\Omega)I$$

$$I = \frac{V_F}{Z} = \frac{120V\angle 0°}{(10\Omega - j8.84\Omega + j18.85\Omega)} = \frac{120V\angle 0°}{(10 + j10)\Omega} = \frac{120V\angle 0°}{14.1\Omega\angle 45°}$$

$$I = 8.51A\angle - 45° \quad \text{(Fasor)}$$

$$i(t) = 12A\,\text{sen}\left(377\frac{rad}{s}t - 45°\right) \quad \text{(Dominio del tiempo)}$$

Descargo de responsabilidad

La información contenida en esta presentación (en formato ppt) es un reflejo del material virtual presentado en la versión online del curso. Por lo tanto, sus textos, gráficos, links de consulta, acotaciones y comentarios son responsabilidad exclusiva de su(s) respectivo(s) autor(es) y su contenido no compromete a edX o a la Universidad Galileo.

Edx y Universidad Galileo no asumen responsabilidad alguna por la actualidad, exactitud, obligaciones de derechos de autor, integridad o calidad de los contenidos proporcionados y se aclara que la utilización de esta presentación se encuentra limitada de manera expresa para los propósitos educativos del curso.