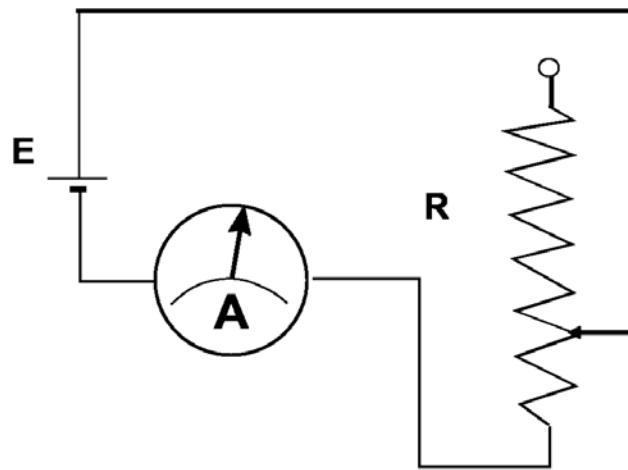


Medidas Eléctricas



Juan Antonio Suárez

Medidas Eléctricas

2014

Número ISBN 950-43-9807-3

Hecho el depósito que marca la Ley 11.723

PRÓLOGO

En el campo de la Ingeniería Eléctrica, un profesional se encontrará invariablemente con las medidas eléctricas, sea porque las utilice para un análisis cuali o cuantitativo o bien como fuente de información de datos para cálculos técnicos.

Es por ende necesario el conocimiento del funcionamiento de un instrumento eléctrico, de las técnicas, limitaciones y estudio de los errores en la aplicación de las mismas.

La optimización de una medición será posible siempre y cuando se efectúe la correcta elección del aparato de medida, conociendo el funcionamiento del mismo y sus errores sistemáticos.

Este libro esta dirigido a asistir al estudiante de grado de la carrera Ingeniería Eléctrica, teniendo como objetivo brindarle los conocimientos básicos y conceptuales, para capacitarlo en el análisis de las mediciones eléctricas. Para la correcta interpretación de los temas aquí desarrollados es imprescindible que el alumno cuente con la formación adecuada en Electromagnetismo, Teoría de Circuitos y Estadística.

El análisis de los instrumentos alcanzan a los básicos: el de imán permanente y bobina móvil, hierro móvil, electrodinámico y una introducción a los digitales.

El libro se divide en cinco capítulos, en las que se discutirán los diversos instrumentos, la teoría de errores y las técnicas experimentales de medición, incluyendo la medición de potencia.

En el Capítulo I, se analiza los conceptos básicos de las medidas eléctricas y el estudio de la Dinámica de los instrumentos de rotación. Aquí se verán las analogías en el estudio del movimiento con modelos mecánicos y eléctricos, las respuestas con excitación de corriente continua y alterna.

En el Capítulo II, se discute la Teoría de Errores con la cual el estudiante comprenderá la importancia que reviste los distintos fenómenos sean sistemáticos o fortuitos y que afectan los resultados de una serie de mediciones. Se comprenderá la importancia de determinar que tan buena es una medición, sabiendo como utilizar la técnica adecuada y como determinar los márgenes de error.

En el Capítulo III, se incursiona en el estudio de los distintos instrumentos eléctricos indicadores. Para cada instrumento se analizará su ley de deflexión, sus aplicaciones y sus limitaciones.

En el Capítulo IV se estudia las técnicas de medidas asociadas a la determinación y análisis de la sensibilidad para cada una de ellas.

Finalmente en el Capítulo V, se estudiará las distintas metodologías para la medición de potencia en sistemas trifásicos equilibrados y desequilibrados.

Si bien el libro abarca unidades temáticas de la asignatura Mediciones Eléctricas I de la carrera Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electromecánica, de la Universidad Nacional de Mar del Plata, no debe considerarse a éste como el texto oficial de la materia y debe interpretarse como una guía de estudio, una fuente más de información y formación que el estudiante necesariamente irá completando con la bibliografía que la cátedra recomienda.

J. A. Suárez

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El ingeniero debe conocer con suficiencia cada vez que realiza una medición, el método que está empleando, tipos y características de los instrumentos utilizados, sus limitaciones y exactitud. Para remitirnos a un ejemplo práctico supongamos que debe realizar el cálculo de una puesta a tierra de una instalación. Previamente deberá medir la resistividad del terreno. Para este fin empleará con criterio instrumentos, métodos, técnicas de medidas que finalmente conducirán a la determinación del valor de la resistividad. La exactitud de esta medición quedará reflejada obviamente en el cálculo definitivo de la puesta a tierra.

Conceptos básicos

En el campo de las mediciones eléctricas existen una serie de conceptos elementales que a modo de introducción a la asignatura es importante definirlos. Si bien muchos de ellos a priori parecen triviales, veremos que en algunos casos su significado difiere de la acepción que comúnmente se les da. Los conceptos básicos que expresaremos aquí se refieren a los instrumentos de medidas. Aclaración importante pues cuando hablamos de sensibilidad veremos que hay gran diferencia entre la sensibilidad de un instrumento y la sensibilidad de una técnica de medida. Mientras la primera la definiremos como la relación entre efecto y causa, la segunda queda determinada por el cociente entre la magnitud X a medir y el mínimo incremento discernible en la técnica de medida empleada (Δx).

Medir

Significa comparar la magnitud correspondiente con una unidad apropiada.

Bajo el concepto de medir se entiende la acción de registrar numéricamente magnitudes cuyo conocimiento es imprescindible para estudios científicos, en máquinas e instalaciones, en la producción y distribución de la energía eléctrica, etc.

El valor de la medida queda expresado como el producto del valor numérico por la unidad correspondiente.

Deflexión

Se denomina así a la cantidad de divisiones o en algunos casos a la cantidad de grados en que se desvía la aguja indicadora sobre una escala de un determinado instrumento.

La deflexión se la suele denominar con la letra griega α . La deflexión máxima será pues la máxima cantidad de divisiones o grados que tiene la escala de un instrumento ($\alpha_{\text{máx}}$).

Campo nominal de referencia:

Nos indica el rango de un determinado parámetro en el cual el instrumento mantiene su grado de

exactitud (clase). Esta indicación viene expresada generalmente en el propio cuadrante de los instrumentos. Por ejemplo si se encuentra escrita una leyenda subrayada: 40....60 Hz significa que el instrumento mantiene su clase siempre y cuando el margen de frecuencia en la que el instrumento es utilizado no se aparte de los límites fijados.

Clase

De momento la definiremos como el error absoluto máximo (diferencia entre valor medio y valor verdadero) que puede cometer el instrumento en cualquier parte de la escala, referido a su alcance y expresado en valor porcentual:

$$c = \frac{E_{m\acute{a}x}}{Alcance} 100$$

El cuadrante de un instrumento analógico lleva inscripto un número acompañado con el símbolo del principio de funcionamiento, que es el que identifica la clase del mismo. Como resulta obvio cuanto menor sea ese número mayor será el grado de exactitud del instrumento.

Si no se encuentra este número identificatorio significa que el fabricante no garantiza la clase del aparato, es decir su clase puede ser superior a 1.5. Veremos en el Capítulo Teoría de Errores, que existe la posibilidad de determinar la clase a través de un método de medida denominado “contraste de instrumentos”.

Rango de medida:

Se define así al tramo de la escala en el cual las lecturas son confiables. Puede ocurrir que en una determinada escala de un aparato indicador o registrador tenga al principio de ella valores muy comprimidos. En esa parte no es correcto medir, es por ello que en el rango de medida se expresa como:

$$rango\ de\ medida = \alpha_{m\acute{a}x} - \alpha_{min}$$

El valor máximo del rango de medida queda definido como el alcance del instrumento, dato que habremos de utilizar en la definición de clase de un instrumento.

Cuando el instrumento responde a una ley de deflexión lineal (por caso el instrumento de imán permanente y bobina móvil, con campo radial y uniforme), la escala será lineal si se trata de la aplicación como amperímetro o voltímetro. En este caso el rango de medida será coincidente con el alcance del instrumento a excepción que se trate del instrumento “lupa de tensión” que analizaremos en el Capítulo III.

En el caso de los instrumentos cuya ley de deflexión es del tipo cuadrática, (hierro móvil, electrodinámico) la escala será lineal por cuanto el fabricante mediante dispositivos constructivos tratará que se así. No obstante esto, siempre en el inicio de la escala se produce invariablemente una contracción de la misma y la imposibilidad de su correcta calibración (aproximadamente entre un 10 a un

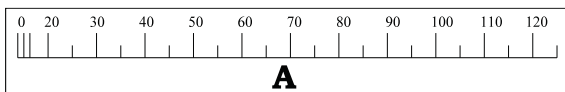


Figura 1

20% del alcance). Este es el caso del amperímetro electrodinámico que se ilustra a continuación:

Para el cuadrante del amperímetro que se ilustra en la figura 1, el rango será de 105 divisiones:

También se puede definir como el margen de valores de la magnitud de medida, en el que el instrumento se atiene a los límites de error definidos por la clase correspondiente. (En el Capítulo Teoría de errores, veremos en detalle el concepto de clase de un instrumento).

Margen de indicación

Se define así a toda la escala del instrumento.

Sensibilidad

La sensibilidad de un aparato de medida viene dada por la relación existente entre la variación de las indicaciones (no del ángulo de desviación) y la modificación de la magnitud de medida ocasionada por aquella. En otras palabras definimos sensibilidad como la relación entre efecto sobre causa.

Si un instrumento (ejemplo el de imán permanente y bobina móvil) tiene una ley de respuesta:

$$I = K \cdot \alpha$$

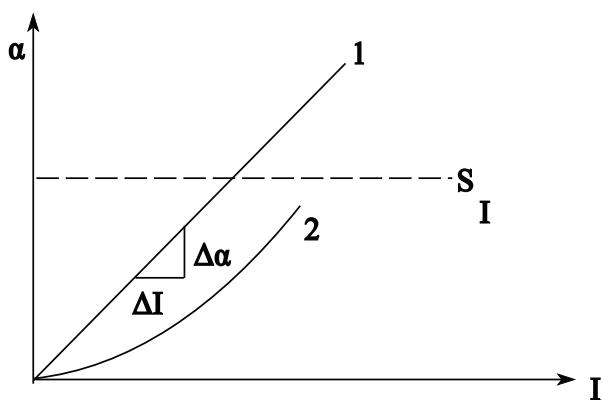


Figura 2

Gráficamente se demuestra (figura 2) que para el mismo incremento de corriente corresponde siempre el mismo incremento de desviación, de modo que la relación entre ambos incrementos se mantiene constante:

$$S = \frac{\Delta \alpha}{\Delta I}$$

El ejemplo anterior corresponde a un instrumento con escala lineal. Si la escala fuera alineal (curva 2, de la figura) el cociente entre incremento de desviación sobre incremento de corriente varía de un punto a otro de la curva. Resulta como expresión matemática de la sensibilidad para un punto cualquiera de la escala:

$$S_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\alpha}{dX} = \frac{d\alpha}{dX}$$

Constante de lectura:

Se define como la relación entre la magnitud máxima al final de la escala (denominada alcance) con su unidad correspondiente y la máxima deflexión en divisiones.

Ejemplo:

Si tenemos un instrumento con alcance 5 A. y un máximo de 100 divisiones, la constante de lectura será:

$$C_E = \frac{\text{Alcance}}{\alpha_{\text{máx}}} = \frac{5A}{100 \text{ divis.}} = 50 \frac{mA}{\text{divis.}}$$

Cuando la aguja deflexiona una cantidad cualquiera α , la magnitud que está midiendo será:

$$X_{\text{med}} = C_E \cdot \alpha$$

Consumo propio:

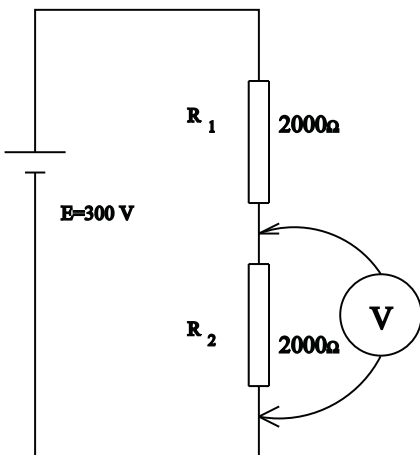


Figura 3

Es la potencia absorbida por el instrumento necesaria para provocar su propia deflexión. El consumo propio es importante tenerlo en cuenta en mediciones de alta exactitud, pues es capaz de producir notables distorsiones en las lecturas.

Veamos un ejemplo sencillo en la medición de tensión en el circuito de la figura 3.

El voltímetro -de resistencia interna igual a R_2 - dará una lectura igual a 100 V. con un error del 33% en defecto.

El consumo propio expresado en unidades de potencia será:

$$P_v = \frac{U^2}{R_v}$$

Es evidente que cuanto mayor será R_v -en el caso ideal igual a infinito- tanto menor será la potencia de consumo y por ende el error de inserción.

Similar demostración puede hacerse en el caso de medición de corriente:

$$P_a = R_a \cdot I^2$$

Para el caso del amperímetro su resistencia interna R_a debería ser mínima, en el caso ideal igual a cero.

En algunos catálogos de instrumentos el consumo propio suele estar expresado en la caída de tensión que provoca la inserción del amperímetro cuando por el circuito circula una corriente igual

al alcance del instrumento. Para el voltímetro el consumo estará expresado en la corriente que circula por el instrumento cuando entre sus bornes se aplica una tensión igual al alcance.

Valores orientativos de consumo propio de acuerdo al tipo de instrumentos, son los siguientes:

- Instrumentos de imán permanente y bobina móvil:
Bajo, del orden de los *miliwatts*.
- Instrumentos de hierro móvil y electrodinámicos:
Medio, del orden de las *unidades de Watt*.
- Instrumentos de inducción:
Alto, del orden de *5 a 10 Watt*.

Resolución instrumental

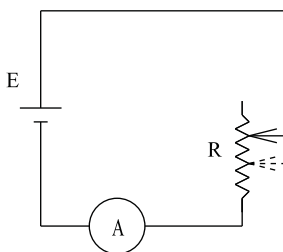


Figura 4

Se define como la variación de la magnitud de medida que ocasiona de forma reproducible un cambio mínimo apreciable en la indicación.

En el ejemplo de la figura 4, el mínimo de variación ΔR que provoque un mínimo apreciable de variación en la aguja del amperímetro, un ΔI , a éste se lo denominará resolución instrumental, que puede valer desde un $1/5$ hasta un $1/10$ de división, dependiendo de la calidad del aparato de medida.

Sobrecarga

Es la relación entre la cantidad máxima no destructiva que tolera el instrumento, sobre la cantidad máxima nominal.

$$\text{Sobrecarga} = \frac{X'}{X_{\text{máx}}} 100$$

Si un voltímetro da alcance 100 V. tiene una sobrecarga del 150%, significa que hasta 150 V el instrumento puede utilizarse sin destruirse. Generalmente el fabricante da valores de sobrecarga acompañado con su correspondiente tiempo de admisión.

Exactitud

Es el grado de proximidad del valor medido con el valor real o verdadero.

Precisión

La precisión de un instrumento indicador da idea de la repetibilidad de las lecturas en el mismo. No siempre un instrumento preciso significa que sea exacto. A la inversa un instrumento exacto ha de ser siempre preciso.

Sistemas de unidades

Ya hemos dicho que medir es comparar una magnitud con otra que se toma como unidad.

Un sistema coherente de unidades es aquél que está constituido por un reducido número de unidades fundamentales o primarias y de las unidades secundarias que de éstas derivan.

El Ing. Giorgi (1871-1959), desarrolló el sistema que lleva su nombre y que se conoce abreviadamente como sistema MKS. El sistema toma como unidades fundamentales:

L : LONGITUD [METRO]
 M: MASA [KILOGRAMO]
 T : TIEMPO [SEGUNDO]

En el campo eléctrico es necesario definir una cuarta unidad para que las derivadas queden definidas. La unidad eléctrica fundamental adoptada por el Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA) -que toma las unidades del sistema MKS- es el ampère.

Definición del ampere:

Es la intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores paralelos rectilíneos, de longitud infinita y sección circular despreciable, colocados a una distancia mutua de un metro, produzca entre los conductores, por cada metro de longitud, una fuerza de:

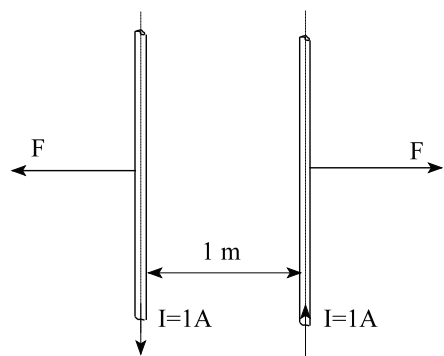


Figura 5

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

La unidad fundamental ampere se determina partiendo de la fuerza electrodinámica que actúa sobre dos conductores por los que pasa una corriente eléctrica. Dicha fuerza viene dada por:

$$F = \mu_0 I^2 \frac{l}{2\pi r}$$

siendo r la distancia que separa los dos conductores, para este caso un metro, l longitud de los conductores (un metro) y μ_0 la constante del campo magnético

$$\mu_0 = \frac{4\pi[H]}{10^{-7}[m]} = 1.25663 \cdot 10^{-6} \frac{[H]}{[m]}$$

Unidades de electrotecnia**Unidad de tensión:**

El volt es la diferencia de potencial eléctrico entre dos secciones de un conductor que es recorrido por una corriente constante de un ampère, cuando la potencia disipada entre esas secciones es de un Watt.

$$[U] = [P]/[I] = W/A = V$$

Unidad de resistencia:

El Ohm es la resistencia eléctrica que existe entre dos secciones de un conductor, cuando una diferencia de potencial constante de un volt aplicada entre esas dos secciones produce en el conductor una corriente de un ampère, siempre que dicho conductor carezca de fuerza electromotriz:

$$[R] = [U]/[I] = V/A = \Omega$$

Cantidad de electricidad:

El coulomb es la cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un ampère:

$$[Q] = [I] \cdot [t] = A \cdot s = C$$

Inducción magnética:

El Weber es el flujo de inducción magnética que rodeado por un circuito de una sola espira produce en él una fuerza electromotriz de 1 Volt, si se lo lleva a cero en un segundo por disminución uniforme:

$$[\phi] = [U] \cdot [t] = V \cdot s = Wb$$

Energía:

La unidad de energía resulta de la expresión:

$$[U] \cdot [I] \cdot [t] = [U] \cdot [Q] = [I] \cdot [\phi]$$

$$\text{Joule} = V \cdot C = V \cdot A \cdot t$$

Coefficiente de autoinducción:

El Henry es la inductancia eléctrica de un circuito cerrado, en el que se produce una fuerza electromotriz de un volt, cuando la corriente eléctrica que lo recorre varía uniformemente a razón de un ampère por segundo.

$$[L] = [\phi]/[I] = V \cdot s/A = H$$

Farad:

Es la capacidad de un capacitor eléctrico entre cuyas armaduras aparece una diferencia de potencial de un volt cuando se carga con una cantidad de electricidad de un coulomb.

$$[C] = [Q]/[U] = C/V = A.s/V = F$$

Otras unidades derivadas:

Intensidad de campo: V/m

Conductancia eléctrica: Siemens, S

Inducción magnética: Wb/m², Tesla T.

Intensidad magnética: ampère/metro: A/m

Fuerza magnetomotriz: ampère: A

Flujo luminoso: lumen: lm

Iluminación: lux: lx

Múltiplos

PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR
TERA	T	10 ¹²
GIGA	G	10 ⁹
MEGA	M	10 ⁶
KILO	K	10 ³

Submúltiplos

PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR
MILI	m	10 ⁻³
MICRO	μ	10 ⁻⁶
NANO	n	10 ⁻⁹
PICO	p	10 ⁻¹²

Patrones de unidades

Los patrones eléctricos secundarios derivados de los primarios se obtienen de los patrones absolutos. En los laboratorios de medidas cumplen un papel muy especial los patrones eléctricos secundarios de resistencias y de fuerza electromotriz, para el análisis de errores y calibración en general.

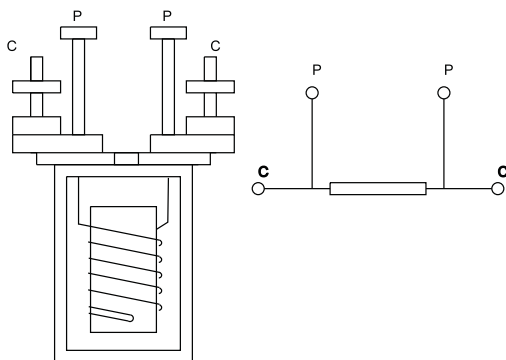
Patrones de resistencias:

Figura 6

Para el diseño de patrones de resistencias, se emplean hilos metálicos calibrados. Puesto que en los metales varía mucho la resistividad en función de la temperatura, se utilizan aleaciones.

Cuando las resistencias son bajas -a partir de 10 ohm, y menos- poseen la disposición de cuatro bornes como muestra la figura:

Los contactos de tensión y corrientes están separados, evitando así errores debido a las resistencias de contactos en los bornes de conexión.

El hilo convenientemente aislado va encerrado en un recipiente metálico y sus terminales van dispuestos exteriormente en la tapa. Co-

mo vemos en el esquema de la figura 6 existen cuatro terminales: Dos de ellos, los de mayor sección, sirven para conectar la resistencia patrón al circuito de medida y los otros dos -de menor sección- se emplean para medir la caída de tensión en la resistencia propiamente dicha. El recipiente metálico tiene perforaciones para poder sumergirlo en aceite. Ello se realiza cuando se desea mantener al elemento en temperatura rigurosamente constante. Generalmente en el centro del patrón de resistencia, existe un orificio que permite colocar un termómetro para la verificación de la temperatura.

En cuanto a la capacidad de disipación las resistencias patrones tienen una disipación del orden del Watt en aire y de 10 Watt sumergidas en aceite.

A partir de estos valores y sabiendo el valor de la resistencia es fácil determinar la corriente que puede admitir: $I = \sqrt{P/R}$

Se construyen resistores de valor fijo desde 0,1 miliohm hasta 100 kilo-ohm, calibrados generalmente por el *método de comparación*.

Aleaciones utilizadas en resistencias patrones:

Las resistencias patrones se construyen con alambres de distintas aleaciones metálicas, porque los metales puros tienen una resistencia específica demasiado pequeña y un coeficiente de temperatura de la resistencia específica demasiado alta.

De los materiales utilizados en la construcción de resistencias patrones se destacan:

Manganina

Aleación conformada por 84% de cobre, 12% de manganeso y 4% de níquel, esta proporción es una solución de compromiso a efectos de alcanzar mínimos valores de coeficiente de temperatura y tensión termoeléctrica.

Los coeficientes de temperatura α y β , alcanzan para 25° los siguientes valores:

$$\alpha = 10 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta = -3 \cdot 10^{-7} \dots -7 \cdot 10^{-7}$$

Para el intervalo entre 20 y 30 °C, la variación de resistencia es de 10 a 20 p.p.m. (partes por millón).

Otras características destacadas de esta aleación es su resistencia específica elevada (0,45, unas 25 veces mayor que la del cobre), gran estabilidad de su valor en el tiempo y reducida tensión termoeléctrica (2 a 3 $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$).

Constantan:

Aleación de cobre con 40 a 60% de níquel y una pequeña proporción de manganeso. Tiene propiedades análogas las de la manganina, salvo su tensión termoeléctrica con respecto al cobre, relativamente elevada: alrededor de 40 $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$.

Se utiliza esta aleación para resistencias grandes (por encima de los mil ohm), especialmente en circuitos de corriente alterna, donde no influye la tensión termoeléctrica.

Resistores patrones en corriente alterna. Comportamiento.

Como primera aproximación una resistencia en corriente alterna se comporta como el circuito equivalente de la figura 7, que consta de una resistencia pura R con una inductancia L y conectada en paralelo con una capacidad C.

El circuito equivalente demuestra que al existir una componente reactiva, tendremos un ángulo de desfase φ , que llamamos ángulo de error.

Es evidente que para minimizar φ , la componente reactiva deberá ser pequeña.

Para hallar el ángulo φ , partimos de la impedancia equivalente Z_e :

$$Z_e = \frac{(R+j\omega L) j \frac{-1}{\omega C}}{(R+j\omega L) - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega L - jR}{R\omega C - j(1 - \omega^2 LC)}$$

$$Z_e = \frac{(R+j\omega)[(1 - \omega^2 LC) - R^2 C]}{(R\omega C)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}$$

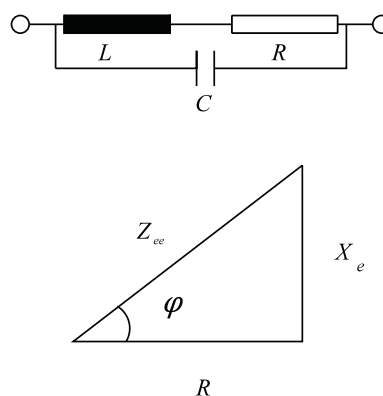


Figura 7

$$\operatorname{tg} \varphi \cong \omega \left(\frac{L}{R} - RC \right) = \omega \tau$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e} = \frac{\omega[L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C]}{R}$$

uesto que el producto L.C es muy pequeño, puede despreciarse por lo que el ángulo de error valdrá aproximadamente:

Siendo τ la constante de tiempo.

Ahora bien como L y C están distribuidas por todo el arrollamiento de la resistencia, la ecuación anterior con la simplificación anotada da aproximadamente el ángulo de error.

Dimensionando adecuadamente el arrollamiento, la constante de tiempo puede hacerse igual a:

$$\tau = \frac{L}{R} - RC$$

será igual a cero cuando:

$$\frac{L}{R} = RC \quad \text{Condición para que } \operatorname{tg} \varphi = 0$$

De la expresión anterior:

$$R^2 = \frac{L}{C}$$

con lo cual deducimos:

- a) Para resistencias pequeñas, la inductancia pura ha de ser baja y la capacidad alta.
- b) Para resistencias grandes la capacidad debe ser muy pequeña.

Diseño de resistores para minimizar el error

Para la construcción de resistores de gran exactitud, con apreciable disminución de los efectos de la frecuencia se emplean distintos recursos constructivos. Algunos de ellos son los detallados a

continuación:

a) bobinado bifilar:

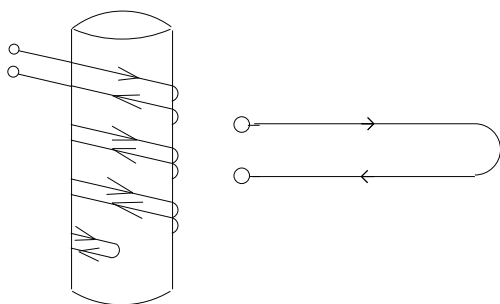


Figura 8: Bobinado bifilar

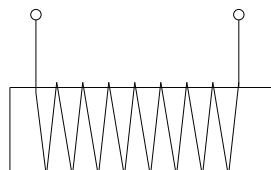


Figura 9: Arrollamiento de Rowland

Para resistencias chicas se utiliza esta disposición que consiste en enrollar el conductor en doble lazo, de modo que el conductor de ida y vuelta estén casi uno al lado de otro, de este modo se compensan entre sí las inductancias.

Se usan para resistencia de 0,1 ohm hasta 1 ohm, pues la capacidad aumenta a medida que nos acercamos a los terminales del conductor doble, entre los cuales existe la máxima diferencia de potencial.

b) bobinas planas:

En el denominado arrollamiento de Rowland, un conductor simple se devana en forma de hélice sobre una delgada lámina de mica u otro material aislante, formado así una resistencia con mínima inductancia y capacidad reducida.

Se utiliza en resistores de valores nominales superior a los 100 ohm.

Patrón de tensión

Se ha adoptado como patrón de trabajo del volt internacional, la relación igual a $1/1,01830$ de la f.e.m. de un pila normal Weston saturada a 20 °C.

Esta pila se la denomina también "pila de cadmio". El polo positivo es mercurio libre, encima y como despolarizador se coloca una pasta de sulfato de mercurio (SO_4Hg_2), sulfato de cadmio (SO_4Cd) y su disolución saturada. El polo negativo consta de amalgama de cadmio. El electrolito es una disolución de sulfato de cadmio.

La resistencia interna de la pila es de aproximadamente 150 ohm.

Tiene como ventaja principal una gran estabilidad en el tiempo, además, respetando rigurosas especificaciones en su construcción, se logran unidades, cuyos valores nominales difieren entre sí en solo algunas p.p.m..

La f.e.m. a 20 °C fue definida como 1,01830 volt internacional y disminuye aproximadamente en un 0,004% por cada grado de variación de temperatura.

Es importante aclarar que este generador electroquímico no es apto para entregar energía. Con precauciones se podrá alcanzar valores no superiores a los 5 μ A.

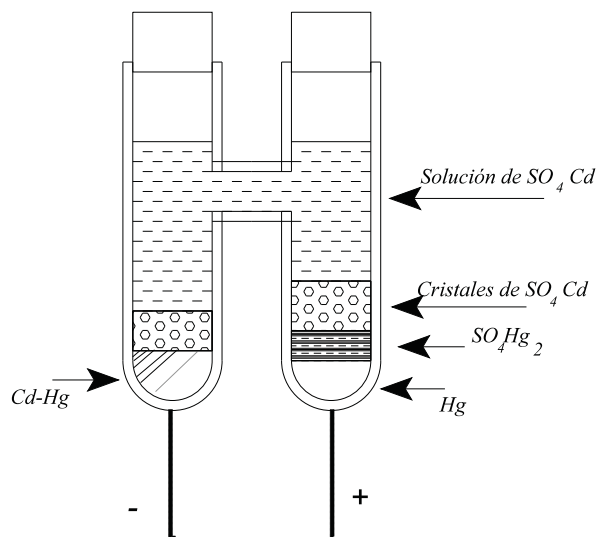


Figura 10

Simbología

Los instrumentos utilizados en medidas eléctricas pueden clasificarse de distintas formas:

a) Por el principio de funcionamiento:

De acuerdo con el principio de funcionamiento encontraremos instrumentos denominados electromagnéticos (como los de imán permanente y bobina móvil, imán móvil, hierro móvil), electrodinámicos, electrostáticos, inducción, etc.





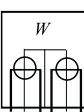



b) Por el tipo de corriente que lo acciona.

De corriente continua o alterna, de ambas corrientes.


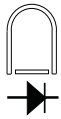

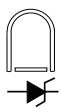








c) Por la exactitud.

De acuerdo con índices normalizados (0.25, 0.5, 1, 1.5, 2 y 3), se clasifican en instrumentos de tablero, laboratorio y patrón.

















Símbolos de representación de los aparatos eléctricos de medida en diagrama de circuitos:

Tabla I	
	Instrumento de medida, representación general
	Sistema de medida de indicación general
	Sistema de medida, de indicación con desviación de índice a ambos lados
	Instrumento de medida, amperímetro
	Vatímetro con dos elementos de medidas para sistemas trifásicos (conexión Aron)
	Instrumento digital
	Instrumento integrador (medidores de energía)
	Instrumento registrador





En la tabla siguiente aparecen los símbolos que normalmente se encuentran ubicados en el cuadrante de un instrumento analógico. Estos símbolos ayudan a identificar al instrumento por el tipo de grandor que mide, por el principio de funcionamiento, su posición de trabajo, su clase (índice de exactitud), tensión de prueba, etc.

Tabla II		
Símbolo	Instrumento	Aplicaciones
	Imán permanente y bobina móvil	amperímetros, voltímetros, óhmetros
	Imán permanente y bobina móvil con rectificador	amperímetros, voltímetros en corriente alterna
	Imán permanente y bobina móvil, cocientímetro	óhmetro
	Lupa de tensión	voltímetros
	Hierro móvil	amperímetros, voltímetros
	Electrodinámico, sin hierro	amperímetros, voltímetros, vatímetros
	Electrodinámico, cocientímetro	fasímetros, frecuencímetros
	Electrodinámico con núcleo de hierro	amperímetros, voltímetros, vatímetros
	Electrostático	voltímetros
	De vibración	frecuencímetros
	Inducción	medidores de energía
	Imán móvil	amperímetros

Símbolos vinculados a su construcción y forma operativa

	Pantalla electrostática
	Pantalla magnética (de hierro)
ast	Instrumento de disposición astática
	Tensión de prueba 500 V.
	Tensión de prueba (el número interno expresado en kV)
	Instrumento no cumple ninguna especificación de tensión de prueba
	Ídem
	Atención. Observar las instrucciones de empleo en un documento separado
	Corriente continua
	Corriente alterna (sino indica la frecuencia se considera como margen nominal el comprendido entre 45 y 65 Hz).
	Ambas corrientes
	Trifásico con un solo elemento de medida
	Trifásico con dos elementos de medida
	Trifásico con tres elementos de medida
	Resistencia en paralelo (separada del instrumento)
	Resistencia en serie (separada del instrumento)
	Ajuste de cero

Posiciones de trabajo:

	Posición de trabajo vertical (instrumentos de tablero)
	Posición de trabajo horizontal
	Posición de trabajo inclinada con indicación del ángulo de inclinación
 45°..60°..75°	Posición de trabajo inclinada con un campo nominal de uso de 45° a 75° (campo nominal de referencia 60°)

Exactitud, campo nominal de uso y referencia	
1,5	Índice de clase de exactitud (referido a los errores porcentuales del valor confiable). Valores normalizados: 0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2,5 - 5
15...45...55...65 Hz	Instrumento para ser utilizado desde 15 a 65 Hz. Campo nominal de uso 15 a 65 Hz. Campo nominal de referencia 45 a 55 Hz

Tensión de prueba

Determina la resistencia a tensiones eléctricas de una aislamiento entre las conexiones y la caja. La prueba se hace con tensión alterna de 50 Hz.

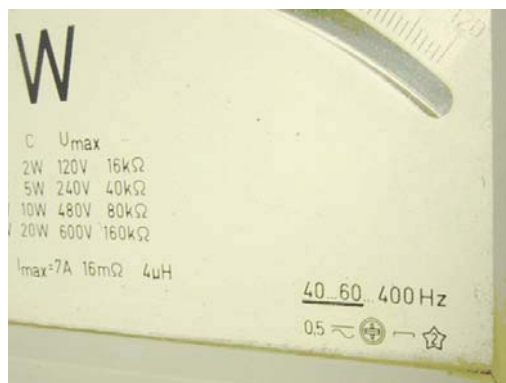
De acuerdo a las tensiones nominales del instrumento corresponderá la tensión de prueba:

Tensión nominal del instrumento	Tensión de prueba
Hasta 40 V	500 V
40 hasta 650 V	2.000 V
650 hasta 1.000 V	3.000 V
1.000 hasta 1.500 V	5.000 V
1.500 hasta 3.000 V	10.000 V
3.000 hasta 6.000 V	20.000 V
6.000 hasta 10.000 V	30.000 V
más de 15.000 V	2,2 U_n + 20.000 V

A excepción de la primera (aparece el símbolo de la estrella sin número), en el resto queda expresada en el instrumento con la estrella y el número correspondiente en kV.

Ejemplo:

En la figura siguiente se muestra parte del cuadrante de un vatímetro. De acuerdo a las indicaciones que aparecen en el margen inferior izquierdo del instrumento se interpreta:



Instrumento electrodinámico con núcleo de hierro, para corriente monofásicos y corriente continua, de posición de trabajo horizontal, clase 0.5, frecuencia de referencia de 40-60 Hz y utilización de 60-400 Hz.

La tensión de prueba es de 2 kV entre uno de los bornes y la caja que lo contiene. El fabricante garantiza que si aplicamos una tensión alterna de 2.000 V a 50 Hz no circulará más de un miliampere de corriente de fuga.

DINÁMICA DE LOS INSTRUMENTOS INDICADORES DE ROTACIÓN

La Comisión Electrotécnica Internacional (CEI) define al instrumento indicador, aquel que indica en todo momento, el valor instantáneo, el eficaz, el medio o el pico de la magnitud bajo medida.

Un instrumento indicador está constituido básicamente de dos partes, una fija y otra móvil, comúnmente llamada a esta última: rotor, órgano móvil o mecanismo de medición, cuando va incluido la escala y las piezas que producen el par de giro y el movimiento.

Cuando la magnitud comienza a ser mensurable para el instrumento, el órgano móvil o rotor comienza a girar alrededor de un eje (único grado de libertad) y luego de un cierto tiempo adoptará una posición determinada que es función de la magnitud a medir.

La función que liga la magnitud a medir con la posición adoptada, se llama **LEY DEL INSTRUMENTO** y puede ser en los distintos instrumentos indicadores -como luego veremos en el estudio particular de cada uno-: lineal, cuadrática, logarítmica, etc.

En la siguiente tabla se resume de acuerdo al principio de funcionamiento, grandor de la medición y tipo de corriente, la clasificación de los instrumentos con sus respectivas leyes de respuestas:

Principio de funcionamiento	Magnitud a medir	Tipo de corriente	Ley de respuesta
Imán permanente y bobina móvil	corriente, tensión	c.c.	$\theta = K.i$
Hierro Móvil	Corriente, tensión	c.c. y c.a.	$\theta = \frac{aL}{J\theta} I^2$
Electrodinámico	Corriente, tensión, potencia, etc. (En corriente alterna -además- frecuencia, factor de potencia, etc.	c.c. y c.a.	$\theta = \frac{dM}{d\theta} I_f I_m \cos\beta$
Inducción	Potencia, energía	c.a.	$\theta = K I_1 I_2 \sen\beta$

Todos los instrumentos indicados en la tabla presentan alguna característica en común, porque en general se trata de instrumentos indicadores o registradores en los cuales se desarrolla una cupla motora generada directamente o indirectamente por el grandor de la medición, la que debe alcanzar un valor suficiente para forzar la rotación de la parte móvil.

Ecuación de las cuplas en los instrumentos indicadores:

Cualquiera sea el medio usado para producir la desviación del sistema móvil, la cupla resultante de dicha fuerza debe ser equilibrada por la acción de una cupla opuesta (originada en general, por un resorte) que es función de la desviación del sistema.

Bajo la acción de estas cuplas opuestas, el sistema llega a una posición de equilibrio. Simultáneamente debe haber un medio de absorber la energía del movimiento, para que el sistema se detenga en su posición de equilibrio.

Cupla de inercia:

Si varía la magnitud a medir y se mueve el sistema móvil, aparecen pares dinámicos de giro que se oponen al movimiento. Esta cupla es debido a la forma geométrica y peso del sistema móvil y está dada por la expresión:

$$C_i = J\gamma = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Donde:

γ : Aceleración angular.

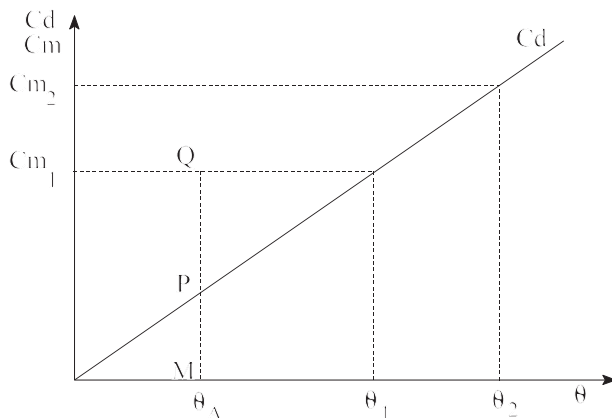
J : Momento de inercia del sistema con respecto al eje de rotación.

ω : velocidad angular.

θ : Desviación angular del sistema móvil.

Cupla directriz, antagonica o de restitución:

Si debido a la excitación eléctrica o por un medio mecánico cualquiera, el sistema móvil del instrumento es movido o apartado de su posición de cero, un par o cupla mecánica que normalmente se logra con el desarrollo de un resorte en espiral, una cinta en suspensión o una cinta tensa, contrarresta el par de giro. Esta cupla es el producto de la constante del resorte y del ángulo de giro:



$$C_d = K \cdot \theta$$

Figura 11

K : constante elástica del resorte.

θ : ángulo de giro.

Si suponemos por un instante que la cupla de inercia C_i es nula, tendríamos que al conectar el instrumento, la cupla motora en ese instante ($\theta = 0$) es cero y cero la antagonica. Cuando el rotor

comienza a girar describiendo un ángulo θ , con el crecer de θ va aumentando la cupla antagónica (C_d) opuesta a la motora. De este modo, cuando el ángulo descrito por el rotor alcanza un valor -por ejemplo θ_A - el balance de las cuplas es el siguiente:

- 1) La cupla motora - cuyo valor suponemos constante- está representada en la figura por MQ (Fig. 11).
- 2) La cupla directriz, de sentido opuesto al de la motora, tiene un valor representado por el segmento MP.
- 3) La cupla actuante está dada por PQ.

Como resultado general el rotor sigue girando en sentido de la motora, pero la cupla actuante es cada vez menor, hasta que, cuando el ángulo llega al valor θ_1 se cumple que:

$$C_{d_1} = K \theta = C_{m_1}$$

ahora la cupla motora aumentara el valor C_{m_2} se rompe el equilibrio: el exceso en el sentido de la cupla motora impulsa al rotor en el sentido de ángulos crecientes, hasta el valor final tal que:

$$K \theta_2 = C_{d_2} = C_{m_2}$$

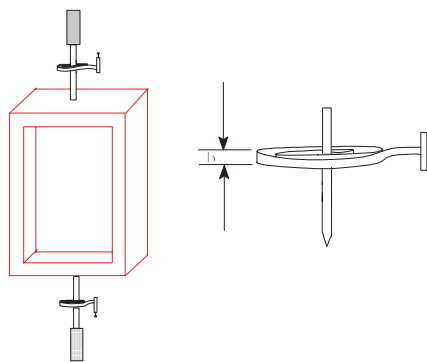


Figura 12

Se ve que para cada valor de la cupla motora corresponde un valor bien determinado de θ .

Recordar que no se ha considerado en este estudio la cupla de inercia C_p , ni otras cuplas que se verán más adelante.

En el caso que el instrumento tenga resorte en espiral - uno de cuyos extremos es solidario al eje móvil- la cupla directriz vale:

$$C_d = E \frac{ae^3}{12l} \theta = K \theta$$

Siendo

E : módulo de elasticidad del material

a : ancho de la cinta

e : espesor de la cinta

l : longitud de la cinta

Estos resortes en espiral no deben tener efectos secundarios elásticos, ni envejecimiento y deberán depender poco de la temperatura. El material que se usa es *bronce-fosforoso* o bien aleaciones especiales de acero.

En el caso de usar suspensión con cinta tensa - se estudiará más adelante- la cupla directriz viene dada por las reacciones elásticas que se desarrollan como consecuencia de la torsión de la cinta de suspensión al actuar la cupla motora.

Cuplas de amortiguamiento

Para disminuir la inevitable inercia de las oscilaciones del sistema móvil, cerca de la posición establecida de equilibrio, cada instrumento tiene un dispositivo especial denominado amortiguador. La cupla amortiguante tiene pues por objeto, absorber energía del sistema oscilante y llevarlo rápidamente a su posición de equilibrio, para que pueda ser leída su indicación.

Los amortiguamientos pueden ser de dos tipos, según su característica predominante:

1.- *Conservativos*

2.- *Disipativos*

El amortiguamiento conservativo es tal que la mayor parte de la energía del sistema móvil es devuelta al circuito por acción regeneradora. Esto sucede, por ejemplo, en el galvanómetro, en el que el frenado debido al aire es solamente una pequeña parte del amortiguamiento total del sistema móvil. En la mayor parte de los instrumentos eléctricos se usa un amortiguamiento disipativo, que tiene como ventaja sobre el anterior que no depende mayormente de las características del circuito al cual está conectado.

Hay tres clases principales de amortiguamiento disipativo:

a) *Por rozamiento*

b) *Fluido*

c) *Magnético*

a) El rozamiento entre dos superficies genera una cupla que es función de la compresión recíproca, pero no de la velocidad. Este rozamiento está siempre presente en los soportes de la parte móvil del instrumento y tiene cierta influencia - aunque pequeña- en la detención del sistema móvil. Por esta razón, el sistema móvil no se detendrá en θ_p sino en $\theta \pm \delta$, siendo δ un desplazamiento indeterminado, debido al rozamiento.

Si se supone que solamente hay rozamiento, la amplitud de la oscilación disminuye linealmente, mientras que lo hará según una exponencial si el amortiguamiento es fluido. En el caso real se tiene una combinación de ambos, y el sistema se detiene antes que en cualquiera de los dos casos anteriores, aunque la diferencia es poco notable. En definitiva lo importante es la aparición de indeterminación introducida por δ .

b) El amortiguamiento fluido es proporcional a la velocidad. En la actualidad se usa únicamente el amortiguamiento por aire, en un dispositivo cerrado. Este generalmente consiste en un aspa móvil liviana de aluminio que se mueve en una cámara cerrada en forma de sector, comprimiendo al aire,

que fluye por sus bordes para equilibrar la presión (Fig. 13). Este flujo de aire cesa apenas el asa deja de moverse.

c) El amortiguamiento magnético (Fig.14) también es proporcional a la velocidad. Se produce por las corrientes parásitas inducidas en un disco o sector de aluminio fijado al eje y situado en el entrehierro de un imán permanente cuando el eje gira por la acción de la cupla motora. Estas corrientes reaccionan con el campo del imán y producen un par resultante que se opone al movimiento (Fig.15).

La magnitud aproximada del amortiguamiento se calcula como sigue:

Si B es la densidad de flujo constante - y supuesta uniforme- en el entrehierro y v la velocidad lineal del elemento de disco bajo el entrehierro del imán; en el disco se induce una f.e.m.:

$$e = B.l.v$$

Siendo l la longitud del polo.

Esta f.e.m. produce una corriente:

$$I = \frac{Blv}{R_o}$$

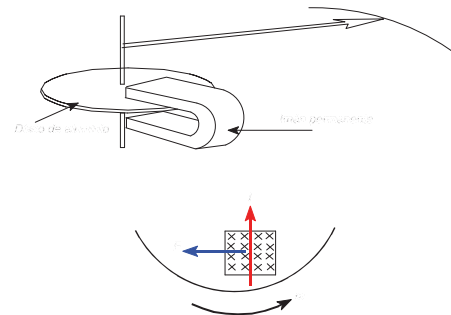


Figura 15

Siendo R_o la resistencia efectiva del disco.

La reacción entre esta corriente y el campo produce una cupla amortiguante:

$$C_a = F r = B I l r = \frac{B^2 I^2 v}{R_o} r = \frac{B^2 l^2 \omega r^2}{R_o}$$

Siendo "r" el radio y ω la velocidad angular. El coeficiente de amortiguamiento será:

$$D = \frac{B^2 l^2 r^2}{R_o}$$

Como el valor de R_o debe ser lo menor posible (para tener un buen valor de D) los discos se construyen de aluminio, y el imán se coloca algo alejado del borde (pero no mucho, ya que al mismo tiempo disminuye el brazo "r" y por ende el valor de la cupla) para permitir una mejor distribución de las líneas de corriente.,

En ciertos instrumentos (como los de bobina móvil: galvanómetros, voltímetros, etc.) la cupla amortiguante se obtiene por la acción de corrientes inducidas en la bobina móvil (Fig. 16) cuando rota en el campo magnético.

La f.e.m. inducida en la bobina tiene un valor instantáneo dado por:

$$e = 2Blv = 2Bl\omega \frac{a}{2} = Bla \frac{d\theta}{dt}$$

siendo:

l: alto de la bobina móvil.

a: ancho de la bobina.

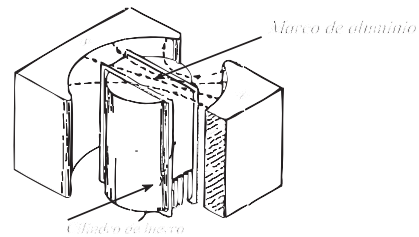


Figura 16

Para N espiras:

$$e = NBla \frac{d\theta}{dt}$$

Esta f.e.m. origina una corriente:

$$i = \frac{e}{R}$$

siendo R la resistencia total del circuito incluyendo la de la propia bobina. La interacción entre el campo y corriente origina la cupla amortiguante:

$$C_a = Fa = \frac{B^2 l^2 a^2 N^2}{R} \frac{d\theta}{dt}$$

$$C_a = D \frac{d\theta}{dt}$$

Si R es grande (como en el caso de los voltímetros) la bobina móvil se enrolla sobre un soporte de aluminio - de muy baja resistencia- con lo que se consigue aumentar el amortiguamiento hasta un valor óptimo. En este último caso será:

$$D = B^2 l^2 a^2 \left[\frac{N^2}{R} + \frac{S_{Al}}{\rho_{Al} 2 (l+a)} \right]$$

Sistemas de suspensión:

Ya hemos citado a la cupla de rozamiento, diciendo que la misma se origina en el roce del eje del sistema móvil con su cojinete. Hemos dicho que su valor es prácticamente independiente de la velocidad angular y además se opone al sentido de desplazamiento, es por ello que se debe afectarla del doble signo: $\pm C_r$

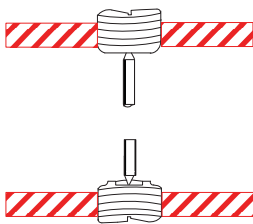


Figura 17a

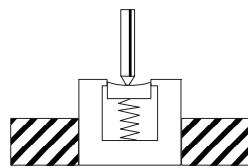


Figura 17b

En muchos instrumentos el sistema móvil se monta sobre pivotes, tal como muestra en las figuras 17a y 17b. Este montaje puede ser vertical u horizontal. En los instrumentos de laboratorio portátiles, como regla, el sistema móvil está dispuesto verticalmente, mientras que en los de tableros es horizontal.

A pesar del reducido peso del sistema móvil, la presión del pivote sobre el cojinete alcanza grandes valores, teniendo en cuenta el pequeñísimo radio de curvatura del pivote (0,01-0,15 mm). Por esta razón los cojinetes de los instrumentos de medidas eléctricas se elaboran al igual que en los relojes.

Se usan piedras preciosas (ágata, rubí, zafiro, etc.) y los pivotes de acero de la mejor calidad: acero-plata, al cobalto- tungsteno, etc. Las monturas o engastes para cojinetes, en instrumentos portátiles y de tableros, se ejecutan en forma de tornillos con diámetro de 3 a 3,5 mm., de pequeña rosca o redondos sin filetes.

En algunos instrumentos se utilizan monturas redondas con resortes para amortiguar los golpes.

En los instrumentos de alta sensibilidad esta cupla de rozamiento debe ser prácticamente nula, es por ello que el sistema u órgano móvil está tensado con un hilo (oro o cobre-fósforo) a través de los resortes, (Fig. 18).

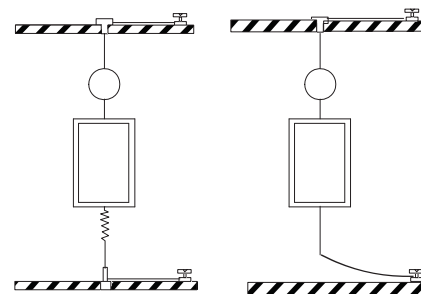


Figura 18

Cuando todavía se requiere mayor sensibilidad, el sistema móvil adopta la disposición colgante o suspendido (Fig. 19). Este es el sistema generalmente adoptado por el galvanómetro donde una sensibilidad aún mayor se logra por medio del sistema óptico (Fig. 20).

El indicador es el rayo luminoso, libre de masa e inercia, permitiendo sistemas móviles con pequeños momentos de inercia. Si se emplea una escala plana y con un ángulo de desviación α del sistema móvil, el número total de divisiones responderá a la expresión:

$$d = l \cdot \operatorname{tg} . 2\alpha$$

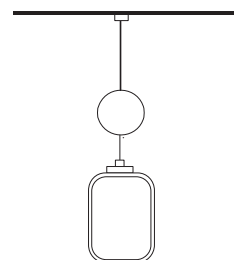


Figura 19

Con reflexiones sucesivas utilizando varios espejos se obtiene todavía mayor sensibilidad. Un esquema de este tipo el dibujado en la Fig. 21.

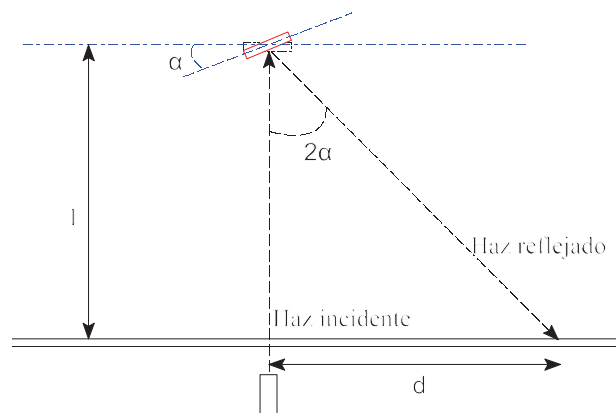


Figura 20

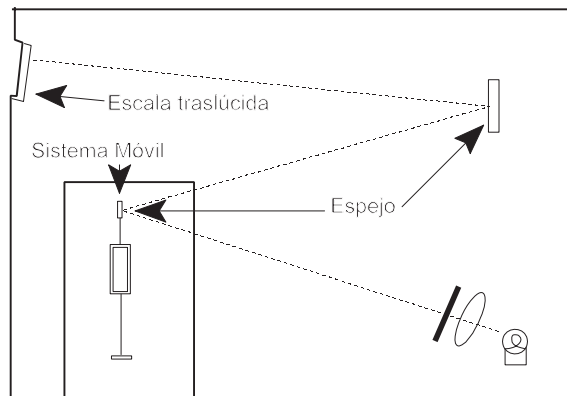


Figura 21

ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

■ Ecuación del movimiento de un sistema móvil alrededor de un eje.

El estudio de la ecuación del movimiento en un instrumento eléctrico indicador, conduce a la obtención de la respuesta del mismo relacionada con los distintos parámetros que lo constituyen en función del tiempo.

Por la simplicidad y conveniencia de su diseño eléctrico y mecánico, el movimiento del sistema indicador de un instrumento eléctrico es generalmente un movimiento de rotación. Se puede considerar que estos dispositivos mecánicos tienen un solo grado de libertad: el de rotación alrededor de su eje.

La ecuación mecánica a plantear es la que determina que la suma de los pares actuantes sobre un cuerpo rígido con un solo grado de libertad, es igual a la variación del momento angular del sistema móvil:

$$\sum_{k=1}^n C_k = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

el vector H, tiene una sola componente a lo largo del eje de rotación, por lo que su expresión se reduce:

$$\sum_{k=1}^n C_k = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = J\gamma = C_i$$

donde J es el momento de inercia del sistema móvil y θ es la posición angular instantánea del sistema móvil. Es decir que la sumatoria de las cuplas actuantes iguala a la cupla de inercia:

$$H = J \frac{d\theta}{dt}$$

$$C_m - C_a - C_d \pm C_r = C_i$$

Reemplazando por sus respectivas expresiones y ordenando términos se tendrá:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + K\theta \pm C_r = C_m$$

Suponiendo despreciable el rozamiento:

$$C_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + K\theta$$

que resulta la ecuación diferencial del movimiento de un instrumento.

Es decir que la cupla motora iguala a la suma de las cuplas de inercia, de amortiguamiento y del resorte.

Solución de la ecuación diferencial

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en coeficientes constantes, se encuentran a menudo en los estudios técnicos. Un ejemplo ya conocido en Teoría de Circuitos lo representa la corriente de malla del circuito serie RLC:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_t$$

y dado que:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

reemplazando:

Otro ejemplo análogo lo encontramos en el esquema mecánico de la Fig.

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e_t$$

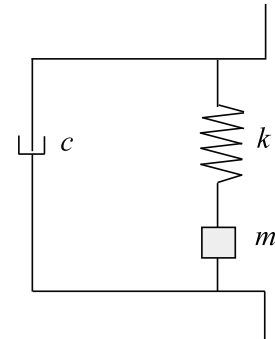


Figura 22

22, donde un sistema masa-resorte-amortiguador, también lo podemos plantear con una ecuación similar:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_t$$

En la tabla I se resumen las analogías planteadas.

Tabla I					
Instrumento eléctrico	θ	J	D	K	Cm
Circuito serie RLC	q	L	R	1/C	E
Sistema mecánico	x	m	c	k	f

Volviendo a la ecuación del movimiento del instrumento de rotación, resolviéndola podemos determinar:

$$\theta = f_t$$

Esta función es importante ya que nos permitirá determinar en qué forma se produce el movimiento en los instrumentos de rotación en función del tiempo.

La solución general de una ecuación diferencial, lineal, con coeficientes constantes consiste en la suma de una solución particular Θ_p (que representa el estado permanente o estacionario final e independiente del tiempo) y una solución homogénea Θ_h (representativa del estado transitorio), que tiende a desaparecer con el tiempo.

$$\theta = \theta_p + \theta_h$$

La solución general debe tener las constantes arbitrarias que indique el orden de la ecuación diferencial (en nuestro caso dos, ya que es de segundo orden, es decir aparece la segunda derivada). Para hallar la solución homogénea se plantea la ecuación homogénea:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + K\theta = 0$$

y se propone como solución:

$$\theta_h = A e^{rt}$$

siendo A una constante arbitraria y r una constante a determinar.

$$\dot{\theta} = A r e^{rt}$$

$$\ddot{\theta} = Ar^2 e^{rt}$$

Reemplazando en la ecuación homogénea:

$$Ae^{rt}(Jr^2 + Dr + K) = 0$$

Esta igualdad se cumplirá si r toma los valores correspondientes a las raíces de la ecuación:

$$Jr^2 + Dr + K = 0$$

obteniendo:

$$r_1 = -\frac{D}{2J} + \sqrt{\frac{D^2}{4J^2} - \frac{K}{J}}$$

$$r_2 = -\frac{D}{2J} - \sqrt{\frac{D^2}{4J^2} - \frac{K}{J}}$$

y entonces la solución del régimen libre estará formada por dos términos:

$$\theta_h = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

siendo B otra constante arbitraria y r_1 distinta de r_2 .

La solución particular θ_p en el régimen permanente o estacionario se encuentra haciendo:

$$\theta_p = E = \text{constante}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial será:

$$K\theta_p = C_m$$

Luego la solución general será:

$$\theta = \theta_p + \theta_h = \frac{C_m}{K} + A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

r_1 y r_2 son raíces de la ecuación característica y no dependen de las condiciones iniciales. En tanto que A y B sí dependen de las condiciones iniciales, que pasamos a plantear:

Para $t=0$

$$\theta_i=0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt}=0$$

calculamos A y B. Para la primera condición:

$$\theta = \theta_p + A e^{r_1 0} + B e^{r_2 0}$$

Para la segunda, calculando la derivada e igualando a cero:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 + r_1 A e^{r_1 0} + r_2 B e^{r_2 0}$$

De las últimas expresiones ordenando términos:

$$A + B = \theta_p$$

$$r_1 A + r_2 B = 0$$

Resolviendo obtenemos:

$$A = -\frac{r_2}{r_2 - r_1} \theta_p$$

$$B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} \theta_p$$

Reemplazando las constantes en la expresión de θ :

$$\theta = \theta_p \left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \right)$$

Analicemos ahora los valores que pueden tomar las raíces de la ecuación característica r_1 y r_2 . La cantidad sub radical podrá ser positiva, negativa o nula:

1) Movimiento periódico

Si,

$$\frac{D^2}{4J^2} < \frac{K}{J}$$

tendremos:

$$r_1 = -\frac{D}{2J} + j \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{D^2}{4J^2}}$$

$$r_2 = -\frac{D}{2J} - j \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{D^2}{4J^2}}$$

por lo que r_1 y r_2 resultan ser raíces complejas conjugadas.

Reemplazando:

$$a = \frac{D}{2J}$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{D^2}{4J^2}}$$

$$r_1 = -a + jb$$

$$r_2 = -a - jb$$

operando en la ecuación de respuesta:

$$\theta = \theta_p \left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{-at} e^{+jbt} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{-at} e^{-jbt} \right)$$

$$\theta = \theta_p \left[1 + e^{-at} \left(-\frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{+jbt} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{-jbt} \right) \right]$$

Calculando las relaciones:

$$\frac{r_2}{r_2 - r_1} = \frac{a + jb}{2jb} \quad \text{y} \quad \frac{r_1}{r_2 - r_1} = \frac{a - jb}{2jb}$$

que reemplazando queda:

$$\theta = \theta_p \left[1 + e^{-at} \left(-\frac{a + jb}{2jb} e^{jbt} + \frac{a - jb}{2jb} e^{-jbt} \right) \right]$$

ordenando términos:

$$\theta = \theta_p \left[1 + e^{-at} \left[-\frac{a}{b} \left(\frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2j} \right) + \left(\frac{e^{jbt} + e^{-jbt}}{2} \right) \right] \right]$$

Reemplazando las expresiones exponenciales por las trigonométricas:

$$\frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2j} = \text{sen}bt \quad \frac{e^{jbt} + e^{-jbt}}{2} = \text{cos}bt$$

La expresión final de θ queda:

$$\theta = \theta_p \left[1 - \frac{e^{-at}}{b} (a \operatorname{sen} bt + b \cos bt) \right]$$

Esta expresión representa una función armónica de amplitud decreciente con el tiempo, y pulsación mecánica de valor b (Fig. 23).

Este es el caso oscilatorio o subamortiguado y desde el punto de vista práctico es el de mayor utilidad. En los instrumentos se requiere para llegar a la posición permanente un movimiento *ligeramente subamortiguado*.

$$\frac{\theta}{\theta_p} = 1 - \frac{e^{-at}}{b} (a \operatorname{sen} bt + b \cos bt)$$

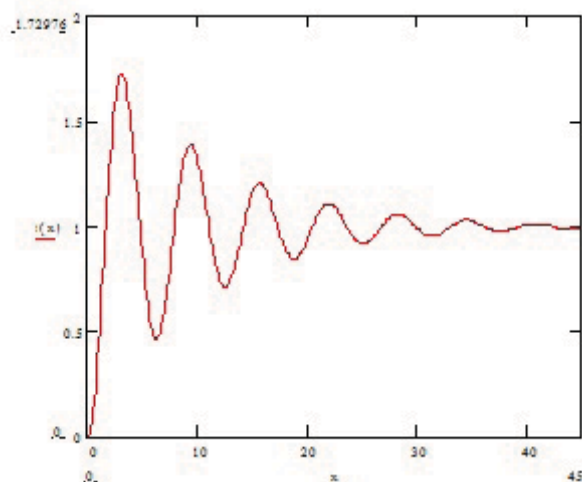


Figura 23

2) Movimiento crítico

Si las dos raíces son iguales significa que:

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{A}{2J}$$

para ello debe cumplirse:

$$\frac{K}{J} = \frac{D^2}{4J^2}$$

De la expresión anterior el único parámetro variable es el amortiguamiento D y significa que existe un solo valor que cumple con tal condición, y que se lo llama amortiguamiento crítico A_c y al movimiento que verifica tal condición se lo denomina *movimiento crítico*.

$$A_c = 2 \sqrt{KJ}$$

La solución de la ecuación diferencial tendrá la siguiente expresión:

$$\theta = Ae^{rt} + Be^{rt}t$$

La ecuación general será:

$$\theta = \theta_p + Ae^{rt} + Be^{rt}t$$

Estableciendo las mismas condiciones iniciales que en el movimiento periódico, tendremos:

$$A = -\theta_p$$

$$B = \theta_p r$$

Reemplazando en la ecuación de respuesta:

$$\theta = \theta_p [1 - e^{-at}(1 + at)]$$

$$\frac{\theta}{\theta_p} = 1 - e^{-at}(1 + at)$$

El movimiento obtenido se denomina aperiódico crítico y de todos los casos posibles es éste donde el valor final de θ se estabiliza en el menor de los tiempos. De manera que podemos definir al movimiento crítico como aquel que permite, en el menor de todos los tiempos posibles, lograr la posición final de equilibrio del sistema móvil.

Si bien en principio puede suponerse que desde el punto de vista práctico este sería el movimiento más aconsejable, no lo es, por cuanto se prefiere siempre que exista una pequeña oscilación para asegurar el operador que el sistema móvil no está frenado por alguna causa externa (en la Fig. 24 es la gráfica representada por líneas de puntos).

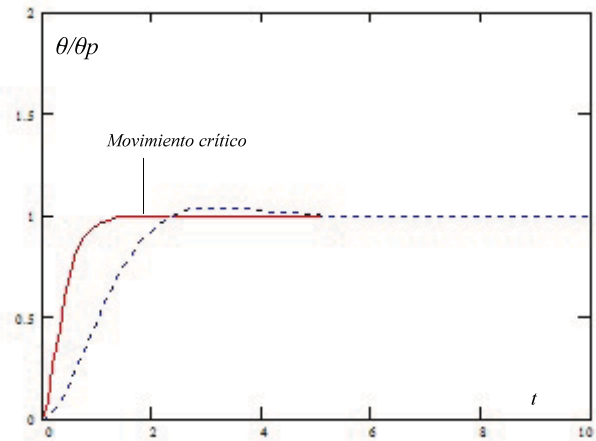


Figura 24

3) Movimiento aperiódico

Si,

$$\frac{D^2}{4J^2} > \frac{K}{J}$$

tendremos raíces reales y distintas.

$$a = \frac{D}{2J}$$

$$b = \sqrt{\frac{D^2}{4J^2} - \frac{K}{J}}$$

Reemplazando términos:

Para determinar las constantes volvemos a plantear las mismas condiciones iniciales anteriores:

$$r_1 A + r_2 B = 0$$

$$\theta = \theta_p + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t} = 0$$

De las cuales se deducen las constantes A y B:

$$A + B = -\theta_p$$

$$A = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \theta_p \quad B = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} \theta_p$$

Reemplazando las constantes obtenidas A y B en la ecuación de respuesta:

$$\theta = \theta_p \left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{-at} e^{bt} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{-at} e^{-bt} \right)$$

Calculando por separado las relaciones:

$$\frac{r_2}{r_1 - r_2} = -\frac{1}{2} \frac{(a+b)}{b}$$

$$\frac{r_1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{b}$$

reemplazando en θ y ordenando términos:

$$\frac{\theta}{\theta_p} = 1 - e^{-at} \left[\frac{a}{b} \left(\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2} \right) + \left(\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\theta}{\theta_p} = 1 - e^{-at} \left[\frac{a}{b} (\sinh bt + \cosh bt) \right]$$

esta expresión es representativa del movimiento aperiódico o sobreamortiguado que a diferencia del crítico alcanza la posición final de equilibrio lentamente, como muestra la representación gráfica de la Fig. 25.

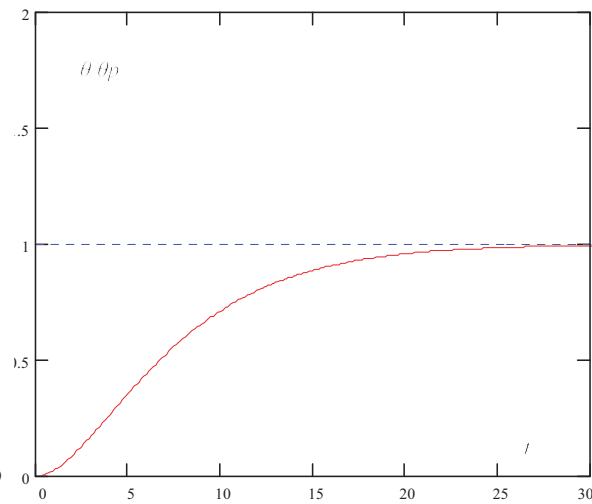


Figura 25

Respuesta a una excitación sinusoidal

Estudiaremos ahora el caso de que la cupla motora aplicada al instrumento no es ya un valor constante aplicado súbitamente, sino una cupla que varía armónicamente en el tiempo.

Planteamos la ecuación diferencial para una cupla motora del tipo:

$$C_m = C_o \sin \omega t$$

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + K \theta = C_o \sin \omega t$$

siendo ω la pulsación aplicada

que es propia de la excitación de la fuente de tensión sinusoidal, es totalmente independiente de las características del instrumento (no confundir con la ω utilizada en el análisis transitorio).

La solución de la última ecuación estará compuesta por una solución homogénea y una particular. Como para los instrumentos la solución homogénea (transitoria) se anula rápidamente, nos interesa ahora la respuesta particular; es decir la solución estacionaria.

Para ello suponemos:

$$\theta_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

que reemplazada en la ecuación diferencial y agrupando términos:

$$(-JA\omega^2 + B\omega D + KA) \cos \omega t + (-B\omega^2 - DA\omega + BK) \sin \omega t = C_o \sin \omega t$$

Para que se cumpla la ecuación anterior, es evidente que tiene que cumplirse:

$$-JA\omega^2 + B\omega D + KA = 0$$

$$-B\omega^2 J - DA\omega + BK = C_o$$

Despejando A y B del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$A = \frac{-\omega D}{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2} C_o$$

$$B = \frac{K - \omega^2 J}{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2} C_o$$

que reemplazados en la expresión de Θ_p :

$$\theta_p = \frac{C_o}{\sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}} \left(\frac{-\omega D}{\sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}} \cos \omega t + \frac{K - \omega^2 J}{\sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}} \sin \omega t \right)$$

Si dibujáramos un triángulo rectángulo, donde $a = \omega D$ y $b = K - \omega^2 J$ son los lados y z la hipotenusa:

$$z = \sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}$$

que forma con el lado a un ángulo φ .

Reemplazando los coeficientes de coseno y seno como los lados del triángulo, se podrá escribir:

$$\theta_p = \frac{C_o}{\sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}} (-\text{sen } \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \text{sen } \omega t)$$

Dividiendo numerador y denominador por K y recordando que:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{J}} \quad y \quad D_c = 2 \sqrt{KJ}$$

$$\theta_p = \frac{C_o}{K} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(2 \frac{\omega}{\omega_o} \frac{D}{D_c}\right)^2} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

C_o/K es la deflexión estática, es decir el valor final al que tendía la solución cuando la cupla motora era constante e igual a C_o . El ángulo de fase φ es igual a:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega D}{K - \omega^2 J} = \arctg \frac{2 \frac{\omega}{\omega_o} \frac{D}{D_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

que indica el desfase $0 < \varphi < \pi$ entre la cupla motora y la respuesta del sistema móvil. De la expresión de deflexión θ_p definimos:

$$A = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(2 \frac{\omega}{\omega_o} \frac{D}{D_c}\right)^2} = \frac{1}{[1 - \omega_r^2]^2 + (2\omega_r \gamma)^2}$$

En esta última expresión **A** es el factor de amplificación de la respuesta del sistema (Fig. 26). Indica la cantidad por la cual hay que multiplicar a la deflexión estática para tener la amplitud de la oscilación de respuesta del sistema. Con γ definimos al amortiguamiento relativo y ω_r la pulsación relativa.

Finalmente queda:

$$\theta_p = \frac{C_o}{K} A \text{ sen}(\omega t - \varphi)$$

Del análisis de la última expresión se desprende la aparición de dos tipos de errores:

- Un **error de amplitud**, que depende del valor que adopte “A”.
- Un **error de fase**, debido a φ .

Ambos errores son dependientes de la **pulsación impuesta** y del **amortiguamiento** del sistema.

La condición que minimiza uno de estos errores no es precisamente la que reduce al otro; pero como en general uno de ellos no interesa, se puede llegar a soluciones satisfactorias.

Análisis de “A” y de φ

Si se representa gráficamente el factor de amplificación A en función de la pulsación relativa ω/ω_o para distintos valores del amortiguamiento relativo D/D_o , Fig. 26, se extraen las siguientes conclusiones:

1) Para frecuencias mucho menores que la natural (libre) del sistema $\omega/\omega_o \rightarrow 0$ es $A \approx 1$ para cualquier valor del amortiguamiento D. Es decir que no aparece prácticamente error de amplificación.

2) Para frecuencias mucho mayores que la natural del sistema $\omega \gg \omega_o$, el factor de amplificación tiende a anularse para cualquier valor del amortiguamiento D. Es decir, que no habría prácticamente respuesta ante este tipo de excitaciones.

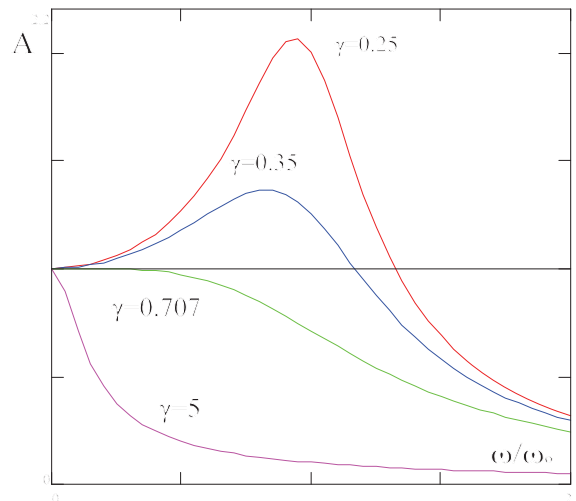


Figura 26

- Si el amortiguamiento relativo es menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$0 < \frac{D}{D_o} = \lambda < 0,707$$

el factor “A” llega a un máximo a medida que ω/ω_o aumenta desde cero. Este máximo se obtiene siempre antes que $\omega = \omega_o$.

4) Si el amortiguamiento relativo es mayor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ el factor de amplificación disminuye siempre, a medida que aumenta ω .

$$0,707 < \frac{D}{D_c} < \infty$$

La zona mayor de frecuencias para las cuales A no difiere mayormente de la unidad se obtiene usando un valor algo menor que:

$$D/D_c = 0,707$$

que es el valor del amortiguamiento relativo que hace desaparecer el máximo en las curvas de “A”.

También se puede representar el ángulo de fase en función de la frecuencia relativa ω/ω_0 para distintos valores del amortiguamiento relativo. En las Fig. 27a se ha representado la variación del ángulo φ (en radianes) desde cero hasta 90° en función de la pulsación relativa (ω/ω_0) para cuatro valores de amortiguamiento relativo: 0.5, 0.707, 1 y 2. En la Fig. 27b la misma representación desde 90° hasta 180° . Se observa que el ángulo φ es de 90° para cualquier amortiguamiento, si la frecuencia impuesta coincide con la natural del sistema ($\omega=\omega_0$).

Para frecuencias mucho menores que la natural $\omega=\omega_0 \rightarrow 0$, φ es pequeño y la respuesta está muy poco defasada con respecto a la excitación; pero si es mayor que la natural, la respuesta tiende a colocarse en oposición de fase con respecto a la excitación.

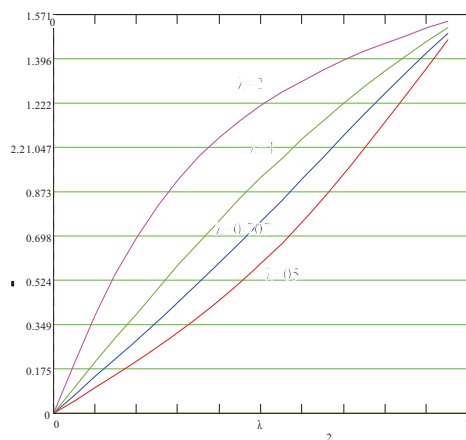


Figura 27a

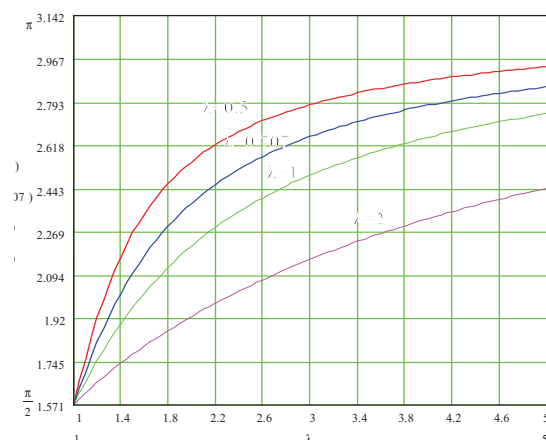


Figura 27b

Funcionamiento de los instrumentos con ondas senoidales o deformadas. Aplicaciones.

De acuerdo al análisis hecho en las páginas precedentes cuando excitamos a un instrumento con una onda sinusoidal su cupla motora responderá a la expresión:

$$C_m = C_o \cdot \sin \omega t$$

La respuesta del instrumento en su expresión general será:

$$\theta_p = \frac{C_o}{K} A \sin(\omega t - \varphi)$$

Veamos ahora algunas aplicaciones en las cuales se fundamenten la necesidad o no de incrementar el factor de amplificación.

1.- Existen muchas aplicaciones en las que los instrumentos se conectan a través de transductores para convertir magnitudes físicas en eléctricas (por ejemplo: temperatura, humedad, presión, etc.). También se utilizan galvanómetros para medidas biológicas: electrocardiogramas, electroencefalogramas, no son más que registros de medidas eléctricas emitidas por el corazón, cerebro, que se pueden medir, pero que varían irregularmente con el tiempo. Para su correcto análisis es imprescindible contar con un instrumento que copie fielmente tales señales. Para estos casos se utilizan galvanómetros cuyos sistemas móviles accionan una aguja o plumín que se desliza sobre un papel cuadrículado o bien una punta incandescente que graba sobre un papel encerado, o el haz luminoso que vela un rollo fotográfico.

Electrocardiógrafo: No es otra cosa que un aparato registrador que consta de un amplificador (para amplificar las señales débiles) y del galvanómetro. La velocidad de desplazamiento del papel es estable y regulada de tal forma (25 mm/seg) que el intervalo entre dos rayas verticales finas (separadas un milímetro) es de 1/25 seg. es decir, 0,04 seg.

Para este ejemplo particular las señales registradas deben ser necesariamente copias fieles de las señales emitidas, por cuanto del análisis de las mismas se pueden detectar trastornos o afecciones cardíacas. Para lograr este objetivo debe cumplirse que la pulsación propia del galvanómetro debe ser mucho mayor que la pulsación de la señal externa.

Por tanto: si $\omega/\omega_o \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0$, $A \rightarrow 1$ por lo que el trazado electrocardiográfico podrá seguir las señales originales (Fig. 28).

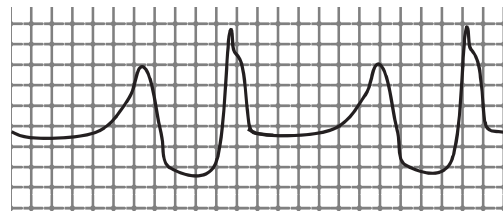


Figura 28

2.- Observando las curvas del factor de amplificación en función de la relación ω/ω_o , se aprecia que cuanto menor es la relación entre D y D_c tanto mayor es el valor del factor de amplificación en las proximidades de $\omega/\omega_o = 1$. Existe un galvanómetro particular que aprovecha esta respuesta -a la vez,

que se comporta como un filtro de paso de banda muy selectivo-, es el denominado galvanómetro de vibración. El más generalizado es aquél que usa una suspensión variable y tensa que sirve para ajustar la constante K y por ende ω_0 de modo que la pulsación natural puede sintonizarse con la pulsación externa ω . El momento de inercia J constructivamente se hace muy pequeño, logrando así valores de f_0 de 300 Hz. Los galvanómetros de este tipo son capaces de dar valores de A hasta más de 100 con lo que se consigue una sensibilidad elevada y una discriminación excelente para los armónicos de la fuente. La principal aplicación de este galvanómetro es como detector de corriente alterna en puentes - obviamente de c.a.- de baja frecuencia. Usualmente está equipado con un espejo reflector o una fuente luminosa. Cuando el galvanómetro está en reposo aparece sobre una escala traslúcida una línea bien definida en la indicación 0 (cero). Cuando se excita la bobina móvil aparecen vibraciones reflejadas en la pantalla por una banda luminosa.

La curva de respuesta para este tipo de galvanómetro es la dibujada en la Fig. 29.

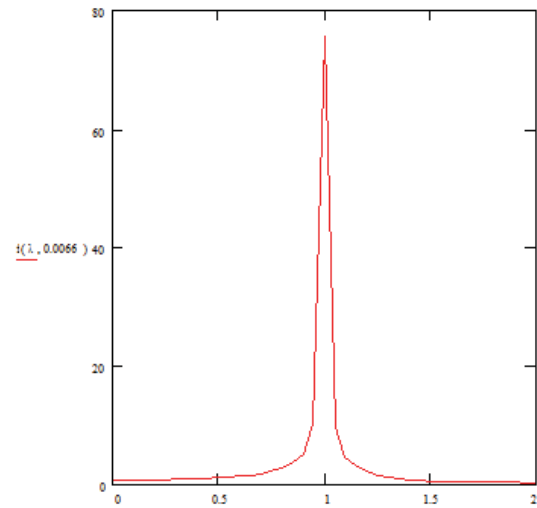


Figura 29

En esta aplicación lo importante es incrementar todo lo posible el factor de amplificación, para aumentar la sensibilidad; mientras que carece de significación el error introducido por el desfase que por ser ω próximo a ω_0 su valor estará en los 90° .

Ejercicio: Influencia de A y de φ

Hasta ahora hemos analizado aplicaciones en las que el factor “A” influye favorablemente en la medición. Pero ahora supongamos tener un instrumento registrador que debe "seguir" a una onda no senoidal periódica como muestra la Fig. 30.

Esta tensión aplicada tiene como expresión:

$$e_t = E_o (\sin 3 \omega t + \sin 5 \omega t)$$

la amplitud de la armónica tercera es igual a la de la quinta (Fig. 31).

El valor de la relación $D/D_c = 1$ y la relación $\omega/\omega_o = 0,18$.

Con estos datos podemos analizar la respuesta del instrumento para cada una de las componentes. Trabajando con las curvas de A y φ en función de ω/ω_o o bien reemplazando los valores de D/D_c y ω/ω_o en las expresiones de A y φ obtendremos:

Para la tercera armónica:

$$\omega/\omega_o = 0,54$$

$$A = 0,774$$

$$\varphi = 56,7^\circ$$

Para la quinta armónica :

$$\omega/\omega_o = 0,9$$

$$A = 0,552$$

$$\varphi = 84^\circ$$

Las respuestas estacionarias serán:

$$\theta_3 = \frac{0,774}{K} I_o \sin(3 \omega t - 56,7^\circ)$$

$$\theta_5 = \frac{0,552}{K} I_o \sin(5 \omega t - 84^\circ)$$

La respuesta total será la suma:

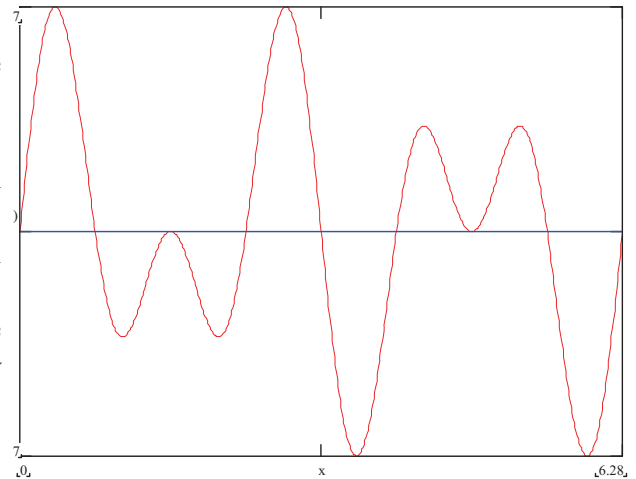


Figura 30

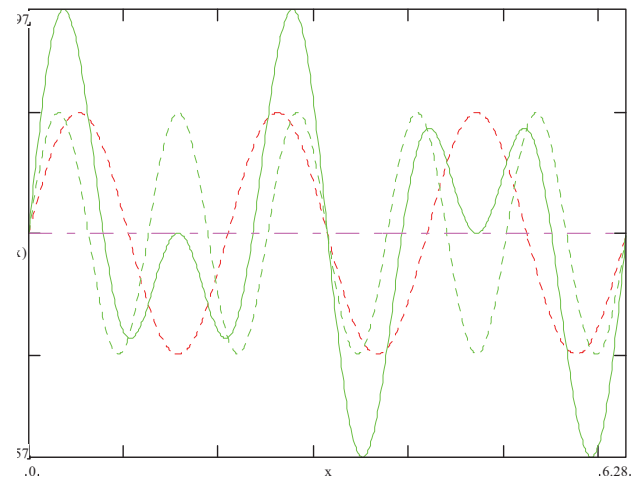


Figura 31

La distorsión entre la onda de entrada y la de respuesta del instrumento se debe:

$$\theta_s = \theta_3 + \theta_5 = \frac{I_o}{K} [(0.774 \text{sen}(3\omega t - 56,7^\circ) + 0,552 \text{sen}(5\omega t - 84^\circ))]$$

a) La diferencia de amplitud en ambas armónicas. Para la quinta ésta se redujo en un 45% del valor original. La reducción para la tercera es menor: 23 %.

b) Retardo desigual para las dos ondas: para la tercera 56° y para la quinta armónica 84° , Fig. 32.

En el gráfico de la figura 33 se han superpuesto las dos señales: la original, de entrada y la de salida, la que grafica el instrumento.

Por último acotemos que al estudiar instrumentos que responden a una **ley cuadrática**, por ejemplo el electrodinámico, encontraremos que al ser excitado en corriente alterna su cupla instantánea será de la forma:

$$c_i = \frac{dM}{d\theta} I_f I_m \cos\beta - \frac{dM}{d\theta} I_f I_m \cos(2\omega t + \beta)$$

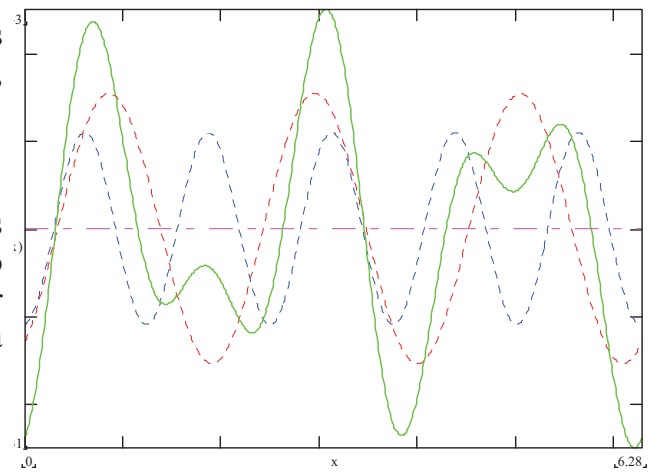


Figura 32

Siendo los valores instantáneos de las corrientes que circulan por la bobina fija y móvil:

$$i_f = I_f \text{sen}\omega t$$

$$i_m = I_m \text{sen}(\omega t - \beta)$$

siendo β el desfase entre ambas.

$$C_i = [A] - [B]$$

Analizando la expresión de la cupla instantánea encontramos dos términos: El [A] que es constante

-mientras permanezcan inalterables en el tiempo y en amplitud las corrientes i_f e i_m -. Mientras que el término [B] representa una onda de frecuencia doble con relación a la frecuencia de las corrientes que la provocan; por lo tanto trabajando con las curvas de A y ϕ en función de ω/ω_0 -que en la práctica es mucho mayor que uno-, el factor de amplificación tenderá a cero y es ésta la razón por la cual el instrumento no la percibe por lo que habrá de responder únicamente a la expresión de [A].

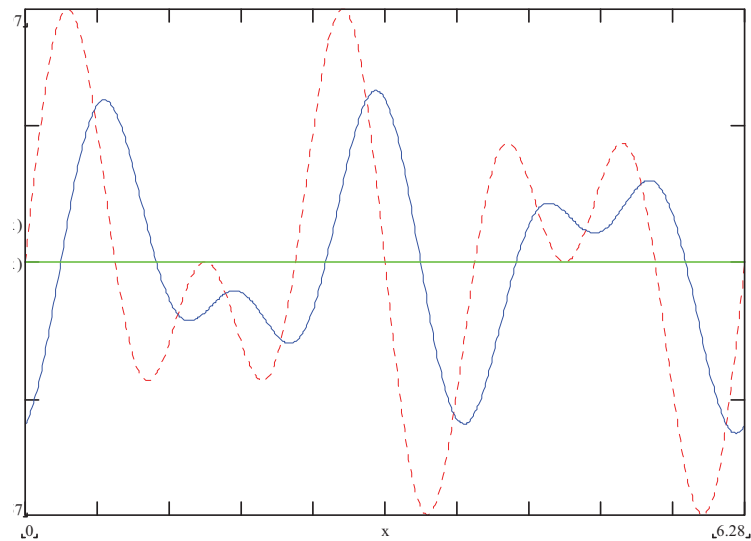


Figura 33

CAPÍTULO II: TEORÍA DE ERRORES

Introducción

Medir un grandor significa determinar la relación que este grandor tiene con uno prefijado de la misma especie asumida como unidad. El número que representa tal relación se define como medida y como medición a la operación práctica que permite su determinación.

La obtención de una correcta medida implica un conocimiento profundo del equipamiento empleado y de la teoría de errores.

Cuando realizamos una medición deberíamos considerar las siguientes preguntas:

- a.- Que errores posibles aparecen en ella?
- b.- Se pueden evitar algunos de ellos?
- c.- Pueden ser minimizables los que no se pueden evitar?
- d.- Con aparatos de medida establecidos que error obtenemos en la medición?
- e.- Establecida una cota de error, que instrumentos debemos usar para no sobrepasarla?
- f.- Realizada la medición, con aparatos de medida establecidos, el error obtenido es compatible con dichos aparatos?

La pregunta d) es la que se hace el profesional, cuando dispone de un determinado instrumental para una medición definida.

La e) sería el problema inverso al anterior. Es decir, si el profesional pretende realizar la medición con un error máximo, que técnica de medida debe utilizar y que instrumental emplear para no excederse del máximo fijado.

La f) representa la conclusión del análisis de la medida.

En definitiva es justamente la "teoría de errores" y el conocimiento del instrumental empleado, las herramientas básicas para responder a tales preguntas.

Error absoluto

Se parte de la afirmación que ninguna medida es exacta en el sentido literal de la palabra y que toda medida está afectada de un error. Si para una misma magnitud, existen dos valores, de los cuales uno se considera verdadero, X_v (valor teórico) y el otro, X_m , (valor medido), próximo verdadero.

El error absoluto se define como la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero:

$$E_a = X_m - X_v$$

El valor de E_a será positivo o negativo según que el valor X_m sea mayor o menor que X_v . Las dimensiones del error absoluto es la misma de las cantidades en juego.

No siendo posible conocer el valor verdadero del grandor a medir, resulta imposible determinar en cualquier medición el valor del error absoluto cometido.

Resulta útil y posible en la generalidad de los casos, examinando el método, conociendo las características del instrumento y analizado el resultado de la medición, establecer el valor de error absoluto máximo. El error absoluto máximo de una medición (llamado también límite de error o imprecisión) es aquel valor positivo o negativo que sumado al resultado de la medición, define con gran probabilidad (tan grande que puede considerarse certeza) el valor máximo y mínimo dentro del cual estará contenido el grandor verdadero.

Por ejemplo si la medición de la capacidad de un condensador se expresa:

$$C = 1\mu F \pm 0,05\mu F$$

significa que el valor de la capacidad resultará comprendido entre un máximo de $1,05 \mu F$ y un mínimo de $0,95 \mu F$ y no podrá servir como patrón de referencia en un laboratorio, pero si utilizable en aquellas aplicaciones prácticas en que el citado margen de tolerancia no implique un funcionamiento irregular. El límite del error de una medición resulta determinado si se define todas las causas de error que introducen el operador, el método y el instrumental empleado.

Puesto que el valor verdadero es teórico en la práctica se lo reemplaza por el valor verdadero probable X_v' :

$$E_a = X_m - X_v'$$

cuando la diferencia anterior es positiva se dice que el error cometido es en exceso y en defecto cuando es negativa.

Corrección

Es el error absoluto pero cambiado de signo:

$$c_r = -E$$

que sumado al valor medido se obtiene el valor verdadero probable.

Error relativo

Conocer el error absoluto desde el punto de vista evaluativo es poco práctico. Así, si nos dicen que dos mediciones han arrojado igual error absoluto y que el mismo es de 1 ampere no releja nada respecto de la exactitud de la medición. Ahora bien, si nos aclaran que una de las mediciones el valor medido es 100 Ampere y en la otra de 10 Ampere, ya hay otros elementos de juicio y de aquí surge

la necesidad de definir el error relativo:

$$e = \frac{X_m - X_v}{X_v} = \frac{E}{X_m}$$

En la práctica es más útil convertir al error relativo en porcentual.

$$e\% = \pm \frac{E}{X_m} 100$$

Aplicando la última expresión en los ejemplos anteriores tendremos:

Para 100 A. : $e\% = 1\%$

Para 10 A. : $e\% = 10\%$

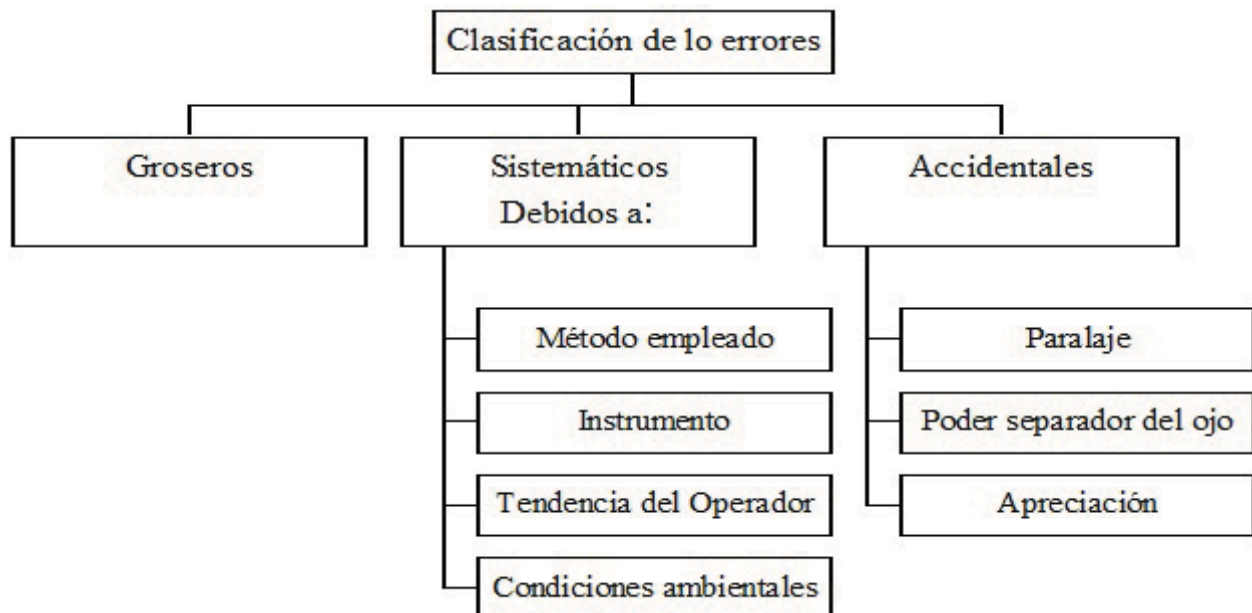
Los valores así expresados también se los suele definir como *límite de error relativo* en sustitución del *límite de error absoluto*.

En mediciones de alta exactitud en que los errores relativos son muy pequeños, se expresa el error relativo en partes por millón (ppm):

$$e_{\text{ppm}} = 10^6 E / X_v$$

Clasificación general de los errores

No es fácil en un sentido estricto efectuar una clasificación absolutamente cierta de los errores presentes en las mediciones eléctricas. Según sus características los errores se clasifican:



Error grosero

El operador en base a la aproximación deseada, debe establecer el método oportuno, proceder a la elección del instrumento o aparato de medida de acuerdo a su exactitud, robustez y practicidad, construir el esquema o circuito reduciendo al mínimo las fuentes de error, obtener la lectura, efectuar el registro con todas las notaciones útiles y finalmente proceder a la evaluación del resultado y su respectiva imprecisión. Un error de interpretación del método, una elección inadecuada del aparato, una construcción equivocada del circuito, una ineficiente inserción instrumental o una incorrecta lectura o registro, reportan en definitiva una evaluación fallida de la medición. Cualesquiera de estos errores se los denomina o clasifica como "grosero", así definido porque inadvertidamente se introduce en la medición. El error grosero puede detectarse controlando continuamente la coherencia de los distintos valores que se han registrado en una serie de mediciones. Algún valor de las mediciones que notoriamente se aparte de las mediciones debe ser considerado sospechoso y debe descartarse.

Error sistemático

Los errores sistemáticos tienen todos la misma particularidad se repiten en magnitud y signo en una serie de mediciones equivalentes (en igualdad de condiciones). Son determinables y se pueden corregir.

Estos errores pueden clasificarse en los tres grupos siguientes:

a) Error sistemático del método

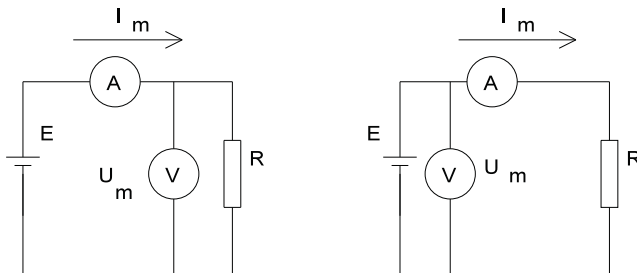


Figura 1: Conexión corta y larga en la medición de resistencia

queña y los conductores son de sección mínima y extensos, introducimos una resistencia en serie con aquella a medir, distorsionando la configuración circuital del puente.

Otro ejemplo de este error es la medición de resistencia con el método de voltímetro y amperímetro. Para esto existen dos tipos de conexiones: corta y larga. Los esquemas de conexión son los dibujados en la figura 1.

Analicemos individualmente cada caso:

Estos errores en la mayoría de los casos se deben a las perturbaciones que introducen los instrumentos para efectuar las mediciones. Un ejemplo claro de este error es el causado por el conductor de unión en el puente de Wheatstone. Si el valor de la resistencia incógnita es elevado la introducción de la resistencia de los conductores de unión es despreciable, pero si la resistencia es pe-

a) Conexión corta

Si llamamos R_m a la resistencia medida como consecuencia de la medición indirecta a través de la tensión medida en el voltímetro U_m y la corriente I_m en el amperímetro.

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_x + I_v}$$

La resistencia verdadera puede considerarse como la relación entre la tensión entre bornes de R , U_R y la corriente que la circula I_R :

$$R = \frac{U_R}{I_R}$$

El error absoluto en la medición será:

$$E_a = \frac{R_m}{R} = -\frac{I_v}{I_m} R$$

El error relativo:

$$e_{s_c} = -\frac{R_m}{R_v}$$

Esta expresión nos indica que con ésta técnica de medición, siempre obtendremos un valor de resistencia menor que el valor real, puesto que la corriente que indica el amperímetro es mayor que la que circula por R .

b) Conexión larga

En este caso, la resistencia medida será:

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_R}{I_m} + \frac{I_m R_a}{I_m} = R + R_a$$

$$E_a = R_m - R = R_a$$

El error relativo:

$$e_{s_{cL}} = \frac{E}{R} = \frac{R_a}{R_m - R_a}$$

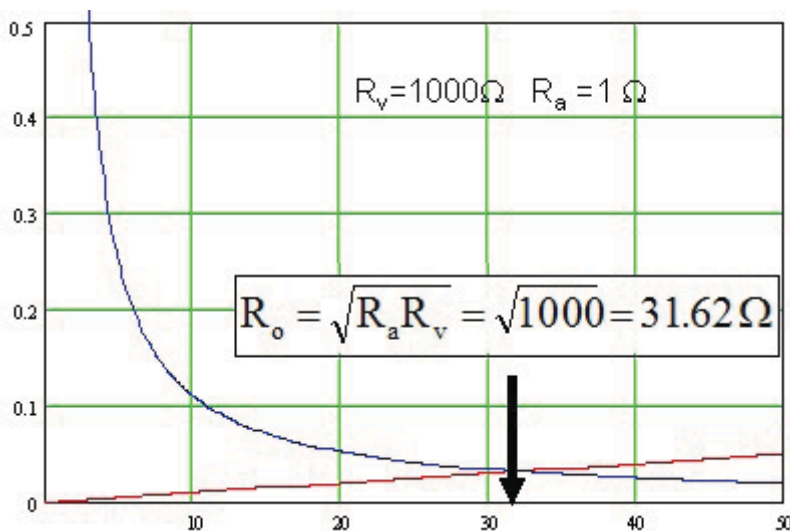
Conociendo los datos de los instrumentos (sus resistencias internas), es fácil determinar para una determinada resistencia R , cual de las dos configuraciones -corta o larga- es la recomendable a efectos de minimizar el error sistemático.

Por simple comparación de errores relativos, determinamos el menor coincidiendo con la configuración que llevaremos a la práctica.

Resulta obvio que existe un valor particular de R para el cual los dos errores (en valor absoluto) son iguales.

Este valor de R lo llamamos R_o y resulta aproximadamente igual a:

$$R_o \cong \sqrt{R_a R_v}$$



En la figura se han representado las curvas de error en conexión corta y larga, para un voltímetro de resistencia interna $R_v=1000 \Omega$ y un amperímetro con una resistencia $R_a=1 \Omega$

El valor R_o limite entre ambos métodos resulta 31.62Ω , por debajo tendrá menor error el método corto y por encima el método largo.

b) Errores sistemáticos debido a los aparatos

Estos errores dependen de la imprecisión del instrumento o del aparato que determina la medida.

Entre los elementos que con mayor frecuencia son utilizados en el campo de las medidas eléctricas podemos citar: resistencia, condensador, inductancia patrones, cajas de resistencias, e instrumentos indicadores en general. El error absoluto o relativo máximo que introducen en la medición puede ser valorado en función de las especificaciones, certificados, tablas o gráficos que el fabricante incluye en el aparato mismo.

Por ejemplo, en una caja de resistencia, el constructor asegura una determinada garantía a través de un límite de error: 0,1% en corriente continua y 1% en corriente alterna, puesto que en esta última aparecen las reactancias propias ya analizadas en el capítulo introductorio (resistencias patrones).

El error sistemático instrumental es un dato que puede acotarse en función del "índice de clase" indicado por el mismo instrumento en su cuadrante. En la práctica pueden aparecer los siguientes problemas, (sea por accidentes en el uso (sobrecargas) o deterioro con el tiempo):

I. Disminución del campo magnético

II. Rodamientos desgastados

Resortes o cintas de suspensión cuyas propiedades elásticas pueden variar con el tiempo.

Para estos casos la única forma de acotarlos es mediante una verificación o contraste con otro instrumento patrón.

c) Error sistemático por tendencia del observador

Se refieren al modo de actuar del observador y a sus limitaciones propias, tales como leer en exceso o en defecto. Es decir, es la técnica experimental que posee el operador que se repite siempre con la misma intensidad y signo.

d) Errores sistemáticos por efectos circundantes

El ambiente donde se realiza el experimento o medición tiene fundamental importancia sobre los resultados obtenidos. Por ejemplo la resistencia interna de un instrumento variará en general con la temperatura, lo que a su vez puede modificar el valor de lo que mide, es evidente entonces que si trabajamos en un ambiente que tiene una temperatura distinta de aquella que definiremos más adelante como temperatura de referencia, el valor indicado en la lectura resultará afectado de un error que se repite en valor y signo en las mismas condiciones experimentales. Entre los efectos circundantes se citan vibraciones, presión, humedad, temperatura, etc.

Error accidental

Suponiendo que fueran eliminados completamente todos los errores sistemáticos, siempre quedan ciertos errores inevitables llamados accidentales, causados por la combinación al azar de un conjunto de pequeños efectos intrínsecamente asociados con la cantidad a medir y con los instrumentos empleados. En general y aún en el mejor de los experimentos, los resultados finales contienen tanto errores sistemáticos como errores accidentales.

A diferencia del error sistemático, el accidental no se repite siempre con la misma intensidad y signo, por lo tanto no puede eliminarse o valorarse a priori.

Solamente la divergencia del resultado de la medición repetida puede denunciar su presencia y con auxilio de la teoría de la probabilidad acotar su valor.

En la lectura de un instrumento indicador aparecen tres errores accidentales típicos asociados al aparato observador, que son los siguientes:

a) Error de paralaje: Si un observador inclina la cabeza hacia uno u otro lado del índice introduce un error accidental denominado "paralaje" que ocurre

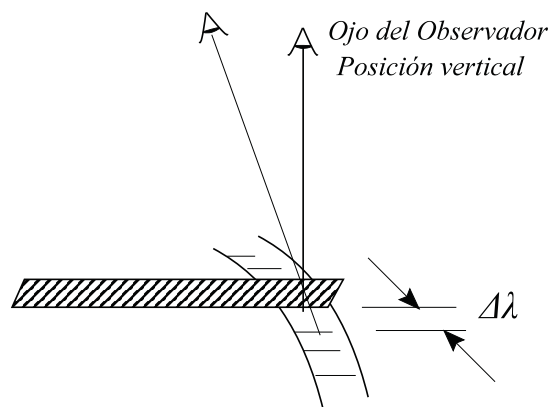


Figura 2

cuando su línea de mira no es perpendicular al plano de la escala. Este error disminuye utilizando escalas que tienen un espejo en la parte posterior de la aguja. La perpendicularidad se logra cuando la imagen del índice no se ve reflejada en el espejo. Además se utilizan índices aplanados y escalas cercanas a la punta de la aguja.

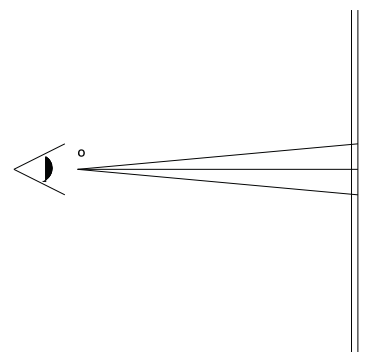


Figura 3

En los instrumentos patrones el índice es un hilo delgado, para obtener una mayor definición en la medida. Debido a su pequeño espesor su imagen en el espejo apenas es visible.

En los instrumentos con índice luminoso este error desaparece completamente.

b) Poder separador del ojo.

Supongamos que el ojo del observador se encuentra en la posición O, observando un punto B sobre la escala. Fisiológicamente es imposible diferenciar dos puntos próximos que forman con la mira del operador un ángulo igual o inferior a los dos minutos. En consecuencia para el observador ubicado en O, los puntos A, B y C se confunden. Por encontrarse en un ángulo plano de 2 minutos la distancia plana AB está dada por la expresión:

$$\overline{AB} = \overline{OB} \operatorname{tg} 1'$$

$$\overline{AC} = 2 \overline{AB} = 2.250.\operatorname{tg} 1' \approx 0.15\text{mm}.$$

Considerando que para un ojo sano la óptima distancia de visión de lectura es del orden de los 250 mm. tenemos que:

Esto significa que el observador no es capaz de diferenciar entre sí puntos que se encuentren dentro de esta distancia AC. Es decir, el observador no puede apreciar una oscilación de la aguja dentro del entorno AC, sino que ve la aguja fija.

c) Error de apreciación

Este error se origina cuando se pretende interpolar entre dos divisiones de la escala de un instrumento. Este error llamado también de estimación es tanto más pequeño cuando mayor sea la exactitud del instrumento, esto es así porque mayor es la cantidad de divisiones que posee.

El conjunto de los tres errores enunciados se conoce como **error de lectura**. Se tiene en cuenta el error de lectura acotándolo como la menor fracción de división que puede observarse con seguridad. En la práctica se estima entre un 1/5 a 1/10 de división dependiendo de la calidad del instrumento.

Clase de un instrumento

Se define como "límite de error" al mayor error absoluto que comete un instrumento en algún punto

de la escala y que puede ser tanto positivo como negativo. Este error absoluto máximo se debe a la suma de pequeños errores sistemáticos que actúan simultáneamente: imperfección de la escala, del índice, falta de constancia de algún parámetro interviniente en la cupla, etc.

$$E_{\text{máx}} = \text{límite de error}$$

Se define "clase de un instrumento" al límite de error referido al alcance por cien:

$$c = \frac{E_{\text{máx}}}{\text{Alcance}} 100$$

Esta expresión, nos permite conocer para un valor dado de clase el límite de error $E_{\text{máx}}$:

$$\pm E_{\text{máx}} = \frac{c \cdot \text{Alcance}}{100}$$

Es decir que si efectuamos una lectura coincidente con una división exacta de la escala, tenemos un error límite denominado "error por clase" e igual a:

$$\pm E_{\text{máx}}$$

Mencionamos "división exacta de la escala" para no introducir el error de estimación. Para comprender el concepto de clase, hagamos el siguiente planteo: Supongamos que comparamos el instrumento -cuya clase se desconoce- con otro patrón o exacto; es evidente que para cada medición habrá una diferencia entre valor medido y valor real (probable) del instrumento patrón:

$$E = V_m - V_r$$

En algún punto de la escala aparecerá un $E_{\text{máximo}}$, definido como límite de error y el que se toma en cuenta para el cálculo de la clase. Ahora bien, cuando nosotros realizamos una medición cualquiera, puede ocurrir que el error absoluto cometido sea menor que el error absoluto límite (pues éste puede estar en otro punto de la escala). Sin embargo desconocemos en que lugar o división se encuentra $e_{\text{máx}}$ y como en el campo de las mediciones se adopta siempre un criterio pesimista, ante la incertidumbre se debe tomar ***el error límite, como un error absoluto máximo y constante para cualquier punto de la escala.***

Los instrumentos de clase entre 0,05 y 0,1 son los de mayor exactitud y son usados como patrones de referencia para la calibración y contraste de otros instrumentos, o bien para ensayos de laboratorio donde se requiera una exactitud elevada.

Los instrumentos de clase 0,2 hasta 0,5 se usan en ensayos normales de laboratorio y contraste de instrumentos de una clase de exactitud por lo menos cinco veces mayor.

Los instrumentos de clase mayor a 1 son construídos exclusivamente para instalar en tableros o paneles, casi siempre de escala vertical o bien para instrumentos portátiles donde no se requieren mediciones de buena exactitud.

La clase de un instrumento es establecida por el fabricante. Nosotros podemos verificar si el instrumento "*está en clase*". Para el establecimiento de la clase, debe ajustarse a normas establecidas y utilizando patrones de laboratorio.

Determinación de la clase por el fabricante

El fabricante diseña un instrumento tratando de cumplir ciertas condiciones:

- 1) *Temperatura ambiente constante, entre 20° y 25°C denominado temperatura de calibración.*
- 2) *Reducción de campos magnéticos externos (menor que 5 Oesterd).*
- 3) *Para un instrumento de corriente alterna, excitación sinusoidal y frecuencia determinada.*
- 4) *Posición normal de trabajo (horizontal, vertical, etc.)*

Una vez cumplidas estas condiciones se debe disponer un instrumento patrón, de alcance en general similar al instrumento a calibrar. Se deben fijar previamente los *puntos cardinales*, es decir el "cero" y "fondo de escala". Para fijar el cero se lo hace mecánicamente, sin excitación y el punto fondo de escala con excitación. Se fijan valores particulares en el patrón en cifras enteras para determinar puntos intermedios de la escala, pudiendose tomar 5 a 10; consecuentemente mediante el conocimiento de la ley de distribución de la misma se han de trazar las divisiones restantes hasta completar la totalidad de la escala que en general oscila de 100 a 150 divisiones.

Esto último sería para los instrumentos prototipos. Para los instrumentos de tipo serie, por razones económicas ya se cuenta con la escala impresa.

Luego lo que se suele hacer es un con traste, que es una verificación de la clase. Para ello se toman divisiones exactas y se determinan las diferencias con el patrón.

Quebrada de corrección

Los errores absolutos obtenidos por diferencias con el patrón, cambiados de signo son los denominados valores de corrección. Se puede entonces trazar una gráfica en función del valor medido, que se denomina "quebrada de corrección". Es típica la forma dentada de la curva. Entre los valores de corrección de los

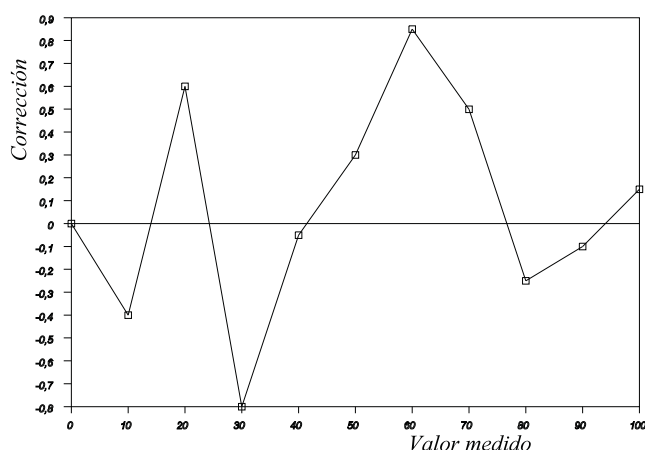


Figura 4

puntos contiguo se efectúa una interpolación lineal. En algunos casos -instrumentos de hierro móvil, por ejemplo, la corriente de excitación utilizada en la comprobación debe aumentarse en forma continua -sin inversión- hasta llegar a fondo de escala. Luego se repite la verificación con corriente decreciente desde fondo de escala hasta "cero". Los valores de corrección se forman en base a los valores medios entre calibración creciente y decreciente. Las diferencias entre valores crecientes y decreciente son indicativos de la calidad del instrumento, especialmente sobre el rozamiento, reacciones elásticas, etc.

Están quebradas de corrección son generalmente realizadas por el mismo fabricante y entregadas al usuario, en aquellos instrumentos de buena calidad, de los utilizados en laboratorios.

Por supuesto, en los instrumentos de serie, estas curvas no se entregan y las mediciones realizadas son acotadas teniendo en cuenta el límite de error obtenido a partir del índice de clase.

Valor fiduciario

Es el valor convencional para determinar la exactitud del instrumento.

a) Para un instrumento con cero lateral, el valor corresponde al límite superior del campo de medida. Por ejemplo un amperímetro de 0 a 100 A, el valor fiduciario es 100 A.

b) Para un instrumento de cero intermedio: la suma de los valores absolutos correspondientes a cada uno de los límites. Por ejemplo un milivoltímetro con campo de medida de -15 a + 35mV, el valor convencional es de 50 Mv.

c) Para un instrumento con cero retirado -no figura en el cuadrante- el valor convencional corresponde al límite superior del campo de medida. Por ejemplo para un voltímetro de 180 a 260 V., el valor fiduciario es 260 V.-

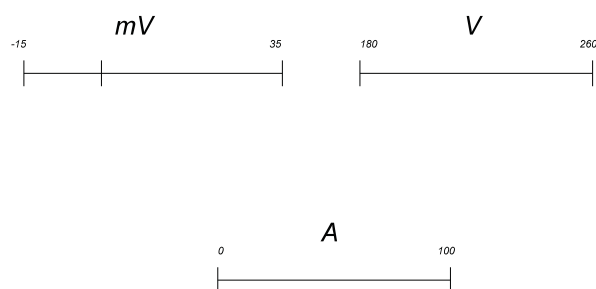


Figura 5

d) Para un frecuencímetro, sea a índice ó a lengüetas, el valor corresponde el límite superior. Por ejemplo para un frecuencímetro de campo de medida 40 a 60 Hz, el valor convencional es de 60 Hz Téngase en cuenta que la norma C.E.I. define como campo de indicación a la gama de valores del grandor medido que corresponde al recorrido total del índice sobre la escala. Mientras que el campo de medidas corresponde a la parte de la escala que en las condiciones de referencia pueden hacerse las lecturas con la exactitud que implica la clase del instrumento.

Los extremos del campo de medida quedan definidos por "límite inferior y superior". La norma determina que el límite del campo de medida debe estar identificado sobre el cuadrante sin ambigüedad.

Cota de error

Habíamos visto que la expresión de la clase era:

$$c = \pm \frac{E_{\max}}{\text{Alcance}} 100$$

El límite de error:

$$E_{\max} = \frac{c \text{ Alcance}}{100}$$

Veamos el siguiente caso: se obtuvieron dos mediciones de una misma magnitud con dos instrumentos diferentes, cuyas características son las siguientes:

1) Voltímetro N° 1: Alcance: 30 V. $\alpha_{\max} = 150$ divisiones, $c = 1$

2) Voltímetro N° 2: Alcance: 30 V, $\alpha_{\max} = 150$ divisiones, $c = 0,2$

El error límite para cada uno de los instrumentos será:

$$E_{\max_1} = \pm 0,3V$$

$$E_{\max_2} = \pm 0,06 V$$

Suponiendo ahora que la lectura en ambos instrumentos coinciden en una división exacta ($\alpha_{\text{med}}=50$ div.) tendremos:

Para el voltímetro (1):

$$V_m = 10 \pm 0,3V$$

Para el voltímetro (2):

$$V_m = 10 \pm 0,06 V$$

NOTA: Este caso solamente tomando el error de clase (también llamado de indicación), no considerando ningún otro en la medición, como puede ser el error "debido al método", etc.

El error relativo de indicación será para cada voltímetro:

$$e_1 = 3\%$$

$$e_2 = 0,6\%$$

Conclusión: Si tomamos el voltímetro (1) diremos que para este instrumento de clase igual a uno,

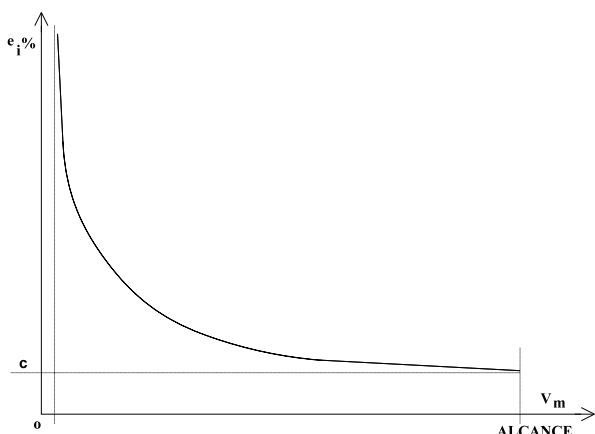


Figura 6

el límite de error es $\pm 3\%$; significa que se trata de un voltímetro de características funcionales y constructivas tales que los diferentes errores instrumentales sistemáticos se comportan de manera que funcionando en condiciones normales de uso el error absoluto máximo no será superior a 0,3 V en cualquier punto de la escala.

Condición más favorable para una medición

El error relativo porcentual de indicación o de clase está dado por la expresión:

$$e_i \% = \pm \frac{E_{m\acute{a}x}}{V_m} 100$$

Como $E_{m\acute{a}x}$ lo suponemos constante:

$$e_i \% = \frac{K}{V_m} 100$$

Si representamos gráficamente $e_i \%$ en función del V_m nos dará una hipérbola equilátera.

De la curva vemos que el error relativo de indicación, va siendo menor a medida que el valor medido esté próximo al alcance del instrumento. Es por ello que se recomienda que la magnitud a medir esté dentro de un valor próximo al alcance del instrumento. Lo razonable es efectuar mediciones comprendidas en el último tercio de la escala.

Escalas no lineales

Todo lo anterior es válido cuando la ley del instrumento es lineal. Veamos ahora que ocurre con el error relativo de indicación en aplicaciones no tan comunes como en instrumentos con escala alineal dilatada (escala cuadrática) o escala alineal comprimida (escala logarítmica). Las expresiones de las cotas de error y sus correspondientes errores relativos de indicación serán:

a) Escala alineal dilatada:

Analicemos el caso de la escala cuadrática:

$$\alpha = K_1 X_m^2$$

diferenciando:

$$d\alpha = 2K_1 X_m dX$$

Pasando de diferenciales a incrementos finitos:

$$\Delta\alpha_{m\acute{a}x} = 2 K_1 X_m \Delta X_{m\acute{a}x}$$

$$\Delta X_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta\alpha_{m\acute{a}x}}{2 K_1 X_m}$$

Pero:

$$\Delta\alpha_{m\acute{a}x} = \frac{c \text{ Alcance}}{100}$$

$$\Delta X_{m\acute{a}x} = \frac{c \text{ Alcance}}{200 K_1 X_m} = \frac{K_2}{X_m}$$

Luego:

$$e_i = \frac{\Delta X_{m\acute{a}x}}{X_{med}} = \frac{K_2}{X_m^2}$$

b) Escala alineal comprimida

Tomando como ejemplo la escala logarítmica:

$$\alpha = K_1 \ln X_m$$

diferenciando:

$$d\alpha = K_1 \frac{1}{X_m} dX$$

Pasando a incrementos finitos:

$$\Delta\alpha_{m\acute{a}x} = \frac{K_1 \Delta X_{m\acute{a}x}}{X_m}$$

$$\Delta X_{m\acute{a}x} = \frac{X_m \Delta\alpha_{m\acute{a}x}}{K_1} = \frac{X_m c \text{ Alcance}}{100 K_1} = K_2 X_m$$

Pero:

$$e_i = \frac{\Delta X_{m\acute{a}x}}{X_m} = \frac{K_2 X_m}{X_m} = K_2$$

En la figura 7 se han representado la variación de los errores relativos en función de X_m , para un caso determinado: igual límite de error y la misma longitud de escala.

$$e_i = K_2 = \text{constante}$$

Para el instrumento de escala uniforme el error relativo varía según una hipérbola equilátera.

Un análisis comparativo del uso de los tres tipos de instrumentos para un rango determinado de

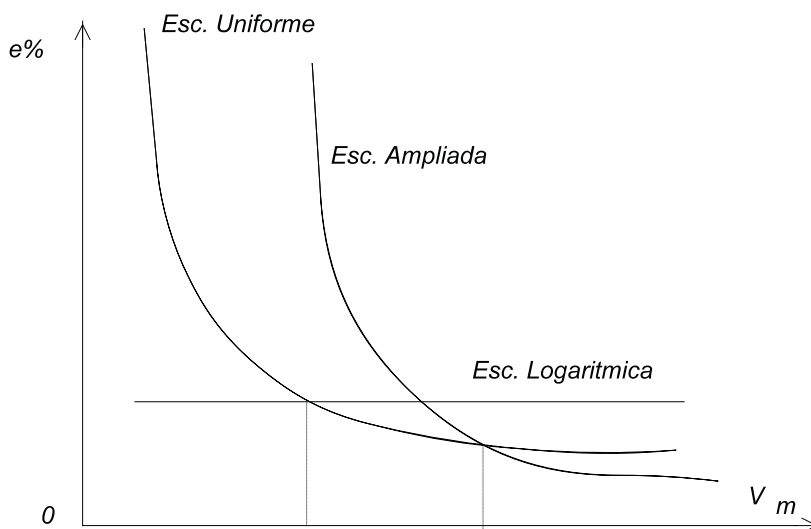


Figura 7

mediciones, arrojaría los siguientes resultados:

Si la condición es obtener lecturas con escasa influencia del error relativo de indicación, se observa de la gráfica que el primer tercio de escala debería descartarse.

En el segundo tercio, el instrumento de escala uniforme aventaja al de escala ampliada. Finalmente para la última parte de la escala el menor error corresponde al instrumento con escala

ampliada. Este tipo de instrumento es utilizado en aquellos casos en que la variación de lectura permanente varía muy poco -por ejemplo un voltímetro que indique la tensión a la salida del generador de un grupo electrógeno-, en esta parte de la escala el aparato posee buena resolución. Para escala logarítmica, el error relativo se mantiene constante. Este tipo de escala es útil para medir magnitudes de luz y sonido.

Campo nominal de referencia y campo de utilización

La norma C.E.I. establece para cada parámetro de referencia en la calibración de un instrumento un margen de variación, para el cual el aparato debe mantenerse en clase.

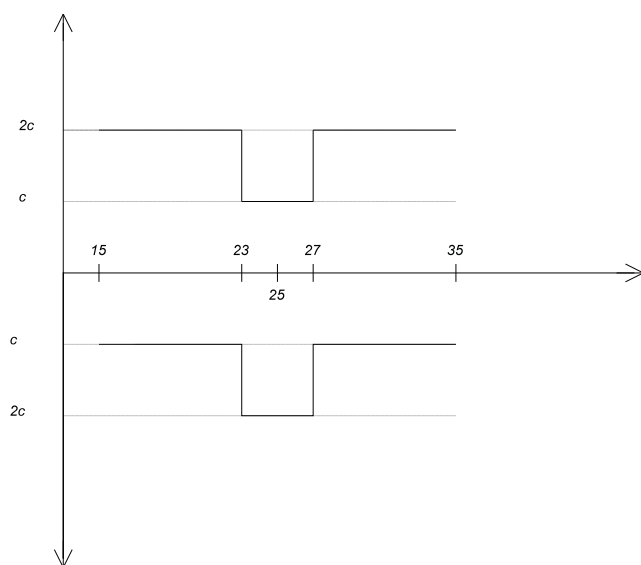


Figura 8

Así por ejemplo tomando el parámetro temperatura la norma establece una tolerancia de $\pm 1^\circ\text{C}$, para instrumentos de clase 0,1 - 0,2 - 0,5 y un margen de $\pm 2^\circ\text{C}$ para los de clase 1,0 - 1,5 - 2,5.

Tomemos por ejemplo un instrumento de clase igual a uno, con una temperatura de referencia de 25°C , la tolerancia de la temperatura será $\pm 2^\circ\text{C}$ y por lo tanto entre los 23°C y 27°C y manteniendo el resto de los parámetros en las condiciones de referencia, el instrumento cometerá errores de indicación dentro de la banda permitida por el índice de clase.

El límite del campo nominal de utilización fijado por la norma es $\pm 10^\circ\text{C}$, esto significa que para el margen que va entre 15 a 23°C y entre 27 a 35°C deben esperarse errores relativos de indicación no superiores a dos veces la clase del instrumento.

Para otros factores de influencia (frecuencia, campos magnéticos externos, etc.) las normas establecen los respectivos márgenes de variación de acuerdo a la calidad del instrumento.

Propagación de errores límites

Las mediciones pueden clasificarse en:

- Mediciones directas.
- Mediciones indirectas.

Las mediciones directas son aquellas en que el valor de la magnitud a medir surge directamente de la lectura en un instrumento; por el contrario las mediciones indirectas son aquellas en que la medida surge como una función matemática que relaciona dos o más funciones o medidas directas. Por

ejemplo la potencia consumida por una resistencia R, medida a través de un voltímetro y amperímetro se determina por la función matemática: $P = U.I$

Ahora bien, cada una de éstas mediciones directas estarán afectadas de sus correspondientes errores absolutos límites. De la propagación de ellos surgirá el error límite de la medición indirecta. En general el valor w medido indirectamente es función de:

$$w = f_{(u,v)}$$

siendo u y v variables independientes, que pueden ser aquellas que medimos directamente por ejemplo con instrumentos indicadores, o bien aquellos que corresponden a elementos que integran el circuito de medida como resistores, de los que conocemos los valores nominales dados por el fabricante, junto con que respectivas tolerancias o errores.

Si calculamos el diferencial dw:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

Esta expresión sigue siendo aproximadamente válida, si en lugar de diferenciales consideramos incrementos finitos, si estos son suficientemente pequeños.

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial w}{\partial v} \Delta v$$

siendo:

Δw : error absoluto límite de w.

Δu : error absoluto límite de u.

Δv : error absoluto límite de v.

Esta expresión nos da directamente el incremento (error) Δw de la cantidad que se mide indirectamente en función de los incrementos (errores Δu y Δv) de las variables medidas directamente y vale tanto para "errores sistemáticos", "fortuitos" o límites.

Si Δu y Δv son errores absolutos sistemáticos, en la expresión anterior estos errores se escribirán en forma algebraica dándoles a ellos, como así a sus derivadas parciales el signo correspondiente.

Si Δu y Δv son errores absolutos límites se adopta un criterio pesimista quedando la expresión de la siguiente forma:

$$\pm E_w = \pm \left[\left| \frac{\partial w}{\partial u} \right| E_u + \left| \frac{\partial w}{\partial v} \right| E_v \right] \quad (1)$$

El error relativo será en este caso:

$$\pm e_w = \pm \frac{E_w}{w} = \pm \frac{1}{w} \left[\left| \frac{\partial w}{\partial u} \right| E_u + \left| \frac{\partial w}{\partial v} \right| E_v \right] \quad (2)$$

Estudios de casos particulares de errores límites

a) Funciones de una variable:

$$w = f(u)$$

para este caso la expresión (1) queda reducida a:

$$\pm E_w = \pm \left[\frac{\partial w}{\partial u} \right] E_u$$

Ejemplo: supongamos que se desea medir la potencia que disipa una resistencia R (que consideramos exacta, es decir sin ningún error) y la medición la hacemos indirectamente a través de un amperímetro.

$$P = R I^2$$

Sabemos que la potencia es igual a:

Error límite de la potencia:

$$\pm E_p = \pm \frac{\partial P}{\partial I} E_I = \pm 2 R I E_I$$

Siendo E_I el error límite del amperímetro.

El error relativo será entonces:

$$\pm e_p = \pm \frac{E_p}{P} = \pm \frac{2 R I}{R I^2} E_I = \pm 2 \frac{E_I}{I} = \pm 2 e_I$$

Conclusión: el error relativo en la medida de la potencia es igual a dos veces el error relativo

cometido por el amperímetro.

b) Funciones de dos variables

Error de una suma:

$$w = u + v$$

Aplicando la expresión:

$$\pm E_w = \pm \left[\left| \frac{\partial w}{\partial u} \right| E_u + \left| \frac{\partial w}{\partial v} \right| E_v \right]$$

pero:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial v} = 1$$

La expresión (1) se reduce a la suma de los errores límites:

$$\pm E_w = \pm (E_u + E_v)$$

El error relativo será para este caso:

$$\pm e_w = \pm \frac{1}{w} (E_u + E_v)$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\pm e_w = \pm \left[\frac{ue_u}{w} + \frac{ve_v}{w} \right]$$

para el caso particular que los dos errores relativos sean iguales:

$$e_u = e_v = e$$

Es decir que el error relativo de la función, es igual al error relativo de una de las variables.

$$\pm e_w = \pm \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{w} \right) = \pm e \left(\frac{u+v}{u+v} \right) = \pm e$$

Error de una diferencia

$$w = u - v$$

siendo u y v, variables independientes entre si.

E_w es igual que en el caso anterior, es decir para la suma:

$$\pm E_w = \pm (E_u + E_v)$$

El error relativo valdrá:

$$\pm e_w = \pm \left(\frac{u}{w} e_u + \frac{v}{w} e_v \right)$$

Para el caso particular en que $e_u = e_v = e$, tendremos:

$$\pm e_w = \pm e \left(\frac{u}{w} + \frac{v}{w} \right) = \pm e \left(\frac{u+v}{u-v} \right)$$

$$\pm e_w = \pm e \left(\frac{u+v}{u-v} \right)$$

Vemos en ésta última expresión que si la magnitud de u y de v son parecidas, se puede magnificar mucho el error relativo.

Error del producto:

$$w = u \cdot v$$

para este caso:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = v \quad \frac{\partial w}{\partial v} = u$$

Reemplazando en (1):

$$\pm E_w = \pm(v E_u + u E_v)$$

El relativo será:

$$\pm e_w = \pm \frac{E_w}{w} = \pm \left(\frac{v E_u}{u v} + \frac{u E_v}{u v} \right) = \pm(e_u + e_v)$$

Error del cociente:

$$w = u/v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{v} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

Reemplazando en (1) :

$$\pm E_w = \pm \left(\frac{1}{v} E_u + E_v \frac{u}{v^2} \right)$$

El error relativo para este caso será:

$$\pm e_w = \pm \frac{E_w}{w} = \pm(e_u + e_v)$$

idéntica expresión a la obtenida para el caso del producto.

Estudio estadístico del error

En algunos casos es suficiente el conocimiento del valor de una magnitud, obtenida a través de una medición directa o indirecta y su error límite.

Cuando se quiere aumentar la exactitud de la medición, o lo que es lo mismo disminuir la cota de error o error límite, lo que se hace es obtener varias mediciones de la misma magnitud, en las mismas condiciones, ya que es probable que en una serie de mediciones -de acuerdo a las leyes del azar- exista una compensación de los errores accidentales. Es posible entonces que la magnitud haya sido medida con un error menor que la cota de los valores parciales.

Se supone que los errores sistemáticos han sido corregidos.

Parámetros característicos de una serie de mediciones**a) Media aritmética**

Si llamamos v_1, v_2, \dots, v_i a las variantes de n mediciones directas independientes entre sí, obtenidas en las mismas condiciones, se define media aritmética a:

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

a cualquier valor de v_i se le llama variable aleatoria, pues puede tomar valores diferentes en las mediciones sucesivas.

b) Mediana

Es aquella variante que divide al campo de observaciones en dos partes iguales.

Si el número de variantes es par, se toma como mediana el promedio de los dos valores centrales equidistantes de los extremos.

c) Modo

Es la variante que tiene mayor frecuencia.

Desviaciones

Sea " v " un número reducido de las n "variantes", la desviación de una variante a partir de " v " se define como:

$$y_i = v_i - v$$

La suma de las " n " desviaciones vale:

$$y_i = v_1 - \bar{v} + v_2 - \bar{v} + v_3 - \bar{v} + \dots + v_n - \bar{v} = (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) - n\bar{v}$$

Si suponemos ahora que esa variante \underline{y} tiene la propiedad de que la suma de las desviaciones es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^n y_i = 0$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \bar{v}$$

Por la última expresión se concluye que la media resulta el mejor valor de la información de las "n" variantes, ya que alrededor de ella tienen las mismas posibilidades de ocurrir desviaciones positivas y negativas. La desviación de la media, de la variante v_i se expresa por:

$$x_i = v_i - \bar{v}$$

y para lo cual se cumple, de acuerdo a lo visto que:

$$\sum_{i=0}^n x_i = 0$$

Indices de dispersión

Sabemos que de una serie de n variantes tenemos una media aritmética y que las n variantes se dispersan alrededor de ella.

Si la dispersión es pequeña el error será menor que en el caso de una gran dispersión.

Para tener en cuenta esa dispersión se tienen presentes ciertos parámetros:

Límite de error "L"

Un valor medido se anota:

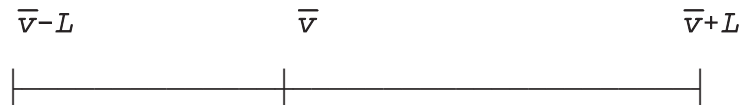
$$v \pm E$$

siendo:

\bar{v} la media aritmética y E da la información acerca de la extensión en que difieren las variantes entre sí. Entonces, si acotamos de la siguiente manera:

$$E = L, \quad \bar{v} \pm L$$

significa que el total de las variantes del grupo están comprendidas en el intervalo:



No necesariamente los límites de error superior o inferior deben ser iguales, por ejemplo se puede poner:

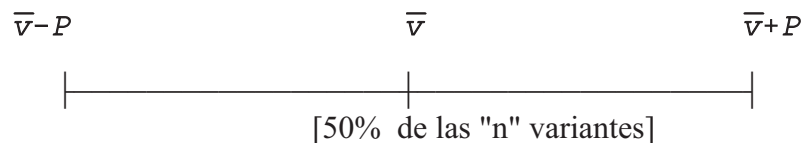
$$2.500 \begin{pmatrix} +0.005 \\ -0.002 \end{pmatrix}$$

Error probable "P"

Se define como el valor de $E=P$ para el que la mitad de las variantes están comprendidas entre:

$$\bar{v}+P \quad y \quad \bar{v}-P$$

Es decir que las variantes incluidas entre $\bar{v} \pm P$ representan el 50% de las variantes que más se aproximan a la media.



Desviación normal o varianza σ

Es la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores aparentes o desvíos respecto de la media aritmética.

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

veremos más adelante que si acotamos $E = \sigma$, significa que existe un 68% de probabilidad de que una nueva medición realizada en las mismas condiciones que las de las "n" variantes esté dentro del intervalo:

$$\bar{v} \pm \sigma$$

Curva gaussiana de error

Se aplica para un número infinito de mediciones. La ley de distribución es conocida como la ley de distribución del error de Laplace-Gauss.

Esta ley de distribución está fundamentada en tres postulados, enunciados de la siguiente manera:

- 1) *El valor verdadero de un número muy grande (infinito) de mediciones efectuadas en las mismas condiciones, está dada por la media de los mismos.*
- 2) *Es igualmente probable encontrar errores de igual valor absoluto pero de distinto signo.*
- 3) *En una serie de mediciones, es tanto más probable cometer errores pequeños que grandes.*

La ley de distribución gaussiana es:

$$y(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(v-\bar{v})^2}$$

siendo $h > 0$ denominado índice de precisión. Si la expresión anterior se escribe en función del error:

$$x = v - \bar{v}$$

En la Fig. 9 se observa la curva de error gaussiano. En la gráfica se consideran los dos ejes de abscisas correspondientes a cada una de las variables. Como la función continua representa el universo de las variantes, esto es "n" tendiendo a infinito, la media aritmética \bar{v} que es el valor medio de todas las series o conjuntos iguales de mediciones que integran dicho universo, es estadísticamente el valor verdadero de la magnitud medida.

Si consideramos la función $y_{(x)}$ ella representa la distribución de las variantes a uno y otro lado del error $x = 0$ y si x_1, x_k son los errores límites de un intervalo, tenemos por analogía, que la probabilidad de que un error cualquiera se encuentre dentro de esos límites es:

$$p_{(x_1, x_k)} = \int_{x_1}^{x_k} y_{(x)} dx$$

es decir, el área comprendida entre la curva $y_{(x)}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a esos errores límites.

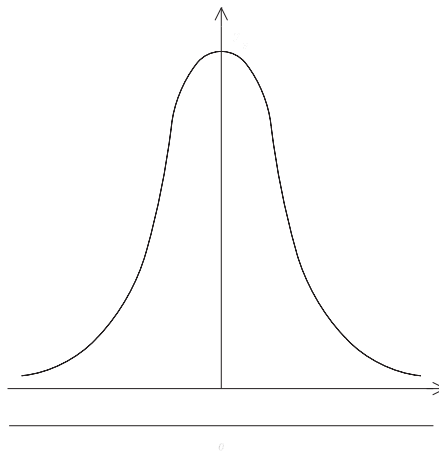


Figura 9

La resolución de esta integral es laboriosa, es por ello que se han perfeccionado tablas que resuelven el problema. Para la confección de esas tablas se estandariza la variable haciendo:

$$t = \frac{x}{\sigma} \therefore x = t \sigma, \quad dx = \sigma dt$$

Reemplazando:

$$h^2 x^2 = h^2 t^2 \sigma^2$$

Además sabemos por estadística que:

$$\sigma h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

luego reemplazando:

$$h^2 x^2 = h^2 \sigma^2 t^2 = \frac{t^2}{2}$$

Para dos errores x_1 y x_2 :

$$t_1 = \frac{x_1}{\sigma} \quad , \quad t_2 = \frac{x_2}{\sigma}$$

En definitiva la integral queda expresada como:

$$p_{(t_1-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Esta última expresión representa la probabilidad de que el error de una medición esté comprendido entre dos valores x_1 y x_2 , (t_1, t_2) .

Ejemplo: supongamos que se quiera conocer la probabilidad de que una variante esté comprendida entre $\bar{v} \pm \sigma$. Para la variable "t" tenemos los límites:

$$t_1 = \frac{x_1}{\sigma} = \frac{0}{\sigma} = 0 \quad ; \quad t_2 = \frac{x_2}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

Si ahora entramos en la tabla que define el área entre los límites 0 y t, obtenemos para $t = 1$ una probabilidad igual a:

$$p = 0,3413$$

Como se trata de una curva simétrica, la probabilidad de que una variante se encuentre comprendida dentro de los límites:

$$\bar{v} \pm \sigma$$

es igual a: $2 \times 0,3413 = 0,6826$ es decir el 68%.

Ello significa que las variantes de una serie de mediciones están afectadas por errores tales que el 68,3% de las mismas están comprendidas entre $\pm\sigma$ a partir de la media aritmética. Se dice también que el 68% es la probabilidad de que una variante de la serie se encuentre comprendida en los límites:

$$(\bar{v} \pm \sigma)$$

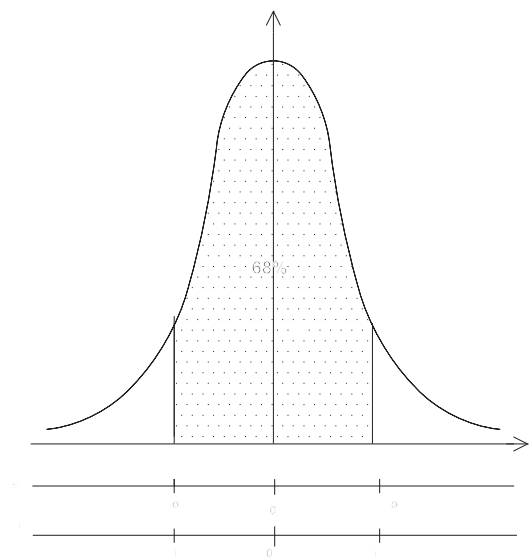


Figura 10

Desviación de la media de la muestra

Para demostrar a través de un razonamiento cualitativo "la desviación normal de la media de una muestra" supongamos distribuidos según la curva gaussiana 1 -figura 11-, (alrededor de su media aritmética que la denominamos μ) los valores de las mediciones que integran un universo dado.

Supongamos ahora que se toma al azar una muestra de "n" mediciones o variantes de dicho universo, tendremos también una media aritmética de la muestra que llamamos \bar{v}_1

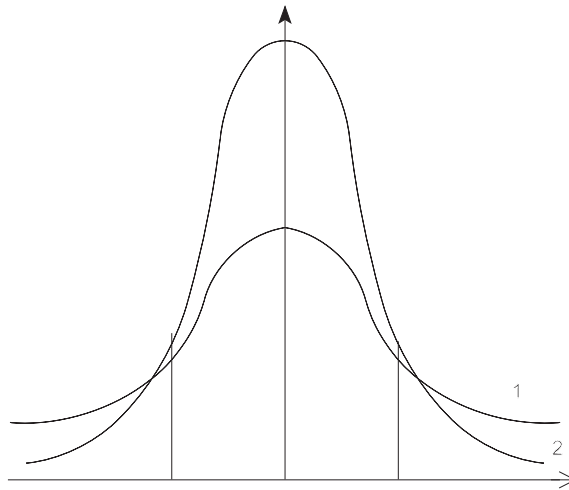


Figura 11

es lógico suponer que esta media aritmética diferirá de la media del universo:

$$\bar{v}_1 - \mu \neq 0$$

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_n}{n}$$

Si en las mismas condiciones se hace otra serie de "n" mediciones y se calcula \bar{v}_2 (su media aritmética) ésta también será distinta de μ y de \bar{v}_1 , ya que siendo fortuitos los errores

presentes en cada medición, no puede esperarse una misma compensación estadística de ellos en cada una de las dos series.

Si tomamos "m" muestras del universo, tendremos entonces "m" medias aritméticas:

$$\bar{v}_2 - \mu \neq 0$$

$$\bar{v}_3 - \mu \neq 0$$

$$\bar{v}_m - \mu \neq 0$$

Estas medias aritméticas constituyen a su vez una nueva serie que se distribuye alrededor de la media aritmética del universo según la curva gaussiana (2).

Como se observa, la curva (2) tiene una dispersión menor que aquella de las variantes individuales que integran el universo; esto resulta lógico si se piensa que las medias aritméticas están afectadas por los errores fortuitos en menor grado que cada una de las mediciones individuales, por lo tanto es de esperar que la diferencia entre medias aritméticas sea menor que la diferencia entre las variantes de cada serie. Por lo tanto la desviación normal de la serie de medias aritméticas o lo que es lo mismo, la desviación normal de una cualquiera de esas medias aritméticas, será menor que la desviación normal σ de una cualquiera de las variantes tomadas individualmente.

Se puede demostrar aplicando propagación de errores estadísticos, que la desviación normal de la media aritmética $\sigma_{\bar{v}}$ está relacionada con la desviación normal σ de una variante cualquiera por la expresión:

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

A semejanza de lo hecho en el caso del desvío o error de una variante tomada individualmente podemos hacer:

$$t = \frac{\bar{v} - \mu}{\sigma_{\bar{v}}}$$

Luego podríamos expresar nuestra medición de la siguiente manera:

$$\mu \pm \sigma_{\bar{v}}$$

es lógico entonces que mediante esta acotación tendríamos una mayor aproximación en la medición, sin embargo todo esto no pasa de una aproximación teórica, ya que es imposible determinar fehacientemente el valor de μ y por lo tanto σ .

Muestras pequeñas o n finito

Por lo visto anteriormente sabemos entonces que el valor medio aritmético de una muestra resulta de todas las mediciones, el más probable y que además este valor medio, tiene siempre una desviación standard o varianza $\sigma_{\bar{v}}$ menor que la de cualquier valor particular del grupo respecto de μ es decir:

$$\sigma_{\bar{v}} < \sigma$$

Puesto que en el estudio del comportamiento estadístico de materiales fabricados en serie, muchos ensayos son destructivos de la muestra, se pretende por razones económicas limitar el número "n" de mediciones.

Es interesante conocer entonces, cual es entre los distintos valores medios \bar{v}_i la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas frente a la media del universo μ (valor verdadero).

Esto fue resuelto por Gosset (utilizando el seudónimo Student) que publicó en 1908 un trabajo denominado "Error probable de la media, estableciendo y desarrollando una función de distribución de valores medios de varias muestras, relacionadas con la respectiva población.

Si llamamos $\Delta\bar{v}$ a la diferencia entre la media de la muestra \bar{v}_i y la media del universo μ .

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_i - \mu$$

Se define el valor "t" por la expresión

$$t = \frac{\Delta\bar{v}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Siendo:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (v_i - \bar{v})^2}{n-1}}$$

Los valores de "t" están tabulados para distintas probabilidades de ocurrencia. A diferencia de las tablas de probabilidad de la distribución normal, en las de Student para cada valor de "n" se da el error, a través de la expresión:

$$t = \frac{\bar{v} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

que tiene probabilidad del 90, 95, 99 % - por ejemplo- de no ser superado. (A veces se expresa como la probabilidad de 10, 5 o 1 % de que sea superado).

Tabla de “student”

n	99%	95%	90%
2	66.66	12.70	6.31
3	9.93	4.30	2.92
4	5.84	3.18	2.35
5	0	2.78	2.13
6	4.03	2.57	2.02
7	3.71	2.45	1.94
8	3.50	2.37	1.90
9	3.36	2.31	1.86
10	3.25	2.26	1.83
11	3.17	2.23	1.81
12	3.11	2.20	1.80
13	3.06	2.18	1.78
14	3.01	2.16	1.77
15	2.98	2.15	1.76
∞	2.58	1.96	1.65

La anterior es la tabla de valores de "t" de Student. Veamos como se trabaja con esta tabla. Supongamos que hemos hecho seis mediciones de una misma resistencia en las mismas condiciones y se obtuvieron los siguientes valores:

$$(672 \quad 673 \quad 670 \quad 671 \quad 670 \quad 672) \Omega$$

La media de la muestra será:

$$\bar{v} = \sum_i^n \frac{\bar{v}_i}{n} = \frac{672+673+670+671+670+672}{6} = 671,33\Omega$$

Calculemos ahora:

$$\sum_1^n x_i^2 = \sum_i^n (v_i - \bar{v})^2 = 7,34$$

Con este valor podemos entonces calcular:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_i^n x_i^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{7,34}{5}}}{\sqrt{6}} = 0,5$$

Si elegimos una probabilidad del 95% de que el valor verdadero se encuentre entre:

$$\bar{v} - t \frac{S}{\sqrt{n}} \quad y \quad \bar{v} + t \frac{S}{\sqrt{n}}$$

entramos en la tabla de Student con: $n = 6$ y $p = 95\%$ y obtenemos que "t" vale:

$$t = 2,57$$

Nuestra medición quedará acotada con una probabilidad del 95% de que el valor verdadero se encuentre en esos límites.

Debemos aclarar que siempre en las "n" mediciones se desafectan los errores sistemáticos, en nuestro ejemplo consideramos corregidos las 6 mediciones de resistencia.

Propagación de errores estadísticos:

Supongamos que tenemos una función:

$$w = f_{(u,v)}$$

y que se conozca la dispersión de las variables u y v, σ_u , σ_v y el problema que se nos presenta es encontrar cuanto vale σ_w :

$$\sigma_w = f_{(\sigma_u, \sigma_v)}$$

Analicemos el problema de la siguiente manera: si en la primera medición de w los errores fortuitos o accidentales de u y v son

$$X_{u_1} \quad y \quad X_{v_1}$$

"errores absolutos límites en la medición 1".

El de w será de acuerdo a lo visto:

$$X_{w_1} = \frac{\partial w}{\partial u} X_{u_1} + \frac{\partial w}{\partial v} X_{v_1}$$

en una segunda medición, tendremos:

$$X_{u_2} \quad y \quad X_{v_2}$$

Luego:

$$X_{w_2} = \frac{\partial w}{\partial u} X_{u_2} + \frac{\partial w}{\partial v} X_{v_2}$$

genéricamente:

$$X_{w_i} = \frac{\partial w}{\partial u} X_{u_i} + \frac{\partial w}{\partial v} X_{v_i}$$

Luego:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} (X_{w_1}^2 + X_{w_2}^2 + \dots + X_{w_n}^2)$$

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n X_{w_i}^2$$

Pero:

$$X_{w_i}^2 = \frac{\partial w^2}{\partial u} X_{u_i}^2 + \frac{\partial w^2}{\partial v} X_{v_i}^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial u} X_{u_i} \frac{\partial w}{\partial v} X_{v_i}$$

Genéricamente:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n X_{w_i}^2 = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial w^2}{\partial u} \right) \sum_i^n X_{u_i}^2 + \left(\frac{\partial w^2}{\partial v} \right) \sum_i^n X_{v_i}^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} \sum_i^n X_{u_i} X_{v_i} \right]$$

De aquí surge:

$$\frac{1}{n} \sum_i^n X_{u_i}^2 = \sigma_u^2$$

$$\frac{1}{n} \sum_i^n X_{v_i}^2 = \sigma_v^2$$

$$\frac{1}{n} \sum_i^n X_{u_i} X_{v_i} = 0$$

por el postulado de Gauss que dice que existe la misma probabilidad de errores positivos que de errores negativos).

Luego:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w^2}{\partial v} \right) \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial w^2}{\partial v} \right) \sigma_v^2$$

Esta es la expresión general de

$$\sigma_w = f_{(\sigma_u; \sigma_v)}$$

Para el caso de una suma o diferencia:

$$\sigma_w^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

y para el producto o cociente:

$$\left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_u}{u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v} \right)^2$$

CAPÍTULO III: INSTRUMENTOS BÁSICOS

De estos instrumentos se analizarán: ley de deflexión, aplicaciones y errores sistemáticos, de manera de reunir conocimientos básicos para comprender el funcionamiento y limitaciones de los mismos.

INSTRUMENTOS DE IMÁN PERMANENTE Y BOBINA MÓVIL

Son los llamados comúnmente de "bobina móvil" o "tipo D'Arsonval" y son los más utilizados en el campo de la corriente continua. Se basan en la acción motriz ejercida por el campo de un imán permanente sobre una bobina recorrida por una corriente continua.

Básicamente el instrumento está constituido por dos sistemas: uno fijo -el circuito magnético- y otro móvil -el cuadro de la bobina-.

El cuadro móvil puede estar sustentado por: pivotes, hilo o bien hilo tensado.

Los resortes de bronce fosforoso sirven para llevar la corriente a la bobina móvil y crear la cupla directriz que es proporcional al ángulo de rotación del cuadro.

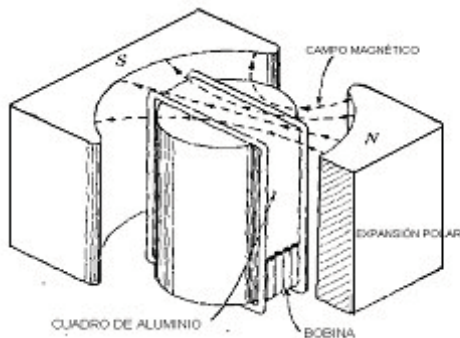


Figura 1

Circuito magnético

El circuito magnético del sistema D'Arsonval está constituido por:

- a.- Imán permanente (1)
- b.- Expansiones polares de hierro dulce (2)
- c.- Núcleo de hierro dulce (3)

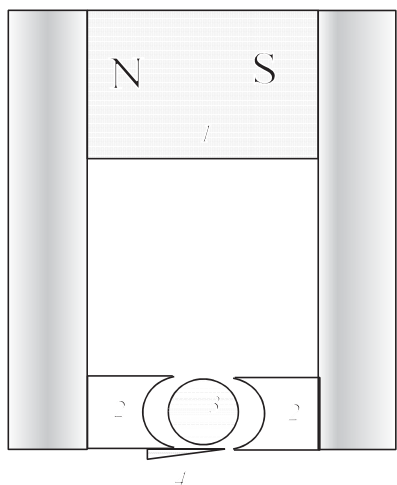


Figura 2

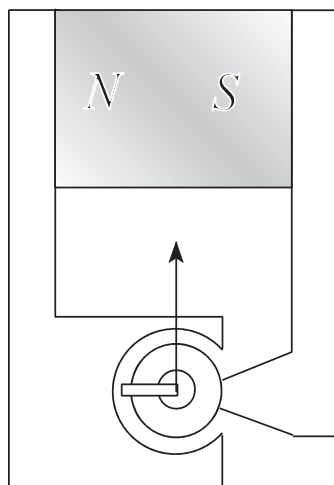


Figura 3

d.- Derivador magnético de hierro dulce (4).

(Los números entre paréntesis corresponden con los de la figura 2). Téngase presente que todo el circuito magnético es fijo y su misión es la de crear en un entrehierro reducido un flujo radial e inducción constante a fin de obtener una distribución uniforme de escala.

El derivador magnético por el que circula parte del flujo disponible, restándolo del entrehierro en una fracción regula-

ble a voluntad por adecuado desplazamiento, permite llevar la inducción B a un valor perfectamente determinado a los fines de lograr en la fábrica que con la corriente del alcance, la aguja coincida con la última división de la escala.

También sirve para compensar el eventual debilitamiento del imán a través del tiempo: si el derivador se aleja, es menor el flujo que por él deriva, con lo que se refuerza el flujo del entrehierro, restituyéndolo al valor original.

Con el circuito magnético de la figura 3 se logra un instrumento de amplia escala de medición, entre 250° y 300° en lugar de los 90 a 120° que se obtiene en los instrumentos comunes.

Para esta construcción especial solamente un lado de la bobina móvil es activo.

En las figuras 4 y 5 se muestran otros detalles constructivos del sistema móvil.

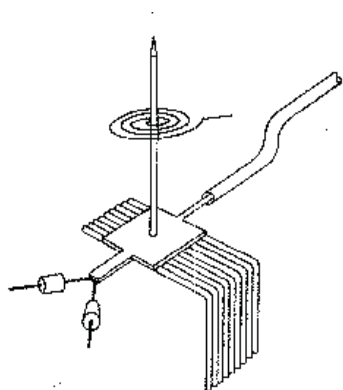


Figura 4

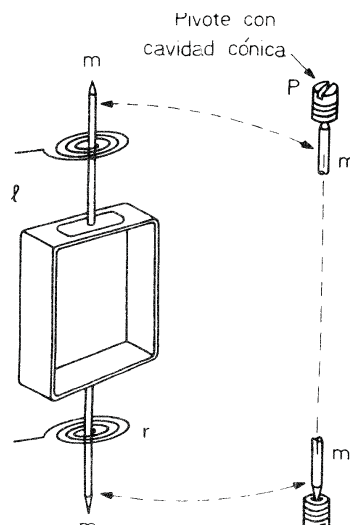


Figura 5

Ventajas del instrumento de i.p.b.m.

El instrumento de imán permanente y bobina móvil tiene las siguientes cualidades:

- ▶ Elevada sensibilidad
- ▶ Consumo bajo
- ▶ Alto valor de la cifra de mérito (relación entre la cupla motora y el peso del rotor)
- ▶ Escala uniforme y con posibilidades de hacerla extendida (hasta 300°)
- ▶ Poca influencia de los campos magnéticos externos
- ▶ Posibilidades de modificar las escalas, ampliar fácilmente el rango de medida

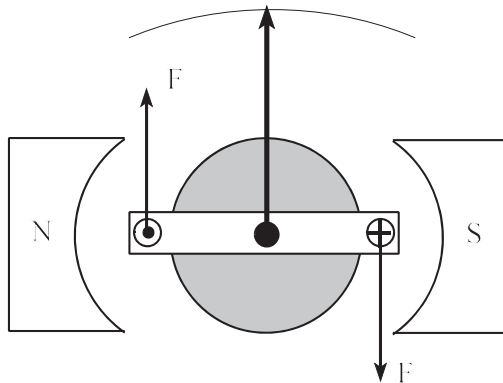


Figura 6

Ley de respuesta

Para deducir la ley de respuesta del instrumento, consideremos una bobina de N espiras. Al circular una corriente I por el cuadro, aparece una fuerza actuante sobre los lados activos de la bobina:

$$F = B \cdot N \cdot I \cdot l$$

(siendo l lado activo de la bobina).

Si a es el ancho de la bobina, la cupla motriz será:

$$C_m = B \cdot N \cdot I \cdot l \cdot a$$

De esta expresión denominamos al producto $B \cdot N \cdot l \cdot a$ constante motora "G".

Como ya se explicó en el estudio de las cuplas, una vez superado el transitorio el equilibrio final se logra cuando:

$$C_m = C_d$$

$$G \cdot I = K_r \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{G \cdot i}{K_r}$$

A la relación G/K_r se la llama sensibilidad instrumental S_i :

$$\alpha = S_i \cdot I$$

Esta nos dice que ante la presencia de un campo magnético radial y uniforme, la bobina móvil reacciona provocando una cupla y por ende una deflexión que es directamente proporcional a la corriente que circula por ella. Esta conclusión implica además que el instrumento posee una polaridad identificada en los bornes, (cuando opera con corriente continua).

Si intencional o accidentalmente se invierte la polaridad, es evidente que la cupla cambiará de sentido, sin poder efectuar lectura alguna si el instrumento no posee escala con cero al centro.

Ley de respuesta - campo uniforme

Si el campo magnético es constante, uniforme y paralelo el flujo concatenado por el cuadro móvil será función senoidal del ángulo de giro:

$$\varphi = \varphi_{\text{máx}} \text{ sen } \alpha$$

La expresión general de la deflexión será:

$$\alpha = \frac{G}{K_r} I \cos \alpha$$

como se desprende de la última expresión la ley sigue siendo lineal, es decir que responde proporcionalmente a la corriente. En cuanto a la ley de distribución de la escala dependerá ahora del coseno de la deflexión, obteniéndose una distribución de trazos casi lineal en la primera parte para comprimirse en la segunda. En la figura 7 graficamos esta distribución despejando la función $I = f(\alpha)$. Este tipo de instrumento es utilizado en los llamados de escala ampliada y tienen aplicación cuando se desean medir corrientes o tensiones cuyo valor medio se ubique aproximadamente en la mitad de la escala y con transitorios con picos elevados que por la particularidad constructiva del instrumento es posible detectar sin dañarlo.

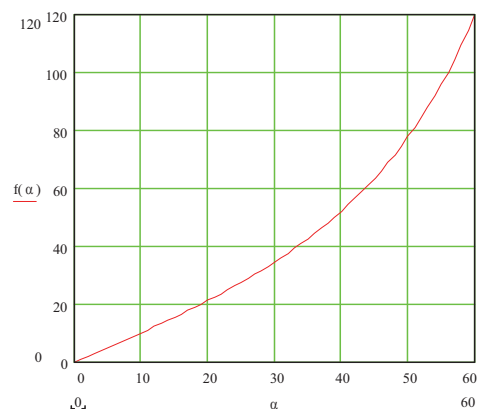


Figura 7

Escala logarítmica

Nuevamente la única manera de modificar la escala, apartándola de la linealidad, es hacer que uno de los factores de la constante motora G sea variable. El único factor fácilmente variable es la inducción B en el entrehierro. Así si se desea una escala logarítmica el valor de B deberá ser proporcional a $\ln i/i$, lo que se consigue con una forma conveniente de los polos del imán, como la de la

figura 8, que hace que para bajos valores de α el valor de B sea grande.

Este tipo de instrumento con escala logarítmica es utilizado en el campo de las mediciones luminotécnicas y de sonido.

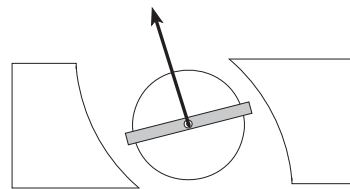


Figura 8

Amperímetros

El instrumento de imán permanente y bobina móvil es muy sensible a la corriente. Esta corriente entra y sale del cuadro móvil por los resortes que cumplen la misión de cupla antagónica (espirales o cinta tensada). Con intensidades del orden de los 15 a los 20 mA estos resortes alcanzan la temperatura máxima admisible. Por esta razón ese es el valor máximo de la intensidad que puede medirse con un aparato así constituido y que se llama miliamperímetro. Si el alcance es del orden de los microamperes, el nombre que recibe es microamperímetro.

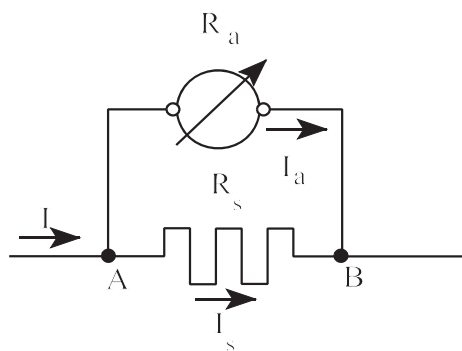


Figura 9

Para alcances más altos se logran con derivadores o shunts dispuestos de modo tal que por la bobina móvil circule el valor nominal o alcance del instrumento.

Veamos la deducción de como calcular el valor de la resistencia derivadora para una amperímetro de alcance y resistencia interna conocidos. Del esquema de la figura 9 la tensión en bornes del instrumento es:

$$U_{AB} = R_s I_s = R_a I_a$$

Despejando el valor de R_s :

$$R_s = R_a \frac{I_a}{I - I_a}$$

Denominando con n al *poder multiplicador del shunt* a la relación entre la corriente de línea y corriente a fondo de escala -alcance propiamente dicho del instrumento sin derivador-:

$$n = \frac{I}{I_a}$$

Características de los shunts

Cuando el alcance no es muy grande (hasta los 50 A. aproximadamente) los shunts pueden

$$R_s = \frac{R_a}{n-1}$$

disponerse en el interior del instrumento. Para alcances superiores se los coloca exteriormente y con conductores suplementarios se los conecta al instrumento. Para evitar caídas de tensión excesivas por resistencias de contacto, se utilizan resistencias de cuatro terminales.

Para instrumentos patrones los shunts deben ser externos para cualquier alcance de corriente, además deben poseer un grado de exactitud compatible con la del instrumento; así por ejemplo si el instrumento es de clase 0,2 el error de la resistencia será de 0,2% como máximo.

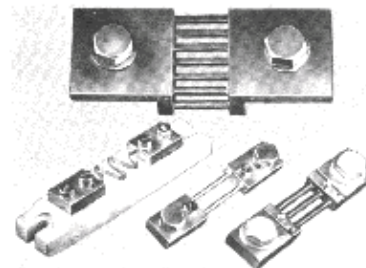


Figura 10

Para alcances bajos se utiliza como material alambre de manganina. Para alcances altos los shunts son de barras de cobre en paralelo para lograr una mejor disipación de calor y ajuste. El ajuste fino se logra practicando pequeños orificios o limaduras laterales en las barras.

La caída de tensión en bornes de la resistencia shunt conectada con el instrumento es:

$$U = I \frac{R_s R_a}{R_s + R_a} = I \frac{R_s}{\frac{R_s}{R_a} + 1}$$

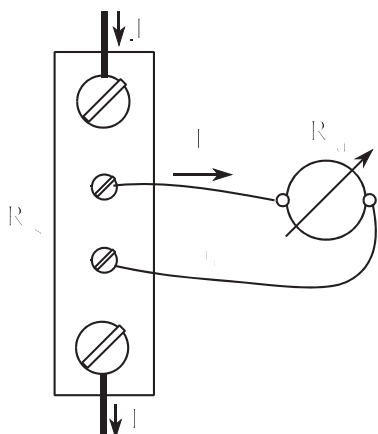


Figura 11

Para alcances superiores a las decenas de amperes $R_s/R_a \ll 1$, de modo que en el denominador el cociente puede despreciarse:

$$U \approx I R_s$$

de manera tal que una resistencia shunt queda identificada por dos valores característicos: su caída de tensión y su corriente nominal.

Los valores de caídas de tensión están normalizados en:

$$45 \ 60 \ 75 \ 100 \ 150 \ 300 \text{ mV}$$

La conexión del shunt con el instrumento debe hacerse como indica la figura 11. Para corrientes elevadas debe apartarse al instrumento de la influencia del campo magnético generado alrededor del conductor cuya intensidad de corriente quiere medirse, debe tenerse cuidado en el dimensionamiento de los cables de unión, pues su resistencia debe ser despreciable frente a la resistencia del instrumento R_a , caso contrario produce un error sistemático provocando una deflexión en menos en el instrumento. (Ver errores sistemáticos).

Potencia de consumo de los shunts, su relación con la del instrumento

La potencia de consumo o disipación por efecto Joule en el shunt viene dada aproximadamente por:

$$P_s = R_s I^2$$

cuando el poder multiplicador del shunt n es mucho mayor que 1.

El valor de la corriente de línea en función del alcance del instrumento está dado por:

$$I = n \cdot I_a$$

Recordando que $R_s = R_a / (n-1)$, resulta:

$$P_s = \frac{n^2}{n-1} R_a I^2$$

Por la misma consideración anterior $n \gg 1$, por lo que la última expresión se simplifica a :

$$P_s \approx n P_a$$

siendo P_a el consumo propio del instrumento.

En consecuencia la potencia de disipación del shunt es "n" veces la potencia de consumo del instrumento. Así para un miliamperímetro cuyo consumo nominal es de 1 mW, si se lo usa con un derivador para llegar a medir 20.000 veces su alcance, 1000 A (siendo 50 mA el alcance del instrumento), el shunt tendrá una disipación de 20 Watts.

Las bobinas móviles de instrumentos a ser usados con shunts para valores altos de corrientes no

están devanadas sobre soportes de aluminio para evitar un amortiguamiento excesivo, debido a la corriente de frenado autoinducida en la bobina móvil.

Voltímetros

El instrumento de imán permanente y bobina móvil como medidor de corriente queda definido por su alcance y resistencia interna, por ejemplo $50 \mu\text{A} - 5.000 \Omega$.

El producto de estos dos valores definen el alcance como voltímetro -para el ejemplo, se transforma en un milivoltímetro de 250 mV a fondo de escala. Para mayores alcances se disponen de resistencias adicionales o multiplicadoras en serie con el instrumento, de manera que el nuevo alcance viene dado por la expresión:

$$U = I(R_a + R_m)$$

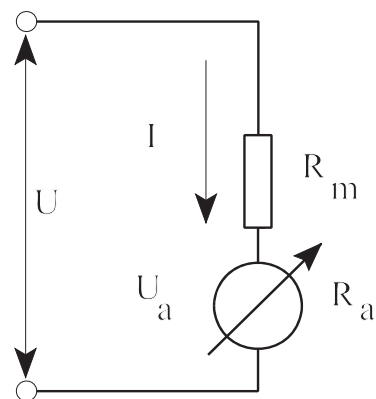


Figura 12

Para determinar R_m para un alcance dado y conociendo los datos R_a e I se plantean las ecuaciones:

$$U = U_0 + IR_m = U_0 + U_0 \frac{R_m}{R_a}$$

$$m = \frac{U}{U_0}$$

El poder multiplicador de la resistencia adicional queda definido por :

$$m = 1 + \frac{R_m}{R_a} \quad \therefore \quad R_m = R_a (m-1)$$

La resistencia total $R_m + R_a$ define a R_v la resistencia interna total del instrumento. El cociente entre R_v / U determina una característica importante que diferencia al instrumento con otros de la misma clase. Esta característica es a menudo llamada impropriamente "sensibilidad del voltímetro Ω/V ". Los valores más comunes son:

1.000 - 5.000 - 10.000 - 25.000 - 50.000 Ω/V

La inversa de los Ω/V nos da el valor de la corriente a fondo de escala.

En mediciones electrotécnicas las caídas de tensiones son ocasionadas por cargas de bajas resistencias por lo que cualquier instrumento que responda a la característica Ω/V de los valores apuntados resulta admisible. No es así para mediciones electrónicas, ocasionadas por componentes de alto valor resistivo, por lo que un instrumento de más de 25.000 Ω/V es lo aconsejable para provocar una menor perturbación en el circuito.

Voltímetro para corriente alterna

Si un instrumento de imán permanente y bobina móvil se conecta a una tensión de corriente alterna, la bobina móvil no provocará ninguna lectura detectable y sólo se observará una vibración del índice para frecuencias bajas. Para evitar esto es necesario modificar la forma de onda (figura 13).

El elemento convertidor (B) no es otra cosa que un rectificador.

Suponiendo que se trata de rectificador ideal y que al conjunto de instrumento-rectificador lo sometemos a una señal de la forma:

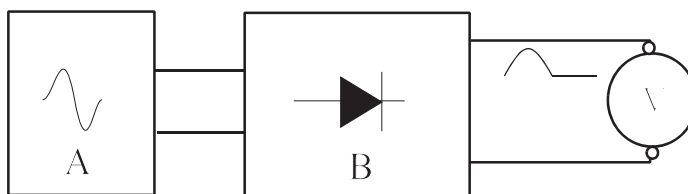


Figura 13

$$u = U_0 \text{ sen } \omega t$$

La corriente será:

$$i = I_0 \text{ sen } \omega t$$

El valor medio de la onda vale:

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \text{ sen } \omega t d(\omega t)$$

o bien por ser:

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I_0 \sin \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} I_0 [-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{I_0}{2\pi} [-\cos \pi + \cos 0] = \frac{I_0}{\pi}$$

$$I_{medio} = 0,45 I_{ef}$$

que es el valor que indica el instrumento con rectificador de media onda.

Consumo propio

Cuando se analizó la cupla motora de este instrumento se dedujo que la misma variaba proporcionalmente con la corriente. En la constante de proporcionalidad se incluía a B, es decir que a mayor inducción mayor cupla motora. Con los modernos imanes se puede llegar a 0.3 T (Weber/m²) y aún más, mientras que en los instrumentos de hierro móvil y electrodinámicos se crean campos relativamente bajos de solo 0.01 ó 0.015 T. Esta es la razón por la cual con el instrumento de imán permanente y bobina móvil se pueden construir microamperímetros mientras que con los de hierro móvil y electrodinámicos no se puede bajar de los 15 a 20 mA, pues para valores inferiores el consumo se hace inaceptablemente alto. Esto se debe a que si el valor de B es bajo, para mantener valores adecuadamente altos de la cupla motora es necesario aumentar correspondiente el tamaño de la bobina y sobre todo el número de espiras N, lo que determina una mayor longitud del alambre y una disminución de la sección, con lo que se incrementa notablemente la resistencia de la bobina. La consecuencia es un aumento de consumo de los miliamperímetros.

Cuando estudiamos al instrumento de IPBM como amperímetro, arribamos a la conclusión que al disponer de una resistencia derivadora para aumentar el alcance, la potencia de consumo de la resistencia shunt era n veces la potencia de consumo propio del instrumento. Ahora utilizando el mismo instrumento como voltímetro, deducimos que también el consumo total será m veces el consumo propio del aparato:

$$P_{cp} = U_a I_s = R_a I_a^2$$

La potencia de consumo total:

$$P_c = R_m I_a^2 + R_a I_a^2 = R_a(m-1) I_a^2 + R_a I_s^2 = m R_a I_a^2$$

$$P_c = m P_{cp}$$

El consumo es pues proporcional al poder multiplicador "m". Así si por ejemplo un milivoltímetro de alcance 30 mV tiene un consumo de 0,15 mW; al utilizarlo como voltímetro de 1500 V. (m=50.000) el consumo se ampliará a:

$$P_c = 7.5 \text{ W}$$

que es un valor bastante aceptable. Esta es la razón por la cual se pueden usar en instrumentos de imán permanente y bobina móvil poderes multiplicadores tan altos. Compárese con un voltímetro de hierro móvil de solo 600 V cuyo consumo es de 12 watts.

ÓHMETROS

Óhmetro serie

Un instrumento de imán permanente y bobina móvil de campo radial uniforme en serie con las resistencias R_i , R_1 , R_2 y la incógnita X configura básicamente el principio del óhmetro serie:

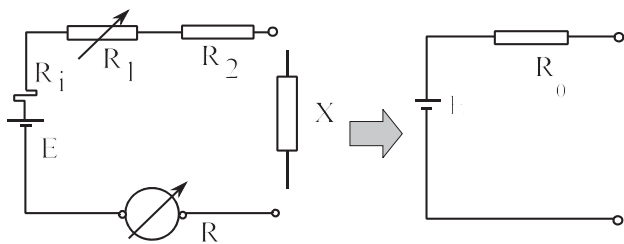


Figura 14

Existe una relación definida entre la corriente I_x y el valor de X. En esta relación también entran los restantes parámetros del circuito: E, R_i (resistencia interna de la batería), R_a (resistencia del cuadro móvil del instrumento), R_1 (resistencia variable, ajuste del cero de escala) y R_2 (resistencia fija). Si todos estos parámetros son fijos la escala del instrumento -por ejemplo un microamperímetro- puede calibrarse directamente en unidades de ohms.

Supongamos que contamos con un instrumento de IPBM de 50 μA -valor usual en los multímetros o "tester"- a fondo de escala. Para un valor de X igual a cero, cortocircuitando los terminales de entrada, deben seleccionarse los parámetros del circuito E, R_1 , R_2 de manera tal que la aguja del instrumento marque la máxima deflexión (50 μA).

Para $X = \infty$ (terminales desconectados) la corriente será nula.

Los puntos cardinales (extremos) en la escala en ohms estarán invertidos a los correspondientes de

la escala en μA : el "cero" estará a la derecha y el "infinito" a la izquierda.

No obstante ser la deflexión proporcional a la corriente, la escala no es uniforme. Para su análisis hallaremos un factor "F" que dependerá de los parámetros del circuito.

El valor de la corriente I_x para un valor cualquiera de X será:

$$I_x = \frac{E}{R_1 + R_1 + R_2 + R_a + X} = \frac{E}{R_0 + X}$$

Con R_0 incluimos a todas las resistencias internas del circuito.

Si a la expresión anterior dividimos numerador y denominador por R_0 :

$$I_x = \frac{\frac{E}{R_0}}{1 + \frac{X}{R_0}} = \frac{I_0}{1 + \beta}$$

siendo I_0 la corriente necesaria para la máxima deflexión, al cociente entre la resistencia incógnita y la total interna lo denominaremos β .

$$F = \frac{1}{1 + \beta}$$



Figura 15



Figura 16

La escala del instrumento como óhmetro puede estudiarse en función del factor F definido como I_x / I_0 y β que es valor fraccional de X comparado con la resistencia de entrada R_0 del óhmetro:

Esta última expresión es una ecuación universal, ya que es válida con independencia de los valores específicos de los parámetros del circuito: E, R_a , R_1 y R_2 .

En la figura 15 se ha dibujado la curva de la variación de F en función de β .

Del análisis de la expresión de F se determina que para $\beta = 1$, vale 0,5.

Esto indica que para una resistencia incógnita X igual a la interna R_0 la deflexión acusa la mitad de la escala; justamente entre el cero y este punto llamado "punto medio de diseño de la escala" pueden efectuarse lecturas sin dificultad, no así en el resto de la escala donde los trazos se comprimen cada vez más (figura 16), hasta llegar a infinito.

Óhmetro paralelo

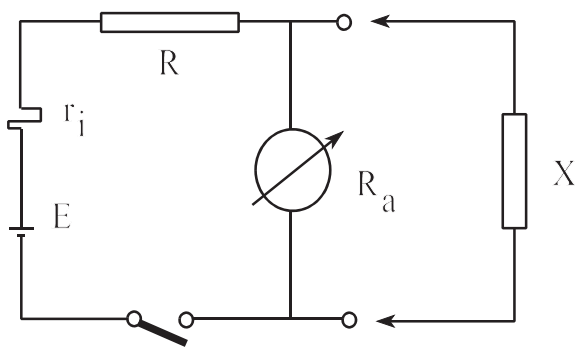


Figura 17

Por lo visto en el circuito anterior -óhmetro serie- el punto medio de diseño de escala queda determinado por R_0 , aún haciendo mínimas todas las resistencias, queda como importante la propia del cuadro móvil del instrumento de IPBM -para $50\mu A/5.000\Omega$ - Este valor de por sí solo es excesivo para el campo de mediciones pequeñas por lo que el circuito del óhmetro serie es inadmisable para medir con cierta exactitud resistencias bajas.

La otra configuración circuital que nos permite solucionar el inconveniente apuntado, es la del óhmetro shunt:

Se lo denomina óhmetro shunt porque la resistencia incógnita, la X a medir se la conecta en paralelo con el instrumento. Como se ve del circuito de la figura el aparato necesita de una llave interruptora para desconectar la fuente después de efectuada la medición.

Obsérvese que aquí los puntos cardinales de la escala son distintos con respecto a los del óhmetro serie. Cuando la incógnita es cero estamos efectuando un cortocircuito en bornes del instrumento, es decir que la única limitación de la corriente está impuesta por la resistencia R . Significa pues que para X cero, el índice coincide -con la llave interruptora cerrada- se obtiene el valor máximo de corriente pues para cualquier otro valor de X la misma actúa como resistencia derivadora.

Para analizar la distribución de la escala, repetimos el mismo razonamiento encarado en el óhmetro serie.

El valor I_a es el de la corriente circulando cuando tenemos conectado al aparato una determinada X :

$$I_a = \frac{E}{\left(R + \frac{R_a X}{R_a + X} \right)} \cdot \frac{R_a X}{(R_a + X) R_a} = \frac{E X}{X(R + R_a) + R R_a}$$

El valor máximo de la corriente se obtiene -como dijimos- cuando X es infinito:

$$I_{\infty} = \frac{E}{R + R_a}$$

Definiendo al factor de distribución de escala F:

$$F = \frac{I_a}{I_{\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{R_p}{X}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho}}$$

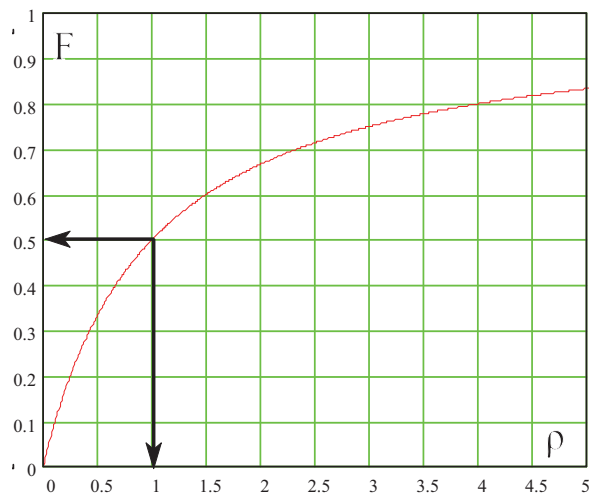


Figura 18

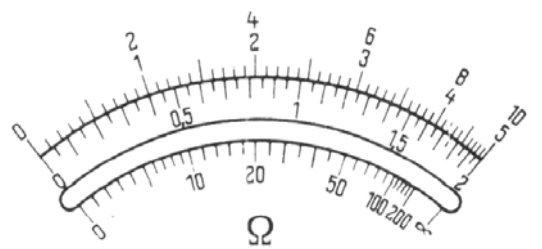


Figura 19

Nuevamente hemos hallado una ecuación universal para cualquier valor de los parámetros. De la representación gráfica de F se ve que para el óhmetro shunt la distribución de escala es idéntica a la del óhmetro serie con la condición de que en aquella se halla invertida (puntos cardinales: cero a izquierda e infinito a derecha).

También y en forma similar al óhmetro serie para $\rho = 1$ la deflexión acusa la mitad de la escala, definido como el "punto medio de diseño de la escala".

La forma de obtener distintas escalas es variando las tensiones de la fuente o bien modificando las resistencias en serie con el instrumento.

El campo de aplicación del óhmetro shunt se extiende desde resistencias muy bajas del orden de los micro-ohms, hasta las unidades, mientras que con el óhmetro serie el límite superior puede llegar al orden de los megohms.

Logómetros de IPBM

Para la obtención de distintas magnitudes eléctricas a veces es necesario efectuar el cociente entre otras dos magnitudes. Así si se quiere medir una resistencia conociendo U e I (tensión en bornes y corriente que la circula) se debe efectuar el cociente U/I .

Por definición diremos que logómetros son aquellos instrumentos susceptibles de medir la relación de dos corrientes, de ahí el nombre de "cocientímetros" o bien instrumentos de "bobinas cruzadas".

Analicemos el principio de funcionamiento:

En presencia de un campo magnético uniforme B, se ubican dos bobinas rectangulares y solidarias a un mismo eje y con sus planos formando un ángulo de 90° . Las dos bobinas supuestas iguales están recorridas por dos corrientes i_1 e i_2 en los sentidos indicados en la figura 19. Las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre los lados activos de las bobinas, perpendiculares a la dirección del campo son:

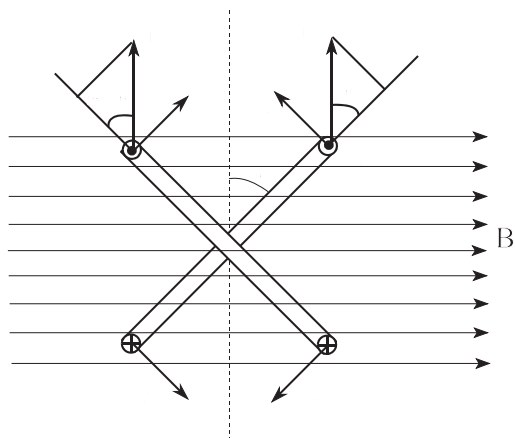


Figura 20

$$F_1 = K.B. i_1$$

$$F_2 = K.B. i_2$$

siendo K una constante que depende de la longitud de los lados activos de las bobinas y del número de espiras. Si el plano de la bobina recorrida por la corriente i_1 forma un ángulo Θ con un eje normal al campo y si a es el ancho de las bobinas, las cuplas motoras actuantes serán:

$$C_1 = a.f_1 .K'.i_1 .\text{sen}\Theta$$

$$C_2 = a.f_2 .K'.i_2 .\cos \Theta$$

Puesto que las dos cuplas tienen sentido contrario y como las bobinas no están sometidas a ninguna cupla recuperadora, el sistema gira hasta que ambas cuplas sean iguales:

$$i_1 \text{ sen}\theta = i_2 \cos\theta \quad \therefore \quad \text{tg}\theta = \frac{i_2}{i_1}$$

de manera que la desviación de las bobinas medida a partir de una cierta posición inicial de referencia, estará directamente vinculada con la relación entre las dos corrientes.

Óhmetro de imán permanente y bobinas cruzadas

Si una de las bobinas se coloca en serie con una resistencia R conocida y la otra bobina en serie con una resistencia R_x a medir, al alimentar los dos circuitos en paralelo con una misma tensión continua U se tendrá:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_x}{R}$$

despreciando las pequeñas resistencias internas de las bobinas.

$$R_x = R \operatorname{tg} \theta \quad \therefore \quad \theta \approx R_x$$

Es decir que la escala del instrumento puede calibrarse directamente en ohm, resultando la indicación independiente de la tensión U .

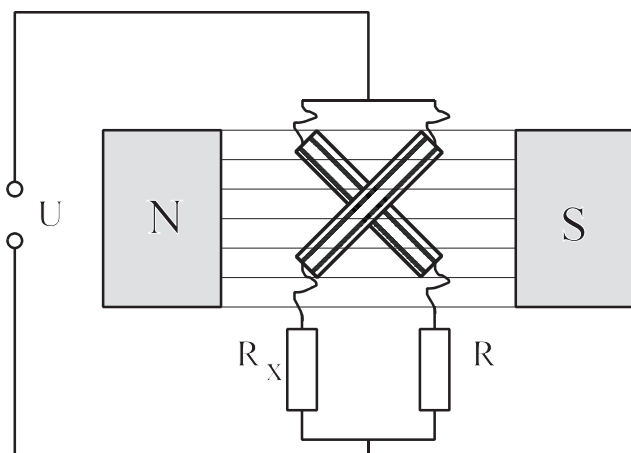


Figura 21

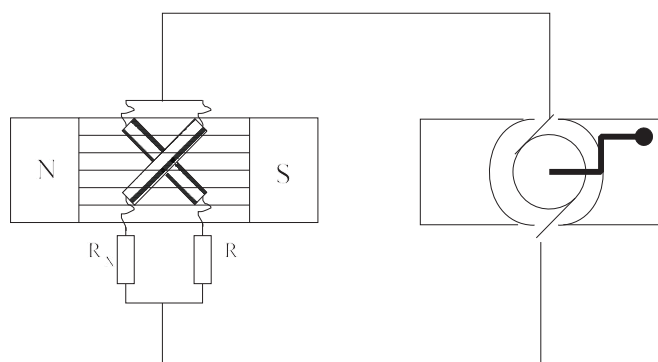


Figura 22

Una manera sencilla de interpretar el funcionamiento de este tipo particular de óhmetro es considerar al sistema conformado por un voltímetro -el campo y una de las bobinas- que mide la tensión en bornes de R_x y por un amperímetro -el campo y la otra bobina- que mide la corriente circulante por la resistencia incógnita.

Desde el punto de vista constructivo no es necesario que el campo sea rectilíneo y uniforme, ni que las dos bobinas estén colocadas en ángulo recto.

Basta solamente una disposición tal que a una rotación del sistema móvil corresponda un aumento de una de las cuplas y una disminución de la otra. Obviamente la ley de respuesta del instrumento no será tan simple como la del caso teórico ya considerado y deberá ser determinada experimentalmente; pero la desviación θ del sistema móvil será siempre una función unívoca de la relación entre las dos corrientes. Además con la calibración experimental se podrá tener en cuenta las resistencias propias de las bobinas que en una primera aproximación se supuso desprecia-

bles y que tienen importancias cuando se miden resistencias pequeñas. Sin embargo la principal aplicación de este tipo de óhmetro está sumamente difundida en las mediciones de resistencias elevadas de aislación de máquinas eléctricas, cables conductores, aisladores, etc.

En la figura 21 se ha representado el esquema de funcionamiento de este instrumento que recibe el nombre de "megóhmetro" o vulgarmente conocido como "megger". Puesto que en este caso particular las mediciones deben efectuarse con las tensiones de servicio o mayor según las disposiciones de las normas, se utiliza incorporado al aparato un generador manual o bien un dispositivo electrónico capaz de suministrar tensiones de hasta 5000 V. La escala, que no es lineal, tiene sus puntos cardinales en cero e infinito, midiendo valores intermedios entre décimas a centenares de megohm.

En la figura 22 se ha dibujado un generador a manivela, este tipo de megger es el del tipo convencional. Los hay con baterías comunes que con la aplicación de circuitos electrónicos adecuados son capaces de generar tensiones elevadas, aptas para la medición de resistencias de aislación.

Instrumentos de ipbm con diodo zener

Lupa de tensión

Así se denomina al instrumento de IPBM con diodo zener.

El diodo zener actúa como un dispositivo intermedio entre la cantidad a medir y el dispositivo final: el instrumento.

Antes de analizar el funcionamiento en conjunto daremos unas nociones elementales respecto al zener.

La característica de los mismos varían respecto del diodo común en lo siguiente:

Actuando con polarización inversa circula una corriente muy pequeña -del orden de los microamperes- hasta llegar a llamada "tensión de ruptura" o "tensión zener" que junto con la disipación, son los dos valores característicos del diodo.

Aclaremos que el término ruptura es impropiaamente llamado, por cuanto el comportamiento es reproducible siempre que el calentamiento térmico no dañe la estructura cristalina del diodo; esta limitación viene representada por la potencia de disipación, admisible y su corriente máxima inversa nominal. Con esta precaución, el proceso es reversible y repetible con alto grado de exactitud.

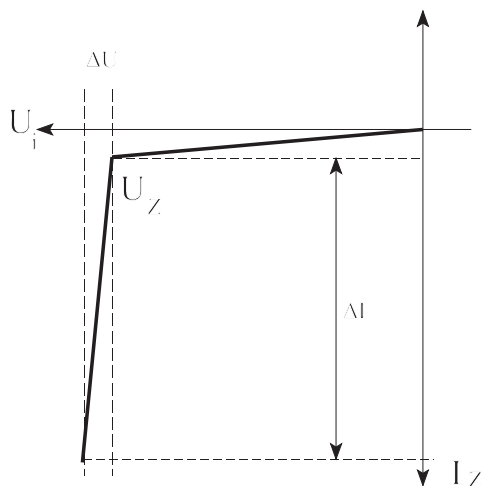


Figura 23

El circuito utilizado como lupa de tensión es el de la figura 24a, para expandir la última parte de la escala y la variante dibujada en 24b para ampliar el inicio de la escala.

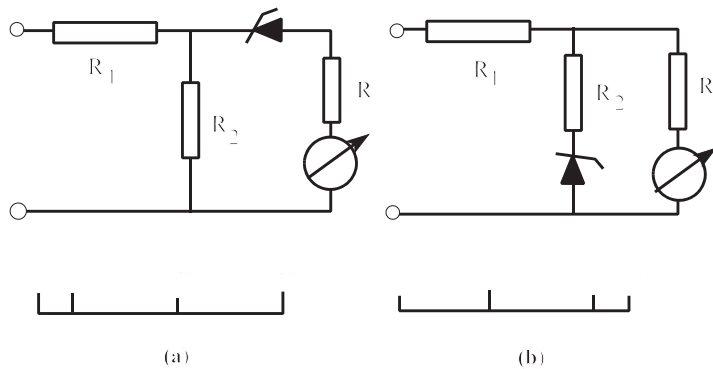


Figura 24



Figura 25

Mientras la tensión que cae sobre la resistencia R_2 es inferior a la tensión Zener U_z la resistencia que ofrece el diodo es del orden de las megohm es decir que para el instrumento es casi como si actuara un interruptor abierto. A partir de U_z pequeñas variaciones de tensión repercuten con grandes variaciones de corriente que circulan a través del instrumento -figura 23-.

Con una adecuada selección de las resistencias R_1 y R_2 , la escala queda calibrada como muestra la figura 25.

En la disposición circuital de la figura 24b, el diodo Zener conectado en paralelo con el instrumento no influye en las indicaciones de éste, siempre que la tensión esté por debajo de U_z .

Cuando se sobrepasa ésta, el diodo actúa como una resistencia "shunt" variable y decreciente con la tensión, de manera que la corriente I se deriva a partir de dicha tensión casi totalmente por la rama que lleva incorporado el diodo. Este tipo de circuito es utilizado para proteger de sobretensiones al instrumento de medida.

Instrumento de imán permanente bobina móvil con termocupla

Efecto Seebeck

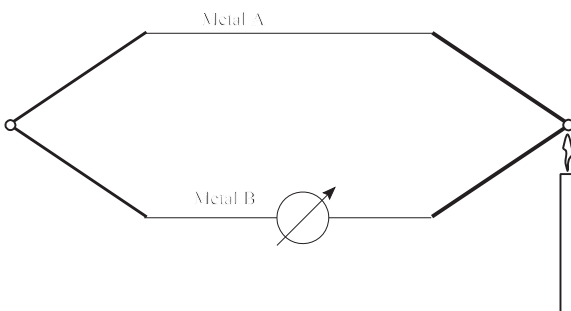


Figura 26

Cuando dos alambres que están compuestos de metales diferentes se unen en ambos extremos y se calienta en una de las puntas, se hace presente una corriente continua que fluye en el circuito. Este efecto recibe el nombre de Seebeck, su descubridor en 1821.

Si el circuito de la figura 26, se abre en el centro, la tensión de circuito abierto, llamada "tensión Seebeck" es una función de la temperatura del punto de unión de los metales y de la composición de los mismos. Todos los metales que sean

distintos exhiben este fenómeno. Las combinaciones más comunes de dos metales que se usan para fabricar termocuplas son las siguientes:

Composición	Coeficiente Seebeck
Fe- Constantan	58,5 $\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$
Ni con 10k% de cromo	39,4 $\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$
Platino con 10% de rodio	10,3 $\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$

Para pequeños cambios de temperatura la tensión de Seebeck es linealmente proporcional a la temperatura:

$$e = \alpha \cdot T$$

en realidad, la ley es:

$$e = \alpha \cdot \Delta t + \beta \cdot \Delta t$$

siendo α el coeficiente de Seebeck, es decir, la constante de proporcionalidad.

Aplicación de la termocupla al instrumento de ipbm

La disposición típica de este instrumento analizado funcionalmente consta de:

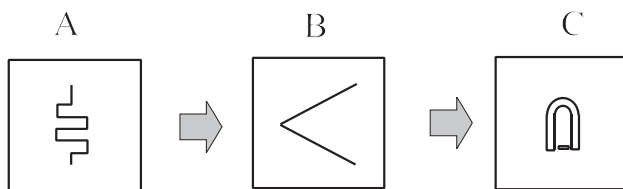


Figura 27

A) Detector primario: compuesto por un elemento calefactor circulado por la corriente a ser medida.

B) Termocupla: con su junta caliente en contacto térmico con el calefactor y con su junta fría a la temperatura ambiente.

C) Instrumento: de imán permanente y bobina móvil, actuando como milivoltímetro, cuya ley de respuesta será proporcional a la f.e.m. generada por la termocupla.

Puesto que la f.e.m. es proporcional a la elevación de la temperatura en el elemento calefactor la desviación del instrumento será proporcional a la pérdida:

$$P = R \cdot I^2$$

Por esta razón un instrumento con termocupla tiene escala cuadrática midiendo siempre el valor eficaz de la corriente.

Por lo tanto es un instrumento apto para mediciones en corriente continua y en corriente alterna, midiendo valores eficaces independientemente de la forma de onda y de la frecuencia.

Elemento calefactor:

Es sabido que la resistencia de un conductor es función de la frecuencia -efecto pelicular o Skin-. Este efecto será menor para conductores muy delgados de materiales de alta resistividad. Por ejemplo para conductores de cobre de 0,025 mm de diámetro, el incremento de resistencia es del 1% para 20 MHz, mientras que para un conductor de constantan del mismo diámetro el aumento de resistencia es del 0,0015% para 20 MHz. Se concluye que estos últimos conductores pueden ser usados como elementos calefactores hasta frecuencias muy altas sin que introduzcan errores apreciables (frecuencias de 50 y hasta 80 MHz).

Si el diseño es apropiado, su impedancia es casi puramente resistiva, aún para altas frecuencias.

Termoelemento

Está constituido por la combinación del elemento calefactor y la termocupla, en el cual se produce la transformación de la energía térmica en eléctrica.

Hay diversas formas constructivas de termoelementos:

Una de las formas más simples es la de contacto. La juntura está soldada al elemento calefactor y se halla en contacto eléctrico con él. Tiene la ventaja de una respuesta rápida a los cambios de corrientes producidos en el circuito a medir.

En corriente alterna, y para frecuencias superiores a la industrial aparecen efectos capacitivos. Para eliminar esto se separa la termocupla del elemento calefactor, encerrando ambos en una ampolla de vidrio.

El termoelemento se usa combinado con un milivoltímetro de baja resistencia, tratando de cumplir con la máxima transferencia de energía, obtenida cuando la resistencia del instrumento iguale aproximadamente a la resistencia interna de la termocupla.

El inconveniente principal es su baja capacidad a las sobrecargas -inferior al 50%- para no quemar al elemento calefactor.

Se puede llegar a obtener combinado con un buen instrumento una clase final igual a 1 con una frecuencia límite de 50 MHz.

Consumo: utilizado como amperímetro en alcance de 100 mA (resistencia del elemento calefactor 1 ohm) el consumo es de 10 mW. Para un alcance de 500 mA el consumo se eleva a 50 mW.

De las dos últimas aplicaciones del IPBM, se desprende que la denominada "lupa de tensión" tiene uso en el campo de las mediciones eléctricas -por ejemplo medición de tensión a la salida de un generador-; mientras que el IPBM con termocupla se lo usa en el campo de las mediciones electrónicas en alta frecuencia.

Aplicación del efecto Hall y el IPBM

En el campo de las mediciones de corriente continua el uso del efecto Hall ha encontrado un gran campo de aplicación.

Este fenómeno electromagnético se produce cuando un campo magnético y un conductor plano se disponen perpendicularmente.

El generador de Hall se usa para efectuar -de forma relativamente sencilla- medición de corriente, tensión y potencia.

Las ventajas de este método son numerosas, especialmente cuando se operan en el campo de corrientes elevadas y al actuar como transductor magnético no es necesaria la inserción directa sobre el circuito a medir.

En el campo de las mediciones de tensiones altas el uso del generador de Hall permite efectuar las mismas en forma indirecta, evitando al operador todo peligro debido a las tensiones de contacto.

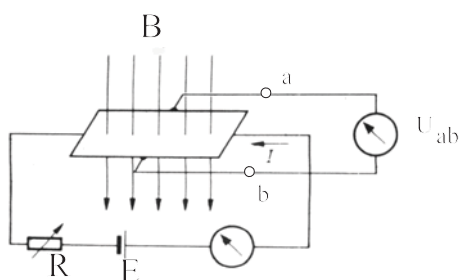


Figura 28

Efecto hall

De física sabemos que al pasar una corriente en sentido longitudinal a través de una placa de material conductor o semiconductor, que está sometida a la acción de un campo magnético normal con el plano de la placa, se establece entre los lados de la placa una diferencia de potencial llamada "tensión de Hall".

$$U_{ab} = \frac{K_1 K_h B i}{d}$$

En la última expresión, B representa el valor de la inducción en Tesla, i es el valor de la corriente de control en amperes, K_1 es el valor de una constante que depende de la relación entre el largo y el ancho de la placa y que normalmente asume valores comprendidos entre 0,7 y 0,8; K_h es la constante de Hall cuyo valor dependerá del material utilizado y "d" el espesor de la placa en milímetros.

De la expresión de la tensión U_{ab} surgen las siguientes aplicaciones:

- Aplicaciones basadas en la proporcionalidad entre la tensión y el producto B.i.
- Aplicaciones basadas en la proporcionalidad entre la tensión y la inducción B, manteniendo constante la corriente de control i.

c) Aplicaciones basadas entre la proporcionalidad entre la tensión y la corriente de control, manteniendo constante la inducción.

Para obtener una tensión de Hall que a igualdad de otras condiciones, resulta elevada, es necesario recurrir a materiales semiconductores tales como el Antimoniuro de Indio y el Arseniuro de Indio.

Medición de corriente

Si indicamos con I el valor de la corriente continua que circula por la línea -y que se desea medir-, con N el número de espiras (para este caso igual a uno), con μ la permeabilidad en el entrehierro y con B el valor de la inducción en entrehierro, podemos escribir:

$$B = \mu \cdot N \cdot I$$

por lo que la tensión generada será:

$$e = K \cdot I$$

siendo:

$$K = \frac{K_1 K_h \mu_0 N}{d} i$$

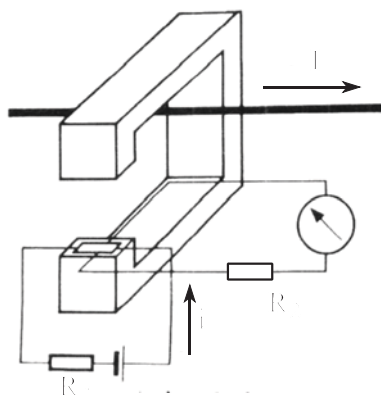


Figura 29

Las resistencias R_1 y R_2 colocadas en serie con el circuito de control y de salida respectivamente, tienen la misión de hacer al dispositivo prácticamente independiente de la temperatura.

Tratándose del funcionamiento en corriente continua, el circuito magnético no debe ser necesariamente laminado, y puede estar constituido por un bloque fundido de material magnético.

Desde el punto de vista práctico el método ofrece óptimos resultados y particularmente conveniente en el campo de las mediciones de elevadas intensidades de corriente o bien, cuando el circuito está sometido a tensiones altas. En el primer caso, el dispositivo

actúa como una pinza amperométrica de las utilizadas en corriente alterna (y que algunas de reciente tecnología incluyen los cristales Hall para la medición en continua) presentando la ventaja de no interrumpir el circuito ni provocar errores de inserción. En el segundo caso la ventaja reside en mantener al operador alejado del conductor en tensión, eliminando así el peligro por contacto accidental.

Medición de tensión

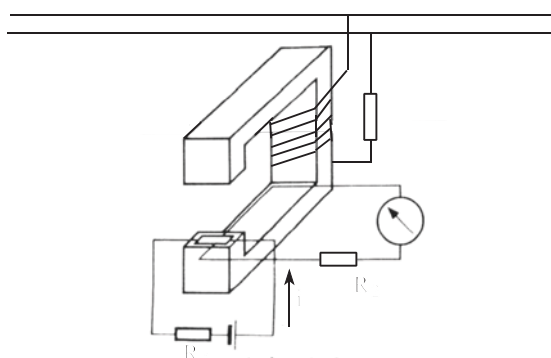


Figura 30

La aplicación del generador Hall en las mediciones de tensiones continuas no es tan frecuente como la descrita para la medición de corriente y tiene interés -como ya se ha dicho-cuando se miden tensiones altas.

Para la aplicación práctica se recurre al esquema representado en la figura 30.

El circuito magnético consta de una bobina de N espiras alimentada por la línea cuya tensión se desea medir. La corriente que circula por la bobina creará un campo magnético variable con la tensión. Como en el dispositivo usado para la medición de corriente es necesario que en el campo de funcionamiento no se verifiquen fenómenos de saturación magnética.

ca.

Medición de potencia

Se ha citado que en el campo de las aplicaciones están aquellas en que la tensión de Hall es proporcional al producto $B \cdot i$. Esta propiedad resulta de interés cuando se desea medir la potencia en un circuito alimentado con corriente continua.

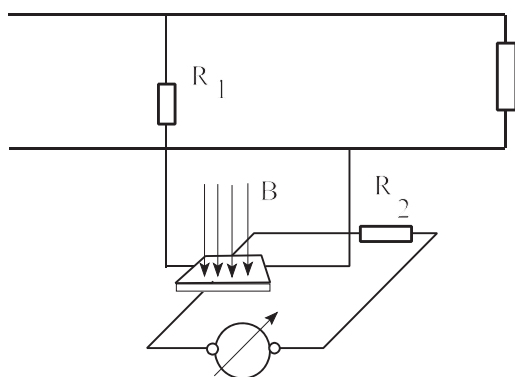


Figura 31

El esquema del principio de esta medición es el de la figura 31, (simplificado pues no se ha dibujado el circuito magnético).

El campo magnético necesario para el funcionamiento del generador Hall es obtenido por la misma corriente circulante por la línea -que constituye la única espira que abraza el núcleo magnético. Si la corriente es débil para la creación de un B útil, será necesario abrazar al núcleo con mayor número de espiras.

La tensión del circuito bajo medida actúa sobre el circuito de control, intercalando una resistencia R_1 con funciones limitadoras de corriente. De esta

manera la corriente de salida del generador Hall resulta proporcional al producto $U \cdot I$, es decir a la potencia.

El grado de exactitud alcanzado con la medición efectuada con este método está relacionado con varios factores como ser la linealidad del circuito magnético, la temperatura, etc., que tomando las precauciones del caso es posible obtener exactitudes próximas al 0,5%.

Análisis de los errores sistemáticos en instrumentos de ipbm

Las causas que dan origen a este tipo de errores pueden resumirse en las siguientes:

- 1) Variación de temperatura.-
- 2) Inestabilidad del imán permanente.-
- 3) Aparición de efectos termoeléctricos.-

Variación de la temperatura

La mayoría de los instrumentos indicadores tienen como temperatura de referencia, - a la cual fueron calibrados-, la llamada temperatura de calibración 20°C , 25°C , para otros valores la indicación se verá afectada por la incidencia en las siguientes partes constitutivas del aparato:

- a.- Modificación de la constante motora (G).-
- b.- Modificación de la constante elástica (K_r).-
- c.- Variación de la resistencia de la bobina móvil (R_a).-

a.- Modificación de la constante motora G

Esta es producida en razón de que el aumento de temperatura desmagnetiza el imán permanente reduciendo su flujo y consecuentemente la pérdida de inducción en el entrehierro hace que la constante motora disminuya proporcionalmente. En forma experimental se ha logrado determinar que la reducción del par motor es lineal y con coeficiente porcentual de -0.02% por cada grado de variación positiva de la temperatura.

Este valor porcentual se obtiene considerando la diferencia de deflexión referida a la obtenida para la temperatura de referencia.

b.-Modificación de la constante elástica K_r

Los muelles en espiral por su característica metálica, si son sometidos al aumento de temperatura reducen su elasticidad en un valor aproximadamente constante en $+0.04\%/^{\circ}\text{C}$ -para un determinado rango de temperatura-. Esta pérdida de elasticidad es temporal ya que desaparecida la causa el espiral retoma su características originales.

c.-Variación de la resistencia de la bobina móvil

Analicemos este caso en el amperímetro, es decir el cuadro móvil en paralelo con la resistencia shunt. Cuando la conexión del shunt es externa debe tenerse cuidado de efectuar las conexiones como se indicó en el análisis de las características del shunt.- Siempre los conductores de línea deben conectarse directamente al shunt y los que unen al instrumento deben ser de dimensiones lo suficientemente cortas para no aumentar la resistencia propia del cuadro móvil, provocando un error de inserción.

En condiciones ideales de funcionamiento debe cumplirse para las dos ramas R_s y R_a el mismo coeficiente de temperatura y la misma temperatura de funcionamiento.

Para que las dos ramas tengan el mismo coeficiente de temperatura (si la resistencia shunt es de manganina, por ejemplo) se compensa la variación de resistencias agregando en serie con la bobina

un resistor de manganina de resistencia r .
Analicemos con esta disposición la variación porcentual de resistencia:

$$R = R_a + r$$

Cuando se produce un aumento de temperatura la R resulta:

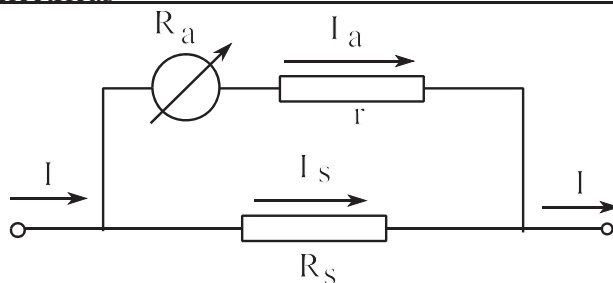


Figura 32

$$R' = R_a(1 + \alpha_{Cu} \Delta t) + r(1 + \alpha_{Mn} \Delta t)$$

Para una temperatura de 20 °C:

$$\alpha_{Cu} = 4 \cdot 10^{-3} \Omega/^{\circ}\text{C} \quad \text{y} \quad \alpha_{Mn} = 6 \cdot 10^{-6} \Omega/^{\circ}\text{C}$$

En la figura 33 se representa la variación de resistencia de manganina en función de la temperatura. Como se observa esta variación es tan poco perceptible frente a la del cobre que la última expresión puede simplificarse :

$$R' = R_a + R_a \alpha_{Cu} \Delta t + r_{Mn}$$

La variación absoluta de resistencia sera:

$$\Delta R = R' - R = R_a \alpha_{Cu} \Delta t$$

La variación relativa:

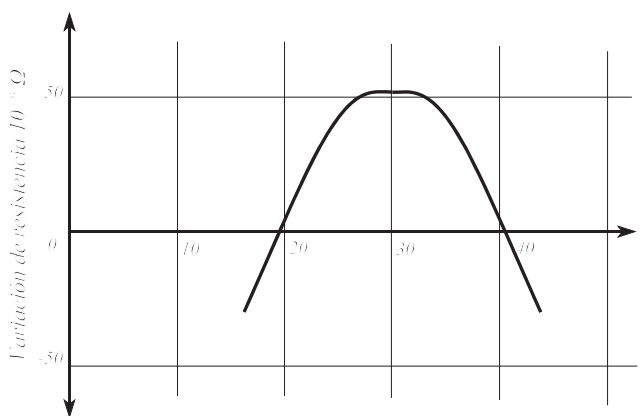


Figura 33

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_a}{R_a + r} \alpha_{Cu} \Delta t$$

Si se elige el valor de la resistencia adicional $r = 9 \cdot R_a$, la variación de resistencia se reduce a un 10%. Debe tenerse presente que para mantener el mismo poder multiplicador n , habrá que aumentar 10 veces el valor de R_s ocasionando un consumo diez veces mayor:

$$n = \frac{R_a + 9R_s}{10R_s}$$

El otro inconveniente es el aumento con esta disposición del error sistemático de inserción al intercalar en la línea una resistencia que perturbara al circuito. En la práctica existe pues, una solución de compromiso adoptándose un valor de r aproximadamente igual a cinco veces el valor de la resistencia del cuadro móvil.

Ahora bien antes de analizar esta solución, el efecto total dará una deflexión en defecto por grado centígrado (sumando la variación de la constante elástica K_r , la de la constante motora G y la de la resistencia interna R_a):

$$\Delta k_r + \Delta G + \Delta r_a = \Delta t$$

$$+ 0.04 \% / ^\circ\text{C} - 0.02 \% / ^\circ\text{C} - 0.4 \% / ^\circ\text{C} = - 0.38 \% / ^\circ\text{C}$$

Si en cambio se opta por la solución antes citada y adoptando $r = 9.R_a$ el coeficiente de temperatura pasa a $0.04 \% / ^\circ\text{C}$, por lo que la incidencia total se reduce a :

$$+ 0.04 \% / ^\circ\text{C} - 0.02 \% / ^\circ\text{C} - 0.04 \% / ^\circ\text{C} = -0.02 \% / ^\circ\text{C}$$

2.-Estabilidad del imán

La estabilidad del imán permanente depende entre otras cosas del diseño y tratamiento para su envejecimiento -sometiéndolo a temperaturas de 100°C durante horas-. A pesar de esto el imán con el correr del tiempo sufre una lenta desmagnetización que se traduce en una pérdida de la exactitud del instrumento. Una forma de corregir el problema es actuando sobre el shunt magnético.

3.-Influencia de los campos externos

Si bien la incidencia de los campos extraños no es tan importante como en instrumentos de otro tipo de funcionamiento, la indicación se ve afectada más aun cuando el aparato no posee blindaje. En este caso el mayor error es producido cuando la dirección del campo exterior resulta normal a la dirección de la línea de fuerza simétrica en el entrehierro.

4.- Aparición de efectos termoeléctricos

Esta influencia aparece cuando se efectúan conexiones entre elementos constitutivos de distinto material -como por ejemplo cuando se conecta el cuadro de la bobina móvil, de cobre, con una resistencia adicional de manganina-. Esto trae aparejado los mismos efectos (Seebeck) ya analizados en los instrumentos de IPBM con termocupla. La aparición de esta f.e.m. espurias provocan perturbaciones en las indicaciones tanto más importante cuanto más sensible sea el instrumento.

Voltímetros de ipbm con rectificador-Consideraciones practicas sobre su resistencia interna

Supongamos a título de ejemplo un multímetro comercial de IPBM que en la función de tensión en continua posee una característica ohm/volt de 20.000. Cuando este mismo instrumento pasa a la función de medir tensiones en corriente alterna su resistencia interna disminuye a 5.000 ohm/volt. Estos valores característicos son fácilmente detectables pues figuran inscriptos en el cuadrante del instrumento.

Veamos la razón de esta disminución. Tomemos como ejemplo un modelo de multímetro comercial (marca Triplet). Este posee 20.000 ohm/volt en c.c. y 5.000 ohm/volt en c.a.-

En la figura 34 tenemos representada la característica estática del elemento rectificador: diodo de germanio.

En la figura 35 tenemos representado el circuito simplificado del Triplet para el alcance de 3 V. en corriente alterna.

Antes de seguir el análisis de este circuito conviene destacar la gran importancia que reviste el hecho de trabajar con una corriente directa en el diodo comprendida en la zona lineal de la curva característica del diodo. Las características del instrumento son las siguientes:

Alcance : 50 microamperes.

Resistencia cuadro móvil: 5.000 ohm.

Simplifiquemos aún más el circuito de la figura 35 pasando al de la figura 36 con un solo diodo el D_1 (descartando D_2 y la R_2). De esta manera nos queda una configuración circuital serie.

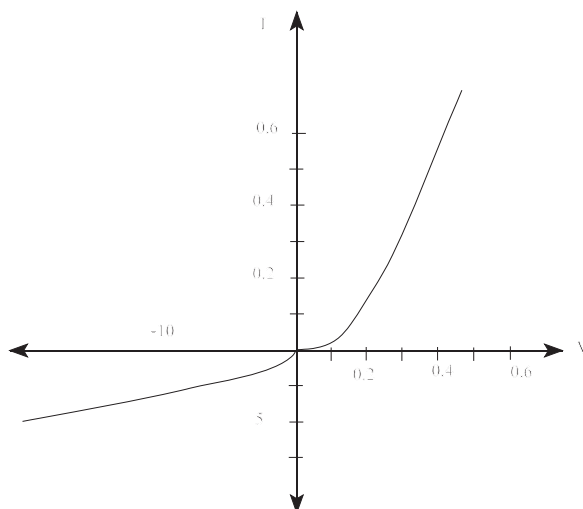


Figura 34

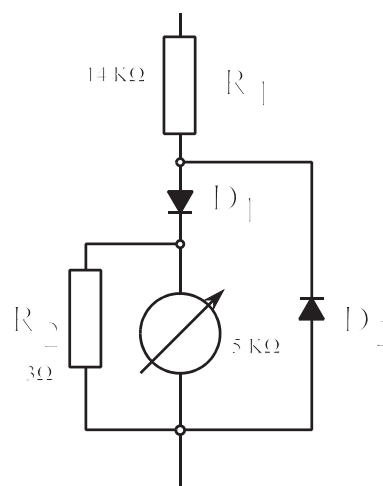


Figura 35

Para obtener los 250 mV de tensión media en bornes del instrumento debería circular 50 microamperes con lo cual R_1 debería aumentar considerablemente. Pero aún así, para una corriente tan baja entramos en la curva inicial de la característica del diodo en una zona donde no hay conducción posible. Obsérvese que recién para una corriente del orden de la décima del miliampere y una caída de tensión de 0.15 V. entramos recién en la zona de conducción con características aproximadamente lineal. Esto de por sí constituye una razón más que suficiente para comprender la imposibilidad de medir tensiones alternas de valores muy bajos.

La resistencia R_2 de valor muy bajo (3 ohm) tiene por misión hacer derivar la intensidad de corriente que excede al alcance del microamperímetro, es decir su función es similar a la resistencia shunt ya estudiada, actuando el instrumento como milivoltímetro.

Aún resta el análisis de la inclusión del diodo D_2 .

La necesidad de este diodo se debe a que en el circuito con un solo rectificador, durante el semiciclo con polarización inversa su resistencia a la corriente es grande por lo que soporta la tensión completa del circuito, lo que conduciría a la eventualidad de una perforación, ya que los diodos de germanio la tensión inversa de "ruptura" es pequeña.-

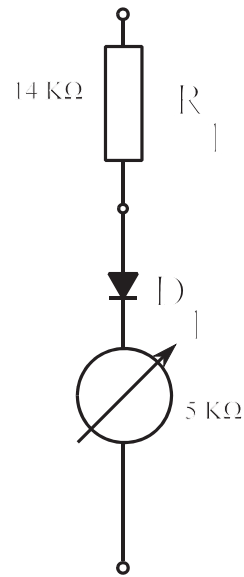


Figura 36

Características de las escalas de voltímetros de c.a. de IPBM

La escala de este instrumento viene calibrada directamente en **valores eficaces** basados en la suposición de medir **ondas sinusoidales** es decir que a las divisiones de escala se incorporan el factor de forma de una onda sinusoidal igual a 1,11. Si la forma de onda se aparta de la sinusoidal aparecen errores en las lecturas.

Analicemos el problema tomando la ley de deflexión y considerando el factor de forma 1.11 por el que se multiplica a las divisiones de la lectura:

$$I_m = \alpha \frac{1.11}{G}$$

I_m es el valor medido y G la constante motora.

Si el multímetro tuviera un rectificador puente y si la tensión aplicada responde a una senoide de valor pico I_p , el valor medio de la corriente será:

$$I = 2 \frac{I_p}{\pi}$$

Como:

$$\alpha = G.I = G \cdot 2 \cdot \frac{I_p}{\pi}$$

Finalmente el valor de la corriente medida será:

$$I_m = 0.707 I_p$$

Para este caso el resultado es correcto, la lectura es igual al valor eficaz y es porque así se ha diseñado el instrumento.

Pero si la corriente no es sinusoidal podemos tener errores de lectura superiores o inferiores al valor eficaz, dependiendo de la forma de onda que estamos midiendo.

Por ejemplo si tenemos una corriente continua $i_{(t)} = I$, la corriente medida será:

$$I_m = 1.11 I$$

esto significa que tenemos un error en exceso del 11 %.

Otro ejemplo lo constituye la onda triangular cuyo valor medio es la mitad del valor pico y el eficaz es $1/\sqrt{3}$ del valor pico.

El valor medido será

$$I_m = 1.11 \frac{I_p}{2} = 0.555 I_p$$

Es decir aproximadamente el 4 % más bajo que el valor eficaz de la onda triangular.

Errores cometidos en el óhmetro por envejecimiento de la batería

Todo óhmetro tiene lo que se denomina “ajuste de cero” que no es otra cosa que un resistor variable a efectos de hacer coincidir la aguja con la indicación “cero ohm” previo cortocircuito de los terminales.

Con el desgaste de la batería incorporada, disminuye su tensión en bornes y consecuentemente aumenta su resistencia interna. Es evidente que a medida que la tensión baja irá disminuyendo la resistencia de ajuste de cero. En todos los casos la aguja coincidirá con el cero, a menos que la batería se envejezca tanto que ya sea imposible hacer llegar a fondo de la escala el índice del instrumento. Vamos a demostrar con un ejemplo que una variación excesiva de la tensión de la batería provoca un error de lectura -que se suma al de la exactitud propia del instrumento-, aún cuando hagamos coincidir “al cero” el índice del óhmetro.

En el diseño del óhmetro de la figura se ha utilizado un miliamperímetro de resistencia interna de

50 ohm, de alcance 1 mA, una resistencia fija de 3.000 ohm y la variable “ajuste de cero” de 2.000 ohm. La batería seccionada es de 4.5 V. Con estos parámetros la “resistencia de diseño de punto medio de escala” es de 4.500 ohm.

Con la batería “nueva” el valor de la corriente será a fondo de escala:

$$I_0 = \frac{4.5 \text{ V}}{4.500 \Omega} = 1 \text{ mA}$$

Al conectar en los terminales una resistencia de valor conocido $X = 5.000$ ohm la corriente que circula por el instrumento será:

$$I_x = \frac{4.5 \text{ V}}{(4.500 + 5.000) \Omega} = 0.47 \text{ mA}$$

Ahora analicemos que pasa ante un “desgaste” de la batería, cuya tensión baja a 4 V. con un incremento de sus resistencia interna, el nuevo valor de R_0 hará obtener el valor final de 1 mA.

$$I_0 = \frac{4 \text{ V}}{4.000 \Omega} = 1 \text{ mA}$$

Cuando se conecte la resistencia de 5.000 ohm, el valor de la corriente en el miliamperímetro será:

$$I_{x_1} = \frac{4 \text{ V}}{(4.000 + 5.000) \Omega} = 0.44 \text{ mA}$$

Esta disminución de la corriente provoca un error de lectura, que será tanto mayor cuanto menor sea la deflexión angular del cuadro móvil.

El valor que indicará la escala del óhmetro para la corriente I_{x_1} será:

$$F = \frac{I_{x_1}}{I_0} = 0.44 = \frac{1}{1 + \frac{X_m}{4.500}} \quad \therefore \quad X_m = 5.700 \Omega$$

cometiéndose un error del 14%.

Para tratar de minimizar este error, algunos óhmetros llevan una resistencia de ajuste en paralelo con el instrumento de manera tal que se logra una menor variación de R_0 , pues el instrumento es más sensible a la variación de R_s .

INSTRUMENTOS CON LEY DE DEFLEXIÓN CUADRÁTICA: HIERRO MÓVIL

En este Capítulo iniciamos el estudio del instrumento de imán permanente y bobina móvil que sigue una ley de deflexión lineal con la corriente. Esto, como se ha señalado tiene sus desventajas cuando se lo utiliza en corriente alterna (con rectificador) pues la escala está calibrada para medir señales con factor de forma 1.11 y por lo tanto cuando se mide ondas no sinusoidales las lecturas adolecen de un error sistemático, tanto mayor cuanto más lejos esté del factor de forma de calibración.

Los instrumentos de hierro móvil como los electrodinámicos son sumamente útiles para medir valores eficaces de señales de distintas formas de ondas.

Características constructivas

Los instrumentos a hierro móvil, también llamados ferromagnéticos, deflexionan por la acción tanto de la corriente continua, como de la corriente alterna.

Para comprender el principio recurrimos a la figura 1, que representa el croquis de un instrumento a hierro móvil del tipo llamado de atracción.

La corriente que se desea medir pasa por una bobina fija que genera un campo magnético. Dentro de dicho campo hay una pieza metálica llamada hierro móvil, sujeta en forma asimétrica al eje de

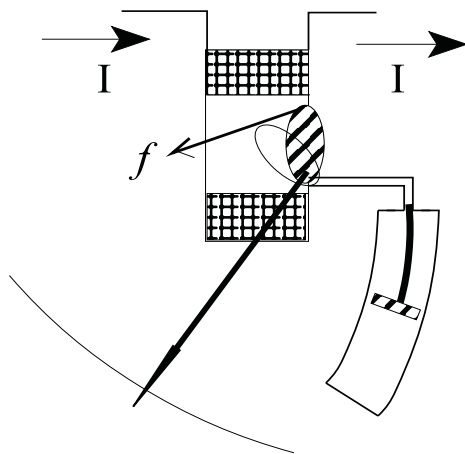


Figura 1

giro. Completan el instrumento un resorte para generar la cupla antagónica, la aguja y la correspondiente escala.

Si se aplica corriente se produce en el interior de la bobina un campo magnético de intensidad H , cuyo sentido se determinará fácilmente con ayuda de la regla del tirabuzón. Los sentidos de las corrientes marcados en la representación, corresponden a un sentido de arrollamiento arbitrariamente

adoptado en el dibujo. Por efecto del campo magnético, el hierro sometido a su influencia se magnetiza, es decir, se imana y se comporta como una pequeña brújula. Al ser así, se orienta dentro del campo, también como lo haría una brújula. Como está sujeta a un eje de giro, la fuerza "f" aplicada en el extremo, provoca una cupla motora C del sentido ubicado en el dibujo.

En la figura 2, dibujamos tres estados de la misma configuración anterior. La parte (a) corresponde al estado sin corriente. No hay campo magnético, y el hierro móvil permanece en su posición de reposo, que para nuestro ejemplo es la vertical. Si se aplica una corriente entrante por la izquierda, el campo H va de izquierda a derecha, el hierro móvil se magnetiza con su polo "sud" a la izquierda y "norte" a la derecha

produciéndose el giro. En la parte (b) de la figura que nos estamos refiriendo se muestra al hierro móvil en su posición de máxima deflexión.

Este tipo de aparato, tiene una posición de máximo giro o máxima deflexión que no puede sobrepasar, dado que si el hierro móvil está horizontal, por más que se aumente la corriente,

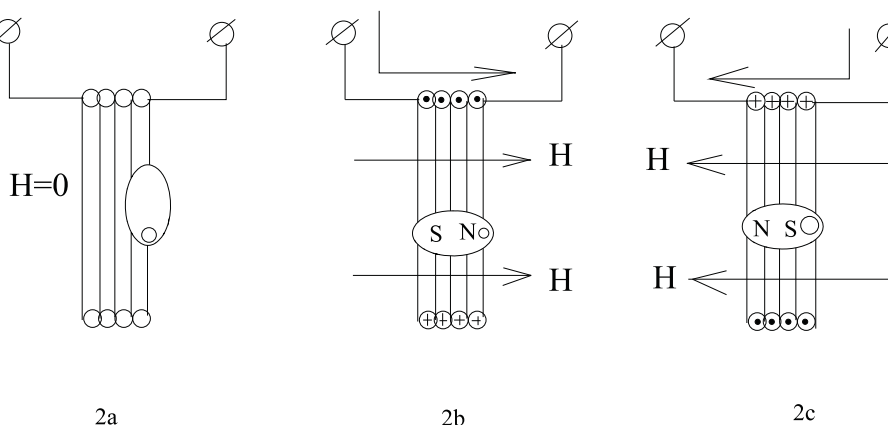


Figura 2

te, es decir, el campo magnético, el hierro no puede orientarse más.

Esto hace que los aparatos a hierro móvil sean, en general, bastante robustos, porque haciendo la bobina con capacidad térmica suficiente (disipación) como para resistir por un tiempo prudencial una corriente mayor que la nominal, la parte mecánica no sufre modificaciones ni mayores daños. Los aparatos de este tipo son bastante resistentes a las sobrecargas de corriente, por lo menos comparativamente con los de otro tipo.

En la parte © de la misma figura, tenemos aplicada una corriente de sentido contrario, y el campo H cambia de sentido.

La imantación de la pieza móvil cambia de sentido, en consecuencia se invierte, pero notemos que de todos modos el resultado es el mismo, porque la parte ferromagnética siempre trata de orientarse conforme la dirección del campo con independencia del sentido.

Esta explicación cualitativa permite ver que, estos instrumentos sirven para ambas corrientes, dado que la corriente alterna comporta una inversión del sentido de circulación, que por la inercia de la pieza móvil no alcanza a cambiar la posición hasta el momento que toma el valor contrario.

Dentro de la misma clasificación del instrumento vemos en las figuras 3, 4 y 5, en la que se han dibujado esquemas de un aparato a hierro móvil del tipo denominado repulsión.

Dentro de una bobina casi cilíndrica están colocadas dos piezas metálicas, una sujeta a la cara

interior de la misma y otra sujeta al eje de giro, llamada respectivamente hierro fijo y hierro móvil.

El campo provocado por la corriente de la bobina de valor H , imana a las dos piezas metálicas con polaridades concordantes en los dos extremos, lo que hace que estas partes se comporten como dos imanes enfrentados con polos de igual nombre.

Estos componentes se rechazan, como es bien sabido, con una fuerza " f " provocándose un giro del eje. Estos aparatos también tienen su resorte antagonico, y su sistema amortiguador.

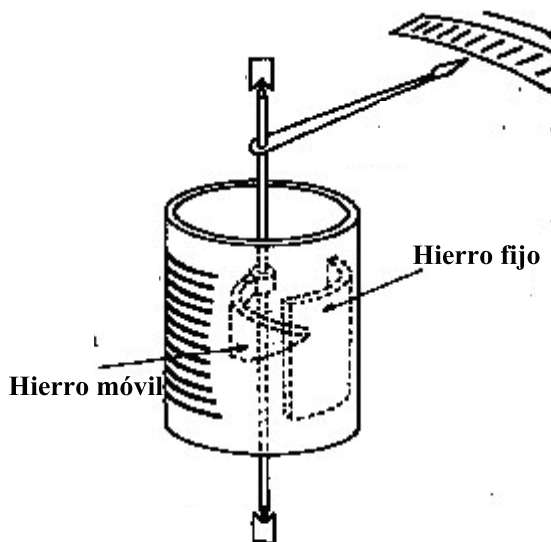


Figura 4

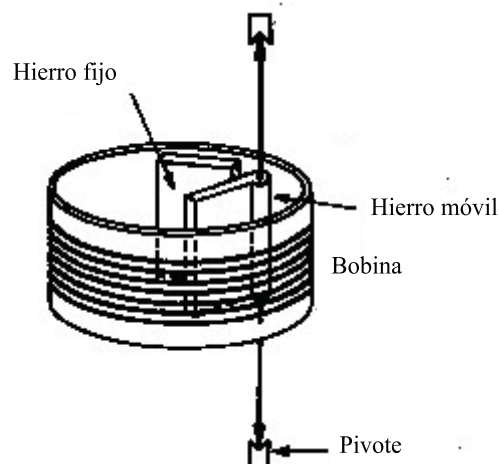


Figura 3

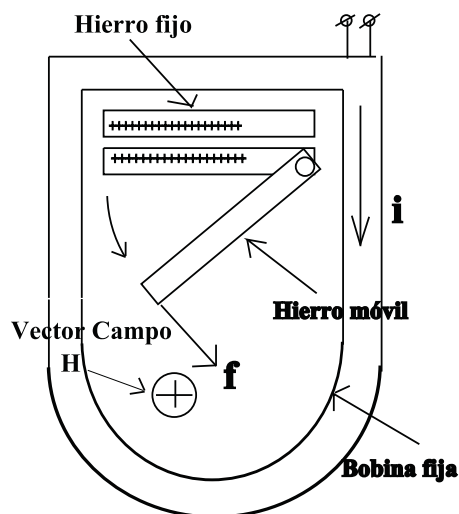


Figura 5

Ley de respuesta

Una forma de obtener la ley de respuesta es a partir de la energía almacenada en el campo magnético de la bobina excitadora. Como se sabe, esta expresión es la siguiente:

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

Siendo:

W: Energía electromagnética (Joule).

L: Coeficiente de autoinducción de la bobina con el hierro (Henry).

i: corriente excitadora (ampere).

Debe acotarse que el coeficiente de autoinducción L no es una magnitud constante, ya que al variar la posición relativa de los dos hierros - el fijo y el móvil - (caso del instrumento de repulsión), se está modificando la configuración general del sistema.

Sabemos, además, que la variación de energía electromagnética con respecto al grado de libertad (ángulo de rotación 0°) del sistema móvil, da origen al par motor instantáneo, es decir:

$$C_m = \frac{dW}{d\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

Siempre y cuando la inductancia L sea independiente de i .

Esta cupla motora debe ser equilibrada por la cupla antagónica, que la efectúa el resorte y que vale:

$$C_d = K_r \theta$$

Igualando tendremos en el momento del equilibrio:

$$C_m = C_r$$

Despejando la deflexión θ :

$$\theta = \frac{1}{2 K_r} \frac{dL}{d\theta} i^2 \quad (1)$$

Esta expresión nos dice que la ley de respuesta del instrumento a hierro móvil es proporcional a $dL/d\theta$ y al cuadrado de la corriente.

Respuesta en corriente continua

Reemplazando en la (1) la corriente $i = I$, las acotaciones precedentes no cambian.

La primera acotación que podemos hacer es que a diferencia del IPBM aquí no es necesario respetar la polaridad de conexión. La segunda que la ecuación es representativa de la ley de respuesta del instrumento y no necesariamente de la ley de distribución de escala, puesto que desde el punto de vista constructivo se tiende a la obtención de una escala uniforme (aunque con algunas limitaciones).

Como sabemos, el tipo de escala cuadrática, limita el margen de la corriente en el que puede ser utilizado el instrumento, con un error de lectura muy grande para valores bajos. Por ello es que se trata de compensar la desuniformidad de la escala, mediante algún artificio constructivo.

En los instrumentos de repulsión eso se consigue con formas geométricas perfectamente definidas y calculadas de los hierros fijos y móvil como así también de las separaciones entre sí, en las distintas posiciones.

Si se quisiera una escala lineal, el factor $dL/d\theta$ deberá ser proporcional a:

$$\frac{dL}{d\theta} \approx \frac{1}{i} \approx \frac{1}{\theta}$$

Luego:

$$dL \approx \frac{d\theta}{\theta}$$

$$L = \ln\theta + C$$

Lo que indica que la uniformidad de la escala requiere un brusco aumento de L en su primera parte, y un aumento más suave en la parte final. Esta condición se puede obtener por un diseño adecuado salvo en las proximidades del cero (donde aproximadamente en el 10% de la escala inicial no se puede efectuar lecturas).

Ley de respuesta en corriente alterna

Si la corriente que circula por la bobina es alterna:

$$i = I_o \operatorname{sen}\omega t$$

Reemplazando en la (1) nos queda:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\theta} I_o^2 \operatorname{sen}^2\omega t$$

Recordando:

$$\operatorname{sen}^2\omega t = (1 - \cos 2\omega t) \frac{1}{2}$$

la expresión final de la ley de respuesta en corriente alterna quedará:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\theta} \frac{I_o^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{dL}{d\theta} \frac{I^2}{2} \cos 2\omega t$$

Si la frecuencia fuera lo suficientemente baja es posible observar una oscilación del índice alrededor del valor medio. Pero el instrumento se diseña de tal modo que la frecuencia angular ω_0 es mucho menor que la frecuencia más baja medida. Por lo tanto toda expresión que responda a ω (o múltiplos de ω) no será detectada por el aparato.

Por lo dicho la última expresión se reduce:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\theta} I_{ef}^2$$

Es decir, que el instrumento a hierro móvil excitado con corriente alterna sinusoidal responde al cuadrado del valor eficaz.

Al principio de este capítulo se ha aclarado que el instrumento a hierro móvil como el electrodinámico miden valores eficaces de ondas no sinusoidales. Para que este concepto quede claro supongamos que la corriente a medir tiene la forma siguiente:

Es decir, que la onda deformada está compuesta por la suma de los siguientes términos:

$$i = I_{o_1} \text{sen}\omega t + I_{o_2} \text{sen}2\omega t + I_{o_3} \text{sen}3\omega t \quad (2)$$

donde :

$$I_{o_1} = 2 \text{ A} , \quad I_{o_2} = 1 \text{ A} , \quad I_{o_3} = 0,4 \text{ A}$$

Elevando al cuadrado la expresión (2) y rescatando únicamente aquellos valores que tendrán independencia de la frecuencia resultará:

$$i^2 = I_{o_1}^2 \text{sen}^2\omega t + I_{o_2}^2 \text{sen}^22\omega t + I_{o_3}^2 \text{sen}^23\omega t \quad (3)$$

$$i^2 = \frac{I_{o_1}^2}{2} + \frac{I_{o_2}^2}{2} + \frac{I_{o_3}^2}{2} \quad (4)$$

La (4) reemplazada en la (1) nos indica que el instrumento medirá la suma de los cuadrados de los valores eficaces de cada una de las componentes de la onda no sinusoidal. En definitiva mide el valor eficaz de la onda deformada.

Aplicaciones

Amperímetro y voltímetros

Los instrumentos de hierro móvil son esencialmente amperímetros. Se los construye generalmente para un solo alcance, variando de acuerdo con el número de espiras de la bobina, de modo de obtener los amper-vueltas (NI) necesarios. Un instrumento de hierro móvil típico requiere unos 200 a 300 Av.

$$N.I = 200 \text{ a } 300 \text{ Av.}$$

Para llegar el índice al final de la escala, por lo tanto, amperímetros de alcance igual a 300 A. tendrán su bobina conformada por una única espira de cobre, es decir, un solo conductor de gran sección. Un miliamperímetro de alcance 100 mA necesitará de 2000 a 3000 vueltas de conductor fino.

Pero para corrientes muy pequeñas aparece una limitación: la impedancia de la bobina se vuelve tan grande que al introducir este miliamperímetro en el circuito a medir, lo modifica sustancialmente, es decir, se comete un gran error de inserción, lo que los hace inadecuados para muchas aplicaciones.

Generalmente no se construyen miliamperímetros con alcances menores a 100 mA por ese problema. En corriente alterna si se quiere medir corrientes elevadas se utilizan amperímetros de alcance 5 A con transformadores de medida, y de esas manera se puede lograr medir corrientes hasta 10.000 A. Con estos instrumentos no se puede ni se debe usar shunts para cambiar el alcance. Ello se debe a que como el consumo del aparato de medida es de valor alto en comparación con los de bobina móvil, y como sabemos que la potencia en el sistema "shunt-instrumento" esta dada por:

$$P = n P_{cp}$$

los valores de consumo serían inaceptables.

Los amperímetros se construyen de 100 mA hasta 100 A, y su uso generalmente son de tablero, aunque se fabrican actualmente instrumentos de laboratorio de clase patrón.

Los voltímetros consisten en un miliamperímetro puesto en serie con una resistencia no inductiva de manganina. Su valor tiene que ser tal que la caída en la bobina sea una pequeña parte de la caída total, de manera de poder minimizar los errores de temperatura (que varía la resistencia de la bobina) y de frecuencia (por la variación de la reactancia).

Generalmente se hace la resistencia de manganina mayor a 10 veces la resistencia de la bobina.

Los instrumentos de hierro móvil tienen un consumo mayor de potencia que los de bobinas móvil e imán permanente (ya que la efectividad en la producción de la cupla motora es menor). Por ejemplo, un voltímetro típico de tablero de IPBM de 150 V. para corriente continua, tiene un consumo aproximado a la unidad de watt, mientras que uno de hierro móvil de similares características puede llegar a requerir más de cinco veces esa potencia.

La gran difusión de este tipo de instrumento proviene de su simplicidad constructiva (que se traduce en un menor costo), de su solidez y de su gran capacidad de sobrecarga. Esto último debido a que

los resortes no son recorridos por la corriente, y por lo tanto no están expuestos a recalentamiento o destrucción por una sobrecarga accidental.

La bobina tiene una constante de tiempo elevada y puede soportar sin dañarse, fuertes sobrecargas momentáneas (aún 100 veces el valor nominal, durante fracciones de segundos).

El sistema móvil no resulta dañado por las sobrecargas, ya que no está recorrido por la corriente, y sobre todo por la saturación del hierro, que hace que las cuplas que se desarrollan en estos casos no alcancen valores muy elevados.

Errores sistemáticos de los instrumentos de hierro móvil

Los errores más importantes en los instrumentos de este tipo se deben a los siguientes factores:

a.- Temperatura

La variación de temperatura, respecto a la de calibración o de referencia, puede ser producida por las pérdidas óhmicas

desarrolladas en el arrollamiento o por la variación de la temperatura ambiente exterior a la bobina, El calor puesto en juego en esas circunstancias puede afectar al instrumento en las siguientes formas:

- Variación de los elementos mecánicos de fijación del sistema móvil y fijo.

Las expansiones producidas por incrementos de la temperatura, afectan la fricción natural que existe entre pivotes y cojinetes alterando la posición del eje de rotación y, por lo tanto, la precisión del instrumento.

- Alteración de la resistencia óhmica de la bobina.

Este efecto puede considerarse como el más importante. Si la bobina es devanada totalmente en cobre, aumentará aproximadamente $0.4\% / ^\circ\text{C}$. En los amperímetros esa variación no es importante, ya que la corriente que circula por la bobina es impuesta por el circuito de carga.

En cambio, en los voltímetros el efecto de la temperatura es relevante. Para una tensión aplicada constante, una variación de la resistencia de la bobina afectará a la corriente que circula por la misma y por lo tanto el campo magnético excitador. Esta dificultad puede ser sensiblemente reducida, y en algunos casos, eliminada, construyendo la bobina con un conductor de aleación de bajo coeficiente de temperatura.

- Alteración de la constante elástica de la suspensión.

b.- Campos magnéticos externos

Los errores producidos por campos magnéticos externos, también llamados parásitos, son de importancia en todos los instrumentos que funcionan con débil campo excitador. Los efectos de los campos magnéticos son difíciles de determinar y por lo tanto su corrección sistemática. La magnitud del error cometido es dependiente de la intensidad de campo exterior, su dirección relativa al campo propio del instrumento y la forma y posición del instrumento. El efecto es importante cuando se

refiere a campos generados con altas corrientes en barras cercanas al instrumento. Se pueden reducir sensiblemente empleando blindajes con aleaciones de alta permeabilidad.

c.- Errores por histéresis

Existe un atraso en la magnetización del hierro con respecto al campo creado por la corriente. Este defecto puede ser detectado por calibración del instrumento en corriente continua con valores crecientes y decrecientes. Se puede comprobar que para una misma intensidad se produce una deflexión del sistema móvil mayor para la corriente decreciente. Es posible reducir considerablemente este error haciendo que el hierro tenga dimensiones muy pequeñas utilizando materiales de alta permeabilidad.

d.- Errores debidos a la variación de frecuencia

Las corrientes parásitas o de Foucault inducidas en las partes mecánicas debido al flujo alternativo, tendrán un evidente defecto desmagnetizante.

Para reducir los efectos desmagnetizante, la bobina se fija sobre elementos no conductores (plásticos).

e.- Errores por forma de onda

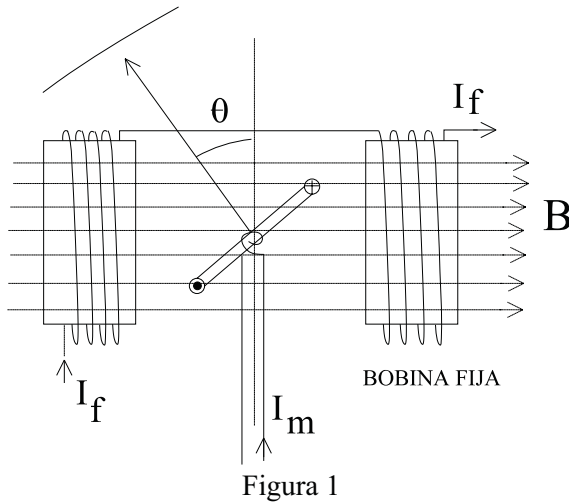
Si bien hemos comentado que este instrumento mide valores eficaces de cualquier forma de onda exentas prácticamente de errores, salvo cuando se midan corrientes con valores picos elevados, la no linealidad de la característica magnética del hierro hace que la permeabilidad dependa no del valor eficaz sino del valor máximo.

Su efecto puede ser mayor como amperímetro que como voltímetro, en razón que la corriente de carga puede resultar fuertemente deformada, no así la tensión de línea ya que las armónicas presentes tienen valor reducido. Para disminuir el efecto por forma de onda, se trata de utilizar una aleación de alta permeabilidad y que trabaje en la zona de valor constante. La calibración del instrumento se hace con excitación sinusoidal, sea corriente o tensión.

INSTRUMENTOS ELECTRODINÁMICOS

Descripción

El instrumento está constituido por dos sistemas: uno fijo y otro móvil, cuyo grado de libertad es el de rotación pura.



Los dos sistemas, están formados por dos arrollamientos de forma geométrica característica, rectangular o circular y de conductores de secciones adecuadas, según al uso que se destine. El sistema móvil es similar al del instrumento de imán permanente y bobina móvil -figura 1-. De acuerdo a los requerimientos de sensibilidad el sistema indicador puede ser del tipo mecánico (aguja) u óptico (luminoso) y el par antagónico de cinta espirales. La cupla amortiguante es provocada por una paleta o émbolo.

Ley de respuesta

Si mediante el sistema fijo, tenemos un campo paralelo y uniforme, tal como vemos en la figura, podemos escribir que el flujo concatenado por el sistema móvil de N espiras, es aproximadamente:

$$\varphi_c = \varphi_{\max} N_m \sin \theta$$

Analicemos con el auxilio de esquema de la figura 2 el por qué de esta expresión:

$$\varphi_c = \varphi_{\max} N_m \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\varphi_c = \varphi_{\max} N_m \sin \theta$$

Resulta entonces que la inducción mutua valdrá:

$$M = \frac{\varphi_c}{i_f} = \frac{\varphi_{\max} N_m \sin \theta}{i_f} = M_{\max} \sin \theta$$

Ahora bien, la derivada de la inducción mutua, con respecto al desplazamiento angular es:

$$\frac{dM}{d\theta} = M_{\max} \cos \theta$$

En la figura 3, hemos representado gráficamente la variación de M y su derivada respecto del ángulo de θ .

Se aprecia con que con este sistema, la inducción mutua varía sensiblemente en forma lineal en las cercanías del cero dentro de un ángulo total de aproximadamente 60° . Por tanto, al tener la induc-

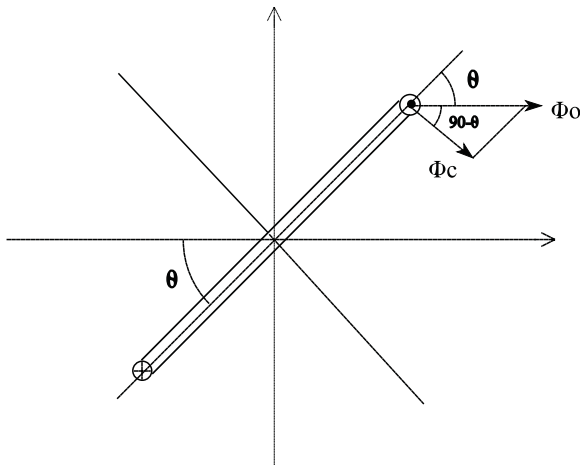


Figura 2

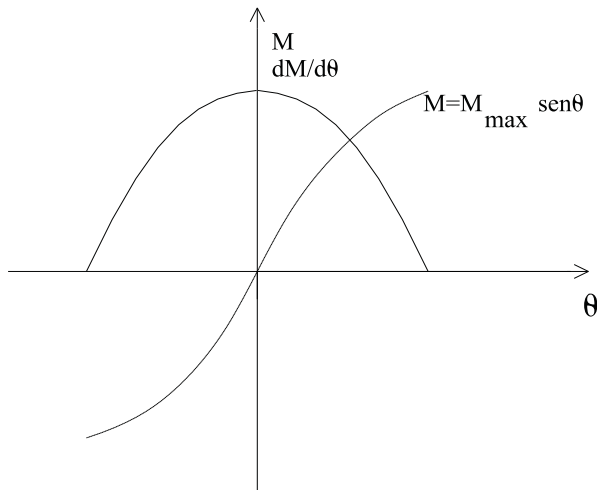


Figura 3

ción mutua una variación lineal, su derivada será constante dentro de ese ángulo.

Al apartarnos de la variación lineal de la inducción mutua, la derivada decrece en valor, por lo que se verá afectada la distribución de la escala del instrumento, como luego se ha de ver.

Si se desea que la distribución de la escala sea independiente de la posición del cuadro móvil, éste deberá mantenerse en la zona donde la inducción varía en forma casi lineal.

Sin embargo, mediante la adecuada elección en el diseño de las bobinas, es factible obtener la proporcionalidad entre la inductancia mutua y la escala en un ángulo usual de 90° (entre $+45^\circ$ y -45°).

Las distribuciones típicas de la escala dan uniformidad aceptable en la parte alta y constricción en la parte inferior, más acusadamente que en otros mecanismos.

Las intensidades en el sistema fijo y móvil respectivamente son i_f e i_m . Por estar los sistemas acoplados magnéticamente, la energía electromagnética instantánea almacenada en el conjunto, caracterizada por la auto y mutua inductancia, tiene la conocida expresión:

$$W = \frac{1}{2} L_f i_f^2 + \frac{1}{2} L_m i_m^2 + M i_f i_m$$

Para hallar el par motor instantáneo, o cupla instantánea c_m derivamos como se sabe la expresión anterior con respecto al grado de libertad, es decir el ángulo de rotación Θ :

$$c_m = \frac{dW}{d\theta}$$

En consecuencia se tiene:

$$c_m = \frac{dW}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} i_f i_m$$

ya que solamente M varía con Θ .

Es decir que la cupla motora instantánea valdrá:

$$c_m = \frac{dM}{d\theta} i_f i_m \quad (1)$$

I) Caso de corriente continua

En corriente continua, las corrientes valdrán:

$$i_f = I_f \quad , \quad i_m = I_m$$

Reemplazando en (1)

$$C_m = \frac{dM}{d\theta} I_f I_m$$

La cupla motora dará origen a un giro que tensa los espirales del instrumento, creando un par opuesto, hasta llegar al equilibrio de ambas cuplas. En ese momento:

$$C_m = C_d$$

$$\frac{dM}{d\theta} I_f I_m = K \theta$$

$$\theta = \frac{1}{K} \frac{dM}{d\theta} I_f I_m$$

si se trabaja en la parte lineal de M, tenemos que:

$$\frac{dM}{d\theta} \approx \text{cte}$$

Luego:

$$\theta \approx \frac{1}{K} I_f I_m$$

proporcional al producto de ambas corrientes.

II) Caso con corriente alterna

Supongamos ahora que la excitación del instrumento sea con corriente alterna. Debido a que las impedancias de las bobinas fijas y bobina móvil son distintas, habrá un ángulo de desfase β entre ambas corrientes:

$$i_f = I_{f_{\max}} \sin \omega t, \quad i_m = I_{m_{\max}} \sin(\omega t - \beta)$$

$$c_m = \frac{dM}{d\theta} i_f i_m = \frac{dM}{d\theta} I_{f_{\max}} I_{m_{\max}} \sin \omega t \sin(\omega t - \beta) =$$

$$= \frac{dM}{d\theta} I_{f_{\max}} I_{m_{\max}} \frac{1}{2} [\cos \beta - \cos(2\omega t - \beta)]$$

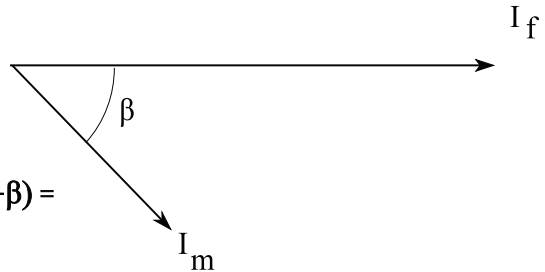


Figura 4

por lo que la cupla motora tendrá dos componentes: una constante y otra de frecuencia doble de la aplicada.

Esta frecuencia es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema móvil, por lo que no provocará ninguna deflexión apreciable del índice del instrumento -recordar lo visto en el capítulo de dinámica del sistema móvil-.

Finalmente expresamos como ley del instrumento en corriente alterna:

$$C_m = \frac{dM}{d\theta} I_f I_m \cos \beta$$

Características

En estos instrumentos se trata de evitar en su construcción cualquier material ferromagnético a excepción de la pantalla exterior.

Para que la corriente de la bobina fija no alcance valores demasiado grandes, la inducción magnética en el espacio ocupado por la bobina móvil se limita a 0.005 Wb/m, es decir valores sumamente bajos en comparación con los de imán permanente y bobina móvil que tienen una inducción de trabajo de aproximadamente: $B=0.6$ Wb/m.

Generalmente existe un número par de bobinas fijas. Se prefiere los soportes de cerámica, ya que las piezas metálicas podrían debilitar el campo de la bobina fija, como consecuencia de las corrientes parásitas.

Debido al campo relativamente débil de la bobina, estos instrumentos son extremadamente sensibles a los campos externos parásitos, incluso en mediciones de corriente continua se nota la influencia del campo terrestre sobre el mecanismo, es por ello que generalmente estos instrumentos están protegidos por una envoltura de aleación muy permeable.

El doble blindaje, proporciona muy buenos resultados; consta de un material exterior con una gran inducción de saturación y una pequeña intensidad de campo coercitivo y uno interior de gran permeabilidad inicial. Con ello se logra para campos externos de intensidad $H=800$ A/m. una protección activa, quedando el error por debajo del 0.23 %. Existe otro método para la eliminación de los campos exteriores que es la "disposición estática" y que veremos más adelante.

Utilización

Los instrumentos electrodinámicos se utilizan con preponderancia en los aparatos de medida de potencia. Los tipos constructivos permiten exactitudes de clases elevadas (0.2 y 0.1).

La gama de frecuencias de utilización está limitada **inferiormente** por las oscilaciones de la aguja y **superiormente** por la influencia de corrientes parásitas y de la inductividad.

En los instrumentos electrodinámicos de exactitud estos límites son **40 y 500** Hz respectivamente, y, si se permiten errores correspondientes a la clase 0.5, 15 y 1000 Hz.

Con los instrumentos electrodinámicos se pueden construir también amperímetros y voltímetros de gran exactitud; llegándose a obtener por medio de un diseño cuidadoso instrumentos de clase = 0.25 y aún menor. A causa de su costo elevado y su gran consumo, no se los emplea frecuentemente, salvo cuando se desea gran exactitud, o cuando es importante que los valores obtenidos estén libres de la influencia de la forma de onda y otros errores.

Pero la aplicación fundamental (dejando de lado su uso como medidores de potencia que de ellos se hace) es la de instrumentos patrones, o instrumentos de transferencia para calibrar voltímetros y amperímetros (que no pueden ser calibrados en corriente continua) para su empleo en corriente alterna.

INSTRUMENTOS ELECTRODINÁMICOS CON HIERRO

Como resultado del desarrollo de los materiales magnéticos de bajas pérdidas, es posible emplear núcleos de hierro en algunos instrumentos electrodinámicos, con una cierta pérdida de exactitud pero con una ganancia fundamental en el valor de la inducción. En ellos el flujo producido en la bobina fija se cierra en parte en el hierro; de manera tal que a igual número de amper-vueltas (o sea para igual consumo) se aumenta la intensidad de campo, o bien se reduce el consumo para la misma intensidad de campo. Pero la presencia del hierro, aunque sea de gran permeabilidad y finamente laminado complica la teoría del instrumento y la ley que rige su movimiento. En efecto, los flujos no resultan rigurosamente proporcionales con respecto a las corrientes que los originan y están algo defasados con respecto de ellas; además la reactancia de las bobinas aumenta y con ella aumenta el error de frecuencia como veremos más adelante. El par de giro, es en idénticas condiciones, aproximadamente 20 veces mayor que en los mecanismos sin hierro, por lo tanto pueden construirse menores y más robustos.

APLICACIONES DEL INSTRUMENTO ELECTRODINÁMICO

I) Uso como amperímetro:

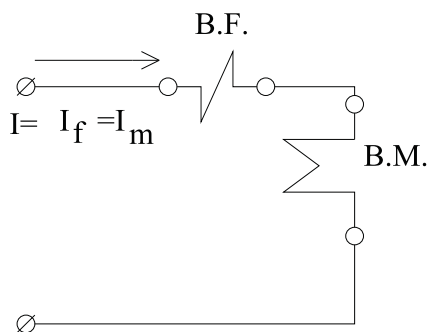


Figura 5

El instrumento electrodinámico puede usarse como medidor de la intensidad y puede funcionar tanto en corriente continua como en corriente alterna.

a) Excitación con corriente continua:

Cuando el amperímetro es utilizado para medir corriente, deberá ser conectado en serie con la carga, y al tener el instrumento electrodinámico dos circuitos eléctricos independientes, habrá dos variantes en su disposición de conexión de las bobinas, pues éstas pueden estar conectadas en serie o paralelo. Vamos a estudiar ambos casos.

a1) Primer caso: Bobinas fijas y móvil en serie:

Al conectar las bobinas en serie respetando las polaridades relativas, se cumple que:

$$I_f = I_m = I$$

Siendo:

I_f = Corriente en la bobina fija

I_m = Corriente en la bobina móvil.

Habíamos visto que la ley de deflexión en los instrumentos electrodinámicos era:

$$\theta = K / \frac{dM}{d\theta} I_m I_f \cos \beta$$

Luego como: $I_f = I_m = I$, tendremos

que:

$$\theta = K / \frac{dM}{d\theta} I^2 \cos \beta$$

Al estar en serie las bobinas, se cumple además que $\cos \beta = 1$; y si:

$$\frac{dM}{d\theta} \approx \text{cte}$$

$$\theta = K // I^2$$

Como se deduce de ésta, la ley de respuesta del instrumento resulta estrictamente cuadrática.

El alcance de ésta conexión está limitado en sus valores máximo y mínimo. En el primer caso, el alcance mínimo no puede ser inferior a cierto valor. En efecto, para que la cupla motora tenga un valor adecuado debe requerirse una determinada fuerza magnetomotriz. A fin de que la corriente sea la menor posible para una determinada f.m.m., deberá aumentarse proporcionalmente el número de espiras en las bobinas, y ello implicará un aumento de peso y volumen. Por lo tanto en la bobina móvil traerá aparejado problemas de orden mecánico en la suspensión, rozamiento, etc.

El aumento del número de espiras en el bobinado fijo no crea dificultades de orden mecánico en ese sentido, pero aparece un serio inconveniente desde el punto de vista eléctrico, ya que el aumento del número de vueltas produce una caída de tensión exagerada que conduce a valores inadmisibles de ésta en el circuito, lo cual se traduce en errores de inserción.

Debido a la pequeña sección de los resortes espirales, por donde se alimenta la bobina móvil, el límite superior de corriente que ésta admite está en el orden de los 100 mA. El límite inferior compatible con una adecuada cupla motora es del orden de 15 y 20 mA.

a2) Segundo caso: bobina fija y bobina móvil en paralelo

Para límites superiores a los 100 mA, se disponen las bobinas fijas y la bobina móvil en paralelo. En caso de corrientes elevadas se coloca una resistencia de manganina en serie con la bobina móvil con el fin de que toda la corriente pase por la bobina fija y de esa manera en la bobina móvil se deriven los pocos miliamperios que soportan las espirales.

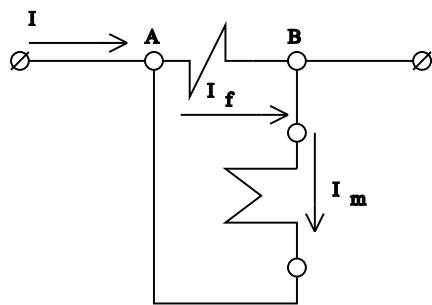


Figura 6

En este caso, como estamos analizando el caso de excitación con corriente continua tendremos:

$$I = I_f + I_m$$

Llamamos con R_f a la resistencia en la bobina fija y con R_m la de la bobina móvil.

Las expresiones de las corrientes en cada una de las bobinas, en función de esas resistencias y de la corriente I a medir será:

$$I_f = I \frac{R_m}{R_f + R_m}$$

$$I_m = I \frac{R_f}{R_f + R_m}$$

Reemplazando en la Ley de deflexión:

$$\theta = K \frac{dM}{d\theta} I^2 \frac{R_f R_m}{(R_m + R_f)^2} = K \frac{dM}{d\theta} I^2$$

Como vemos, en estas condiciones, la escala será de tipo cuadrática, si:

$$\frac{dM}{d\theta} \approx \text{cte}$$

b) Excitación con corriente alterna

b1) Primer caso: bobinas fijas y bobina móvil en serie

El circuito es análogo al de excitación con corriente continua, por lo tanto tendremos:

$$\theta = K I^2$$

La escala será del tipo cuadrática.

b2) Segundo caso: Conexión en paralelo de las bobinas

Si tomamos la caída de tensión en los bornes del instrumento (U_{AB}) como origen de las fases podemos establecer el diagrama fasorial de la figura 7.

Los valores instantáneos de las corrientes serán:

$$i_f = I_{f_{\max}} \text{sen}(\omega t - \epsilon)$$

$$i_m = I_{m_{\max}} \text{sen}(\omega t - \gamma)$$

siendo:

$$\beta = (\epsilon - \gamma)$$

Además:

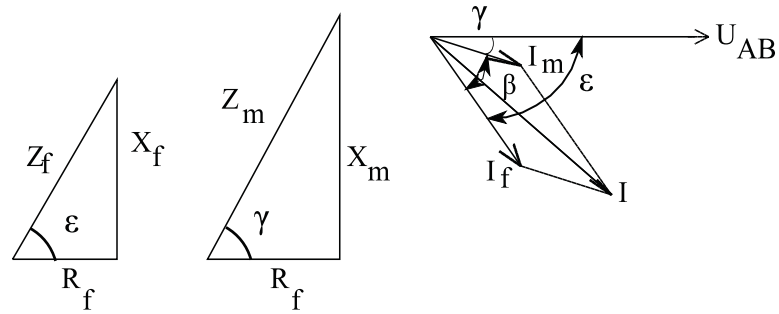


Figura 7

$$\varepsilon = \arctan \frac{\omega L_f}{R_f}$$

$$\gamma = \arctan \frac{\omega L_m}{R_m}$$

Vemos que para que la distribución de corrientes en cada rama sea la misma, independiente de la frecuencia (y aún para corriente continua) se debe cumplir que:

$$\varepsilon = \gamma \quad \therefore \quad \beta = 0$$

para que ello sea posible deberá ser en todo momento:

$$\frac{\omega L_m}{R_m} = \frac{\omega L_f}{R_f}$$

Razonando en forma análoga a la expresión ya vista para corriente continua, tendremos:

$$\theta = K / \frac{Z_f Z_m}{(Z_f Z_m)^2} I^2$$

Lógicamente se ve que si queremos que la deflexión del instrumento sea la misma en corriente continua que en corriente alterna, se tendrá que cumplir que:

$$\frac{R_m R_f}{(R_f + R_m)^2} = \frac{Z_f Z_m}{(Z_f + Z_m)^2}$$

Por lo que la expresión de la ley de deflexión será similar a la vista en corriente continua.

Ejemplo:

Valores típicos en un amperímetro de alcance: 5 A son los siguientes:

$$R_f = 0.1 \text{ ohm} ; L_f = 0.1 \text{ mHy}$$

$$R_m = 10 \text{ ohm} ; L_m = 10 \text{ mHy}$$

NOTA:

Como R_m es mucho mayor que R_f (generalmente $R_m = 100 R_f$) casi toda la corriente de línea circula por la bobina fija. Por lo tanto ésta última tomará más temperatura que la bobina móvil (por la que no circula más de 100 mA). Al tomar más temperatura variará su resistencia en forma mucho mayor que la móvil, lo cual hace que:

$$\varepsilon \neq \gamma$$

y por lo tanto β será distinta de cero grado, lo cual implica que $\cos \beta$ sea menor que la unidad y el instrumento medirá menos.

Para disminuir este error se coloca un resistor de manganina en serie con cada bobina, para que se cumplan los siguientes requisitos:

- 1) Que la bobina móvil sea circulada con poca corriente.
- 2) Que los coeficientes de temperatura en ambas bobinas sean iguales.

Características de los amperímetros

En general los miliamperímetros se construyen de un solo alcance y los amperímetros de uno o de dos, en la relación (1:2), por ejemplo: 2,5 A y 5 A; 5 A y 10 A.

Para lograr los dos alcances existen varias soluciones, pero la usada más a menudo consiste en conectar, mediante clavijas, las dos partes de la bobina fija, en serie o paralelo, respectivamente.

Así, en un amperímetro de alcances 2,5 A y 5A, para 2,5 A las dos mitades están en serie. En cambio si se conectan en paralelo, cuando por cada una de ellas circulas 2,5 A, el campo que crean ambas es el mismo que

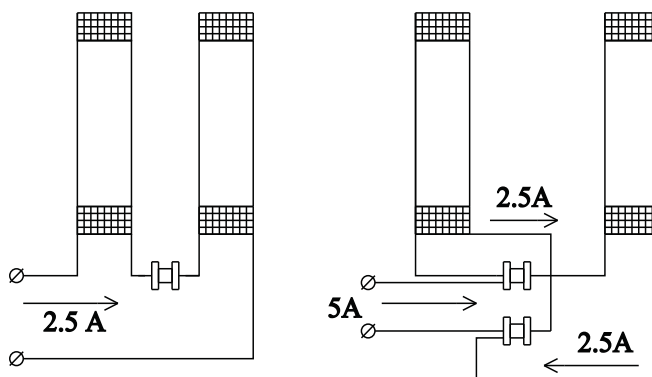


Figura 8

antes, pero el alcance se habrá elevado a 5 A.

Consumo propio: El consumo de los miliamperímetros está alrededor de un vatio. Para los amperímetros va en aumento con el alcance, por ejemplo: mientras el de alcance igual a 1 Amper, consume cinco Watts (resistencia interna = 5 ohm) para 5 Amper, asciende a doce vatios (0,5 ohm). Se advierte cuanto mayor es el consumo comparado con los miliamperímetros y amperímetros de bobina móvil con imán permanente.

II) Uso como voltímetros

Los instrumentos electrodinámicos pueden usarse como voltímetros conectando las bobinas fijas y bobina móvil en serie entre sí, con una resistencia multiplicadora. Mediante derivaciones es posible obtener varios alcances. Estos alcances múltiples se pueden seleccionar con una llave rotativa o en otras construcciones a cada alcance le corresponde un borne.

Para reducir los efectos de la frecuencia, sobre las reactancias, la resistencia R_d se construye en forma antiinductiva (disposición bifilar y de bobina chata).

El límite inferior suele estar en los 15 V, aunque existen también voltímetros de alcance tan bajo como 1,5 V, claro que con una resistencia interna de solo tres ohm, lo que representa un consumo de 0.75 W (500 mA) y con una reducción de la exactitud ($c = 0.5$).

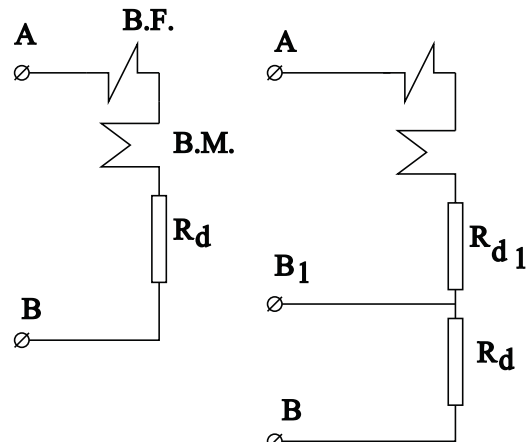


Figura 9

El límite superior es de unos 600 V y aún 750 V, con consumos de unos 20 W (30 mA). En algunos casos los alcances mayores se obtienen con resistores multiplicadores externos, a fin de evitar el autocalentamiento del sistema de indicación.

a) Voltímetro de corriente continua:

$$R_{total} = R_f + R_m + R_d$$

$$I_f = I_m = I$$

La ecuación nos dice que:

$$\theta = K \frac{dM}{d\theta} I_f I_m = K \frac{dM}{d\theta} I^2$$

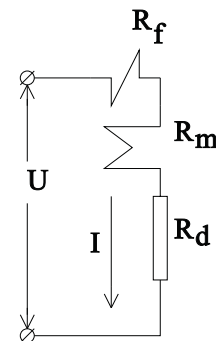


Figura 10

Pero:

$$I^2 = \frac{U^2}{(R_{\text{total}})^2} \quad ; \text{de donde si } \frac{dM}{d\theta} \approx \text{cte}$$

Finalmente la ley de deflexión del instrumento utilizado como voltímetro será:

$$\theta = K \frac{dM}{d\theta} \frac{U^2}{R_t^2} = K // U^2$$

Vemos que la deflexión será proporcional al cuadrado de la tensión eficaz, y por lo tanto tendremos una escala cuadrática.

b) Voltímetros en corriente alterna

La impedancia total será:

$$Z_t = \sqrt{(R_d + R_f + R_m)^2 + (X_f + X_m)^2}$$

Luego si:

$$\theta = K \frac{dM}{d\theta} I_f I_m \cos\beta$$

Como:

$$\cos\beta = 1 \quad ; \quad \frac{dM}{d\theta} \approx \text{cte} \quad \text{y} \quad I_f = I_m = I$$

tendremos:

$$\theta = K // U^2$$

Proporcional al cuadrado de la tensión eficaz y por lo tanto la escala será de tipo cuadrática.

Wattímetros

Los wattímetros constituyen la mayor aplicación del sistema electrodinámico. Están diseñados para medir el valor de la potencia media no solo para el caso particular cuando $P = U.I. \cos\phi$, sino también en el caso general definido por:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt$$

En el caso de magnitudes poliarmónicas, la potencia será el producto de los valores eficaces de las corrientes y tensiones de igual frecuencia, por el coseno del ángulo comprendido entre ambas:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n$$

Los wattímetros electrodinámicos, se construyen de tipo standard, portátiles, de laboratorio o bien de tablero, estos últimos con núcleo de hierro.

El wattímetro presenta bornes independientes para cada una de sus bobinas. La amperométrica que es la bobina fija, se conecta en serie con la carga y la voltimétrica que es la bobina móvil, en paralelo con la carga, de manera tal que la corriente que la circula es proporcional a la caída de tensión en la carga.

La bobina fija o amperométrica lleva pocas espiras, con sección suficiente para conducir la corriente nominal del instrumento, mientras que la voltimétrica estará formada por muchas espiras de baja sección, en serie con una resistencia.

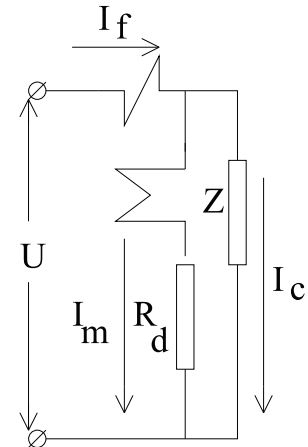


Figura 11

Esquema de bornes

Como la corriente que circula en la bobina fija es prácticamente la corriente de carga y la de la bobina móvil proporcional a la tensión aplicada, la desviación será:

$$\theta = \frac{1}{K} \frac{dM}{d\theta} i_m i_f \cos \beta = K' U I \cos \varphi$$

Esta expresión es posible siempre y cuando se suponga que la corriente que circula por la bobina móvil está en fase con la tensión (es decir que el comportamiento es totalmente resistivo), de manera tal que el ángulo β coincida con φ .

Por lo tanto, el instrumento electrodinámico con la anterior conexión medirá la potencia activa media que consume la impedancia de carga. Se ve además que si se cumple que $dM/d\theta$ es constante su escala es uniforme. Por otra parte dará una indicación que es función no solo de la potencia consumida en la impedancia de carga que nos interesa medir, sino también de la potencia de su propia bobina de tensión, en caso que sea necesario deberá deducirse el consumo propio que vale:

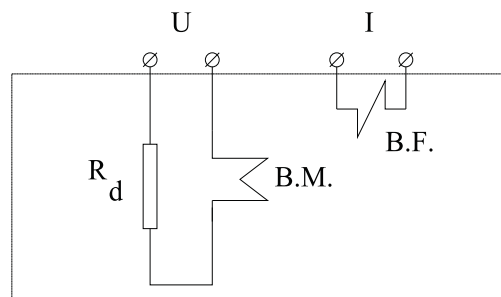


Figura 12

$$I_m^2 R_v = \frac{U^2}{R_v}$$

Con un diseño adecuado de las bobinas fijas y móvil se puede llegar a obtener una escala bastante uniforme en un desarrollo de 80° a 100° , (recordar que $dM/d\Theta = \text{cte.}$ para un desarrollo de 60°), apareciendo una ligera contracción en los extremos para ángulos mayores.

Los valores típicos en los wattímetros son los siguientes:

Corriente en la bobina móvil : 15 a 20 mA.

Corriente en la bobina fija: 20A como máximo.

Para los casos de corrientes mayores a 20A en la bobina amperométrica, se deben usar transformadores de medida (T.I.). Lo mismo ocurre en la bobina voltimétrica, cuya tensión no debe sobrepasar los 450 V debido a la gran potencia que debe disipar en el resistor en serie R_d , por lo tanto se deben usar en esos casos transformadores de tensión (T.V.)

Wattímetro compensado

Vemos que si la tensión aplicada al instrumento es constante, el consumo es constante (en el circuito voltimétrico), y para potencias medias grandes es una pequeña parte (despreciable) de la potencia medida. Sin embargo cuando la potencia medida es pequeña (por tener $\cos \varphi$ bajo, tensión reducida, etc.) el error sistemático cometido puede ser importante.

Es por ello que en ciertos wattímetros (como los de bajo $\cos \varphi$ de diseño) se incorpora al instrumento una nueva bobina llamada bobina compensadora.

Esta bobina compensadora se coloca en serie con el circuito de la bobina móvil, y se construye con: alambre fino, de igual número (N) de espiras que la bobina fija, bobinada conjuntamente con ella tal como se muestra en la figura siguiente:

El campo resultante en el instrumento será en principio la suma de las corrientes en la bobina móvil y carga:

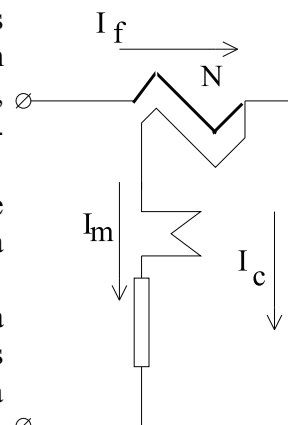


Figura 13

$$\vec{I}_f = \vec{I}_m + \vec{I}_c$$

El campo H de la bobina fija será:

$$H = N\vec{I}_f - N\vec{I}_m = N(\vec{I}_m + \vec{I}_c) - N\vec{I}_m = N\vec{I}_m + N\vec{I}_c - N\vec{I}_m = N\vec{I}_c$$

Por lo tanto, el campo resultante en el wattímetro compensado, será proporcional a la corriente en la carga (I_c), o sea que la cupla motora y por ende la deflexión (Θ) no estará influida por el campo extra (producto del consumo de la bobina móvil) y no marcará de más. Todo se traduce como si el

consumo fuese nulo. Sin embargo, esta solución puede crear problemas, pues aumenta la inductancia de la rama de la bobina voltimétrica, con el correspondiente error de fase (que se estudia más adelante). Por esta razón, los wattímetros de consumo compensado van provistos de una llave que permite eliminar la compensación para aquellos casos en que su uso provocaría errores.

Error de fase del wattímetro

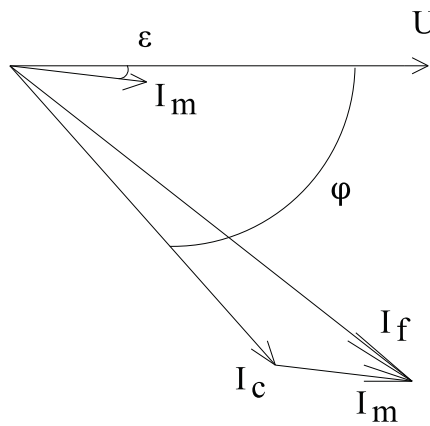


Figura 14

Al deducir la expresión de la cupla motora del wattímetro en corriente alterna, supusimos que la corriente circulante por la bobina móvil estaba perfectamente en fase con la tensión. Sin embargo ello no es cierto, ya que aún sabiendo que la inductancia de la bobina móvil es pequeña, no siempre es despreciable. Por tanto la corriente I_m que por ella circula no estará en fase con U como habíamos supuesto, sino que atrasará un pequeño ángulo ϵ dado por:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\omega L}{R_v}$$

Por tanto el ángulo de fase medido (ψ) será menor que el verdadero (ϕ) y el wattímetro indicará la potencia:

$$P_m = U I \cos \psi = U I \cos(\phi - \epsilon)$$

El valor verdadero será:

$$P_v = U I \cos \phi$$

Luego el error relativo de fase será:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_m - P_v}{P_v} = \frac{U I \cos(\phi - \epsilon) - U I \cos \phi}{U I \cos \phi}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\cos \phi \cos \epsilon + \sin \phi \operatorname{sen} \epsilon}{\cos \phi} - 1$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \cos \epsilon + \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \epsilon - 1 = 1 + \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \epsilon - 1 = \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \epsilon$$

Por construcción ε es un ángulo muy pequeño, generalmente menor que un grado.

Luego, si:

$$\cos \varepsilon \approx 1, \quad \text{sen } \varepsilon \approx \varepsilon$$

Por tanto:

$$e = \frac{\Delta P}{P} = \varepsilon \operatorname{tg} \varphi$$

Nota: La expresión anterior es válida si el ángulo de error se expresa en radianes.

Si se lo expresa en minutos:

$$e = 0,0003 \varepsilon \operatorname{tg} \varphi$$

Puesto que si $2\pi \dots\dots 360^\circ \cdot 60'$

$$1' = \frac{2}{360 \cdot 60} = 0,0003$$

Se aprecia que para valores pequeños de ε , el error relativo puede cobrar importancia a medida que aumenta φ (y por lo tanto $\operatorname{tg} \varphi$); en otras palabras, para valores bajos del factor de potencia ($\cos \varphi$) el error relativo puede tomar valores altos.

Wattímetros compensados en fase

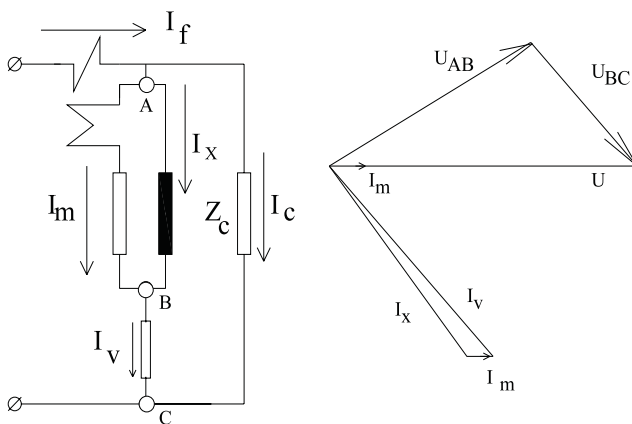


Figura 15

Algunos wattímetros compensan este error de fase colocando un capacitor adecuado en paralelo con una parte del resistor en serie con la bobina voltmétrica. Otra manera más común es la construcción del mismo como se indica el esquema de la figura.

Se agrega una inductancia X_L y una resistencia R_a al circuito voltmétrico, para que cumpla el diagrama fasorial de la figura. Es evidente que este tipo de compensación solo es válido para un margen pequeño de frecuencias. (En realidad solo se cumplirá el diagrama para un solo valor de frecuencias).

Constante del wattímetro

Vimos que el wattímetro posee dos sistemas eléctricos bien definidos: el amperométrico y el voltimétrico, por lo tanto tendremos dos alcances bien determinados, además del que corresponde a la indicación a plena escala del instrumento calibrado en unidades de potencia.

Sobre la base de la disipación admitida en la bobina amperométrica (2 a 4 W), se puede determinar el rango de corriente, como así también su capacidad de carga y sobre carga.

Generalmente las bobinas amperométricas admiten una sobrecarga intermitente del 20 al 50% del valor nominal.

Como sabemos, el cuadro móvil y las espirales (además de las resistencias adicionales) constituyen el sistema voltimétrico, sobre la base de su máxima disipación (de 1 a 3 W) podemos determinar el alcance o rango de tensión. El circuito voltimétrico admite una menor sobrecarga que el amperométrico, del orden máximo del 20% de la tensión del alcance.

El wattímetro se calibra en unidades de potencia (Watts), ya sea en forma directa o mediante constantes multiplicadoras conocidas.

Podemos decir que en forma general el alcance de potencia es distinto al producto de los alcances de tensión por corriente.

En efecto, se puede constatar que:

$$ALCANCE DE POTENCIA = \text{Alcance de tensión} \times \text{Alcance de corriente} \times \cos \phi \text{ de diseño}$$

Es decir el instrumento se diseña de manera tal que su deflexión máxima se produce cuando aplicando la tensión nominal y circulando la intensidad nominal, el factor de potencia de la carga coincide con el factor de potencia de diseño del instrumento.

En aquellos casos en que el rango de potencia es igual al producto de los rangos de tensión y corriente, tenemos los wattímetros de diseño normal, es decir para factor de potencia unitario. Cuando ello no es así, tendremos los wattímetros de bajo factor de potencia.

La constante del wattímetro (C_w = Número que multiplicado por las divisiones nos da la potencia medida) se puede determinar conociendo el alcance de tensión y corriente y además el factor de potencia de diseño del instrumento. Luego:

$$P_{\text{medida}} = \alpha_{\text{med}} C_w$$

$$P_{\text{max}} = \alpha_{\text{max}} C_w$$

$$C_w = \frac{U_n I_n \cos \phi_{\text{diseño}}}{\alpha_{\text{máx}}} \quad [\text{Watt/divis.}]$$

Wattímetros de bajo factor de potencia

Suponemos entonces que tres alcances definen en el wattímetro sus características de medición.

Ellos son:

U_n = Alcance de tensión [V]

I_n = Alcance de corriente [A]

P_n = Alcance de potencia [W]

Supongamos por un momento que nuestro wattímetro sea de $\cos \phi$ de diseño unitario. Si lo usamos para medir la potencia en una carga y además tenemos la particularidad que tanto en la amperometría como en la voltimetría tenemos aplicado los valores nominales ($U = U_n$; e $I = I_n$), y el coseno de la carga es de 0.2, la desviación será de solo el 20% de la escala. Ello traería aparejado los consabidos errores por medir a principio de la escala.

Con el fin de evitar esto último se construyen wattímetros adecuados a circuitos de bajo factor de potencia llamados "wattímetros de bajo factor de potencia". Se construyen para $\cos \phi$ diseño = 0.5, 0.2, 0.1.

Es evidente que las cuplas motoras serán para estos tres tipos de wattímetros: 50%, 80% y 90% menores que las que aparecerían para esos mismos valores de tensión corriente y factor de potencia de diseño unitario. Obviamente si queremos que la deflexión sea máxima con los valores nominales, las cuplas directrices deberían ser: 50% , 80% y 90% menores que las que se usarían para el caso de los wattímetros de factor de potencia (de diseño) unitario. Para lograr estos tipos de wattímetros se trabaja sobre los espirales (se busca lograr cuplas directrices más débiles) o en algunos casos se usa hilo tenso.

Se debe tener en cuenta que el wattímetro indicará siempre la potencia activa media, es decir el producto de los tres factores: $U \times I \times \cos \phi$ (carga) independientemente de sus valores nominales.

Precauciones en la conexión

El wattímetro es un instrumento que debe protegerse especialmente, ya que la aguja indica siempre el producto: $U.I. \cos \phi$ (carga), y este producto puede ser inferior al alcance a pesar que la corriente puede ser superior a la nominal y quemar la bobina amperométrica.

Ejemplo:

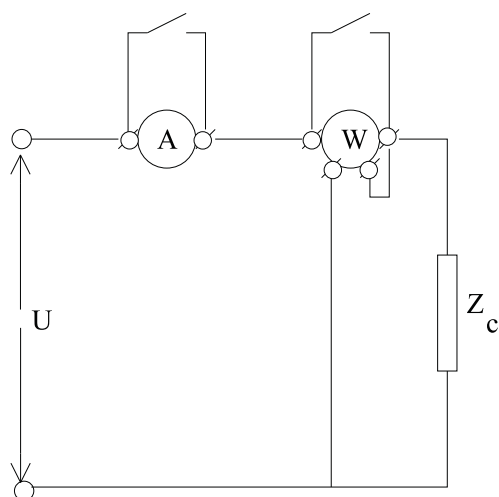


Figura 16

$$U_n = 300 \text{ V}$$

$$I_n = 5 \text{ A}$$

$$\cos \phi(\text{diseño}) = 1$$

$$P_n = 300 \times 5 \times 1 = 1500 \text{ W}$$

Si lo estamos utilizando para medir la potencia consumida por una carga en la cual están establecidos los siguientes valores:

$$U = 180 \text{ V} \quad ; \quad I = 10 \text{ A} \quad ; \quad \cos \phi(\text{carga}) = 0.5$$

El wattímetro indicará una potencia:

$$P_m = 180 \times 10 \times 0.5 = 900 \text{ W}$$

Vemos que en este caso la aguja no está en el fondo de escala, sin embargo la bobina amperométrica está recorrida con una corriente de 10 A y puede llegar a quemarse. Por ello es conveniente usar un amperímetro en serie con la amperométrica para verificación de la corriente máxima, y una vez verificada desconectarlo.

También es interesante conectar un interruptor unipolar que cortocircuita la bobina amperométrica del wattímetro cuando se produce el arranque de motores, debido al gran consumo de los mismos en el arranque.

Polaridad

Dado que en un instrumento electrodinámico los sistemas amperométrico y voltimétrico no tienen conexión interna, tendremos exteriormente cuatro bornes y por lo tanto existen cuatro posibles formas de conexión del instrumento.

En las cuatro variantes la cupla motora depende del sentido relativo de las corrientes instantáneas en las bobinas por lo que en estos instrumentos viene indicada la polaridad. Respetada ésta, la deflexión del instrumento será de izquierda a derecha. La polaridad viene marcada en los bornes de intensidad y de tensión del instrumento con los símbolos siguientes:

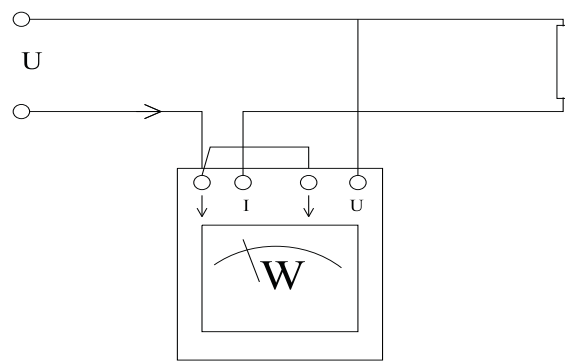


Figura 17

" * " o con " ↓ "

a estos bornes se les llaman "bornes homólogos"; por supuesto que los otros dos también serán homólogos entre sí.

Nota: Si la corriente instantáneamente "entra" o "sale" por el borne marcado con "" de la amperométrica, debe "entrar" o "salir" por el borne marcado "*" de la voltimétrica para que el sentido de la desviación sea el correcto.*

Varímetro o vármetro

Aprovechando el principio de los instrumentos electrodinámicos se pueden construir vármetros, que son instrumentos electrodinámicos que nos permiten medir potencia reactiva Q.

Sabemos que en los electrodinámicos, la ley de respuesta vale:

$$\theta = K \cdot \frac{dM}{d\theta} \vec{I}_f \vec{I}_m \cos\beta$$

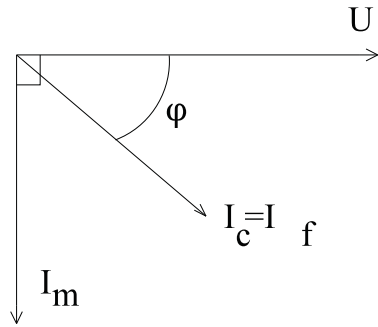


Figura 18

Ahora bien, si conseguimos que el sistema amperométrico sea recorrido por una corriente de carga y por la voltimétrica aplicamos una tensión en cuadratura con la corriente I_m que circula por el sistema móvil, el instrumento podrá indicar una lectura proporcional a la potencia reactiva:

$$\theta \approx K' Q$$

Luego, como se deduce del diagrama de la figura 18:

$$\beta = (90^\circ - \varphi_c)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi_c) = \sin \varphi_c$$

Si consideramos que:

$$\vec{I}_f = \vec{I}_c, \quad I_m = \frac{U}{Z_m}$$

Reemplazando en la ley de respuesta tendremos:

$$\theta = K \frac{dM}{d\theta} \frac{U}{Z_m} I_c \sin \varphi_c = K' U I_c \sin \varphi_c$$

Como en la práctica es imposible lograr la cuadratura entre la tensión de línea y la corriente en el sistema móvil, se construye una disposición de éste de la siguiente manera (Fig. 19)

$$\text{En B : } \vec{I}_v = \vec{I}_m + \vec{I}_R ; \text{ además: } \vec{U} = \vec{U}_{AB} + \vec{U}_{BC}$$

Con las expresiones vectoriales equivalentes se llega al diagrama fasorial de la figura 20, tomando la tensión U como origen de las fases. Dándole valores adecuados a la resistencia R con respecto a los valores de la bobina móvil y de la impedancia Z , se puede establecer la cuadratura entre la tensión U y la corriente I_m .

También notamos que este diagrama depende fundamentalmente de la frecuencia, y por tanto la calibración del instrumento dependerá de ella, siendo el rango de variación de ésta prácticamente nulo (en la práctica: 48 a 52 Hz) para que el instrumento se mantenga en “clase”.

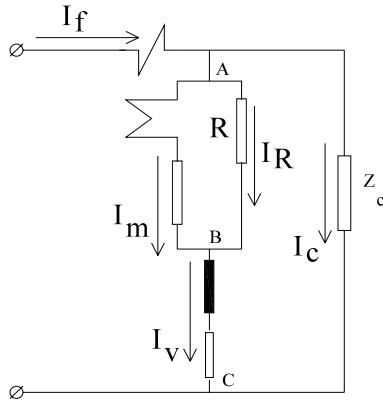


Figura 19

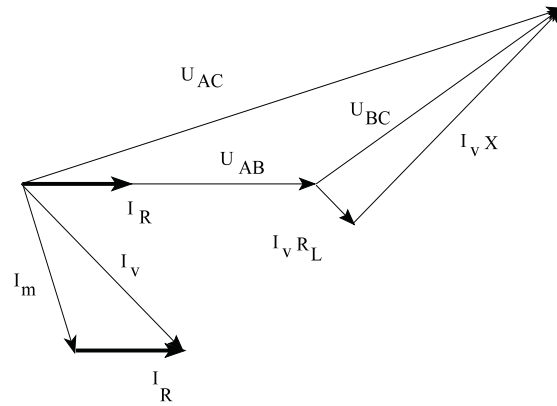


Figura 20

Fasímetro o cofímetro

Es un instrumento que se utiliza para la medición de (diferencia de fase entre tensión y corriente) o \cos (factor de potencia). El instrumento que más se utiliza en mediciones monofásicas es el instrumento electrodinámico de bobinas cruzadas.

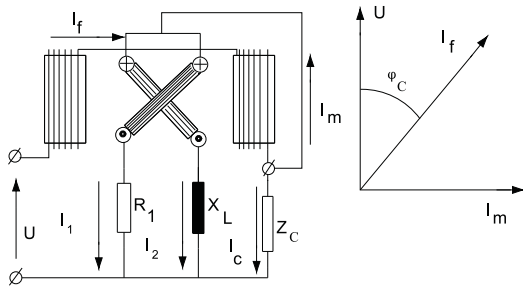


Figura 21

Este instrumento está constituido por dos bobinas móviles perpendiculares entre sí y además los resortes conductores de corriente ofrecen un mínimo de torsión de modo que no efectúen cupla antagónica.

Según el esquema siguiente tenemos que la corriente que circula por las bobinas fijas es la corriente de línea, mientras que las corrientes I_1 e I_2 que circulan por las bobinas móviles están defasadas entre sí 90° debido a la presencia

adicional de R y L (Para el estudio consideramos que las resistencias propias de las bobinas son despreciables).

Suponemos que:

- 1) $I_f \cdot R_f = 0$ ya que $R_f = 0$
- 2) I_1 está en fase con U ; (se considera que $X_{m1} = 0$)
- 3) I_2 en cuadratura con U , (se considera que $R_{m2} = 0$)

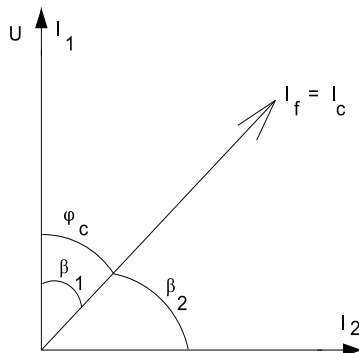


Figura 22

Por lo tanto el diagrama fasorial nos quedará:

Como tenemos dos bobinas móviles, tendremos también dos corrientes I_1 e I_2 que formarán ángulos β_1 y β_2 con la corriente I_f respectivamente.

Antes de iniciar el análisis circuital, veamos el siguiente caso:

Supongamos dos bobinas móviles B_{m1} y B_{m2} , perpendiculares entre sí, inmersas en un campo fijo (B_f). Si por estas bobinas circulan corrientes, tendrán también sus campos magnéticos respectivos:

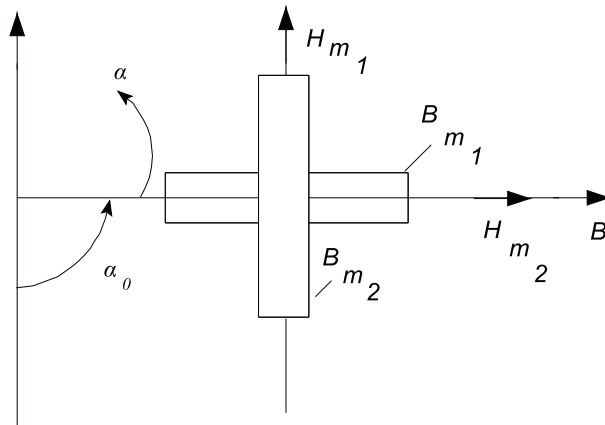


Figura 23

H_{m1} y H_{m2} .

Si α_0 es la posición inicial de las bobinas móviles para $t=0$, y considerando despreciable la inductancia mutua entre las dos bobinas móviles, la inductancia mutua de la bobina móvil B_{m1} con respecto a la fija será:

$M_1 = M_{\max} \cdot \text{sen } \theta$ (ver principio del capítulo)

Ahora bien, como:

$$\alpha_1 = \theta + \alpha_0$$

siendo θ = ángulo que gira la bobina al cabo de un tiempo t .
para $t = 0$, tendremos en la bobina móvil 1

$$\alpha_0 = 90^\circ$$

Luego reemplazando:

$$M_1 = M_{\max} \cdot \text{sen } (90^\circ + \theta) = M_{\max} \cdot \cos \theta$$

y su derivada:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = -M_{\max} \text{sen } \theta$$

Análogamente para la bobina móvil B_{m2} :

$$\alpha_0 = 0^\circ$$

luego:

$$\alpha_1 = 0^\circ + \theta = \theta$$

$$M_2 = M_{\max} \cdot \text{sen } \theta$$

y:

$$\frac{dM_2}{d\theta} = M_{\max} \cos \theta$$

Por tanto, vemos que para dos bobinas perpendiculares entre sí, inmersas en un campo magnético,

la inductancia mutua de cada una de las bobinas con respecto al campo B_f varían : una con el $\cos \theta$ y la otra con el $\sin \theta$.

Si volvemos ahora al análisis de nuestro circuito, debido a las corrientes que circulan por las bobinas móviles y de acuerdo al principio de los instrumentos electrodinámicos tendremos dos cuplas que valen en cada caso:

$$C_{m_1} = \frac{dM_1}{d\theta} I_f I_1 \cdot \cos \beta_1$$

$$C_{m_2} = \frac{dM_2}{d\theta} I_f I_2 \cdot \cos \beta_2$$

Reemplazando $dM_1 / d\alpha$ y $dM_2 / d\alpha$:

$$C_{m_1} = M_{\max} \cdot I_f \cdot I_1 \cdot \sin \theta \cos \beta_1$$

$$C_{m_2} = M_{\max} \cdot I_f \cdot I_2 \cdot \cos \theta \cos \beta_2$$

Pero:

$$\beta_1 = \varphi_c \quad \text{y} \quad \beta_2 = 90^\circ - \varphi_c$$

Luego:

$$\cos \beta_1 = \cos \varphi_c \quad \text{y} \quad \cos \beta_2 = \cos(90^\circ - \varphi_c) = \sin \varphi_c$$

Reemplazando:

$$C_{m_1} = M_{\max} \cdot I_f \cdot I_1 \cdot \sin \theta \cdot \cos \beta$$

$$C_{m_2} = M_{\max} \cdot I_f \cdot I_2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \beta$$

Ambas cuplas giran en sentido contrario, y en el momento de equilibrio se cumple:

$$C_{m_1} = C_{m_2} ; \quad \text{luego}$$

$$M_{\max} \cdot I_f \cdot I_1 \cdot \sin \theta \cos \varphi_c = M_{\max} \cdot I_f \cdot I_2 \cdot \cos \theta \sin \varphi_c$$

Si por construcción de las bobinas se hace que los módulos de I_1 sea igual al de I_2 y ambas bobinas son iguales, (por ende Máx. en ambas también serán iguales)

$$\text{sen } \theta \cos \varphi_c = \cos \theta \text{ sen } \varphi_c$$

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \varphi_c$$

$$\theta = \varphi_c$$

Vemos entonces que la deflexión de la aguja indicará directamente el ángulo de desfase de la carga. La escala puede ser calibrada en grados, en cuyo caso el instrumento se denomina fasímetro, o bien en función del coseno de φ , en cuyo caso el instrumento se denomina cofímetro.

Cofímetro trifásico

La medición del factor de potencia en circuitos trifásicos solo tiene sentido físico cuando la misma se realiza en circuitos perfectos. Para la medición se emplea el cofímetro trifásico que se basa en el instrumento visto anteriormente y donde no es necesario producir un desfase adicional en las corrientes que circulan por las bobinas móviles pues se aprovecha el desfase natural de red trifásica.

El esquema de este instrumento es el indicado en la figura. La bobina fija se conecta a la línea y por

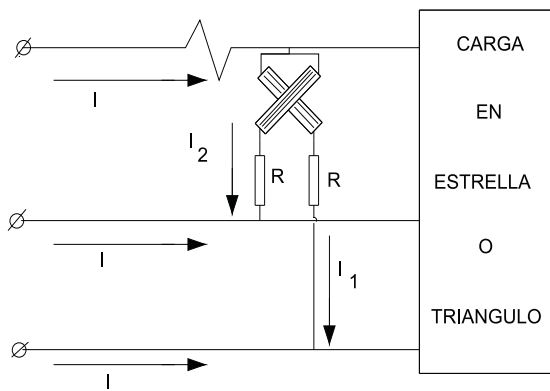


Figura 24

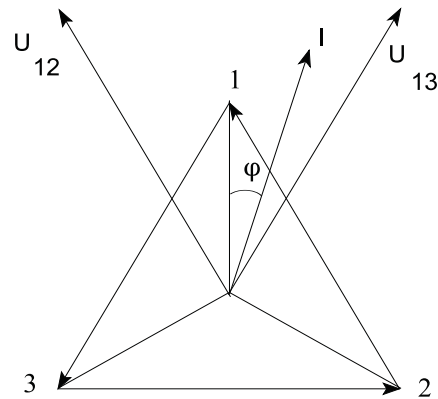


Figura 25

ella circula la corriente de línea mientras que las bobinas móviles, que están desfasadas 90° mecánicas, se conectan respectivamente a las tensiones de línea.

Vemos en el diagrama fasorial de la página siguiente que la bobina móvil 1 tiene aplicada la tensión V_{13} y la bobina móvil 2 la tensión V_{12} . Las corrientes I_1 e I_2 que recorren las bobinas estarán en fase con las tensiones aplicadas (se supone que X_{m1} y X_{m2} son prácticamente nulas). Luego como se trata de un sistema perfecto existirá un ángulo $\beta_1 = (\varphi - 30^\circ)$ entre I (corriente por la bobina fija) e I_1 ; y un ángulo $\beta_2 = (\varphi + 30^\circ)$ entre I_1 e I_2 .

Cuando el sistema está en equilibrio:

$$C_{m1} = C_{m2}$$

Reemplazando por las expresiones de los instrumentos electrodinámicos:

$$C_{m_1} = K \frac{dM_1}{d\theta} I I_1 \cos \beta_1 = K \frac{dM_1}{d\theta} I I_1 \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$C_{m_2} = K \frac{dM_2}{d\theta} I I_2 \cos \beta_2 = K \frac{dM_2}{d\theta} I I_2 \cos(\varphi + 30^\circ)$$

Habíamos visto que:

$$\frac{dM_1}{d\theta} \cong \text{sen } \theta$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} \cong \cos \theta$$

Reemplazando:

$$C_{m1} = C_{m2}$$

$$K \frac{dM_1}{d\theta} I I_1 \cos(\varphi - 30^\circ) \text{sen } \theta = K \frac{dM_2}{d\theta} I I_2 \cos(\varphi + 30^\circ) \cos \theta$$

Si :

$$|I_1| = |I_2|$$

$$\text{sen } \theta \cos(\varphi - 30^\circ) = \cos \theta \cos(\varphi + 30^\circ)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\cos(\varphi + 30^\circ)}{\cos(\varphi - 30^\circ)}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi}$$

Se deduce entonces, que la desviación θ del índice depende del desfase y puede ser calibrada la escala en valores de φ (grados) o de $\cos \varphi$.

Frecuencímetro electrodinámico

Es un instrumento de medición de frecuencia, basado en el principio de funcionamiento de los instrumentos electrodinámicos. Su esquema es el de la figura 26.

Tenemos dos bobinas móviles perpendiculares entre sí y solidarias a ellas la aguja indicadora.

Debido a la presencia del capacitor C y de la inductancia L, se busca que I_1 I_2 sean capacitivas e inductivas no puras respectivamente.

El capacitor C_o se conecta en serie con la bobina fija con la finalidad que "resuene" con la inductancia propia de B_f a una frecuencia determinada.

Para nuestro caso, lo analizaremos para 50 Hz (frecuencia industrial).

Sabemos que de acuerdo a lo visto para fasímetros tendremos dos cuplas antagónicas entre sí:

$$C_{m1} = K I_1 I_o \cos \beta_1 \operatorname{sen} \theta$$

$$C_{m2} = K I_2 I_o \cos \beta_2 \cos \theta$$

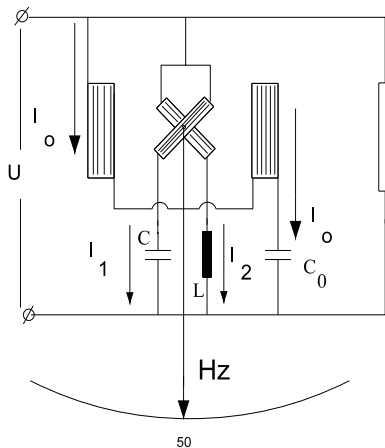


Figura 26

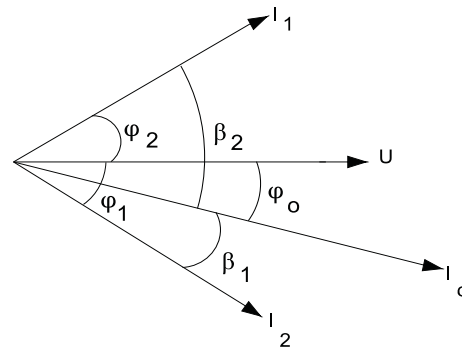


Figura 27

En equilibrio serán iguales en módulo pero opuestas, luego

$$I_1 \cos\beta_1 \operatorname{sen}\theta = I_2 \cos\beta_2 \cos\theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2 \cos\beta_2}{I_1 \cos\beta_1}$$

De acuerdo al diagrama fasorial de la figura 27, tendremos:
 φ_o = ángulo de desfase entre U e I_o si no existe resonancia.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \varphi_1 - \varphi_o \\ \beta_2 &= \varphi_2 + \varphi_o\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de $\operatorname{tg} \theta$, tendremos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_o)}{I_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_o)}$$

Analizaremos ahora la anterior expresión:

1) si $f = f_o$

tendremos el caso de resonancia, es decir :

$$\varphi_o = 0^\circ$$

Si se construyen las bobinas tal que para f_o se cumpla:

$$|Z_1| = |Z_2| \quad , \quad |\varphi_1| = |\varphi_2|$$

se cumplirá la siguiente igualdad:

$$|I_1| = |I_2|$$

Reemplazando en la expresión general:

$$\operatorname{tg}\theta = 1 \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} = 1$$

La indicación en la escala será 50 Hz

$$\theta = 45^\circ \rightarrow f = 50\text{Hz}$$

2) Si $f > f_0$; $\varphi_0 > 0^\circ$

- El módulo de la reactancia inductiva aumenta, disminuye, I_1 disminuye y φ_1 aumenta.
 - El módulo de X_{C2} disminuye, el módulo de I_2 aumenta y φ_2 disminuye.
- Finalmente $\tan \theta$ mayor que $\tan \theta$ en resonancia.

3) Si $f < f_0$

Con igual razonamiento se concluye que la $\tan \theta$ es de menor valor que el obtenido en resonancia.

En estos instrumentos se trabaja para mediciones de rango de frecuencias pequeño (por ejemplo ; 45 a 55 Hz). En realidad es para visualizar variaciones de frecuencia alrededor de un valor de frecuencia nominal. Es por ello que en la expresión de $\tan \theta$ lo que influye es el aumento de I_2 e I_1 más que la variación del coseno.

Factores que afectan la exactitud de los instrumentos electrodinámicos

Existen tres factores de perturbación que afectan la exactitud de este tipo de instrumentos, y ellos son los siguientes:

1) Temperatura

Las variaciones de temperatura en los elementos constitutivos, motivadas por la modificación de la temperatura ambiente y por autocalentamiento, producen errores sistemáticos.

- a) En los voltímetros: La variación de temperatura varía la resistencia de las bobinas, con lo cual modifica la proporcionalidad entre tensión y corriente. Para que la variación sea insignificante, la resistencia adicional que colocábamos en serie con la B_m se construye de manganina.
- b) En los amperímetros: Modifica la distribución de las corrientes en las ramas en paralelo (conexión paralelo entre B_m y B_f).
- c) En las bobinas voltimétricas de los wattímetros: Lo mismo que en los voltímetros.
- d) En los resortes de la B_m : Modificación de la constante elástica de los mismos. Por ello se trata de separar el máximo posible los resortes de las resistencias multiplicadoras y derivadoras que pueden entregar calor.

2) Frecuencia

Varias son las formas en que la variación de frecuencia altera la indicación de los instrumentos:

- a) Acoplamiento con partes metálicas: Las piezas metálicas de los instrumentos actúan como el secundario de un transformador (debido al campo magnético principal). Las corrientes inducidas en las partes metálicas producen un campo de tipo desmagnetizante, y por lo tanto una disminución de la indicación. Lo mismo que los instrumentos de hierro móvil, este efecto se minimiza tratando de reemplazar todas aquellas partes metálicas por piezas de material plástico, y aquellas que no se pudieran reemplazar, disponerlas en lugares alejadas del campo magnético. Estas últimas además deberán construirse de aleaciones de alta resistividad.
- b) Variación en las reactancias: Esto influye en forma diferente según el tipo de instrumento: En la bobina voltimétrica: (B_m) y en los voltímetros, si aumenta la frecuencia aumenta la impedancia y disminuye I_m con lo que el instrumento indicará de menos. Si la frecuencia disminuye el instrumento indicará de más.
Para minimizar los errores sistemáticos en los voltímetros y wattímetros la resistencia multiplicadora R_d se hacen de arrollamientos antiinductivos. Si además ésta tiene valores de 10 a 20 veces mayor que la reactancia de las bobinas, el efecto es despreciable.

3) Campos magnéticos externos

Como habíamos visto, este tipo de instrumento sin núcleo de hierro tiene un campo principal muy débil. (60 gauss a plena escala). Cualquier campo externo puede influir en la medición. Para reducir el problema se recurre a las siguientes soluciones:

a) Blindaje:

Se coloca el sistema de medición en un dispositivo de forma cilíndrica, figura 28. El cilindro se fabrica en chapas delgadas de alta permeabilidad, laminadas en forma que el espesor llegue a unos cinco milímetros. La laminación se efectúa para disminuir las corrientes parásitas de acoplamiento.

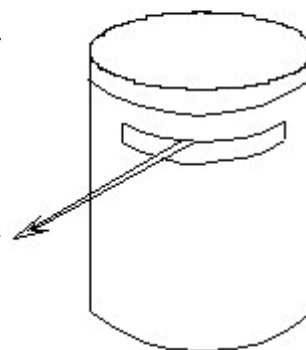


Figura 28

2) Construcción de tipo astática

El blindaje anterior, en frecuencias muy altas trae aparejados problemas con las corrientes parásitas en el propio blindaje. La construcción astática (ver esquema en la página siguiente) dos bobinas móviles, solidarias a un mismo eje y sobre éste la aguja indicadora, evita el inconveniente citado. Básicamente son dos sistemas de medición exactamente iguales, tales que sus cuplas se sumen, pero con campos de B_f esplazados 180° en el espacio. Por lo tanto un campo magnético extraño refuerza a una cupla y debilita en la misma proporción a la otra, permaneciendo la cupla total inalterable.

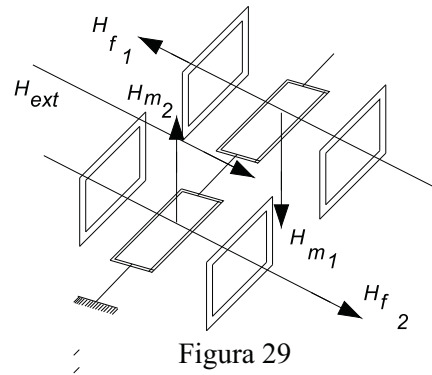


Figura 29

$$C_{mtotal} = C_{m1} + C_{m2}$$

$$H_{f1} = H_{f2}$$

$$B_{m1} = B_{m2}$$

Si aparece un campo externo: H_{ext}

$$H_{f2} + H_{ext} = C_{m2} + \Delta \text{ Cupla}$$

$$H_{f1} - H_{ext} = C_{m1} - \Delta \text{ Cupla}$$

$$\text{Cupla total: } C_{m2} + \Delta \text{ Cupla} + C_{m1} - \Delta \text{ Cupla} = C_{m2} + C_{m1}$$

Disposición de las corrientes:

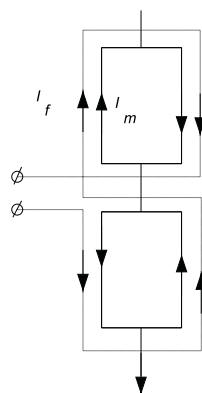


Figura 30

ELECCIÓN DE INSTRUMENTOS PARA MEDIR EL VERDADERO VALOR EFICAZ

Por definición, el valor eficaz o valor medio cuadrático de una función del tiempo está dado por:

$$F_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f_t^2 dt \quad (1)$$

Si la función $f(t)$ está expresada mediante una serie de Fourier, la integral de la expresión anterior tendrá la forma general siguiente:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (b_0 + a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)^2 dt \quad (2)$$

El cuadrado de una suma de términos como la anterior es igual a la suma de los cuadrados de todos los términos más el duplo de la suma de todos los productos posibles formados, tomando de a dos términos. Por ende tendremos en el desarrollo dos tipos de términos:

$$a_k^2 \sin^2 k\omega t = a_k^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2k\omega t) \Rightarrow \int_0^T a_k^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2k\omega t) dt = a_k^2 \frac{T}{2} \quad (3)$$

$$b_k^2 \sin^2 k\omega t = b_k^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2k\omega t) \Rightarrow \int_0^T b_k^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2k\omega t) dt = b_k^2 \frac{T}{2} \quad (4)$$

$$b^2 \gg \int_0^T b_0^2 dt = b_0^2 T \quad (5)$$

Términos cuadráticos:

Términos productos entre armónicas de distinta frecuencia:

$$2 a_p b_q \sin p\omega t \cos q\omega t \Rightarrow \int_0^T \sin p\omega t \cos q\omega t dt = 0 \quad (6)$$

Resumiendo la expresión del valor eficaz se reduce a:

$$F_{ef} = \sqrt{b_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2)} \quad (7)$$

Otra expresión del valor eficaz se obtiene recordando que una serie de Fourier de términos senoidales (de amplitudes a_n) y cosenoidales (de amplitudes b_n) puede escribirse como una serie de términos únicamente senoidales o bien únicamente cosenoidales. Optando por la primera se obtiene.

$$f_{(t)} = c_0 + \sum c_n \text{sen}(n\omega t + \theta_n) \quad (8)$$

Donde:

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad y \quad \theta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (9)$$

$$F_{ef}^2 = b_0^2 + \frac{1}{2} \sum c_n^2 \quad (10)$$

Interpretando estas expresiones para una corriente $i = f_{(t)}$ de la forma:

$$i = I_0 + I_{0_1} \text{sen}(\omega t + \theta_1) + I_{0_2} \text{sen}(2\omega t + \theta_2) + \dots \quad (11)$$

El valor eficaz será:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} \quad (12)$$

queda definido entonces el valor eficaz de una poliarmónica como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados del término constante y de los valores eficaces de las armónicas componentes.

Ahora bien, la pregunta es: ¿Qué instrumentos son aptos para medir poliarmónicas?. Desechamos de entrada al de imán permanente y bobina móvil con rectificador, puesto que mide el valor medio de una onda senoidal rectificada y por ende su escala está calibrada para valores eficaces de ondas senoidales exclusivamente, es decir:

$$I_{ef} = I_{med} F \quad (13)$$

siendo F el factor de forma igual a 1.11. Una alternativa de uso del imán permanente y bobina móvil es aquella que incorpora como dispositivo intermedio a la termocupla, cuya f.e.m. medida por el instrumento es proporcional a la potencia disipada por efecto Joule sobre una resistencia como elemento calefactor. Hoy en día existen instrumentos de imán permanente y bobina móvil con dispositivos electrónicos intermedios y con características de entrada similares a los digitales, esto es: alta impedancia de entrada en la función voltímetro y con la ventaja de poder medir valores eficaces de cualquier forma de onda, contando al termistor como elemento sensor (comercialmente se conoce- para citar un ejemplo- a la serie Multizet de la firma Siemens, con dichas características). De los instrumentos analógicos que midan valores eficaces de poliarmónicas y de uso frecuente seleccionamos al de hierro móvil y electrodinámico.

En los dos citados, la cupla motora media, responde al valor medio de la cupla instantánea, que es lo que vamos a demostrar:

$$C_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T c_i dt \quad (14)$$

La cupla instantánea para el instrumento de hierro móvil es:

$$c_i = \frac{dL}{d\theta} i^2 \quad (15)$$

para el electrodinámico:

$$c_i = \frac{dM}{d\theta} i^2 \quad (16)$$

En ambos instrumentos el valor medio es proporcional a:

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (17)$$

que por definición sabemos es el valor eficaz de la corriente.

Aquí nos detendremos para aclarar lo siguiente: Cuando se estudia la ley de respuesta de ambos instrumentos se parte de una corriente senoidal, cuyo valor instantáneo vale:

$$i = I_0 \sin \omega t \quad (18)$$

Reemplazando en la expresión de la cupla motora media y separando los términos constantes nos queda la siguiente integral:

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt \quad (19)$$

que resolviendo se reduce a:

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2} \quad (20)$$

Reemplazando finalmente en la (14) tendremos:

$$C_{media} = \frac{1}{T} I_0^2 K_\theta \int_0^T \sin^2 \omega t dt = K_\theta \frac{I_0^2}{2} = K_\theta I_{ef}^2 \quad (21)$$

(K_θ involucra el término $dL/d\theta$, para el hierro móvil, o bien $dM/d\theta$ para el electrodinámico y a efectos de linealizar la escala desde el punto de vista constructivo, ambos se hacen inversamente proporcionales a θ , a excepción del wattímetro electrodinámico).

De esta expresión deducimos que ambos instrumentos - hierro móvil y electrodinámico- responden al cuadrado de la corriente eficaz.

Bajo otra óptica física puede detenerse el estudio en las expresiones (15) y 16) de las cuplas instantáneas:

$$c_i = K_\theta i^2 = K_\theta I_0^2 \sin^2 \omega t = K_\theta I_0^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (22)$$

De esta expresión deducimos que existen dos componentes en la cupla instantánea:

$$c_i = A - A \cos 2\omega t \quad (23)$$

La primera es una componente constante de valor proporcional al cuadrado del valor eficaz de la corriente de excitación "i", la segunda es una componente alterna con una pulsación doble de la que tiene "i".

Si idealmente el momento de inercia fuese nulo, el sistema móvil cumpliría un movimiento oscilatorio de frecuencia doble alrededor de la posición correspondiente a la desviación producida por la componente constante A.

El factor de amplificación "A" en este caso valdría uno. (Ver el capítulo I, ley de respuesta para una excitación senoidal).

Puesto que ω es mayor que ω_0 , la componente oscilatoria no tiene influencia alguna sobre el movimiento del instrumento.

Las mismas consideraciones son válidas si analizamos la ley de respuesta del hierro móvil o electrodinámico excitados con corrientes poliarmónicas.

$$i = I_0 + I_{0_1} \text{sen}(\omega t + \theta_1) + I_{0_2} \text{sen}(2\omega t + \theta_2) + \dots \quad (24)$$

Esta expresión al cuadrado estará formada por los siguientes términos:

$$i^2 = I_0^2 + I_{0_k}^2 \text{sen}^2(k\omega t + \theta_k) + I_{0_p} I_{0_q} \text{sen}(p\omega t + \theta_p) \text{sen}(q\omega t + \theta_q) \quad (25)$$

La cupla motora media valdrá:

$$C_{media} = \frac{1}{T} K \int_0^T i^2 dt \quad (26)$$

Pero:

$$\int \text{sen}^2(k\omega t + \theta_k) dt = \frac{T}{2} \quad (27)$$

$$\int \text{sen}(p\omega t + \theta_p) \text{sen}(q\omega t + \theta_q) dt = 0 \quad (28)$$

Finalmente la cupla motora media responderá a la expresión:

$$C_{media} = K(I_0^2 + \frac{I_{0_1}^2}{2} + \frac{I_{0_2}^2}{2} + \dots + \frac{I_{0_n}^2}{2}) \quad (29)$$

que no es otra cosa que el cuadrado del valor eficaz de una poliarmónica.

Si se analiza la cupla instantánea -es decir obviando integrales- y con las mismas consideraciones que se hicieron para una corriente senoidal, llegaríamos al mismo resultado. Todo lo dicho hasta ahora se refiere a la respuesta de los instrumentos de hierro móvil y electrodinámicos funcionando como amperímetros y voltímetros.

Otro análisis interesante es conocer la respuesta del wattímetro electrodinámico donde la tensión y la corriente tienen la forma general:

$$u = U_0 + U_{0_1} \text{sen}(\omega t + \theta_{u_1}) + U_{0_2} \text{sen}(2\omega t + \theta_{u_2}) + \dots \quad (30)$$

$$i = I_0 + I_{0_1} \text{sen}(\omega t + \theta_{i_1}) + I_{0_2} \text{sen}(2\omega t + \theta_{i_2}) + \dots \quad (31)$$

La ley de respuesta del wattímetro electrodinámico es:

$$C_{media} = \frac{1}{T} \frac{dM}{d\theta} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} K \int_0^T u i dt = K P \quad (32)$$

Esta ecuación comprende productos de términos de igual frecuencia de la forma:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{0_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{u_n}) I_{0_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{i_n}) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\theta_{u_n} - \theta_{i_n}) \quad (33)$$

y productos de términos de distinta frecuencia de la forma:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{0_n} \text{sen}(n\omega t + \theta_{u_n}) I_{0_k} \text{sen}(k\omega t + \theta_{i_k}) dt = 0 \quad (34)$$

Luego la potencia activa resulta:

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum U_{0_n} I_{0_n} \cos(\theta_{u_n} - \theta_{i_n}) \quad (35)$$

Pero el producto

$$\frac{U_0 I_0}{2} = U_n I_n \quad (36)$$

es el producto de valores eficaces y:

$$\theta_{u_n} - \theta_{i_n} = \varphi_n \quad (37)$$

es el desfase entre armónicas de igual orden.

Finalmente podemos escribir la expresión de la potencia activa como:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots \quad (38)$$

La potencia activa total es la suma de las potencias desarrolladas por las componentes de corriente continua y de las potencias activas desarrolladas por las armónicas de tensión y corriente del mismo orden.

Una conclusión importante es que todo par de armónicas de tensión y corriente de orden distinto no contribuyen al desarrollo de potencia activa alguna, y obviamente si una armónica de un determinado orden aparece en una de las ondas y no en la otra tampoco hay contribución a la potencia media.

Finalmente el wattímetro electrodinámico suministra una lectura fiel a lo expresado por la ecuación (38).

Respuesta del vármetro electrodinámico a ondas no senoidales

Por definición la potencia reactiva total desarrollada por ondas poliarmónicas está dada por la suma algebraica de las potencias reactivas desarrolladas por las armónicas de tensión y corriente del mismo orden.

$$Q=U_1I_1\text{sen}\varphi_1+U_2I_2\text{sen}\varphi_2+U_3I_3\text{sen}\varphi_3+..... \quad (39)$$

Aquí y con respecto al vármetro es necesario una aclaración:

Este instrumento es de uso exclusivo para corriente alterna y por ende si no existen componentes continuas en las armónicas, la lectura coincidirá con la expresión 39.

Si en cambio existen componentes continuas habrá un producto adicional $U_0 \cdot I_0$ indeseable para la medida, con lo cual la lectura será errónea.

INSTRUMENTOS DIGITALES

Introducción

Para finalizar el capítulo de instrumentos daremos una breve descripción del funcionamiento de los instrumentos digitales. Existe actualmente una amplia variedad de estos aparatos que producen una salida digital, por lo que podrán encontrarse textos dedicados a la explicación de cada uno de ellos.

En los instrumentos vistos hasta ahora el resultado de la medición se determina por comparación de la posición de la aguja que se desplaza en forma “continua” sobre el cuadrante. Es decir la medición se hace por analogía de ahí el nombre de instrumento analógicos.

La función principal de un instrumento digital es convertir una señal analógica en su equivalente digital. Esta señal puede ser una tensión o corriente, tanto en continua como en alterna.

El proceso para cumplir con este objetivo se puede dividir en cuatro bloques funcionales a efectos de dar una explicación elemental de su funcionamiento:

- a.- Condicionador
- b.- Conversor A/D
- c.- Lógica
- d.- Contador

La señal de entrada debe pasar primero a través de un “condicionador” cuya misión es “preajustar” la tensión de entrada, así este bloque puede ser un atenuador, si lo que se va a medir es una tensión elevada de c.c.. o bien puede ser un amplificador para los rangos de tensiones bajas. Si la señal de entrada es una tensión de c.a. se utiliza un convertidor para cambiar la señal de c.a. a su valor equivalente en corriente continua.

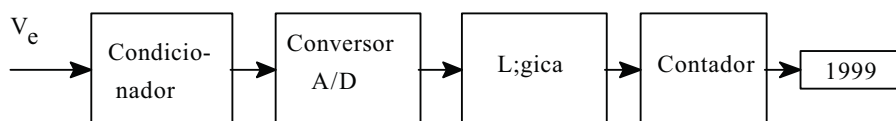


Figura 1

En el funcionamiento como óhmetro, el instrumento se comporta como un generador de corriente constante, la tensión obtenida en bornes de la resistencia desconocida es analizada posteriormente por el conversor analógico-digital.

En todos los casos el “condicionador” es el que se encarga de convertir siempre el parámetro desconocido en una tensión de c.c. que esté dentro del rango de operación del conversor

analógico-digital.

La etapa siguiente es la del convertidor A/D. La función de éste es tomar la tensión de c.c. preajustada por el condicionador y convertirla en una señal digital.

Los conversores A/D son dispositivos electrónicos de c.c. de un solo rango. Pueden llegar a administrar como señal máxima -para escala completa- de 1 a 10 V.

Por esta razón el condicionador de la señal de entrada debe atenuar las tensiones grandes y amplificar las pequeñas para darle al instrumento la selección de rangos adecuados.

Por ejemplo, si se aplica una señal de 250 V de c.a. a un multímetro digital que posee un conversor analógico-digital que requiere de una entrada de 1 V de c.c.. La señal de corriente alterna es atenuada en el rango de 1.000 VAC y se convierte a una tensión de corriente continua igual a 250 milivolt. En este caso, el primer bloque es un atenuador x1000 y un convertidor de corriente alterna. El nivel de 250 milivolt se digitaliza posteriormente en el segundo bloque. El punto decimal y las unidades se anuncian a partir de la información obtenida de los rangos del conversor para que la lectura final aparezca como 250 V.A.C.

Estos dos primeros “bloques” determinan las características básicas de un multímetro digital, tales como: número de dígitos, rango, sensibilidad, etc. El tercer “bloque” que llamamos Lógica, es un bloque de comandos que se encarga de manejar el flujo de información en el tiempo adecuado para asegurar que las funciones internas se lleven a cabo en el orden correcto.

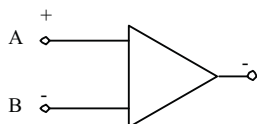


Figura 2

Este bloque actúa como el comunicador con el exterior, manejando el flujo de salida de información digital y aceptando instrucciones de programación de otros dispositivos. Finalmente hay un “display” que es

el encargado de comunicar visualmente el resultado de la medición.

Una pieza importante en el funcionamiento del instrumento digital es el amplificador operacional (AO), al que básicamente podemos definirlo como un cuadripolo activo, con una tensión de entrada V_e y una de salida V_s . Puede ser de corriente alterna o continua, por el momento a nosotros nos interesa los de c.c. y principalmente a aquellos en donde la corriente de entrada y de salida son del mismo orden. La amplificación de potencia pasa a ser una amplificación de tensión.

Definiremos como ganancia de tensión G a la siguiente relación:

$$G = \frac{V_s}{V_e} (1)$$

La tensión de salida puede ser la de vacío en este caso diremos ganancia de circuito abierto. En general uno de los bornes de entrada y uno de salida están conectados entre sí (a masa). Los amplificadores diferenciales, tienen dos entradas independientes y amplifican la diferencia entre las dos tensiones conectadas a esas dos entradas.

Las dos ganancias son idealmente iguales, pero mientras un mantiene en la salida la polaridad de

entrada, la otra la invierte.

El amplificador operacional, usado ampliamente en los instrumentos digitales es un amplificador diferencial de corriente continua, caracterizado por:

a) Una gran ganancia de tensión a circuito abierto en la salida:

$$G = \frac{V_{so}}{V_e} \quad (2)$$

La ganancia es del orden de 10^4 a 10^7 . Idealmente la ganancia es infinita.

b) Una impedancia de entrada Z_e muy alta, idealmente infinita.

El A.O. usado como comparador de tensiones o detector de cero

Se aprovecha su gran ganancia de tensión. Las tensiones que se quieren comparar se conectan a sus bornes de entradas que llamamos A y B. Como se dijo, el A.O. amplifica la diferencia entre ellas. Como las dos entradas son de distinta polaridad, si la V_A (conectada a la entrada positiva) es mayor que la V_B (conectada a la entrada negativa), aunque solo sea por fracciones de microvolts, la salida toma el máximo valor positivo. Obviamente, si uno de los bornes está conectado a masa, tensión nula, el AO diferencial se transforma en un detector de cero, es decir, da una señal cuando la tensión pasa por cero.

El A.O. usado con realimentación negativa

La resistencia R_2 , de la figura 3, conecta el borne de salida con el de entrada de polaridad invertida. En el nodo A la corriente que entra al AO es prácticamente nula, dado que, como se dijo, la impedancia de entrada, Z_e es idealmente infinita, por lo que la corriente I_2 es aproximadamente igual a I_1 . La caída de tensión en la resistencia R_1 es igual a:

$$I_1 R_1 = V_e \quad (3)$$

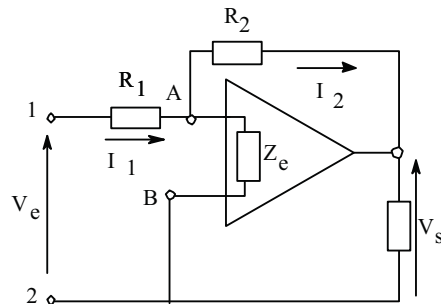


Figura 3

y la caída de tensión en la resistencia R_2 es:

$$I_2 R_2 = I_1 R_2 = V_s \quad (4)$$

la ganancia de tensión real del circuito amplificador es:

$$G_r = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2}{R_1} \quad (5)$$

Y está fijada por la relación de resistencias, independientemente de las características del amplificador.

El AO usado como integrador

Si el circuito de la figura 3, se reemplaza la resistencia R_2 por un capacitor C , el circuito actúa como un integrador: la tensión de salida V_s es, en todo momento la integral en el tiempo de la tensión de entrada.

$$V_s = \int_0^t V_e dt \quad (6)$$

Si para el instante t igual a cero, el capacitor está completamente descargado, su diferencia de potencial es $V_c = 0$. En el instante t distinto de cero la tensión V_c que por acción del AO es también igual a la de salida V_s es:

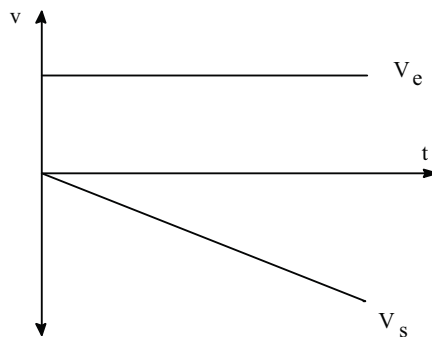


Figura 4

$$V_c = V_s = \frac{1}{C R_1} \int_0^t V_e dt \quad (7)$$

V_s es la integral de V_e siempre que C y R_1 sean constantes.

En el caso particular que la tensión V_e sea constante, V_s va creciendo linealmente, figura. Por otra parte, como V_e y R_1 son constantes, I_1 también lo es; es decir que el AO hace que el capacitor sea cargado a corriente constante.

Voltímetro de rampa o de conversión tensión-tiempo

Un multímetro digital es en esencia un voltímetro que con el auxilio de resistores de exactitud adecuada que están incorporados al instrumento permiten medir además, corrientes y resistencias.

Estas últimas con el auxilio de un generador de corriente constante.

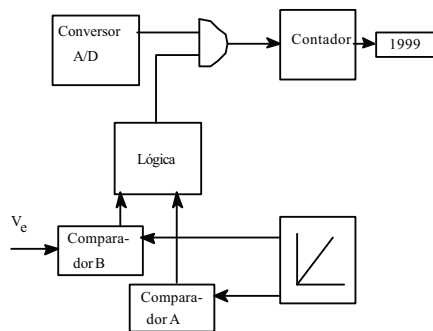


Figura 5

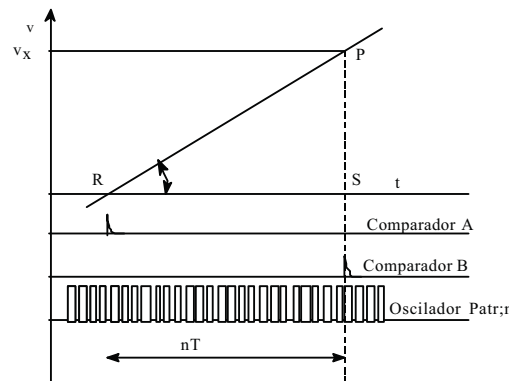


Figura 6

El voltímetro de rampa reduce el problema de *medir una tensión* al de *medir un tiempo*, que le es proporcional. Dicho tiempo se mide mediante un contador que recuenta los pulsos procedentes de un oscilador patrón, que pasan a través de una compuerta que está abierta durante el tiempo que se desea medir.

El instrumento tiene un generador de rampa constituido por un amplificador operacional integrador a cuya entrada está conectada una fuente de referencia, V_r . Siendo constante esta tensión, la R_1 del

amplificador operacional y la capacidad C , la característica tensión-tiempo de la salida del integrador es una recta de pendiente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_r}{R_1 C} = \text{cte.} \quad (8)$$

La tensión comienza con un valor menor que cero de la incógnita. Los comparadores de tensiones A y B emiten un pulso cuando se igualan las dos tensiones conectadas a sus entradas. Cuando la rampa pasa por cero el comparador de tensiones A emite un pulso que abre la compuerta, figuras 1a y 1b. Cuando la tensión de la rampa iguala a V_x , el comparador B emite la señal que al cerrar la compuerta termina el recuento de los pulsos, cuyo número n es una medida de V_x :

$$V_x = \overline{PS} = \overline{RS} \operatorname{tg} \alpha = n T \operatorname{tg} \alpha \quad (9)$$

Si T es el periodo de los pulsos del oscilador patrón, T es constante, la tangente de α también lo es, finalmente podemos expresar que:

$$V_x = K n \quad (10)$$

Fuentes de error

Entre las causas de error citamos:

- a) El error propio de la tensión de referencia.
- b) Variaciones de la pendiente de la rampa por alteraciones del capacitor o de la resistencia R , por temperatura o bien por envejecimiento.
- c) Variación de la frecuencia del oscilador.
- d) El ruido del que puede estar afectada la incógnita ya que su comparación con la tensión de rampa queda mal definida.

Como ventajas pueden citarse que son instrumentos relativamente baratos y de exactitud moderada: 0,005% de la lectura.

Voltímetro de doble rampa

Es una modificación del anterior que elimina sus principales causas de error. La tensión incógnita V_x es llevada a la entrada de un AO integrador durante cierto tiempo constante t que se mide

contando determinado número n_0 de pulsos del oscilador patrón, digamos $n_0=10.000$. La tensión a la salida del AO integrador crece, como ya se vio, según una recta de pendiente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{V_x}{R C} \quad (11)$$

la tensión de salida del AO integrador será, al cabo del tiempo t_0 :

$$V_s = \frac{t_0}{C R} V_x \quad (12)$$

proporcional a la tensión V_x .

Una vez cumplido el tiempo t_0 , automáticamente, mediante el conmutador M se conecta a la entrada del integrador una tensión de referencia V_r con polaridad invertida de modo que el capacitor se descarga según una recta de pendiente negativa de valor constante:

$$\text{tg } \delta = \frac{V_r}{C R} \quad (13)$$

el tiempo t_x que el capacitor (cargado originalmente con tensión V_s) tarda en tener tensión nula, cumple:

$$V'_s = \frac{V_r}{C R} t_x \quad (14)$$

$$V_s - V'_s = 0 \quad \therefore \quad t_0 V_x = V_r t_x \quad (15)$$

despejando el valor de V_x :

$$V_x = \frac{t_x}{t_0} V_r \quad (16)$$

Pero los tiempos t_x y t_0 están dados por el mismo oscilador a través de ciertos números de pulsos n_x

y n_0 respectivamente:

$$n_x = f_r t_x \quad (17)$$

$$n_0 = f_r t_0 \quad (18)$$

Finalmente deducimos:

$$V_x = \frac{n_x}{n} V_r \quad (19)$$

$$V_x = K n_x \quad (20)$$

Como se puede observar de la expresión (20) el valor final de la tensión incógnita es proporcional al número de pulsos n_x , independiente de la frecuencia del reloj y de los valores de R y C del AO integrador.

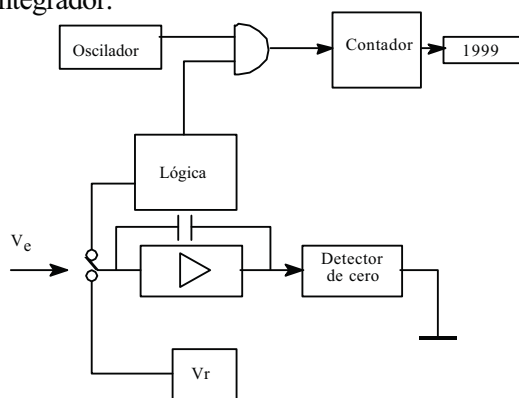


Figura 7

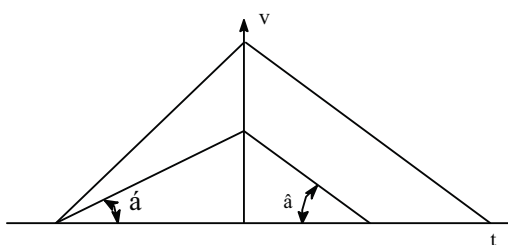


Figura 8

Especificaciones de los multímetros digitales

La hoja de especificaciones entregada por cada fabricante es una buena fuente de información, pero debe ser cuidadosamente examinada para poder interpretar correctamente las cualidades de este tipo de instrumento.

Los multímetros digitales pueden ser portátiles o de banco. Los primeros dominan el mercado actual y se presentan en varios tamaños y modelos, ofreciendo casi las mismas funciones y características básicas en cada categoría de precio. Como regla general son los de menor costo y al ser

compactos, ofrecen menos características que los de mayor tamaño destinados a uso de laboratorio.

La ingeniería tiene suma importancia en el diseño y configuración de los multímetros digitales, especialmente si es para uso manual. El visor, los selectores de alcances y función de los conectores de entrada deben ser fáciles de usar.

El posible comprador debe estar al tanto del ambiente del trabajo del instrumento, esto fundamentalmente orientado a la respuesta del visor frente a distintas condiciones de iluminación. Es fácil leer el visor frente a condiciones de fuerte iluminación o bien en zonas de escasa luz.

Los visores de cristal líquido dependen de la luz ambiental en tanto que los LED (diodo emisor de luz) cuenta con auto-iluminación pero pueden desvanecerse en medio de una luz intensa.

La selección del alcance y de la función se puede realizar de varias maneras, por ejemplo: un par de llaves rotativas, una para el alcance y otra para la función o bien una llave única que seleccione ambas cosas.

A continuación se detalla el significado de los parámetros más comunes de los multímetros digitales:

a) Modo High/Low

Los multímetros digitales del tipo laboratorio tiene como óhmetro un selector HIGH-LOW, que selecciona la tensión aplicada por el generador de corriente interno en los bornes del elemento a medir.

Para medir resistencias normales se utiliza los bornes HIGH-COM, correspondiente a una tensión de salida de aproximadamente 2 V. Para mediciones sobre semiconductores la tecla o bornes LOW-COM corresponde a una tensión de salida de 180 mV para no destruir el elemento de prueba.

b) Número de dígitos

Existe cierta confusión con respecto a estas especificaciones. El número de dígitos se refiere al número máximo de nueve que es capaz de entregar a la salida en el visor (esto indica el número de dígitos completos). La confusión reside a que muchos multímetros disponen de cierta capacidad de sobrerango y esto agrega un dígito extra que se conoce como dígito de sobrerango, el cual no es un dígito completo ya que solamente puede tomar el valor 1.

Supongase un “display” de un multímetro digital cuya lectura máxima es de 1999, este instrumento tiene solo tres dígitos completos más un $\frac{1}{2}$ usado como sobrerango: el instrumento se define de 3 $\frac{1}{2}$ dígitos. Este dígito de sobrerango permite al usuario tomar lecturas arriba del valor de plena escala sin alterar las características de sensibilidad y exactitud.

Por ejemplo si un multímetro de tres dígitos la señal cambia de 9.99 V a 10.01 V. el display indicará 10.0 V. Como puede observarse en este proceso de medida se pierde la información que corresponde a 0,01 V. El mismo multímetro con un dígito de sobrerango es capaz de medir el valor 10,01 sin tener que cambiar de rango y sin pérdida de sensibilidad.

El sobrerango se expresa generalmente en valores porcentuales. Una lectura de 1999 equivale a 3 dígitos con 100% de sobrerango.

c) Exactitud

Dada la complejidad de los multímetros digitales es difícil determinar fuentes de error que introducen inexactitud por lo cual los fabricantes generalmente especifican la exactitud total.

Para que las especificaciones de exactitud sean más concretas deben incluirse los datos correspondientes a temperatura, humedad, variaciones de línea y variaciones en el tiempo.

Estas condiciones dan el comportamiento real del instrumento en condiciones de operación. Por ejemplo, si el fabricante especifica su característica de exactitud para $25^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$ esto indica que el instrumento puede operarse en condiciones más o menos normales. Si en cambio la exactitud se garantiza para una variación de 1°C , el instrumento solo podrá emplearse para condiciones de laboratorio.

La exactitud publicada por el fabricante debe incluir el tiempo durante el cual es válida, esto puede ser 30, 90 días, 6 meses y hasta un año. Al terminar este período el instrumento requiere de un proceso de calibración siguiendo las especificaciones dadas en el manual de mantenimiento del fabricante.

Algunas especificaciones de exactitud de estos instrumentos pueden ser explicitadas como sigue:

$E = \pm 0,01\%$ de lectura $\pm 0,01$ del rango

$E = \pm 0,01\%$ de lectura \pm dígito

d) Coeficiente de temperatura

El coeficiente de temperatura es la cantidad de cambio en exactitud por grado de temperatura cuando el instrumento sale fuera del rango original para lo cual se ha especificado la exactitud básica. Los errores calculados por medio del coeficiente de temperatura serán aditivos en la exactitud básica.

e) Rapidez

Son dos los significados que pueden especificarse.

a) El tiempo que requiere para responder a un cambio en la señal de entrada.

b) La cantidad de lecturas capaz de realizar en un segundo.

f) Resolución

Es la que corresponde a cada uno de los alcances y está dado por el dígito menor significativo, por ejemplo para un rango de 100 mV y 3 $\frac{1}{2}$ dígitos (1999) la resolución será de 0,001 mV, es decir de $1 \mu\text{V}$.

g) Determinación del error porcentual de lectura

Supongamos dos voltímetros cuyas características de exactitud especificada por el fabricante son las siguientes:

Para el voltímetro 1:

$E = \pm 0,1\%$ de lectura $\pm 0,05$ del alcance

Para el voltímetro 2:

$E = \pm 0,1\%$ de escala \pm dígito

Los dos instrumentos son de 3 1/2 dígitos. Calcularemos el error relativo para dos mediciones, $V_1=20$ mV y $V_2=200$ mV para el alcance de 200 mV.

Para 20 mV:

Voltímetro 1:

$$E_1 = \pm (0,02 + 0,1) \text{ mV} = 0,12 \text{ mV} \rightarrow e_1 = 0,6\%$$

Voltímetro 2:

$$E_2 = \pm (0,2 + 0,1) \text{ mV} = 0,3 \text{ mV} \rightarrow e_2 = 1,5\%$$

Para la lectura de 200 mV:

Voltímetro 1:

$$E_1 = \pm (0,2 + 0,1) \text{ mV} = 0,3 \text{ mV} \rightarrow e_1 = 0,15\%$$

Para el voltímetro 2:

$$E_2 = \pm (0,2 + 0,1) \text{ mV} = 0,3 \text{ mV} \rightarrow e_2 = 0,15\%$$

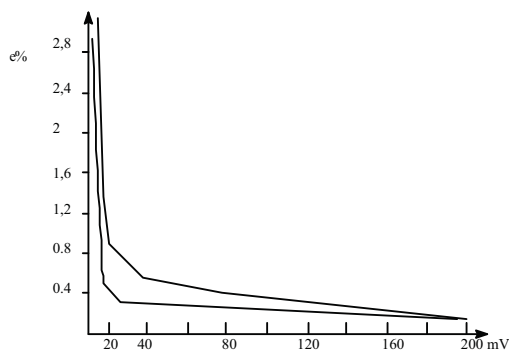


Figura 10

De los cálculos se desprende que el voltímetro 1 es más exacto que el 2, al menos hasta el 70% del alcance, para tener el mismo error cuando el valor medido coincide con el alcance.

CAPÍTULO IV: TÉCNICAS DE MEDIDAS

En este capítulo vamos a estudiar distintos métodos de medidas utilizando una amplia gama de técnicas y distintos instrumentos.

Muchas veces para la elección de un determinado método, el profesional deberá realizar un estudio del problema y ponderar todos los factores intervinientes, tales como: exactitud, sensibilidad, tiempo, costo, conveniencia y disponibilidad de instrumentos. Los distintos tipos de medidas se suelen clasificar en dos grandes grupos:

- a) Medidas directas
- b) Medidas indirectas.

Las **medidas directas** son aquellas en que el resultado de la medición deseada es obtenido directamente a través de un instrumento, cuya escala está graduada en unidades de la cantidad medida.

Las **medidas indirectas** en cambio, son aquellas en que la medición deseada surge a través de una operación matemática, con los datos primarios, en la que se utiliza una fórmula o ley física que relaciona la cantidad medida. Por ejemplo, si se quiere determinar la potencia disipada en una resistencia, se puede medir la caída de tensión en sus bornes y la corriente que atraviesa, calculándola mediante el producto de las cantidades medidas.

Aclaremos aquí que la separación entre mediciones directas y mediciones indirectas físicamente no es tan real, ya que por ejemplo en el caso de una medición de tensión con un voltímetro, éste dará una lectura por medio de una escala representativa del producto de la corriente por su resistencia interna.

Método de medida:

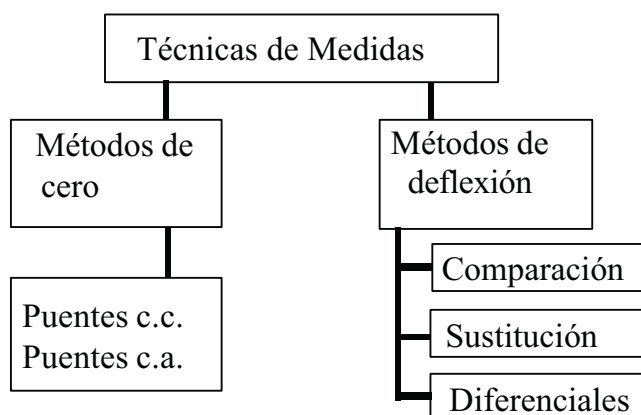
Las medidas directas e indirectas se pueden realizar utilizando dos métodos generales:

- 1) Métodos de deflexión
- 2) Métodos de cero

Los **métodos de deflexión** son aquellos en que el resultado se expresa en función de la deflexión de instrumentos de aguja o de la lectura de digitales.

Los **métodos de cero** son aquellos en que por medio de la indicación nula (de corriente o tensión) de un instrumento permite obtener la magnitud incógnita a partir de condiciones conocidas.

El siguiente cuadro nos muestra una primera clasificación de los distintos métodos de medidas.



A esta última clasificación puede agregarse los **métodos combinados**, en donde el resultado se deduce de una deflexión, previo al cumplimiento de una condición de cero.

En general los métodos de deflexión son los menos exactos. Con los métodos de cero o combinados, pueden obtenerse en determinadas condiciones mediciones muy exactas, tanto que el error relativo se expresa, no en valores porcentuales sino en partes por millón, o, como se abrevia, en **p.p.m.**. Por ejemplo 5 partes por millón = 5 ppm = 0,0005%.

Métodos indirectos de deflexión

El método indirecto de deflexión es ampliamente usado no solamente en mediciones de tensiones continuas, sino también en corriente alterna, veremos algunos casos típicos de esta técnica.

I. Método de las dos lecturas

Este método permite mediante las lecturas sucesivas de un instrumento determinar la magnitud incógnita, eliminando el error de inserción del o los instrumentos.

Ia: Medición del valor real de la intensidad de un circuito mediante el método de las dos lecturas

Supongamos que deseamos obtener el valor real de la corriente de cortocircuito entre los puntos 1 y 2 del circuito de la figura 1a, si aplicamos el teorema de Thevenin entre los puntos 1 y 2, podemos transformar nuestro circuito como el de la figura 1b.

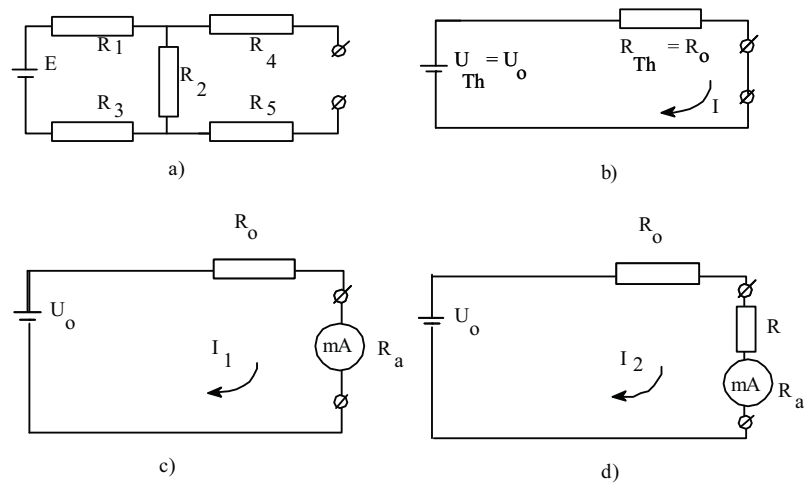


Figura 1

La corriente I es la magnitud a medir y vale de acuerdo a la figura 1b.

$$I = \frac{U_0}{R_0} \quad (1)$$

Es evidente que si queremos medir este valor de corriente mediante un amperímetro intercalado entre los puntos 1 y 2, figura 1c, tendremos que la corriente indicada por el amperímetro de resistencia R_a valdrá:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0 + R_a} \quad (2)$$

El método que estamos estudiando propone intercalar una resistencia R en serie con el amperímetro tal como indica la figura 1d.

La corriente medida será:

$$I_2 = \frac{U_0}{R_0 + R + R_a} \quad (3)$$

Si hacemos el cociente de (2) y (3):

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_0 + R + R_a}{R_0 + R_a} \quad (4)$$

$$I_1 \cdot R_0 + I_1 \cdot R_a = I_2 \cdot R_0 + I_2 \cdot R + I_a \cdot R_a \quad (5)$$

$$R_0 (I_1 - I_2) = I_2 \cdot (R + R_a) - I_1 \cdot R_a \quad (6)$$

$$R_0 = \frac{I_2 \cdot (R + R_a) - I_1 \cdot R_a}{(I_1 - I_2)} \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 2, teniendo que $U_0 = I \cdot R_0$

$$I_1 = \frac{I \cdot \left[\frac{I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a}{(I_1 - I_2)} \right]}{R_0 + R_a} \quad (8)$$

$$I_1 = \frac{I \cdot \left[\frac{I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a}{(I_1 - I_2)} \right]}{\left[\frac{I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a}{(I_1 - I_2)} \right] + R_a}$$

$$I_1 = \frac{I \cdot [I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a]}{(I_1 \cdot I_2)} \cdot \frac{1}{\frac{[I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a + R_a (I_1 - I_2)]}{(I_1 - I_2)}}$$

$$I_1 = \frac{I [I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a]}{I_2 \cdot R + I_2 \cdot R_a - I_1 \cdot R_a + R_a \cdot I_1 - R_a \cdot I_2} = \frac{I \cdot [I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a]}{I_2 \cdot R}$$

$$I = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot R}{I_2 (R + R_a) - I_1 \cdot R_a} = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot R}{R_a (I_2 - I_1) + I_2 \cdot R}$$

$$I = \frac{I_1 \cdot I_2}{\frac{R_a}{R} (I_2 - I_1) + I_2}$$

Si el valor de R intercalada en el circuito en serie con el amperímetro es tal que $R = R_a$, la expresión de la corriente se reduce a:

$$I = \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot I_2 \cdot I_1}$$

Es decir que la determinación de la corriente, si se satisface que $R = R_a$, se hace independiente de los valores de dichas resistencias, dependiendo únicamente de las dos lecturas, I_1 e I_2 , con lo cual se ha eliminado el error sistemático por inserción instrumental al desaparecer R_a .

1b. Medición de la f.e.m. por el método de las dos lecturas

Vamos a ver como aplicando este método de deflexión es posible eliminar el error de inserción de un voltímetro en la medición de la f.e.m. de una fuente de c.c.

Si midiéramos con un voltímetro ideal de resistencia interna R_v infinita, la tensión entre los puntos 1 y 2 (figura 2a) nos daría

$$U_{(1-2)} = U_0 \quad (1)$$

Si para la medición utilizamos un voltímetro de resistencia interna R_v , figura 2b, la lectura será:

$$U_{(1-2)} = U_0 - \frac{U_0}{R_0 + R_v} \cdot R_v \quad (2)$$

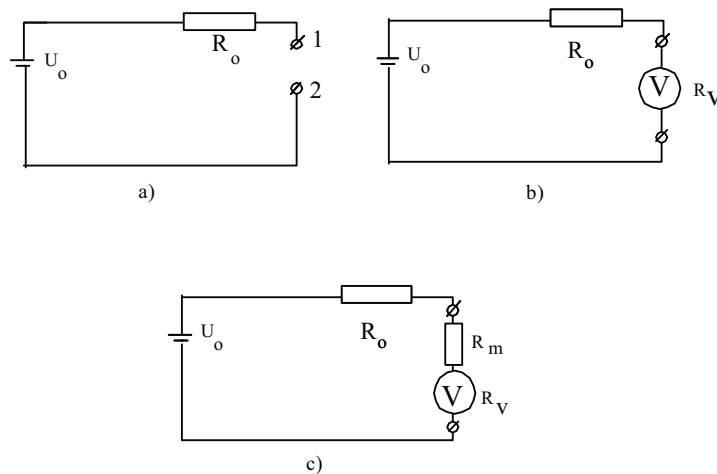


Figura 2

Si a esta última expresión la llamamos U_1 podemos escribir la expresión análoga a la anterior:

$$U_1 = \frac{U_0}{R_0 + R_v} \cdot R_0 \quad (3)$$

El método utilizado consiste en intercalar una resistencia en serie con el instrumento (figura 2c). Esta resistencia recibe el nombre de "resistencia multiplicadora" y de valor establecido por la relación:

$$R_m = R_v \cdot (m - 1)$$

La tensión U_{1-2} medida ahora por el voltímetro, con la resistencia R_m intercalada será:

$$U_2 = \frac{U_0}{R_0 + R_v + R_m(m-1)} \cdot [R_v + R_v \cdot (m-1)]$$

$$U_2 = \frac{U_0}{R_0 + R_v + R_v \cdot m - R_v} [R_v + R_v \cdot m - R_v]$$

$$U_2 = \frac{U_0 \cdot R_v \cdot m}{R_0 + R_v \cdot m} \quad (4)$$

Si relacionamos las dos lecturas 3 y 4, tendremos:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{U_0}{R_0 + R_v} \cdot R_v}{\frac{U_0 \cdot R_v \cdot m}{R_0 + R_v \cdot m}} = \frac{R_0 + R_v \cdot m}{(R_0 + R_v) \cdot m}$$

Despejando el valor de R_0 tendremos:

$$R_0 = \frac{R_v \cdot m \cdot (U_2 - U_1)}{(U_1 \cdot m - U_2)} \quad (5)$$

Si la expresión 5 la reemplazamos en la expresión 3 tendremos:

$$U_1 = \frac{U_0 \cdot R_v}{\left[\frac{R_v \cdot m (U_2 - U_1)}{(U_1 \cdot m - U_2)} \right] + R_v}$$

$$U_1 = \frac{U_0 \cdot R_v}{\frac{R_v \cdot m \cdot U_2 - R_v \cdot m \cdot U_1 + R_v \cdot U_1 \cdot m - U_2 \cdot R_v}{U_1 \cdot m - U_2}} = \frac{U_0 \cdot R_v \cdot (U_1 \cdot m - U_2)}{R_v (m \cdot U_2 - U_2)}$$

Despejando U_0 :

$$U_0 = \frac{U_1 (m U_2 - U_2)}{m U_1 - U_2} \quad (6)$$

Si $m = 2$, que sería el caso en que $R_m = R_v$

$$U_0 = \frac{U_1 \cdot U_2}{2 U_1 - U_2} \quad (7)$$

Vemos que haciendo $m = 2$, la medición no depende de los valores de resistencia R_m y R_v , por lo tanto el error de inserción quedaría eliminado.

2.- Método de la media deflexión

Mediante esta técnica trataremos indirectamente de determinar la resistencia interna de instrumentos de corriente continua.

2a. Determinación de la resistencia de un voltímetro

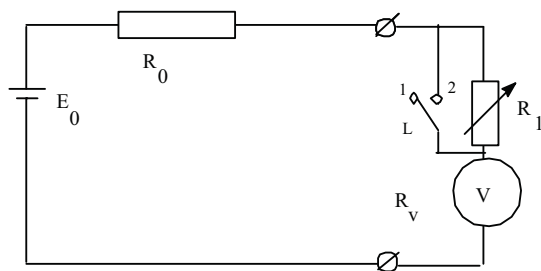


Figura 3

Para la medición de la resistencia R_v de un voltímetro, puede utilizarse una resistencia auxiliar variable R_1 . La fuerza electromotriz E_0 auxiliar, tiene una resistencia interna R_0 .

Si el interruptor L está abierto (posición 1 de la figura 3) la lectura del instrumento está dada por la expresión:

$$U_1 = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_v} \cdot R_v \quad (1)$$

Si el interruptor está conectado (posición 2) la lectura ahora será:

$$U_2 = \frac{E_0}{R_0 + R_v} R_v \quad (2)$$

Dividiendo 1 y 2

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= \frac{\frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_v} \cdot R_v}{\frac{E_0}{R_0 + R_v} \cdot R_v} = \frac{R_0 + R_v}{R_0 + R_1 + R_v} \\ R_v &= \frac{R_0(U_1 - U_2) + U_1 \cdot R_1}{(U_2 - U_1)} = \frac{-R_0(U_2 - U_1) + U_1 \cdot R_1}{U_2 - U_1} \\ R_v &= \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 - U_1} - R_0 \quad (3) \end{aligned}$$

Si R_0 es pequeña frente a la resistencia interna del voltímetro, lo cual es lo más común:

$$R_0 \ll V_R$$

$$R_v \cong \frac{U_1 R_1}{U_2 - U_1} = \frac{R_1}{\frac{U_2}{U_1} - 1} \quad (4)$$

Si logramos por medio de R_1 obtener que la deflexión U_2 fuese igual a:

$$U_2 = 2 U_1$$

tendríamos que la ecuación (4) se convierte en:

$$R_v \approx R_1$$

En la práctica, se busca por medio de R_1 un valor de ésta, tal que se cumpla la relación:

$$V_1 = \frac{V_2}{2} \quad (5)$$

Si R_1 es una caja de resistencias variable por décadas, leyendo el valor de ésta, se obtiene el valor de R_v .

2b. Determinación de la resistencia interna de un amperímetro de corriente continua

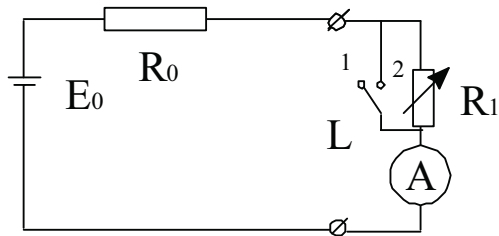


Figura 4

Pretendemos determinar la resistencia interna R_a de un amperímetro por medio de dos lecturas utilizando el método de la "**MEDIA DEFLEXIÓN**".

Con el interruptor L en la posición 1 (abierto), figura 4, la lectura del instrumento será:

$$I_1 = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_a} \quad (1)$$

Si ahora se coloca el interruptor en 2 (cerrado), la lectura será:

$$I_2 = \frac{E_0}{R_0 + R_a} \quad (2)$$

Haciendo el cociente de las expresiones 1 y 2

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_a}}{\frac{E_0}{R_0 + R_a}} = \frac{R_0 + R_a}{R_0 + R_1 + R_a}$$

$$R_0(I_1 - I_2) = R_a(I_2 - I_1) - I_1 \cdot R_1$$

$$R_a = \frac{R_1}{\frac{I_2}{I_1} - 1} - R_0$$

$$R_a = \frac{I_1 \cdot R_1}{I_2 - I_1} - R_0 \quad (3)$$

Si a través de la resistencia variable R_1 logramos que la deflexión en el amperímetro en la segunda

medición sea el doble que cuando tenemos intercalada a R_1 , es decir:

$$I_2 = 2 I_1$$

la ecuación (3) se transforma en:

$$R_a = \frac{R_1}{2-1} - R_0 \rightarrow R_a = R_1 - R_0 \quad (4)$$

Como la resistencia R_1 es una caja de resistencias de décadas variable leyendo el valor directamente y conociendo el valor R_0 se determina rápidamente el valor de R_a .

Determinación de la resistencia interna de una batería

Es bastante común el problema de determinar la resistencia interna de una batería. Aplicando una técnica de medida es posible hallar una solución.

En la figura 5 tenemos una batería de f.e.m. E cuya resistencia interna R_0 es la que se quiere determinar.

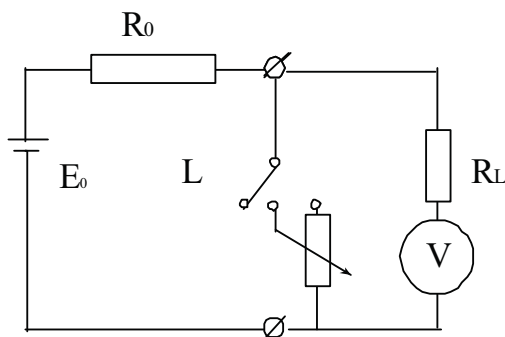


Figura 5

La tensión entre los terminales de la batería se mide para distintos valores de carga, utilizando para ello a una resistencia R_L .

El interruptor L permite la conexión momentánea de R_L cuando se quiere hacer la lectura de la tensión, evitando así el extraer una corriente excesiva durante un período prolongado de tiempo. Si cerramos el interruptor L , el voltímetro indicará una lectura igual a:

$$U = \frac{E}{R_0 + \frac{R_L \cdot R_v}{R_L + R_v}} \cdot \frac{R_L \cdot R_v}{R_L + R_v} \quad (1)$$

$$U = \frac{E \cdot (R_L + R_v)}{R_0 \cdot (R_L + R_v) + R_L \cdot R_v} \cdot \frac{R_L \cdot R_v}{(R_L + R_v)} = \frac{E \cdot R_L \cdot R_v}{R_0 \cdot R_L + R_0 \cdot R_v + R_L \cdot R_v}$$

$$U = \frac{E \cdot R_L}{\frac{R_0 \cdot R_L}{R_v} + R_0 + R_L}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$(R_c + R_0) \gg \frac{R_L \cdot R_0}{R_v}$$

la ecuación 1, la podemos escribir como:

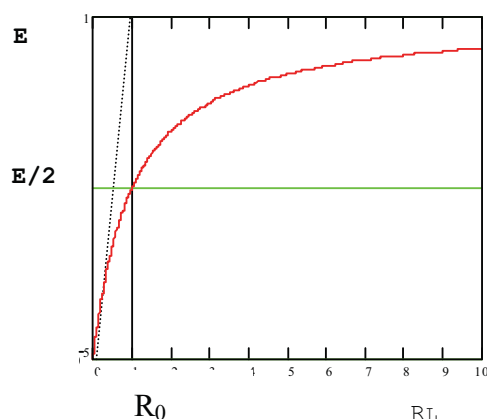


Figura 6

$$U \approx \frac{E \cdot R_L}{R_0 + R_L} \rightarrow U \approx \frac{E}{\frac{R_0}{R_L} + 1} \quad (2)$$

Si a continuación, graficamos $U = f(R_L)$, tenemos la curva de la figura 6. En ésta notamos que cuando R_L tiene un valor igual a R_0 el voltímetro indicará una tensión igual a la mitad de la f.e.m. de la batería.

$$\frac{1}{U} = \frac{R_0 + R_L}{E \cdot R_L} = \frac{R_0}{R_L} \cdot \frac{1}{E} + \frac{1}{E} \quad (3)$$

Además si la expresión (2) la invertimos, nos quedará la ecuación de una recta:

La ecuación (3) indica que la curva será una línea recta de pendiente R/E y que corta a las ordenadas en el valor $1/E$. Se pueden determinar experimentalmente varios puntos tales como 1, 2, 3, 4... La línea recta trazada, dará en su corte con el eje de ordenadas el valor de $1/E$. Si a partir de este punto trazamos un segmento igual a $1/E$, determinaremos en el eje de ordenadas el valor $2/E$. A partir de este último punto se traza una paralela al eje de abscisas. Cuando corte a la recta su proyección sobre el eje de las x, determinará el valor de la resistencia interna de la batería: R_0 , - figura 7-. (Para el ejemplo del gráfico sería igual a la unidad).

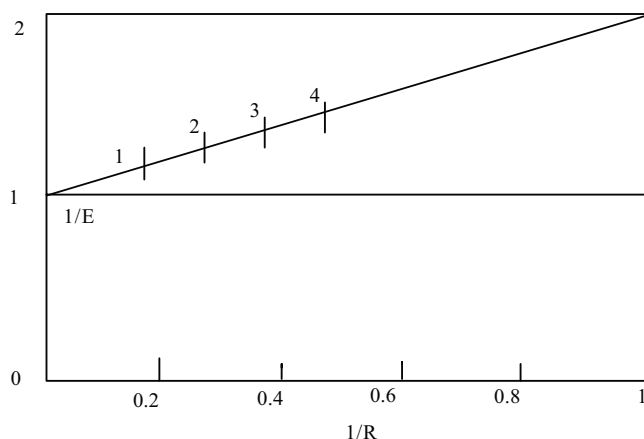


Figura 7

Métodos de comparación:

Se define como "método de comparación" cuando en él se compara la magnitud incógnita con otra de exactitud conocida, llamada patrón y presente en la experiencia. Por ejemplo,

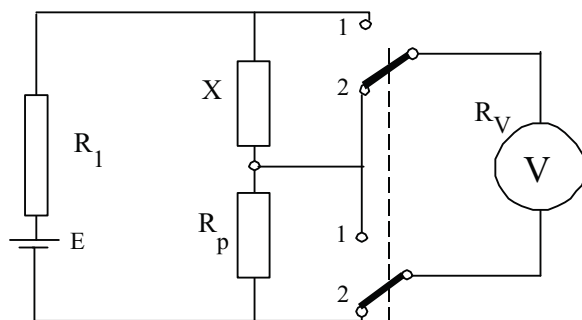


Figura 8

la verificación de un amperímetro por comparación de su indicación con la de otro mejor clase y conectado en serie con aquél, de modo que la intensidad que lo atraviesa es exactamente la misma. La indicación del amperímetro ensayado es la cantidad incógnita y su error está dado por la diferencia con la exactitud conocida, que es la indicación del amperímetro patrón.

Hay algunos métodos de comparación que, aunque parecen sólidos en principio, entrañan serias dificultades prácticas

cuando se realizan utilizando técnicas de cero, como veremos más adelante.

Ejemplo: comparación de dos resistencias

La resistencia desconocida X se conecta en serie con otra patrón R_p y comparando las respectivas diferencias de potencial. Estas caídas pueden ser medidas con voltímetro o métodos de cero.

Para su estudio, consideremos que en R_1 incluye todas las resistencias del circuito, como son: las de regulación, las de los conductores, etc.

Con el interruptor en 1 (figura 8), la indicación del voltímetro será:

$$V_x = I \cdot X_m \quad \text{siendo } X_m \neq \text{resistencia verdadera.}$$

Con el interruptor en 2, ahora la indicación del voltímetro será:

$$V_p = I \cdot R_p$$

De las anteriores expresiones se obtiene:

$$\frac{V_x}{V_p} = \frac{X_m}{R_p}$$

$$X_m = \frac{V_x \cdot R_p}{V_p} \quad (1)$$

En la expresión 1, tenemos que la resistencia media X_m se obtiene con la relación de las lecturas o deflexiones del voltímetro V_x y V_p , que una misma corriente I produce sobre X_m y R_p , respectivamente, multiplicada por la resistencia R_p .

Esta medición adolece de un error sistemático, pues es evidente que la intercalación del voltímetro de resistencia interna R_v modifica la corriente I del circuito, la cual sería diferente en las dos mediciones realizadas, y que no tuvimos en cuenta para llegar a la ecuación 1.

Análisis del error sistemático

En la medición de V_p el voltímetro de resistencia R_v indicará realmente:

$$V_p = \frac{E}{(R_l + R_p) + \frac{(R_p \cdot R_v)}{(R_p + R_v)}} \cdot \frac{(R \cdot R_v)}{R_p + R_v} \rightarrow V_p = \frac{E \cdot R_p \cdot R_v}{(R_l + X) \cdot (R_p + R_v) + (R_p \cdot R_v)} \quad (2)$$

En la medición de V_x el voltímetro indicará:

$$V_x = \frac{E}{(R_l + R_p) + \frac{(R_v \cdot X)}{(X + R_v)}} \cdot \frac{(R_v \cdot X)}{(X + R_v)} \rightarrow V_x = \frac{E \cdot R_v \cdot X}{(R_l + R_p) \cdot (X + R_v) + (R_v \cdot X)} \quad (3)$$

Haciendo el cociente de V_x y V_p

$$\frac{V_x}{V_p} = \frac{\frac{E \cdot R_v \cdot X}{(R_l + R_p) \cdot (R_v + X) + (R_v \cdot X)}}{\frac{E \cdot R_p \cdot R_v}{(R_l + X) \cdot (R_p + R_v) + (R_p \cdot R_v)}} = \frac{X}{R_p} \cdot \frac{(R_l + X) \cdot (R_p + R_v) + R_p \cdot R_v}{(R_l + R_p) \cdot (R_v + X) + (R_v \cdot X)} = \frac{X}{R_p} \cdot A$$

El valor verdadero de X valdrá:

$$X = R_p \cdot \frac{V_x}{V_p} \cdot \frac{1}{A}$$

Siendo el valor de A:

$$A = \frac{(R_l + X) \cdot (R_p + R_v) + R_p \cdot R_v}{(R_l + R_p) \cdot (R_v + X) + (R_v \cdot X)}$$

El error absoluto será entonces:

$$\Delta X = X_m - X = R_p \cdot \frac{V_x}{V_p} - R_p \cdot \frac{V_x}{V_p} \cdot \frac{1}{A} = R_p \cdot \frac{V_x}{V_p} \left(1 - \frac{1}{A}\right)$$

$$\Delta X = R_p \cdot \frac{V_x}{V_p} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \quad (5)$$

El error relativo sistemático entonces es:

$$e_s = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\frac{V_x}{V_p} \cdot R_p \cdot \left(1 - \frac{1}{A}\right)}{\frac{V_x}{V_p} \cdot R_p \cdot \frac{1}{A}} = \frac{1 - \frac{1}{A}}{\frac{1}{A}} = A - 1$$

Si reemplazamos el valor de A:

$$e_s = \frac{(R_l + X) \cdot (R_p + R_v) + (R_p \cdot R_v)}{(R_l + R_p) \cdot (R_v + X) + (R_v \cdot X)} - 1$$

La cual desarrollada tendrá el valor:

$$e_s = \frac{R_l \cdot (R_p - X)}{(R_l + R_p) \cdot (R_v + X) + (R_v \cdot X)} \quad (6)$$

Es evidente que para que el error relativo sistemático debido al método sea nulo se tienen que cumplir algunas de las siguientes condiciones:

- a) $R_v = \infty$
- b) $R_l = 0$
- c) $R_p = X$

a) Si $R_v = \infty$ se cumple la expresión 1, pues la inclusión del voltímetro no provoca error de inserción, es el caso de medición de tensión con el método de oposición que veremos más adelante.

$$\frac{V_{x_m}}{V_{p_m}} = \frac{V_x}{V_p}$$

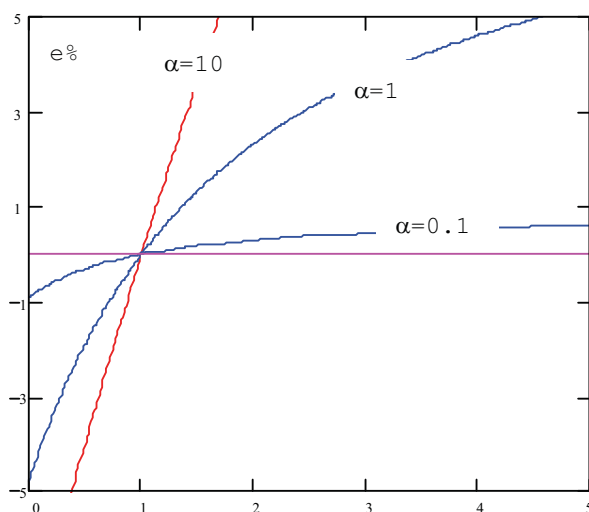


Figura 9

b) y c) Para cualquiera de estos casos se altera el circuito al conectar el voltímetro y las caídas medidas de V_x y V_p difieren a pesar de lo cual se mantiene:

Hemos definido hasta aquí las condiciones que deben cumplirse para anular al error. Pero estas condiciones no siempre se pueden cumplir. Veamos ahora como varía grandor del error cuando no se cumple ninguna de las condiciones referidas. Para ello definimos los siguientes parámetros:

$R_l = \alpha X$, $R_v = \beta X$ y $R_p = \gamma X$
con lo que la expresión queda:

$$e\% = \frac{\alpha(\gamma-1)}{\beta + (1+\beta)(\alpha + \gamma)} \cdot 100$$

En la figura 9 hemos graficado la variación del error en función de γ , dejando constante el valor de $\beta = 10$ y tomando tres valores distintos de α , para 10, 1 y 0.1. Se aprecia como se verifica que, a medida en las curvas dibujadas el error disminuye a medida que nos acercamos a $\gamma=1$, siendo nulo en este punto. Cuanto menor es α , menor la pendiente de la curva y por ende menor el error. Se ve que todas las curvas pasan por cero para $R=X$.

Análisis del error instrumental:

Tomando la expresión del valor medido

$$X_m = \frac{V_x}{V_p} \cdot R_p$$

y teniendo en cuenta la teoría de propagación de errores, se tiene que el error relativo instrumental será:

Siendo:

$$e_{T_x} = e_{i_{V_x}} + e_{i_{V_p}} + e_p$$

e_{T_x} :error instrumental total

$e_{i_{V_x}}$:error instrumental debido a la medición de V_x

$e_{i_{V_p}}$:error instrumental debido a la medición de V_p

e_p :error de calibración de R_p (generalmente si se trata de una resistencia patrón se desprecia)

Luego como el error instrumental o de indicación está dado por:

$$e_i = \frac{c \cdot \text{Alcance}}{100 \cdot V_m}$$

Tendremos:

$$e_{i_{V_x}} = \frac{c \cdot \lambda_m \cdot X}{100 \cdot \lambda_x}$$

$$e_{i_{V_p}} = \frac{c \cdot \lambda_m \cdot X}{100 \cdot \lambda_p}$$

como se trata del mismo instrumento y suponiendo que no se varíe el alcance, el error relativo instrumental será:

$$e_{T_x} = \frac{c}{100} \cdot \lambda_m \times \left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_p} \right)$$

En el mejor de los casos cuando:

$$\lambda_x \approx \lambda_R \approx \lambda_{\max}$$

el error instrumental es el doble que el de la clase del voltímetro.

Métodos de sustitución

Los métodos de sustitución son capaces de dar una medida muy exacta de una cantidad desconocida en función de un patrón conocido con el que se compara directamente. Son métodos muy sencillos y sin embargo muy útiles. Por medio de ellos se pueden evitar errores debidos al calibrado de los instrumentos y a los efectos de la carga que introduce. Más aún, se evitan los errores imputados a la resistencia de los terminales, a la f.e.m. térmica de los contactos eléctricos y a otras causas.

No obstante, puede ser grande el precio pagado para evitar todos esos errores. Se debe disponer de un patrón conocido del mismo valor de la cantidad desconocida que se quiere medir.

Aplicación del método de sustitución para la medición de una resistencia

Lo que se trata es de medir el parámetro incógnita (Resistencia de valor óhmico X) mediante la sustitución de éste por otro patrón, dando ambos la misma deflexión en el instrumento, lo que indica que la incógnita y el patrón son iguales.

En el circuito de la figura 10 la resistencia R_i , para el análisis del sistema la vamos a considerar conteniendo la resistencia interna de la fuente, la resistencia de contacto, la resistencia interna del amperímetro, además de la R_i variable puesta en serie.

Por tanto:

$$R_i = (R_i + R_{\text{cont}} + R_A + R_I)$$

Procedimiento

1.- Con el interruptor L en la posición 1, variamos R_i hasta lograr una deflexión exacta en el instrumento: λ_1

2.- Con el interruptor L en 2, variamos R_p hasta lograr la misma deflexión que en el caso 1, luego:
 $\lambda_2 = \lambda_1$

Aclaración: Toda la operación 2, se hace sin tocar a R_i .

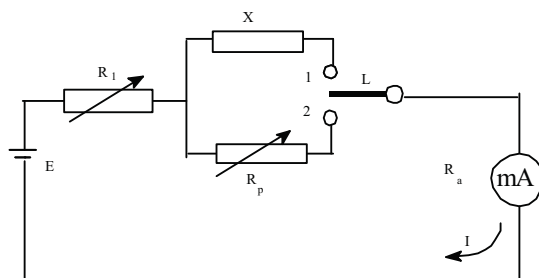


Figura 10

3.- En estas condiciones:

$$X = R_p$$

Como R_p suele ser una caja de décadas patrón de valores perfectamente conocidos, la lectura de R_p , que provoca una deflexión $\ddot{e}_2 = \ddot{e}_1$ será directamente el valor de X .

Fuentes de error del método

1.- Si el *amperímetro no fuera preciso*, introduciría error. (Esto quiere decir si el amperímetro no repite siempre la misma deflexión para iguales valores de corriente).

2.- La *estabilidad de la fuente*, es otra fuente de error el hecho de que la fuente no permanezca constante. Esta es una razón por la cual las dos mediciones (con X y R_p) deban hacerse rápidamente o utilizando una fuente regulable confiable.

3.- La *calibración de R_p* , obviamente, si a R_p se le asigna un valor, y realmente tiene otro, la lectura de X será errónea.

Error sistemático del método o "error por insensibilidad"

Para la evaluación del error sistemático del método, llamado también "error por insensibilidad", vamos a realizar un ejemplo.

Supongamos que de acuerdo al circuito dado, trabajamos con un amperímetro de alcance igual a 10 mA; y E , R_p y X son tales que, en la primera lectura, (L en 1), la corriente que circula es de 9 mA. Considerando que el poder separador del ojo humano es aproximadamente:

$$\Delta\lambda = \frac{1}{10} \div \frac{1}{5} \text{ de división}$$

la lectura considerada *exacta*, podría haber estado (exagerando la escala en la figura 11) así:

$$\lambda_1 = 9 + \Delta\lambda.$$

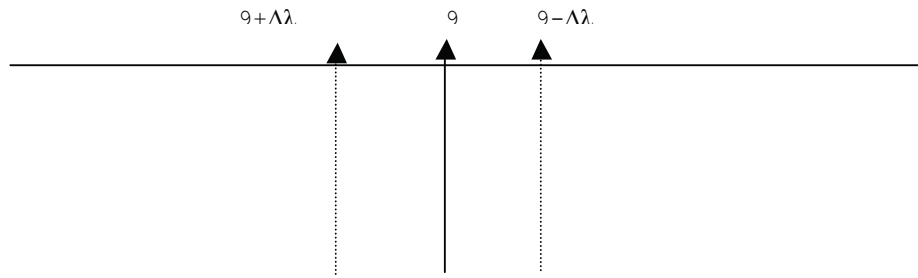


Figura 11

Al poner L en posición 2, lo peor que nos puede suceder es que se produzcan la lectura con una diferencia $\Delta\lambda$ pero en defecto, es decir: $\lambda_2 = 9 - \Delta\lambda$.

En estas condiciones, el error absoluto sería como máximo: $2 \Delta X$, (considerando ΔX el error en la medición de X debido al $\Delta\lambda$).

Luego: ***ERROR ABSOLUTO MÁXIMO*** $= E = 2 \Delta X$ (1)

El error relativo de insensibilidad lo podemos definir como:

$$e_s = \frac{2\Delta X}{X} \quad (2)$$

El monto de esta indeterminación depende, además de las características del amperímetro, de la relación entre λ y R (o, lo que es lo mismo, X) y su influencia sobre la indeterminación de X, define la sensibilidad del método y su expresión viene dada por:

$$S = \frac{X}{\Delta X}$$

donde ΔX es el mínimo incremento de X (o bien de R) que es apreciable en el instrumento a través de $\Delta\lambda$.

Para el estudio cuantitativo de la sensibilidad del método lo analizamos de la siguiente manera:

1) Interruptor en la posición 1:

$$E = (R_1 + X).I \quad \therefore \quad I = \frac{E}{(R_1 + X)}$$

Derivando la ecuación de I, respecto de X:

$$\frac{dI}{dX} = -\frac{E}{(R_1 + X)^2}$$

Si tomamos los diferenciales como incrementos finitos:

$$\frac{\Delta I}{\Delta X} = -\frac{E}{(R_1 + X)^2} \therefore \Delta X = -\frac{\Delta I}{E} \cdot (R_1 + X)^2$$

No teniendo en cuenta el signo negativo, y reemplazando el valor de la fuente E, tenemos que:

$$\Delta X = \frac{\Delta I}{I \cdot (R_1 + X)} \cdot (R_1 + X)^2 = \frac{\Delta I}{I} \cdot (R_1 + X)$$

Multiplicando numerador y denominador por la constante de escala del instrumento (C_E)

$$\Delta X = \frac{\Delta I \cdot C_E}{I \cdot C_E} \cdot (R_1 + X)$$

Como $\Delta I / C_E = \Delta \lambda$ (incremento de incertidumbre) y $I / C_E = \lambda_0$, la expresión anterior se simplifica:

$$\Delta X = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \cdot (R_1 + X)$$

Luego, la sensibilidad del método será:

$$S = \frac{X}{\Delta X} = \frac{1}{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{(R_1 + X)}{X}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \left(\frac{R_1}{X} + 1 \right)}$$

Lo que nos dice que para un determinado valor de X, la sensibilidad será mayor si hacemos que:

- 1) λ_0 tienda a $\lambda_{\text{máx}}$
- 2) El amperímetro debe ser de buena clase (tener buena resolución), es decir $\Delta \lambda$ mínimo.
- 3) Hacer $R_1 \rightarrow 0$ (Condición teórica ideal)
- 4) Hacer $R_1 \ll X$

Para analizar la influencia de R_1 conviene expresar la sensibilidad de la siguiente manera:

$$S = \frac{X}{\Delta X} = \frac{X}{\Delta \lambda} \frac{\Delta \lambda}{\Delta X} \approx \frac{X}{\Delta \lambda} \frac{d\lambda}{dX}$$

expresión muy general que nos dice que para cierta X la sensibilidad es inversamente proporcional a la resolución del detector y directamente a la pendiente de la curva característica “lectura en el detector - resistencia que provoca la variación”.

Veamos la característica para dos casos distintos: uno para $R_1=0$ y otro para R_1 distinto de cero.

Como se sabe se trata de dos hipérbolas: para $R_1=0$ las asíntotas coinciden con los ejes, para $R_1 \neq 0$, la vertical está desplazada en $-R_1$. En la figura 12 se ha trazado la curva para $R_1 \neq 0$ la tensión ha sido aumentada para que con la misma X , la corriente I tenga el mismo valor λ_0 que con $R_1=0$.

Se ve claramente que la mayor pendiente corresponde a $R_1=0$, en el punto de trabajo, lo que significa una mayor sensibilidad en el método.

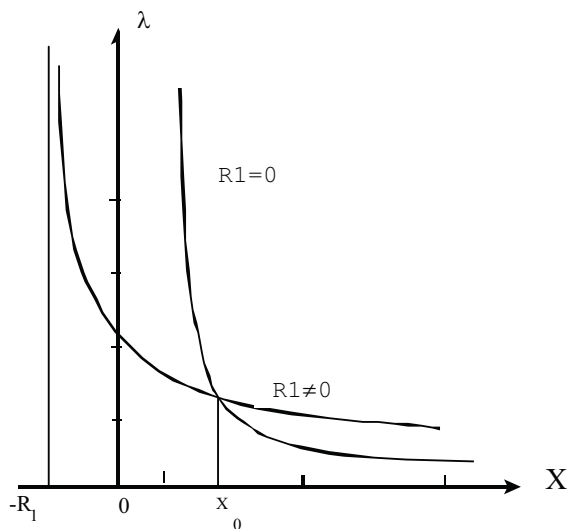


Figura 12

Conclusión: a fin de lograr la máxima sensibilidad conviene elegir la tensión E de valor tal que con el mínimo valor de R_1 , eventualmente cero produzca la máxima desviación en el instrumento.

Interpolación lineal

La resistencia variable R_p no es en realidad una reóstato de regulación lineal, sino que está constituida por décadas. El mínimo valor de variación está dado por la resolución de la década de menor valor, ésta puede ser de 1, 0.1 o 0.01 Ω por salto. Teniendo en cuenta esto y suponiendo que disponemos de una caja cuya década menor es de 1 Ω , es fácil comprender que si el valor de la incógnita X es de por ejemplo, 80.4 Ω , será imposible reproducir la deflexión λ_0 , puesto que al carecer de décimas los valores que puede tomar serán 80 y 81 Ω . En casos como éste, sin embargo es posible obtener una mejor aproximación mediante el recurso matemático denominado de “interpolación lineal” que pasamos a describir.

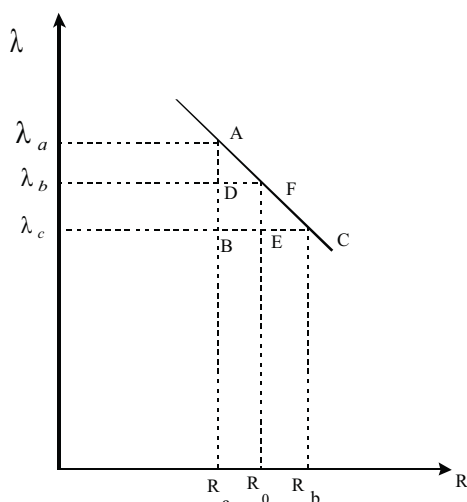


Figura 13

Si representamos con λ la función de R en un pequeño entorno alrededor de λ_0 , la gráfica con mucha aproximación es lineal. Llamando con R_a y R_b a los valores de la caja que produce las deflexiones λ_a y λ_b , las más aproximadas a λ_0 , por exceso y por defecto, respectivamente. En nuestro ejemplo R_a es de 80 y R_b de 81Ω. De la semejanza de los triángulos ABC y FEC (Figura 13), obtenemos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

Reemplazando valores obtenemos finalmente el valor de R_0 :

$$R_0 = R_a + (R_b - R_a) \frac{(\lambda_a - \lambda_0)}{(\lambda_a - \lambda_b)}$$

Este recurso es también utilizado en otras técnicas de medidas, tales como el puente de Wheatstone, etc.

Técnicas de oposición

La técnica de oposición, sirve fundamentalmente para la medición de diferencias de potencial, sin embargo a través de estas últimas también pueden medirse resistencias y corrientes.

El principio en que se basa esta técnica es que la diferencia de potencial incógnita se mide partiendo de otra diferencia de potencial variable a voluntad, que previamente ha sido igualada a aquella. Dicha igualación se verifica por medio de un galvanómetro como veremos más adelante.

Principio del método de oposición

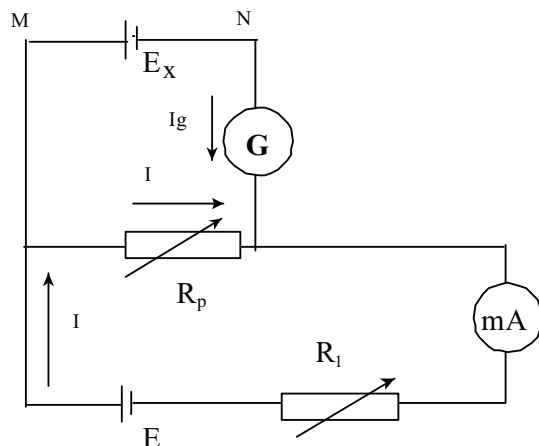


Figura 14

Supongamos que tenemos que medir la f.e.m. de una batería o pila, a la cual denominamos E_X .

Si intentáramos hacer la medición con un voltímetro, la intensidad de corriente que éste consume produce una caída ΔV en la resistencia interna de la fuente, y por lo tanto el voltímetro indicará un valor de tensión menor.

Si en cambio usamos un circuito como el de la figura 14, y por medio de la resistencia R_1 variable modificamos la corriente I de tal manera que el valor de caída de tensión en R_p sea igual a la diferencia de potencial V_{MN} , es decir

que cuando $I_g = 0$, tendremos :

$$I \cdot R_p = V_{MN} = E_x$$

El valor de E_x será entonces el producto de la corriente I leída en el miliamperímetro por el valor conocido de la resistencia patrón.

Es evidente que el mismo resultado se obtendría, si variáramos la resistencia patrón R_p , manteniendo constante a la resistencia R_1 .

Se deduce entonces que la medición de la f.e.m. se efectúa sin que exista corriente de circulación de la fuente E_x , lo cual implica que el error sistemático es nulo.

Otra forma de obtener el mismo resultado, es construir un circuito análogo al anterior, en el cual

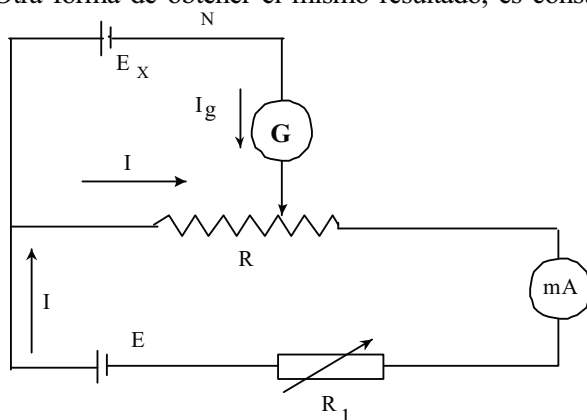


Figura 15

sustituimos a la R_p por una resistencia R a cursor de alta exactitud, dispuesta como muestra el esquema de la figura 15.

En este caso, se varía R_1 de manera tal que permita una corriente I en el circuito que lleva al índice del miliamperímetro a una división exacta, si es posible a fondo de escala, (esto último para cometer menor error instrumental). Una vez que se estableció esa corriente I , se busca con el potenciómetro al punto de la resistencia R tal que la corriente por el detector de cero (galvanómetro) sea cero, o sea $I_g = 0$. Una vez logrado el equilibrio de tensiones:

$$E_x = R' \cdot I$$

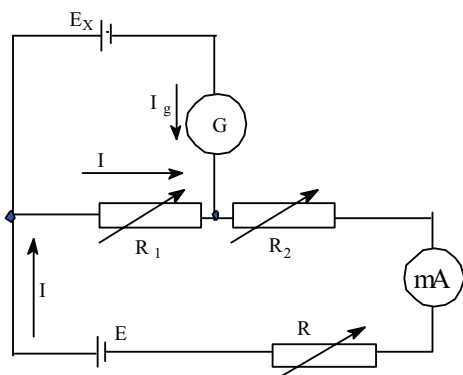


Figura 16

R' es la resistencia que queda en paralelo con E_x .

Una variante a este último esquema es el de la figura 16.

Se utilizan dos cajas de resistencias y el punto común B hace las veces de cursor. Una vez fijada la corriente I en el circuito, la suma de $R_1 + R_2$ debe permanecer constante.

Cuando se busca que la $I_g = 0$, se hace variando R_1 pero con la precaución que si disminuimos R_1 para hallar el equilibrio, en un valor por ejemplo ΔR deberá ser sumado a R_2 y viceversa.

De esa manera la corriente I se mantendrá constante,

la cual se deberá verificar en el miliamperímetro.

Por ejemplo, si I fuera establecida en $I = 10^{-4}$ a través de R_1 y las dos cajas de resistencias R_1 y R_2 fueran de 11.110Ω cada una, podrían llegarse a medir todas las tensiones de E_x comprendidas entre:

$$10^{-4}V \text{ y } 11.110 \cdot 10^{-4}V \text{ (1,111V)}$$

Se ve inmediatamente que si la f.e.m. a medir está en el orden del volt, la medición gozará de gran exactitud porque el error relativo será del orden de $10^{-4} V = 0,0001 V$.

Basados en este principio se construyen equipos comerciales denominados *compensadores* o también *potenciómetros*. Su construcción específica difiere entre sí, sin embargo el principio de funcionamiento es el mismo.

Errores del método de compensación

Los diferentes errores que son susceptibles de cometerse cuando se utiliza un compensador son los siguientes:

- a) Error en la *medición de la corriente I* , debido a la clase de exactitud del miliamperímetro.
 - b) Error debido a la presencia de *f.e.m.s. de origen térmico* fundamentadas en que en el circuito del compensador existen diferentes materiales, como ser: manganina en las resistencias, cobre en los conductores de unión. Por efecto del calor desarrollado por la corriente I circulante se generan f.e.m.s. térmicas por efecto Seebeck en el circuito. Si se quisieran medir f.e.m.s. de pequeño valor, del orden de las f.e.m.s. generadas, el error cometido sería alto. Un ejemplo de esto sería la medición de tensiones producidas por termocuplas. Compensadores de diseño especial eliminan este error.
 - c) Error por *calibración de la resistencia patrón R_p* (o R_1 y R_2).
 - d) Error por *incertidumbre en la determinación de $I_g = 0$* . A este error también se lo denomina de insensibilidad, y se debe a que el operador puede *ver* que $I_g=0$ cuando en realidad no es así, ya que una pequeña ΔI_g no perceptible para el observador está circulando.
- Por tanto si:

$$E_x = I \cdot R_{AB}$$

El error relativo por propagación estará dado por:

$$e_x = e_I + e_R$$

Siendo e_I error instrumental debido al amperímetro:

$$e_I = \frac{c \cdot \lambda_{\text{medido}}}{100 \cdot \lambda_{\text{max}}}$$

e_R = error de "fabricación o calibrado", dado por el fabricante.

Sensibilidad de la técnica de oposición

Se define sensibilidad del método de oposición a la relación:

$$S = \frac{E_x}{\Delta E_x}$$

siendo:

ΔE_x = incertidumbre en la determinación de E_x derivada de la ubicación incorrecta del equilibrio del sistema para que I_g sea nula.

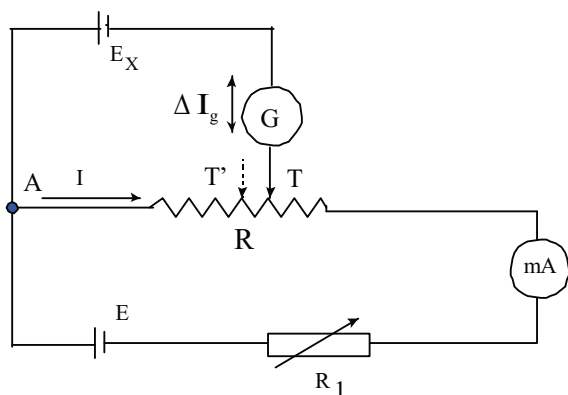


Figura 17

Vamos a analizar este error de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos el circuito de la figura 17, en el cual el cursor es colocado en el punto T' el cual no es el punto del equilibrio perfecto T, sino otro cualquiera que puede estar a la *derecha o izquierda* del punto de equilibrio. Puede ocurrir que el observador no observe en el galvanómetro ningún valor de I_g producto de ese desequilibrio, sin embargo existe un ΔI_g , debido a que el cursor no está ubicado en T sino en T'.

Luego estamos conectando en oposición

con E_x una tensión $U_{AT''}$, que no es igual a E_x sino algo diferente:

$$U_{AT''} = E_x + \Delta E_x$$

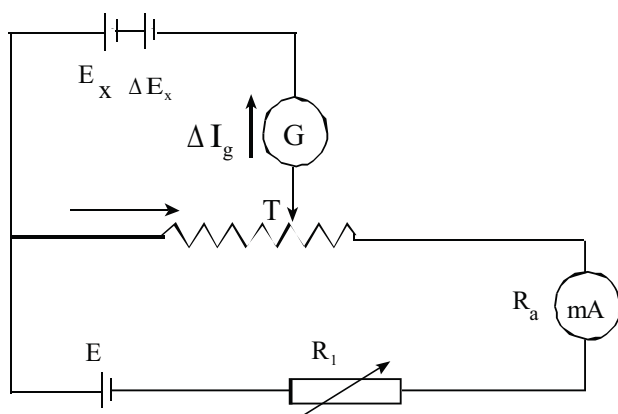


Figura 18

El valor ΔE_x es el valor de tensión que da origen al valor de corriente ΔI_g . Podríamos entonces al circuito de la figura 17 transformarlo en el de la figura 18. Ponemos el cursor en el punto ideal T, pero conectamos en serie con E_x una fuente de f.e.m. ΔE_x , que producirá el ΔI_g circulante.

Si ahora aplicamos el teorema de superposición al circuito de la figura 18, tendremos que este esquema es la suma de los dos esquemas dibujados en la figura 19.

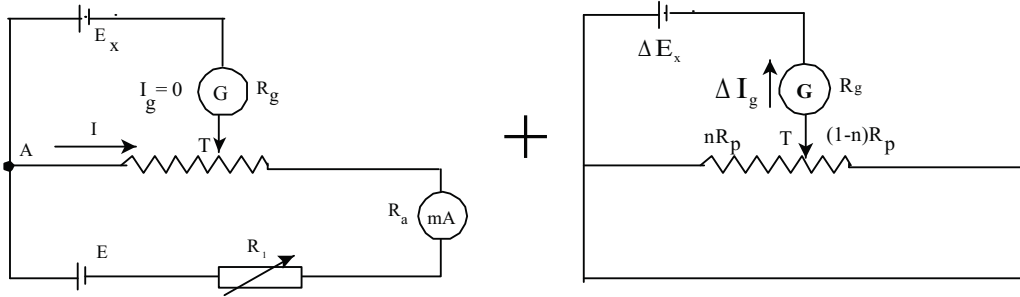


Figura 19

Si llamamos: R_g a la resistencia de la rama del galvanómetro, es decir a la suma de las resistencias internas del galvanómetro y de E_x ; y R_p a la resistencia total del circuito de corriente de compensación, es decir, la suma de las resistencias del divisor, de R_i (resistencia de regulación), del miliamperímetro, de la fuente E ; n a la fracción de R_p comprendida entre A y T ; ΔI_g a la desviación del galvanómetro provocada por la corriente de desequilibrio ΔI_g , K_I y S_I la constante y sensibilidad del galvanómetro respectivamente.

Si calculamos ahora ΔI_g , tendremos:

$$\Delta I_g = \frac{\Delta E_x}{R_g + n \cdot R_p \cdot \frac{(1-n) \cdot R_p}{R_p}} \quad (1)$$

pero:

$$\Delta I_g = C_E \cdot \Delta \lambda = \frac{1}{S_I} \cdot \Delta \lambda \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{\Delta \lambda}{S_I} = \frac{\Delta E_x}{R_g + n \cdot R_p \cdot (1-n)} \rightarrow \Delta E_x = \frac{\Delta \lambda [R_g + n R_p \cdot (1-n)]}{S_I}$$

Si aplicamos la expresión de la sensibilidad

$$S = \frac{E_x}{\Delta_0 \cdot E_x} = \frac{E_x}{\frac{\Delta \lambda}{S_I} \cdot [R_g + n R_p (1 - n)]} = \frac{S_I}{\Delta \lambda} \cdot \frac{E_x}{[R_g + n \cdot R_p (1 - n)]}$$

Si llamamos F_G , factor de sensibilidad del galvanómetro igual a:

$$F_g = \frac{S_I}{\Delta \lambda}$$

y a F_C factor de sensibilidad del circuito:

$$F_c = \frac{E_x}{[R_g + n \cdot R_p (1 - n)]}$$

Luego

$$S = F_G \cdot F_C \quad (3)$$

Estudiemos F_C :

$$F_C = \frac{E_x}{R_g + n \cdot R_p (1 - n)} = \frac{1}{\frac{R_g}{E_x} + \frac{n \cdot R_p \cdot (1 - n)}{E_x}}$$

Su inversa será:

$$\frac{1}{F_C} = \frac{R_g}{E_x} + \frac{n \cdot R_p \cdot (1 - n)}{E_x}$$

Llamando a:

$$\frac{E_x}{R_g} = F_{cg} \rightarrow \text{Término que depende del galvanómetro}$$

$$\frac{E_x}{n \cdot R_p (1 - n)} = F_{cd} \rightarrow \text{Término que depende del divisor de tensión}$$

Tenemos entonces que:

$$\boxed{\frac{1}{F_c} = \frac{1}{F_{cg}} + \frac{1}{F_{cd}}}$$

Vemos en la expresión anterior que F_c tiene que ser menor que el menor de F_{cg} y F_{cd} , lo que implica que si queremos que F_c sea de valor alto (porque así la sensibilidad del circuito será alta) debemos lograr que F_{cg} y F_{cd} sean elevados.

Luego:

$$F_{cg} = \frac{E_x}{R_g}$$

intentar que R_g sea lo más baja posible.

Del circuito de la figura 19:

$$E = I \cdot R_p$$

$$E_x = I \cdot R_{AT} = I \cdot n \cdot R_p$$

$$\frac{E_x}{E} = \frac{I \cdot n \cdot R_p}{I \cdot R_p} = n \quad \therefore \quad E_x = n \cdot E$$

Luego:

$$F_{cd} = \frac{n \cdot E}{n \cdot R_p (1 - n)} = \frac{I}{(1 - n)} \quad (5)$$

Resumiendo entonces:

Para lograr que F_{cg} y F_{cd} sean de valor elevado, pues así lo sería F_c y por lo tanto la sensibilidad del sistema, se deberán lograr las condiciones:

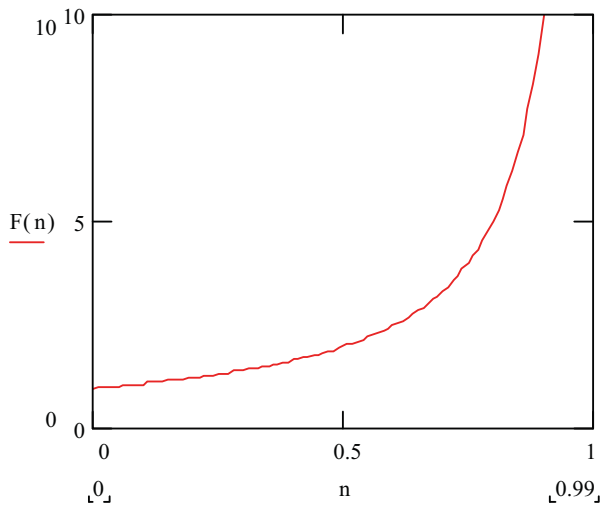


Figura 20

1) Hacer n lo mayor posible, (en la figura 20 se ha graficado la variación del factor F_{cd} en función de n) teóricamente n próximo a uno, valor éste al que no puede arribarse nunca debido a que en R_p están contenidas las resistencias:

- a) R_a del amperímetro
- b) R_i de la fuente E
- c) R_l de la resistencia de regulación.
- d) R_c resistencia de contactos

2) Hacer $E_x \cong E$; por ser $n E = E_x$, es decir hacer n lo más próximo a uno.

3) Hacer I lo mayor posible.

- 4) La resistencia del galvanómetro debe ser pequeña.

Uso de pila patrón para ajustar la intensidad en la técnica de oposición

En el circuito de oposición, la exactitud del método queda limitada por la exactitud del amperímetro. Es posible ajustar la intensidad I a un valor conocido con una exactitud mucho mayor, si en lugar del instrumento se usa el dispositivo de la figura 21.

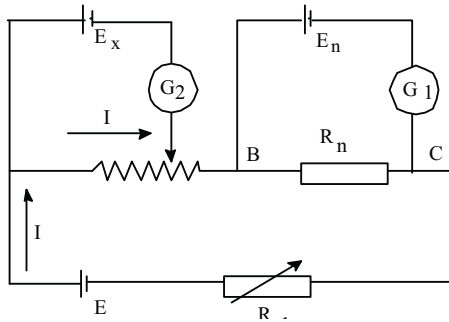


Figura 21

Mediante R_1 se regula I hasta conseguir que el galvanómetro G_1 indique cero. En ese momento:

$$I = \frac{E_n}{R_n}$$

Como E_n y R_n son pila y resistencias patrones de exactitud del orden de 0,01 %, la exactitud de I también será muy grande y de esa manera eliminamos el miliamperímetro.

Una simplificación del circuito anterior se muestra en la figura 22.

Donde:

R_2 ; R_3 ; R_1 : son cajas de décadas variables.

E_n : Pila patrón.

E_x : f.e.m. incógnita.

E : fuente auxiliar.

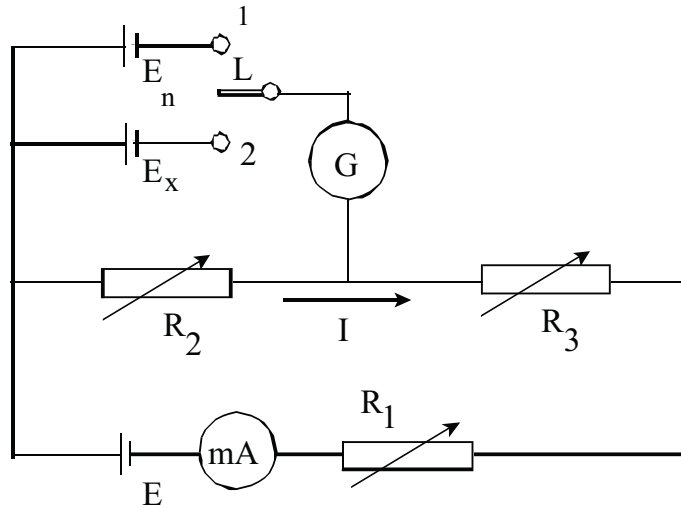


Figura 22

El procedimiento a seguir en este caso para la medición de E_x es el siguiente:

1) Se coloca el interruptor L en la posición 1, quedando conectada E_n .

2) Se busca un valor de R_2 , tal que:

$$E_n = I \cdot R_2$$

cuando por el galvanómetro no circula corriente.

3) Luego se coloca el interruptor en 2, conectando E_x . Variamos R_2 hasta hallar un valor de R'_2 tal que:

$$E_x = I \cdot R'_2$$

Por supuesto que la corriente I debió permanecer invariable, y para ello cuando se varía R_2 , si restamos o sumamos resistencia en ella, debe sumarse o restarse a R_3 , con el fin de que sea:

$$R_2 + R_3 = \text{cte}$$

tal cual habíamos visto anteriormente.

Por tanto si $I = \text{cte}$.

$$\frac{E_n}{E_x} = \frac{R_2}{R'_2} \therefore E_x = E_n \cdot \frac{R'_2}{R_2}$$

Es interesante advertir que con el uso de la pila patrón se hace innecesario el conocimiento de la intensidad que no aparece en la ecuación de E_x .

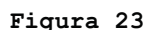
Compensadores

Los compensadores o potenciómetros son equipos comerciales, basados en la técnica de oposición que permiten mediciones de tensiones y de relación de tensiones con errores relativos mínimos de 10^{-5} y 10^{-6} . La tensión de comparación, debe estar dividida en intervalos de $10\mu\text{V}$ o $1\mu\text{V}$ en 5 o 6 estampas decimales.

Se construyen de tal manera que las f.e.m.s. por efecto Seebeck no superan el orden de $0,1\mu\text{V}$.

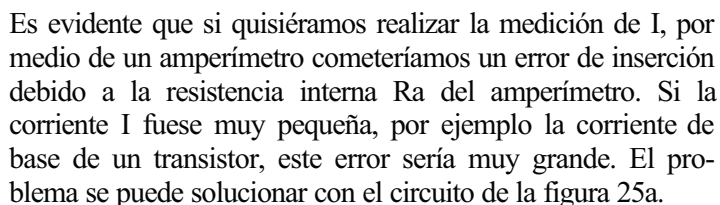
Existen modelos diferentes según el fabricante, los de mayor exactitud se construyen bajo el principio de "cascada", y un ejemplo y su esquema es el de la figura 23.

El esquema representa un compensador de gran exactitud de 6 cajas de décadas, de las cuales solo las décadas (2) y (3) están recorridas por la corriente auxiliar $I = 1\text{ mA}$. Las décadas (4) y (5) están empalmadas por medio de contactos dobles a las décadas (2) y (3).



Utilización de la técnica de oposición para eliminar los errores sistemáticos de inserción

Utilización de la técnica de oposición para eliminar los errores sistemáticos de inserción



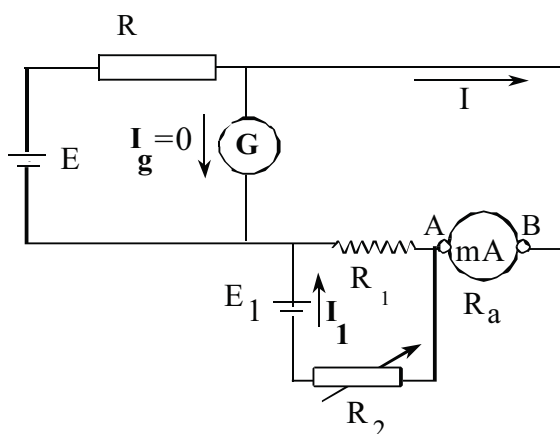


Figura 25(a)

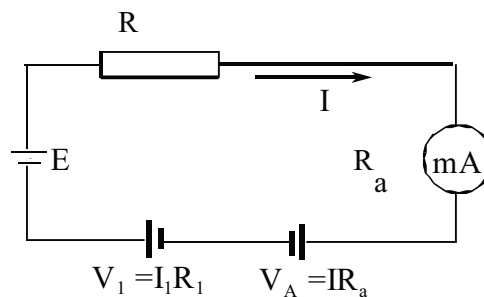


Figura 26(b)

Cuando $I_g = 0$, significa que la caída V_{AB} es igual y opuesta a $(R_1 \cdot I_1)$ por lo que, la caída de tensión V_{12} es nula.

La corriente I_1 es provista por un circuito auxiliar, dicha corriente se ajusta mediante R_2 hasta lograr que $I_g = 0$. En estas condiciones:

$$I_1 \cdot R_1 = I \cdot R_a$$

Por el principio de superposición podemos poner el circuito anterior, cuando $I_g = 0$ como muestra el circuito de la figura 25b. Lo cual nos indica, que el amperímetro medirá la verdadera corriente I .

2) Voltímetro de resistencia interna infinita

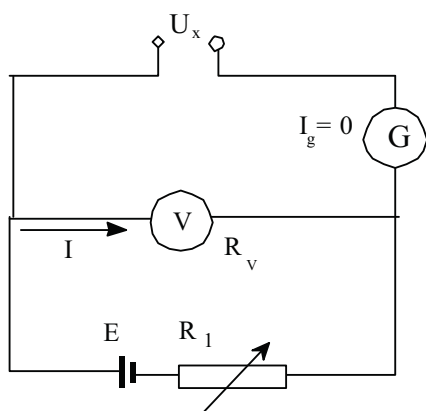


Figura 26

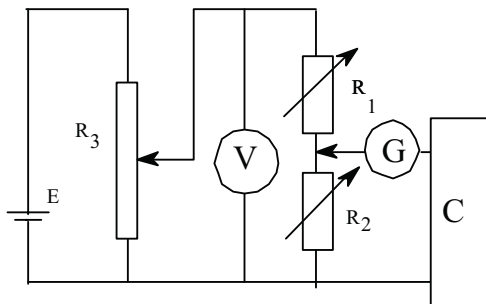
Habíamos visto que si necesitamos medir una tensión U_x con un voltímetro, la tensión medida por éste será menor, debido al consumo propio del instrumento. Se puede sin embargo eliminar el error sistemático en la medición, utilizando el esquema de la figura 26.

Con R_1 se varía la corriente I , de manera que cuando la caída sobre R_v , debida a I sea igual a U_x , la corriente en el galvanómetro será cero. Lo que indica que para U_x el voltímetro se comporta como de resistencia interna infinita.

Usos de los compensadores

Los compensadores se utilizan no sólo para medir tensiones, sino para comprobar o contrastar aparatos de gran exactitud destinados a medir la intensidad de corriente, la tensión y la potencia, así como para medir resistencias.

a) Contraste de un voltímetro



En este caso se va variando R_3 (figura 27) hasta obtener en el voltímetro una deflexión exacta, luego se ajusta el compensador hasta lograr que el galvanómetro indique cero. Como R_1 y R_2 son dos resistencias perfectamente conocidas y de gran exactitud, y además a través del compensador obtenemos el valor de la tensión U_k sin error de inserción, tendremos que la corriente I

valdrá:

$$I = \frac{U_k}{R_2}$$

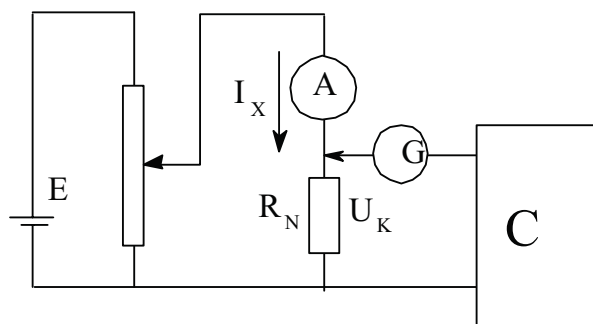
luego la tensión verdadera en el voltímetro U_x tendrá el valor:

$$U_x = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_k$$

Con diferentes valores de U_x , tendremos entonces la posibilidad de construir la quebrada de calibración del voltímetro.

b) Contraste de un amperímetro

Trabajando de la misma manera que en el caso anterior:



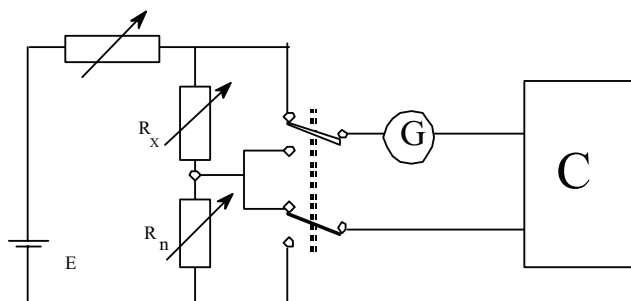
$$I_x = \frac{U_K}{R_n}$$

R_n : Resistencia patrón.

c) Medición de resistencia

La medición de resistencia se base en el método de comparación, mediante el compensador se determina U_x y U_N sin error de inserción (como si se tratara de un voltímetro $R_v = \infty$) y luego el valor de R_x será:

$$R_x = R_N \cdot \frac{U_x}{U_N}$$



CAPÍTULO V: MEDICIÓN DE LA POTENCIA ELÉCTRICA

Introducción

La potencia se puede definir como la velocidad con que la energía eléctrica entra en un circuito. La potencia eléctrica consumida en un elemento cualquiera del circuito, es la velocidad con que la energía eléctrica es convertida en cualquier otra forma de energía.

Potencia instantánea

En un instante cualquiera, la potencia instantánea es igual al producto de la tensión entre los terminales por la corriente que circula por el circuito en dicho instante:

$$p = u \cdot i \quad (1)$$

En los circuitos de corriente continua, si la tensión y la corriente se mantienen constantes, la potencia se mantendrá también constante y valdrá:

$$P = U \cdot I \quad (2)$$

Es decir, que para obtener el valor de la potencia en un circuito de corriente continua bastará medir los valores de tensión (volt) y corriente (ampere) y su producto expresado en watt dará la potencia eléctrica.

En los circuitos de corriente alternada se debe considerar que la potencia instantánea varía continuamente, dado que la corriente y la tensión sufren variaciones periódicas. Sin embargo en la mayoría de los casos no interesa la potencia instantánea sino la potencia media, que es el valor promedio de la potencia instantánea durante un período T . Si la corriente y la tensión son sinusoidales y están desfasadas en un ángulo φ :

$$u = U_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \omega t \quad (3)$$

$$i = I_{\text{máx}} \cdot \text{sen } (\omega t - \varphi) \quad (4)$$

la potencia media será:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^T U_m \times I_m \times \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} \cdot U_m \times I_m \times \cos \varphi$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (5)$$

Siendo U e I los valores eficaces de la tensión y la corriente y $\cos \varphi$ el factor de potencia del circuito monofásico.

El valor de la potencia eléctrica dado por la expresión (5) es válido como se ha dicho cuando la tensión y la corriente son sinusoidales. En el caso de magnitudes poliarmónicas, la potencia estará dada por el producto de los valores eficaces de las corrientes y tensiones de igual frecuencia, por el coseno del ángulo existente entre ambas. La suma de todos estos productos dará la potencia eléctrica:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n$$

Medición de potencia en corriente monofásica

Ya hemos visto al estudiar *INSTRUMENTOS ELECTRODINÁMICOS* el funcionamiento del vatímetro y su conexión para la medición de la potencia eléctrica en corriente alterna monofásica. Recordemos que de las dos conexiones posibles - corta y larga - siempre es más conveniente la primera: pues es más seguro el conocimiento de la resistencia del circuito voltimétrico R_V .

Para eliminar el error sistemático por inserción se descontará a la potencia medida el consumo propio de la voltimétrica:

$$P = P_m - \frac{U^2}{R_V}$$

Donde $R_V = R_M + R_m$

Siendo R_M la resistencia de la bobina móvil y R_m la resistencia adicional en serie para ampliar el campo de medida.

Medición de la potencia en sistemas trifásicos

Comenzaremos por hacer algunas consideraciones respecto a los casos que se nos pueden presentar en el estudio de redes trifásicas.

Por de pronto, el sistema puede ser de tres o de cuatro hilos y las tensiones aplicadas a ellos pueden ser simétricas o no. En el sistema trifilar se dicen simétricas las tensiones de línea si todas son iguales en magnitud e igualmente desfasadas en 120° . En sistemas tetrafilares pueden ser simétricas las tensiones de línea o compuestas y no serlo las simples. La inversa es siempre cierta: si el sistema de tensiones simples es simétrico, el de las compuestas también. Es conveniente recordar las relaciones

que existen entre tensiones simples y compuestas cuando todas, simples y compuestas, son simétricas (fig. 1).

En primer lugar esta simetría significa:

$$V_{10} = V_{20} = V_{30} = V_f$$

$$V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$$

Se deduce de consideraciones elementales:

- a) que la tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que la simple:

$$V = \sqrt{3} V_f$$

- b) que el desfase entre una tensión compuesta y una simple, ambas concurrentes en un mismo vértice, es de 30° . Por ejemplo: V_{12} y V_{10} .

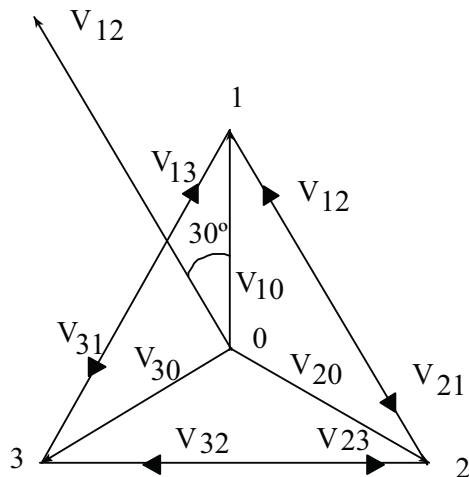


Figura 1

- c) que la tensión simple que determina un conductor de línea está en cuadratura con la compuesta que determinan los otros dos. Ejemplo: V_{10} y V_{23}

Formas de conexión de la impedancia de carga

Como se sabe existen dos formas: conexión en estrella y conexión en triángulo. En la primera, cada impedancia queda conectada a la tensión simple (las intensidades de cada fase son iguales a las de su línea); en la segunda, cada impedancia a la tensión compuesta (las intensidades de línea y de fase son distintas).

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

Podemos considerar como caso general aquel en que las tensiones son asimétricas y las impedancias diferentes. Será entonces

Se llamará sistema desequilibrado; no obstante se cumple siempre, por la primera ley de Kirchoff:

En el sistema trifilar:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

En el tetrafilar:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_0 = 0$$

Es oportuno recordar aquí que, cualquiera sea el sistema de tensiones, si las tres impedancias conectadas en estrella son idénticas - iguales en magnitud y argumento - el punto neutro coincide con el baricentro (punto de intersección de las medianas del triángulo de tensiones de línea); punto neutro natural o abstracto, como se lo llama.

Si el sistema de tensiones es simétrico y las tres impedancias de carga son iguales en módulo y argumento, las tres intensidades son iguales en magnitud e iguales son sus desfases con las tensiones. En este caso el sistema se dice perfecto.

Si la carga está conectada en estrella:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_f = I$$

La intensidad de fase es igual a la de línea, como se dijo. En un sistema tal, la potencia activa está dada por:

$$P = 3 P_f = 3 V_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

pero en estrella:

$$V_f = \frac{V}{\sqrt{3}}$$
$$P = \sqrt{3} U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

U e I valores de línea, φ desfase entre tensión y corriente de fase.

La potencia reactiva tiene la expresión:

$$Q = \sqrt{3} U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Si la carga está conectada en triángulo, la tensión de fase es la de línea pero las intensidades son diferentes: como se sabe

$$I_f = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Y las expresiones de P y Q coinciden con las dadas para la conexión en estrella.

Medición de la potencia activa de un sistema trifásico

a) Sistema de alimentación tetrafilar; carga en estrella:

Supongamos que el sistema es tetrafilar cualquiera y que la carga esté constituida por tres impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 , en general distintas, conectadas en estrella (Figura 2).

Como es obvio, la potencia P consumida por esta carga trifásica es la suma de las potencias P_1 , P_2 y P_3 consumidas por cada una de las impedancias:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

siendo

$$P_1 = V_{10} I_1 \cos \varphi_1$$

$$P_2 = V_{20} I_2 \cos \varphi_2$$

$$P_3 = V_{30} I_3 \cos \varphi_3$$

Lo mismo puede decirse de la potencia reactiva:

$$Q = V_{10} I_1 \cdot \sin \varphi_1 + V_{20} I_2 \cdot \sin \varphi_2 + V_{30} I_3 \cdot \sin \varphi_3$$

Está claro entonces que para medir la potencia activa de una tal carga bastará con usar tres vatímetros conectados como indica el esquema de la figura 2. En efecto: el vatímetro W_1 tiene su amperométrica recorrida por la corriente I_1 que circula por la correspondiente impedancia de carga y la voltimétrica conectada a la misma tensión V_{10} que se aplica a la carga.

Luego W_1 indicará - además del consumo propio de su voltimétrica, eventualmente significativo - la potencia P_1 . Lo mismo sucede con los otros dos.

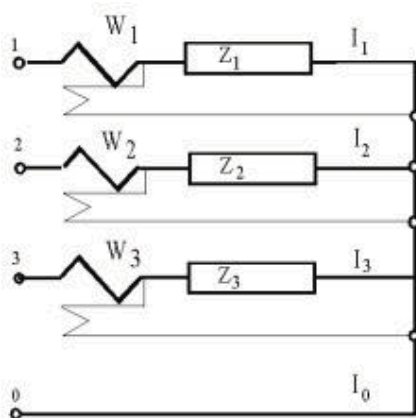


Figura 2

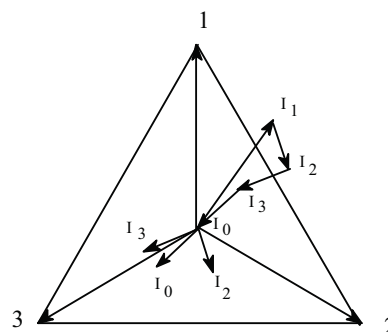


Figura 3

b) Sistema de alimentación trifilar; carga en estrella:

Si la carga está conectada en estrella en su sistema trifilar, los vatímetros se conectan en forma similar a la anterior, solo que el potencial del punto neutro no está impuesto por la red sino que queda determinado por las impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 , en general distintas (figura 4). De todos modos, sea cual fuere el potencial de 0, a cada voltimétrica se le aplica la misma tensión que a la impedancia de carga correspondiente y de nuevo se cumple que cada vatímetro indica la potencia de la

impedancia a que está conectado, y la suma de las tres, el total.

Veamos qué pasa si se corta la conexión 00_v , es decir, la de los puntos neutros de la carga, 0 , y de las bobinas voltimétricas, 0_v .

En general, los potenciales de ambos puntos serán distintos; por ejemplo, si las tres impedancias de carga son distintas y las de las voltimétricas iguales. En este caso las tensiones simples V_{10} y V_{10_v} diferirán y diferirá también, en consecuencia la potencia indicada por el vatímetro W_i antes y después del corte. Ahora ya no indicará la potencia P_i consumida en Z_i , sino otra P_i' . Lo mismo sucederá con los otros dos vatímetros. Demostraremos que, sin embargo, la suma $P_1' + P_2' + P_3'$ sigue siendo la potencia total del sistema.

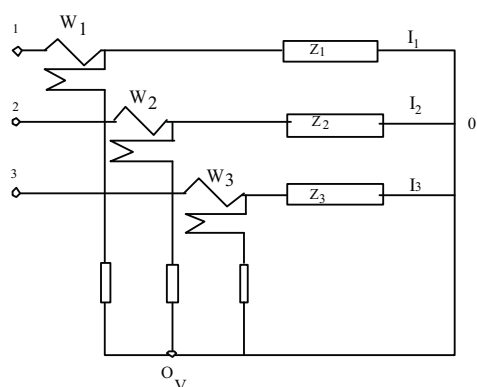


Figura 4

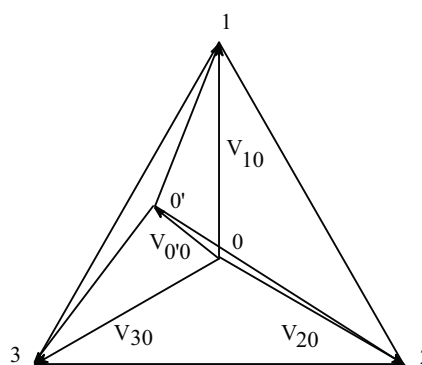


Figura 5

Es decir

$$P_1' + P_2' + P_3' = P_1 + P_2 + P_3 = \text{cte.}$$

Independientemente del potencial a que se conecte 0_v , que es el punto de conexión común de los extremos libres de las bobinas voltimétricas.

En efecto, si la conexión común de los extremos libres de las bobinas voltimétricas 0_v , se conecta al punto 0 , neutro de la carga, la potencia activa del sistema, indicada por los vatímetros, está dada por el producto escalar:

$$P = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{20} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3$$

Si en cambio, se conecta a otro punto cualquiera $0'$

$$P' = \dot{V}_{1'0} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2'0} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3'0} \cdot \dot{I}_3$$

pero, de la figura 5:

$$\dot{V}_{r'0} = \dot{V}_{10} - \dot{V}_{0'0}$$

Lo mismo en las otras dos fases; reemplazando en la anterior:

$$P' = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{20} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 - \dot{V}_{0'0} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3)$$

Pero, como se trata de un sistema trifilar la suma vectorial de las intensidades es nula, con lo que queda:

$$P' = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{20} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 = P$$

Es decir, en un sistema trifásico trifilar - suma de intensidades vectoriales nula - la suma de las indicaciones de los tres vatímetros con las voltimétricas conectadas en estrella, da siempre la potencia total del sistema, independientemente del potencial a que se conecte el neutro de las voltimétricas 0_v .

Está claro que ni siquiera es necesaria la igualdad de las impedancias de las bobinas voltimétricas ya que tal desigualdad solo modificará el potencial de 0_v , que, por lo dicho, no influye en absoluto.

Como se verá, al tratar el método de los dos vatímetros, puede darse el caso de conexión de 0_v a un punto tal que de los tres vatímetros uno indique cero y otro dé lectura negativa; no obstante la potencia total estaría dada por la suma algebraica de los tres.

Es fácil comprender, ahora, que tal conclusión es aplicable al caso de carga en triángulo. Basta considerar la estrella equivalente, el potencial de cuyo punto neutro no influye en la medición.

Es también comprensible que lo dicho vale para cualquier carga trifilar, aunque esté alimentada por una red con neutro disponible y los resultados no varían si 0_v , se conecta a dicho neutro. Es el caso tan común de carga en triángulo, para la que se cumple la condición de suma vectorial de corriente, nula (fig. 6).

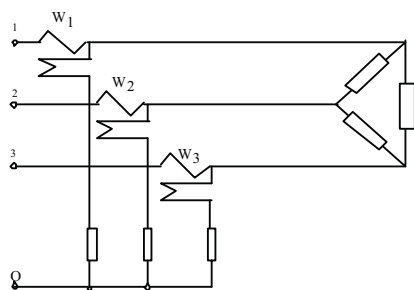


Figura 6

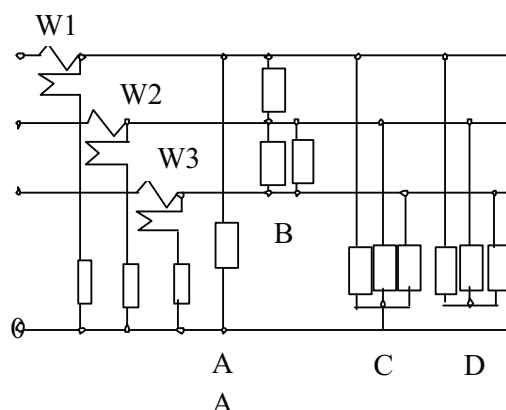


Figura 7

Establecido lo que antecede podemos referirnos ahora al caso más general (fig. 7), aquél en que las tensiones pueden ser simétricas o no y en que pueden existir simultáneamente cargas monofásicas, A, trifásicas en triángulo, B, en estrella, con neutro conectado al de la instalación de alimentación, C, o no, D.

De lo explicado resulta evidente que se obtendrá la potencia total conectando los vatímetros a la entrada con 0_v unido al neutro de la instalación.

La unión con el neutro permite incluir la potencia de las cargas conectadas al neutro, A y C - corriente por el neutro no nula - y no afecta, por lo dicho, a la medición de la potencia de las que no lo está.

Caso particular de sistema trifilar perfecto

En el caso de que el sistema de alimentación sea simétrico y la carga equilibrada, es posible realizar la medición con un solo vatímetro. Reducir el número de instrumentos conviene por razones económicas y es aceptable especialmente en mediciones de servicio, donde no es tan seria la exigencia de exactitud, para instrumentos de tablero, por ejemplo, que van conectados permanentemente.

A continuación veremos varios casos posibles:

1) Carga en estrella con neutro accesible:

El vatímetro indicará la potencia de una fase, P_f . El total será obviamente,

$$P = 3 P_f$$

pues ya que se trata de un sistema perfecto, las tres tensiones y las tres intensidades, en magnitud y fase, son iguales.

Nos estamos refiriendo al caso en que la potencia de la carga es suficientemente alta - impedancias de carga pequeñas - como para que la impedancia de la voltimétrica que queda en paralelo con una de ellas, sea comparativamente tan alta que no altere la perfección del sistema.

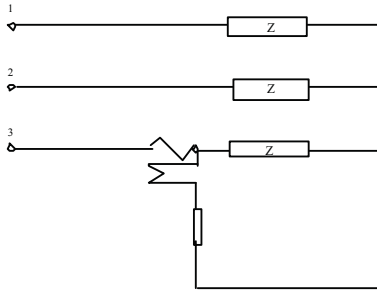


Figura 8

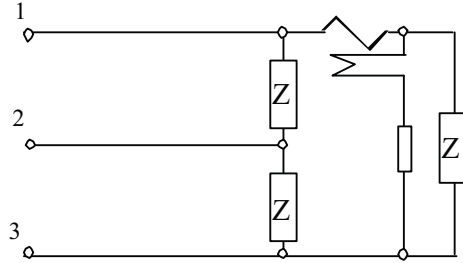


Figura 9

Cabe igual aclaración que la hecha para el caso anterior respecto a la eventual perturbación que pueda introducir el vatímetro.

Para intercalar la amperométrica debe "abrirse" una de las fases.

También acá se obtiene la potencia total triplicando la dada por el vatímetro.

3) Carga inaccesible (medición en la línea):

Nos referimos a los casos en que el neutro de la estrella no es accesible y en que el triángulo no puede abrirse, o que la carga está demasiado alejada del lugar de la medición.

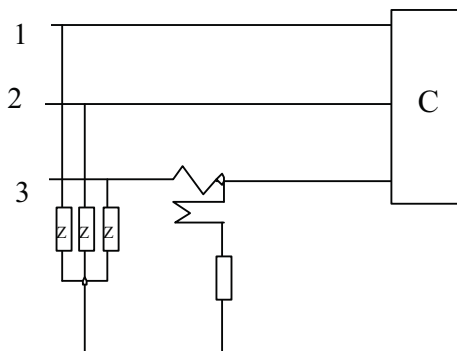


Figura 10

Si bien basta un solo vatímetro, es necesario disponer de elementos auxiliares para crear un punto cuyo potencial sea tal que la potencia se obtenga mediante una sencilla operación aritmética.

4) Creando un punto neutro artificial cuyo potencial coincida con el del neutro de la estrella de carga - de la equivalente - que por ser perfecto el sistema está en el baricentro del triángulo de tensiones. Se cae en el caso 1. Para crear dicho punto neutro hay dos soluciones:

a) Con tres resistencias o reactancias Z perfectamente iguales y tal que su módulo sea muchísimo menor que el de la interna de la voltimétrica para evitar el desplazamiento del punto 0 -figura 10-. Así será

$$V_{10} = V_{20} = V_{30}$$

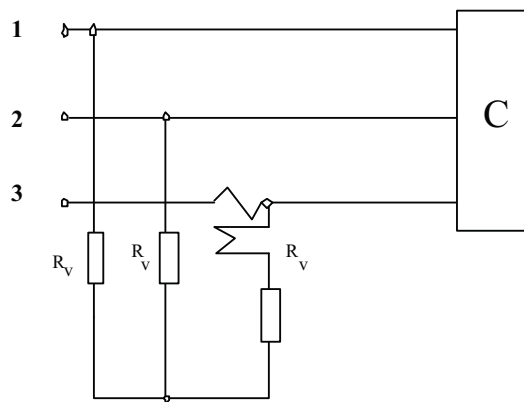


Figura 11

La ventaja del uso de las tres reactancias sobre el de las resistencias y el consumo mucho menor de energía que si bien no afecta la medición a que están antes de la amperométrica puede constituir un factor económico considerable si la conexión es permanente.

b) Otra solución consiste en usar dos resistencias de valor igual al de la voltimétrica -figura 11-.

La potencia total es

$$P = 3 P_f$$

c) Creando un punto neutro que coincida con el punto medio de la tensión compuesta entre las fases sin amperométrica.

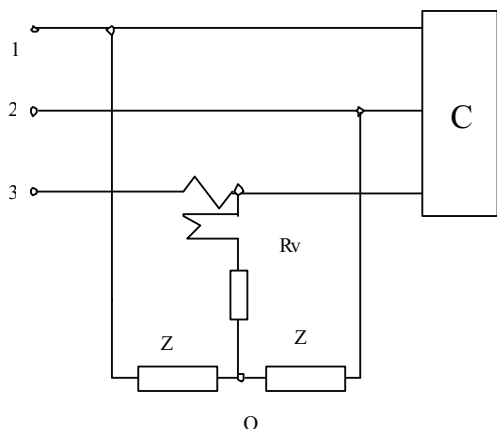


Figura 12

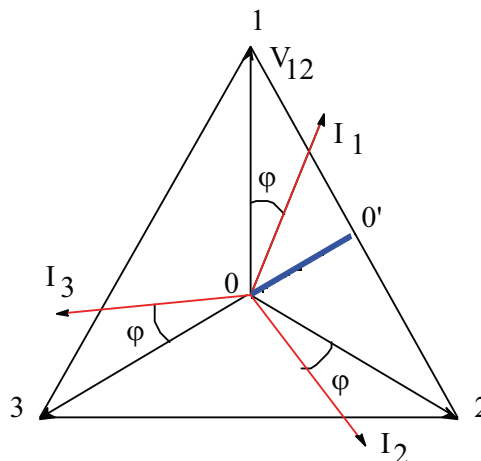


Figura 13

Para ello se usa la llamada "caja T" de impedancias (T box): dos resistencias o dos reactancias iguales de valor mucho menor que la interna de la voltimétrica -figura 12-.

El punto neutro 0' creado por las dos impedancias Z iguales en magnitud y signo, conectadas a V_{12} , ocupa el punto medio de este vector de modo que la tensión aplicada a la voltimétrica es $V_{30'}$, que por relaciones geométricas elementales es

$$V_{30'} = 1,5 V_{30} = 1,5 V_f$$

y está en fase con V_{30} .

La potencia que indica el vatímetro es

$$P_i = V_{3'0} \cdot I_3 \cos \varphi = 1,5 V_{30} I_3 \cos \varphi = 1,5 P_f \quad \text{—} \quad P_f = \frac{P_i}{1,5}$$

Como la potencia total del sistema es $P = 3 P_f$, resulta

$$P = 2 P_i$$

Método de los dos vatímetros

Está destinado a la medición de potencia activa en un sistema trifásico trifilar cualquiera, simétrico o no, equilibrado o no.

Vimos ya que la potencia activa en un sistema tal, está dada por la suma de las indicaciones de los tres vatímetros, independientemente del punto del circuito a que se conecte el neutro de la estrella de las voltimétricas 0.

Si 0 se conecta a uno de los conductores de línea, el 2, por ejemplo, el teorema de los tres vatímetros sigue cumpliéndose. Pero la tensión aplicada al vatímetro 2 es nula, pues sus dos

extremos están sobre el mismo conductor 2. Consiguientemente este vatímetro es de indicación permanentemente nula y puede eliminarse: la potencia del sistema está dada, entonces, por la suma algebraica de los otros dos vatímetros, cuyas voltimétricas quedan conectadas a tensiones de línea:

$$P = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_3$$

Esto constituye el teorema de Blondel generalizable a sistemas polifásicos de cualquier número de fases n , expresándolo así: " La potencia activa de un sistema de n fases puede medirse con $n-1$ vatímetros".

El circuito de la figura 14 se llama "conexión ARON" y vale cualquiera sea la fase tomada para conectar el punto común de las voltimétricas. Solo a título de ejemplo se tomó la 2, como se advirtió.

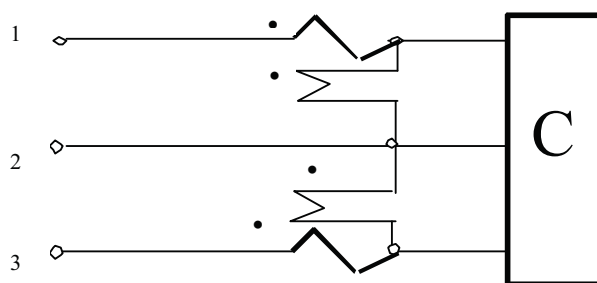


Figura 14

Con respecto al sistema trifásico, es importante hacer varias consideraciones: en primer lugar, la validez del teorema de Blondel es independiente del sistema de tensiones y del equilibrio de la carga, con la sola limitación de que la conexión sea trifilar, o, lo que es lo mismo, suma de I de línea, nula.

La segunda consideración es de orden práctico: la conexión, independientemente de la secuencia de fases, debe ser perfectamente simétrica; tanto en la ubicación de los vatímetros como en la polaridad relativa de sus bobinas. En caso de que uno de los vatímetros, a pesar de estar bien conectado, de una indicación al revés, debe invertirse la conexión de su voltimétrica y tomar en cuenta que el valor leído es negativo y debe restarse del que indica el otro vatímetro.

La figura 15 muestra el diagrama vectorial correspondiente al circuito de la figura 14.

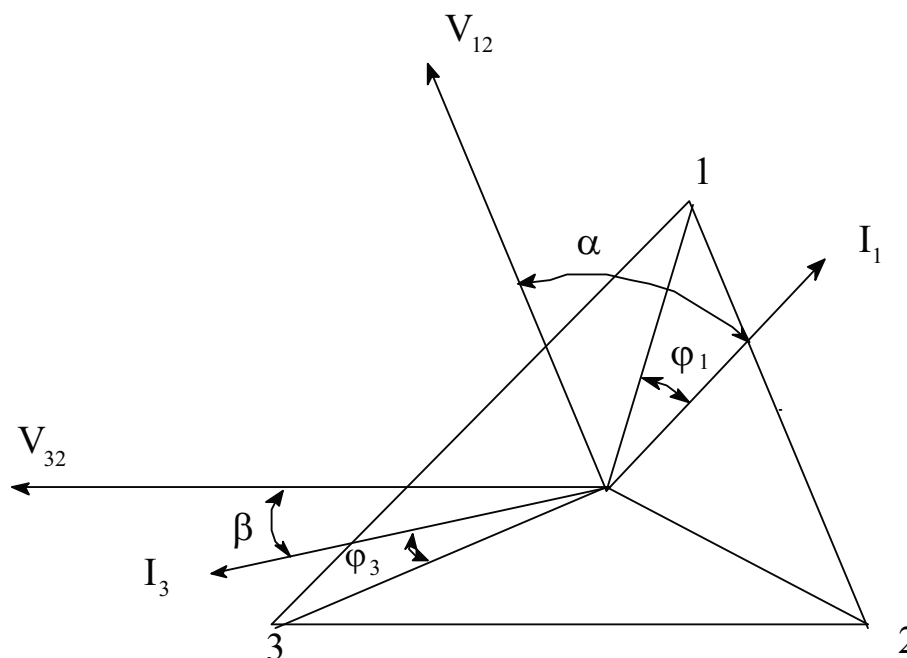


Figura 15

El

vatímetro conectado entre las fases 1 y 2 del esquema de la figura 14, indicará una potencia:

$$P_{12} = V_{12} I_1 \cdot \cos \alpha$$

y el otro:

$$P_{32} = V_{32} I_3 \cdot \cos \beta$$

La potencia del sistema es:

$$P = P_{32} + P_{12} = V_{32} I_3 \cdot \cos \beta + V_{12} I_1 \cos \alpha$$

Se advierte que para valores elevados del desfase φ_1 entre la tensión de fase V_{10} e I_1 con carga inductiva, el desfase α entre tensión y corriente aplicados al vatímetro W_{12} puede alcanzar los 90° o aún superarlos: en el primer caso ese vatímetro indicará cero y la potencia total del sistema estará dada por la lectura del otro; en el segundo caso el vatímetro comenzará a alejarse del cero de la escala en sentido contrario a ella y será necesario invertir la conexión de una de las bobinas del vatímetro y atribuirle signo negativo a esa lectura. La potencia será:

$$P = P_{32} - P_{12}$$

Se prefiere invertir la bobina voltimétrica pues no se interrumpe la alimentación de la carga como sucedería si se invirtiera la amperométrica.

Por otra parte, la corriente que es necesario interrumpir es muchísimo menor; con cualquier conmutador se puede efectuar la inversión, si el vatímetro no lo tiene ya incorporado, lo que es muy

poco común.

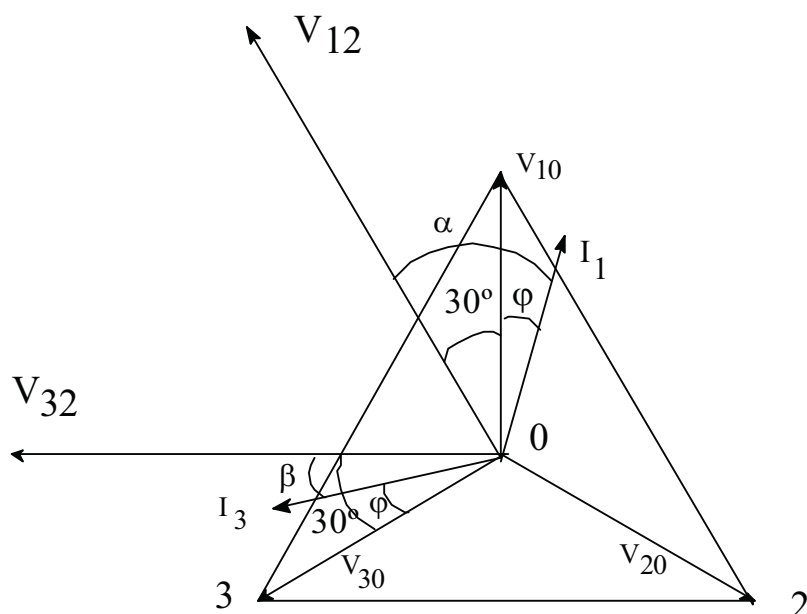


Figura 16

Estudio del método de los dos vatímetros para el caso de sistema perfecto

No sin antes recalcar que el método de los dos vatímetros es aplicable a cualquier sistema trifásico trifilar, estudiaremos ahora sus características para el caso particular en que el sistema es perfecto: simétrico en tensiones y equilibrado en corriente. Nos referimos, siempre al circuito de la figura 14. El diagrama vectorial es el de la figura 16; en él se han indicado las relaciones angulares entre corrientes y tensiones simples y compuestas.

Como ya se dijo, la potencia total es:

$$P = V_{32} I_3 \cos \beta + V_{12} I_1 \cos \alpha$$

De la figura 16 se deduce:

$$\alpha = 30^\circ + \varphi$$

que vale algebraicamente para carga tanto inductiva (φ positivo) como capacitiva (φ negativo), como puede comprobarse fácilmente y:

$$\beta = 30^\circ - \varphi$$

con la misma aclaración que para á.

Las indicaciones de cada uno de los vatímetros son, entonces:

$$P_{32} = V_{32} I_3 \cos(30^\circ - \varphi) = V \cdot I \cdot \cos(30^\circ - \varphi)$$

$$P_{12} = V_{12} I_1 \cos(30^\circ + \varphi)$$

Variación de las indicaciones de cada uno de los dos vatímetros en función de φ . Sistema perfecto:

Analizaremos ahora cómo varía la indicación de cada vatímetro si varía φ ángulo de fase, suponiendo que los valores de tensiones y corrientes se mantienen constantes. El análisis se extenderá al campo de cargas tanto inductivas como capacitivas, es decir, con valores de φ comprendidos entre $+90^\circ$ y -90° .

La expresión de P tiene por representación gráfica una cosinusoide con máximo en $\varphi = 30^\circ$ (pues en ese caso su argumento $30^\circ - \varphi$ es nulo) y que se anula para argumento $30^\circ - \varphi = 90^\circ$, es decir para $\varphi = 60^\circ$ negativos (carga capacitiva).

La gráfica de P_{12} es también una cosinusoide cuyo máximo está en $\varphi = 30^\circ$ capacitivo y se anula para $\varphi = 60^\circ$ inductivo.

En el gráfico de la figura 17 se han representado las ordenadas atribuyéndole a los máximos de $P_{32} = P_{12} = V \cdot I$, el valor 100.

Se ha representado también, la suma de las lecturas de los vatímetros que es una cosinusoide cuyo máximo está en $\varphi = 0$. En efecto: siendo dicha suma la potencia total del sistema y siendo la expresión de dicha potencia la ecuación:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

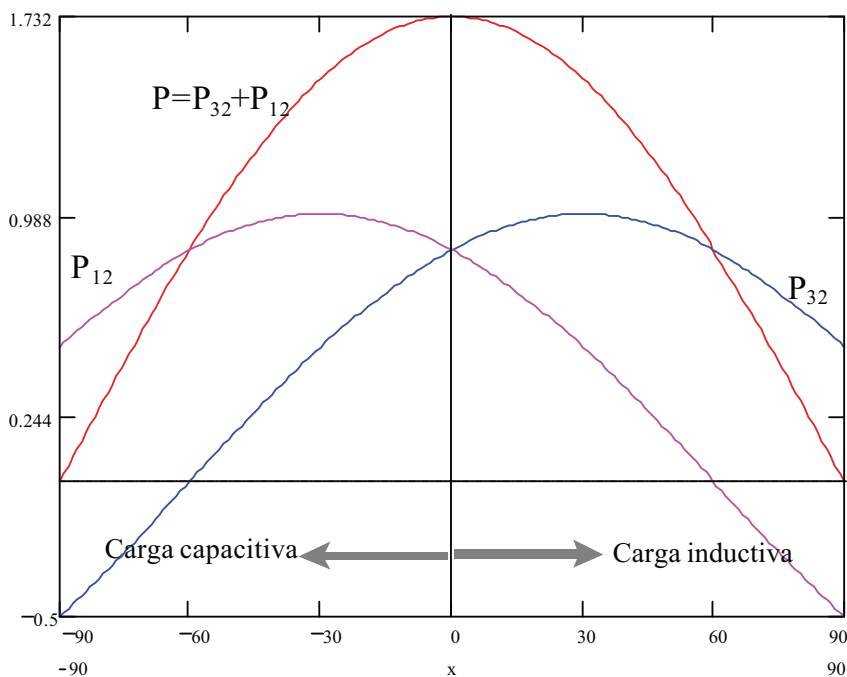


Figura 17

se desprende que para $\varphi = 0$ se obtiene el máximo, que tiene el valor:

$$P_{\max} = \sqrt{3} \cdot V \cdot I = 173\%$$

Observando el gráfico de la figura 17 se deducen varias conclusiones interesantes:

1.-: Para carga óhmica - $\varphi = 0$ - ambos vatímetros indican la misma lectura:

$$P_i = \frac{1}{2} P_m \times 86.7\%$$

2.-: Para carga reactiva pura, $\alpha = \pm 90^\circ$, inductiva o capacitiva, ambos vatímetros indican 50%, pero mientras una es positiva la otra es negativa de modo que la suma es nula, como corresponde a carga devatada.

3.-: Salvo para los casos extremos analizados de $\varphi = 0$ y $\varphi = \pm 90^\circ$, dos vatímetros indican distinta lectura; de tal modo que para una misma naturaleza de carga -inductiva, por ejemplo- es siempre un mismo vatímetro el que indica más que el otro. Para carga capacitiva los papeles se invierten: el vatímetro de indicación, mayor en inductiva, ahora es el de indicación menor.

4.-: Para carga inductiva al llegar φ a 60° , el vatímetro P_{12} anula indicación y para φ mayores la invierte. Lo mismo pasa con el P_{32} con capacitiva.

5.-: Para carga inductiva es el de lectura menor - y el que se anula e invierte - el vatímetro cuya voltimétrica está conectada entre la fase de amperométrica y la que le sigue en el orden cíclico de las fases (P_{12} nuestro circuito). Para carga capacitiva es al revés.

De lo dicho en el párrafo anterior se infiere que si se conoce la naturaleza de la carga -inductiva o capacitiva- puede determinarse la secuencia de las fases.

Por ejemplo: si se sabe que la carga es inductiva, se concluirá que la fase en que tiene la amperométrica el vatímetro de lectura menor, atrasa respecto al conductor común, es decir, aquél al que no va conectada ninguna amperométrica (fase 2 en el circuito de figura 14).

Recíprocamente, si se conoce la secuencia, puede deducirse la naturaleza de la carga. Por otra parte, si se desconocen ambas, es imposible deducirla de las indicaciones de los vatímetros, salvo que ambas lecturas sean idénticas, lo que corresponde, como se ha dicho, a carga óhmica pura.

Demostraremos ahora que es posible deducir, de las lecturas de los dos vatímetros, el factor de potencia de la carga, siempre que se trate de un sistema perfecto. Supondremos, por ahora, que la carga es inductiva.

Llamaremos m a la relación de las lecturas de los vatímetros:

$$m = \frac{P_{12}}{P_{32}}$$

De lo dicho antes se deduce que:

$$-1 < m < 1$$

Reemplazando P_{12} y P_{32} de sus expresiones vistas:

$$m = \frac{V.I.\cos(30^\circ + \varphi)}{V.I.\cos(30^\circ - \varphi)} = \frac{\cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi}{\cos 30^\circ \cos \varphi + \sin 30^\circ \sin \varphi}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

queda:

$$m = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi + \sin \varphi}$$

y finalmente una función biunívoca de m y $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{m+1}{2\sqrt{m^2 - m + 1}}$$

En la figura 18 se ve la gráfica de la función que permite determinar $\cos \varphi$ si se conoce m .

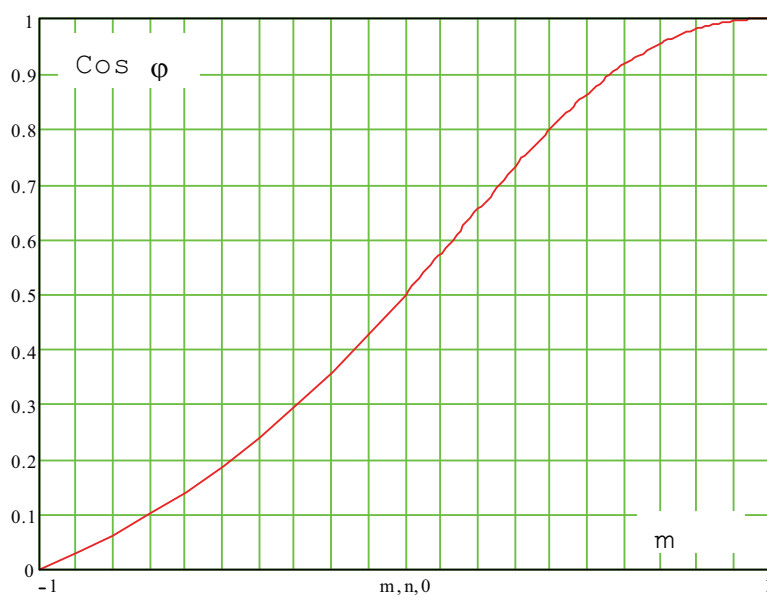


Figura 18

Se ve que para $m = +1$ (lecturas iguales pero de signo contrario) $\cos \varphi = 0$.

Por último, para $m = 0$ ($P_{12} = 0$) $\cos \varphi = 0,5$ $\varphi = 60^\circ$. Todo de acuerdo con lo dicho antes.

El mismo gráfico de la figura 18 sirve para carga capacitiva, con la sola precaución de hacer:

$$m = \frac{P_{32}}{P_{12}}$$

pues en este caso

$$P_{32} < P_{12}$$

Todo esto, que vale solamente para sistemas perfectos, se va apartando tanto más de lo dicho cuanto más deformado sea el sistema. De todos modos es interesante y de utilidad conocer la variación de las indicaciones de los vatímetros pues los lineamientos generales son aplicables a los casos prácticos que, frecuentemente, no difieren mucho de los perfectos.

Como se ha dicho ya, el método de los dos vatímetros permite medir potencia activa de todo sistema trifásico, independientemente de su simetría y de su equilibrio, con la única limitación de que la suma vectorial de las tres intensidades sea nula. Esto significa que el método es aplicable no solo a sistemas trifilares sino también a tetrafilares con conductor neutro no activo como sería el caso de carga en triángulo conectada a una red tetrafilar.

Existen casos en los que el método no es aplicable, ni aún en sistemas trifilares, en aparente contradicción con lo que acaba de decirse. Ello se debe a que, en rigor, no se cumple la exigencia de suma vectorial nula de las tres intensidades, y esto se puede deber a las causas siguientes.

- 1) Falla de aislación a tierra.
La corriente de la falla a tierra sumada a la de las tres líneas anula la suma. El sistema es, en realidad, tetrafilar, con neutro constituido por la tierra.
- 2) Capacidad de la línea respecto a tierra.
La corriente por tierra se produce por capacidad.
- 3) Existe un tercer caso de inaplicabilidad a causa del error de inserción que los vatímetros introducen. Se presenta cuando debe medirse la potencia en una carga muy pequeña, es decir, de impedancias altas. La impedancia de los vatímetros que no se conectan simétricamente en las tres fases produce una asimetría en la alimentación de la carga que perturba su funcionamiento.

En los tres casos mencionados la solución está en el uso del método de los tres vatímetros. En los dos primeros casos el neutro de las voltimétricas debe conectarse a tierra. En el tercero es indiferente.

Medición de la potencia reactiva

Solo cuando el sistema trifásico trifilar es perfecto, - simétrico y equilibrado -, es posible deducir en forma inmediata la potencia reactiva, a partir de las indicaciones de los dos vatímetros. En efecto, como se vio:

$$P_{32} = V_{32} I_3 \cdot \cos(30^\circ - \varphi_3) = V_{32} I_3 (\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi_3 + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi_3)$$

$$P_{12} = V_{12} I_1 \cdot \cos(30^\circ + \varphi_1) = V_{12} I_1 (\cos 30^\circ \cos \varphi_1 - \sin 30^\circ \sin \varphi_1)$$

que si el sistema es perfecto como supusimos:

$$V_{32} = V_{12} = V ; I_3 = I_1 = I ; \varphi_3 = \varphi_1 = \varphi$$

y las expresiones quedan:

$$P_{32} = V \cdot I (\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi)$$

$$P_{12} = V \cdot I (\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi)$$

restando miembro a miembro

$$P_{32} - P_{12} = 2 \cdot V \cdot I \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{32} - P_{12})$$

Otra manera de medir potencia activa con un solo vatímetro en sistema perfecto.

Está basado en el método de los dos vatímetros. La bobina voltimétrica de único vatímetro se conecta por un lado a la fase de la amperométrica y por el otro, mediante un conmutador C, alternativamente a cada una de las otras dos fases (figura 19). La suma de las dos lecturas, en general distintas en valor y en signo, da la potencia total, si nada varió.

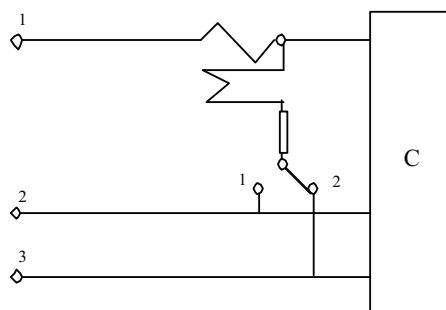


Figura 19

En efecto, en el método de los dos vatímetros, según la conexión vista de figura 14 la potencia total es:

$$P = P_{32} + P_{12}$$

La P_{12} se obtiene con C en 1.

Si C se pasa a la posición 2 se obtiene P_{13} que está dada por el producto escalar de V_{13} y de I_1 (iguales en módulo a V_{32} e I_3 respectivamente, dada la perfección del sistema). Además el desfase entre ambos pares de

fasores es el mismo ya que en los dos casos las voltimétricas están conectadas entre la fase de la amperométrica y la que en la secuencia de fases, le precede.

Vatímetros trifásicos

Usando el método de los dos vatímetros se construyen vatímetros de doble sistema que permiten medir potencia activa en un sistema trifásico trifilar cualquiera, figura 20.

Están constituidos por dos sistemas vatimétricos electrodinámicos cuyas bobinas móviles son solidarias a un único eje, sobre el que se aplica la suma algebraica de las cuplas motoras creadas por cada sistema, una de las cuales, obviamente, puede hacerse negativa, es decir, de sentido contrario en cuyo caso se resta automáticamente de la otra. De todos modos la desviación de la aguja sobre la escala, conduce la potencia total de la carga, con gran ventaja de comodidad y precio. Es útil también en el caso de valijas para medición de tensión, corriente y potencia en industrias, donde es importante la reducción de peso y volumen.

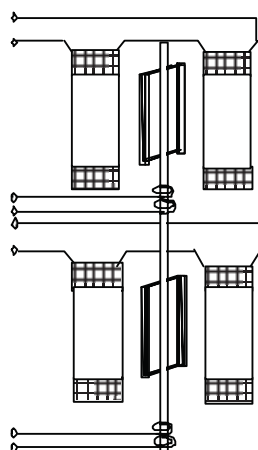


Figura 20

La conexión de estos vatímetros dobles que tienen su juego de bornes de tensión y de corrientes independientemente para cada sistema vatimétrico se hace simplemente como si fueran dos vatímetros convencionales conectados según el método de los dos vatímetros.

El fabricante debe prestar atención al detalle del blindaje entre sistemas, que se hace de aleación de acero de alta permeabilidad. De esta manera se evita que cada sistema influya sobre el otro.

En algunas construcciones se dispone el eje del campo de los dos sistemas perpendicularmente entre sí, con miras a disminuir el acoplamiento.

Para circuitos trifásicos tetrafilares cualesquiera se construyen vatímetros triples que se conectan de acuerdo con el método de los tres vatímetros.

También para circuitos tetrafilares, pero alimentados

por sistemas de **tensiones simétricas** se construyen vatímetros de dos sistemas especiales. Están constituidos por dos sistemas vatimétricos diferenciales: cada una de las mitades de las bobinas amperométricas tienen alimentación independiente y se conectan como indica la figura 21.

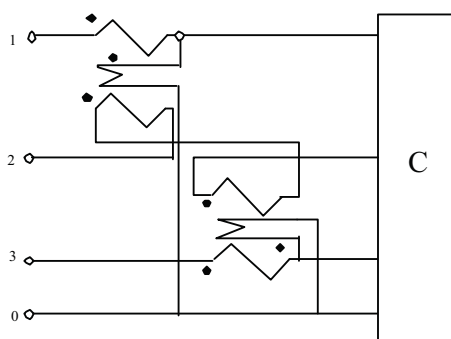


Figura 21

El campo amperométrico es proporcional a la diferencia de las dos corrientes que lo alimentan y en consecuencia, los dos elementos vatimétricos crearán cuplas proporcionales a:

$$P_1 = \dot{V}_{10} \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \quad (1)$$

y a que:

$$P_3 = \dot{V}_{30} \cdot (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) \quad (2)$$

Como sabemos, la potencia total del sistema es:

$$P = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{20} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 \quad (3)$$

siendo como es, perfecto el sistema de tensiones se cumple que:

$$\dot{V}_{10} + \dot{V}_{20} + \dot{V}_{30} = 0$$

luego

$$\dot{V}_{20} = -(\dot{V}_{10} + \dot{V}_{30})$$

La potencia que indica el vatímetro es la suma de P_1 y P_3 dadas por las (1) y (2)

$$\begin{aligned} P_1 = P_1 + P_3 &= \dot{V}_{10} \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \dot{V}_{30} \cdot (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 - \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 - \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_2 = \\ &= \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 - (\dot{V}_{10} + \dot{V}_{30}) \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 = \dot{V}_{10} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{20} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{30} \cdot \dot{I}_3 = P \end{aligned}$$

ya que coincide con las (3).

Por último, para sistemas perfectos, trifilares o tetrafilares, se fabrican vatímetros de tablero que llevan incorporadas las resistencias o reactancias que según vimos son necesarias para realizar la medición con un solo instrumento. La escala da directamente la potencia trifásica.

Medición de la potencia reactiva

A.- Con vármetros

Sistema trifásico tetrafilar cualquiera

Para medir la potencia reactiva en un circuito trifásico tetrafilar cualquiera se conectan tres vármetros tal como se indicó para los vatímetros cuando se mide la potencia activa.

La potencia reactiva total Q está dada por la suma de las indicaciones de los tres vármetros. En el caso de potencia activa los tres vatímetros dan indicación positiva si el punto neutro 0_v de la estrella de las voltimétricas se conecta al de la carga pues la potencia activa es siempre positiva. En cambio la suma de potencias reactivas es algebraica pues según la naturaleza de la carga, inductiva, capacitiva u óhmica, es positiva, negativa o nula.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_{10} \cdot I_1 \cdot \text{sen } \varphi_1 + V_{20} \cdot I_2 \cdot \text{sen } \varphi_2 + I_{30} \cdot I_3 \cdot \text{sen } \varphi_3$$

Sistema trifásico trifilar cualquiera

Se pueden conectar los tres vármetros como se indicó respecto a los tres vatímetros al tratar de potencia activa y se podría demostrar, como lo hicimos allá, que la suma de las tres lecturas de la potencia reactiva total del sistema, independientemente de la ubicación del punto neutro 0_v es la estrella de las voltimétricas, coincidente o no con el de la carga.

Vale también, en consecuencia, para la potencia reactiva el teorema de Blondel: "La potencia reactiva del sistema trifilar está dada por la suma algebraica de las indicaciones de dos vármetros conectados según la conexión de Aron".

El diagrama vectorial es el mismo de la figura 15.

$$Q = Q_{12} + Q_{32} = V_{12} \cdot I_1 \cdot \text{sen } \alpha + V_{32} \cdot I_3 \cdot \text{sen } \beta$$

Método de los dos vármetros con sistema perfecto

$$Q_{32} = V \cdot I \cdot \sin \beta = V \cdot I \cdot \sin(\varphi - 30^\circ)$$

$$Q_{12} = V \cdot I \cdot \sin \alpha = V \cdot I \cdot \sin(\varphi + 30^\circ)$$

La expresión de Q_{12} se anula cuando el argumento se anula, es decir, cuando $30^\circ + \varphi = 0$ por lo tanto cuando sea $\varphi = -30^\circ$. (Figura 22)

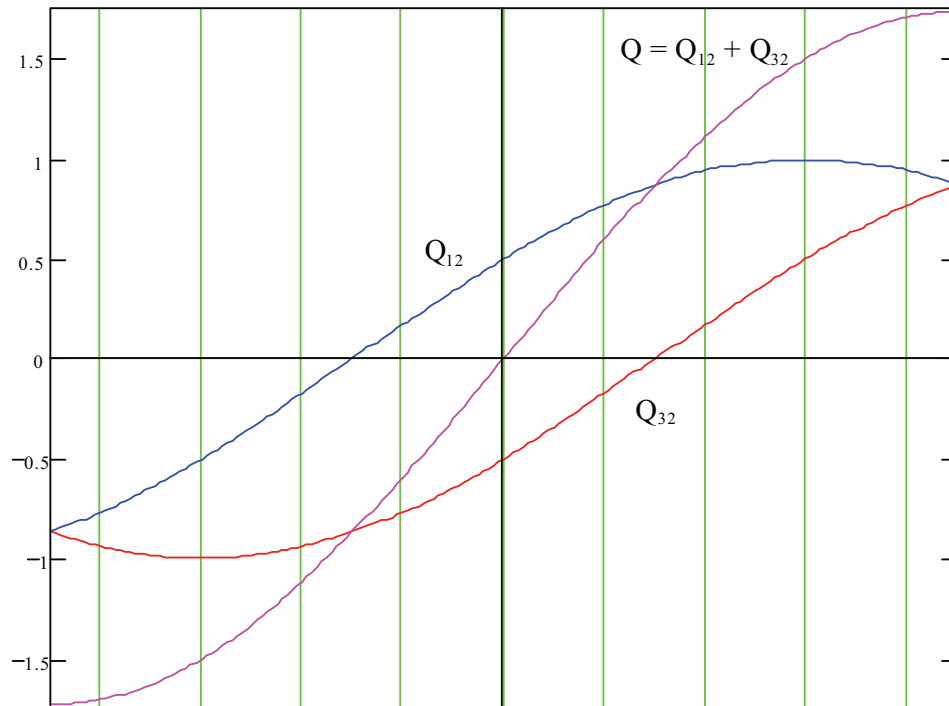


Figura 22

En otras palabras: la lectura del vármetro conectado entre las fases 1 y 2 se anula cuando la impedancia de carga es capacitiva de argumento $\varphi = -30^\circ$

El valor máximo positivo lo toma para $30^\circ + \varphi = 90^\circ$, es decir para $\varphi = 60^\circ$ inductivo.

La expresión de Q_{32} se anula para $\varphi = 30^\circ$ inductivo y toma el valor máximo negativo para

$Q = -60^\circ$ capacitivo. $\rightarrow \beta = -60^\circ - 30^\circ = -90^\circ$ por lo tanto $\sin \beta = -1$.

En la figura 22 se ha representado la variación de las lecturas de los vármetros y de la suma total, es decir, de Q en función de φ . Esta última es, obviamente, una senoide de amplitud $\sqrt{3} \times 100\%$ ya que la potencia reactiva total es:

$$Q = \sqrt{3} V I \sin \varphi$$

y la potencia $V \cdot I$ representa el 100% como antes.

Se ve que para cargas inductivas o capacitivas de argumento mayor que 30° ambas indicaciones son del mismo signo y se suman. Para desfases menores que $\pm 30^\circ$ las indicaciones son de distinto signo y la de menor valor absoluto debe restarse de la otra.

Caso particular de sistema trifilar perfecto

Para medir la potencia reactiva con vámetro en un sistema trifilar o tetrafilar perfecto, se presentan los mismos casos de medición de potencia activa con vatímetros ya vistos y las soluciones son las mismas que se dieron entonces.

B.- Con vatímetros

Según hemos estudiado en el capítulo de Instrumentos Electrodinámicos los vámetros están constituidos por sistemas vatimétricos a los que se les han agregado circuitos constituidos por

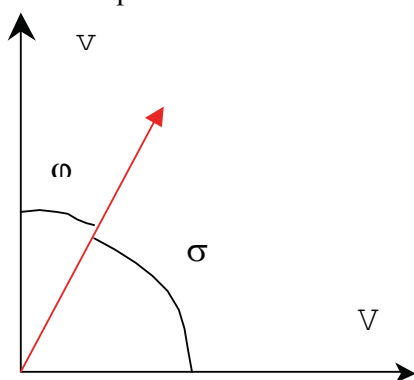


Figura 23

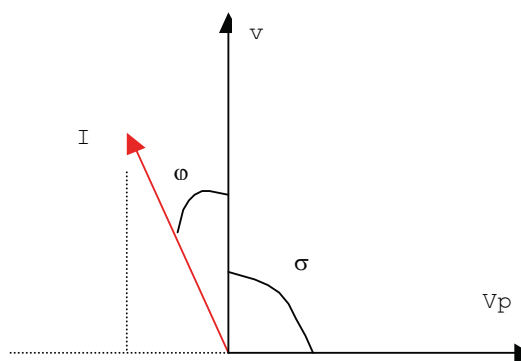


Figura 24

resistencias y reactancias dispuestas para conseguir que la corriente por la bobina voltimétrica esté en cuadratura y atraso respecto a la tensión. Esto confiere a los vámetros una marcada dependencia de la frecuencia debido a las reactancias. Es por esta razón que se han desarrollado métodos que permiten medir la potencia reactiva usando vatímetros que, según vimos dan una indicación libre de la influencia de la frecuencia en un amplio dominio.

En primer lugar consideremos un circuito monofásico. Sea V la tensión, I la corriente y φ el desfase entre ambas, como se muestra en el diagrama vectorial, figura 23.

La potencia reactiva de este circuito es como se sabe:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Supongamos que puede disponerse (luego veremos cómo) de una tensión auxiliar V_p que cumpla dos condiciones: 1) que su magnitud sea igual a la V o que esté con ella en una relación conocida, y

2) que esté en cuadratura y atraso respecto de V .

Si ahora se conecta un vatímetro de modo que por su amperométrica circule I y que su voltimétrica esté conectada a la tensión V_p , el instrumento indicará

$$P_i = V_p \cdot I \cdot \cos \sigma$$

pero como

$$\sigma = 90^\circ - \varphi \quad \text{y} \quad V_p = V$$

$$P_i = V \cdot I \cdot \sin \varphi = Q$$

Es decir, el vatímetro indicará la potencia reactiva de la carga.

Es interesante advertir que procediendo así, lo que el vatímetro indica en vatios, kilovatios o Megavatios es en realidad -y así debe leerse- var, kilovar o Megavar. Así, si la lectura del vatímetro es de 3,48 KW, es que la potencia reactiva de la carga es de 3,48 KVAR.

Por otra parte debe advertirse que en estas condiciones el vatímetro indica Q , no solamente en magnitud, sino también en signo. En efecto, si la carga es capacitiva (I en adelante, figura 24) la Q es negativa y el vatímetro indicará la potencia activa entre V_p e I que, al estar adelantada a V , forman un ángulo mayor de 90° y la indicación es negativa. (Proyección de I sobre V_p , negativa). Es

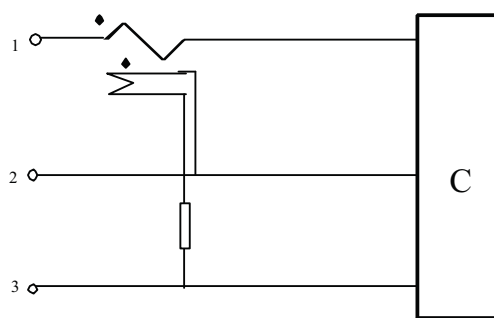


Figura 25

necesario invertir la voltimétrica y tener en cuenta que la Q es negativa (carga capacitiva).

Esto, que para un sistema monofásico es de solución complicada, es sumamente útil y sencillo en sistemas trifásicos, ya que, como vimos, la tensión simple que determina un conductor de línea está en cuadratura con la compuesta que determinan los otros dos: por ejemplo, V_{10} y V_{23} o V_{32} . Según la regla enunciada antes para V_{10} debe ser V_{23} (y no V_{32}). Esto pone de manifiesto que es fundamental el conocimiento de la secuencia de las fases del sistema ya que de otro modo no puede saberse si una tensión atrasa o adelanta respecto a la otra.

Medición de Q con un vatímetro en sistemas trifásicos perfectos

Ya se trate de sistema tetrafilar o trifilar, si es perfecto la expresión de Q es:

$$Q = 3 Q_{10} = 3 V_{10} \cdot I_1 \sin \varphi$$

según se explicó, siendo V_{10} la tensión correspondiente a Q_{10} , la voltimétrica debe conectarse a la tensión en cuadratura y atraso respecto a V_{10} que es V_{23} .

Como su módulo es $\sqrt{3}$ veces mayor, a la potencia indicada P_i por el vatímetro habrá que dividirla por $\sqrt{3}$; la potencia total será tres veces mayor:

$$Q = 3 Q_{10} = 3 \frac{P_i}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot P_i$$

La figura 25 muestra la forma de conectar el vatímetro.

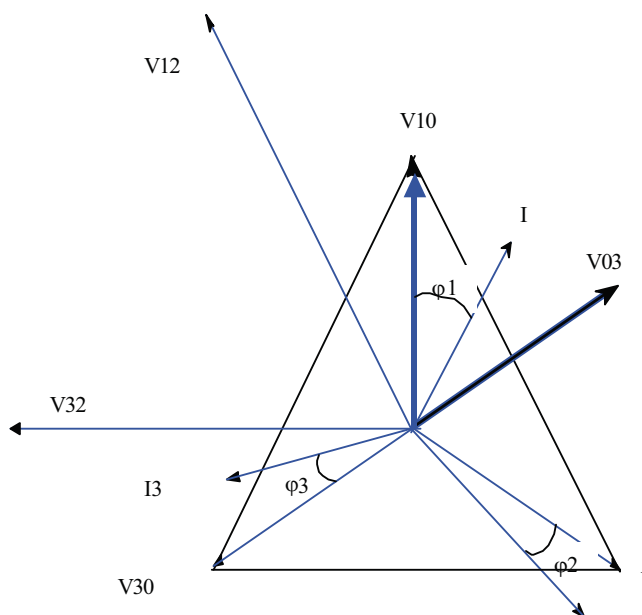
Medición de Q con vatímetros en un sistema trifásico trifilar simétrico en tensiones.

Si el sistema de tensiones es simétrico, aunque la carga sea desequilibrada, disponemos de las tensiones en cuadratura necesarias.

Como el sistema es trifilar debemos aplicar el teorema de Blondel para potencia reactiva:

$$Q = Q_{12} + Q_{32}$$

Para medir Q_{12} con un vatímetro debe conectarse la amperométrica en serie con I_1 y la voltimétrica a una tensión V_p atrasada y en cuadratura respecto a V_{12} .



La tensión $V_{03} = V_{30}$ cumple lo de la cuadratura si bien su magnitud no es la de V_{12} , sino que es $\sqrt{3}$ veces menor. Esto último no es inconveniente pues bastará con multiplicar por $\sqrt{3}$ la lectura para obtener el valor buscado Q_{12} .

Es posible evitar la multiplicación por $\sqrt{3}$, si se disminuye el valor de la resistencia de la multiplicadora de la voltimétrica es esa relación.

Figura 26

Por ejemplo: si la $R_v = 4000\Omega$, habrá que reducirla a $2310 = 4000/\sqrt{3} \Omega$ con lo que la I_v aumentará como si la bobina estuviese conectada a la V de línea y no habrá que multiplicar por $\sqrt{3}$. Algunas fábricas de instrumentos proveen esas resistencias.

Para el segundo vatímetro, el que debe medir Q_{32} , debemos conectar la voltimétrica la tensión simple V_{10} , que es la que atrasa 90° respecto a V_{32} . Con referencia a la magnitud, igual observación que para V_{03} .

Para aplicar a las voltimétricas las tensiones simples V_{10} y V_{03} se unen sus extremos libres a una resistencia R igual a las de ellas, R_V creando una estrella de brazos iguales cuyo punto neutro coincidirá con el teórico (baricentro del triángulo de tensiones).

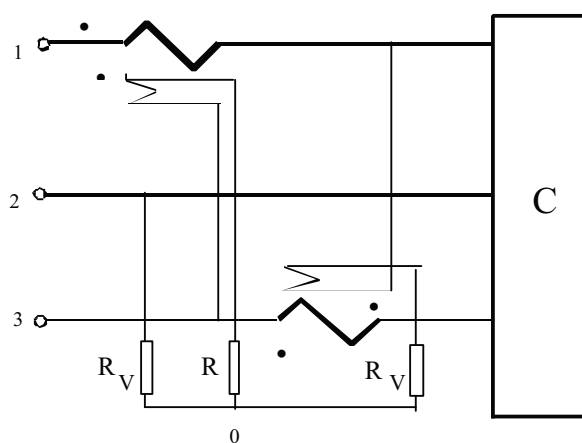


Figura 27

En definitiva, las conexiones deben hacerse como indica la figura 27 y la expresión es:

$$Q = \sqrt{3} (P_{1(03)} + P_{3(10)})$$

El primer subíndice da la fase de la amperométrica y los dos entre paréntesis la tensión de la voltimétrica con su polaridad. Adviértase la polaridad de las bobinas, distintas para las dos voltimétricas; vatímetro de la fase 1 tiene el borne de polaridad marcada por el asterisco conectado al punto neutro, mientras que el de la fase 3 lo tiene a la fase y el borne restante al punto neutro. De este modo las tensiones actuantes son V_{03} y V_{10} respectivamente.

Es importante prestar atención, al hecho de que la conexión es correcta solo para cierta secuencia de las fases. En efecto, si se invierte la secuencia, las tensiones auxiliares V_{10} y V_{03} ya no están en atraso sino en adelanto con lo que se invierten los signos de la potencia reactiva. Es necesario conocer, entonces, o la secuencia de las fases o la naturaleza de la carga (inductiva o capacitiva) para atribuirle el signo correcto.

Se construyen vármetros trifásicos basados en esta conexión que, por lo hecho requieren que el sistema de tensiones sea simétrico.

Circuito trifásico tetrafilar alimentado por un sistema simétrico de tensiones

Como se dijo, en este caso la potencia reactiva es:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_{10} \cdot I_1 \cdot \text{sen } \varphi_1 + V_{20} \cdot I_2 \cdot \text{sen } \varphi_2 + V_{30} \cdot I_3 \cdot \text{sen } \varphi_3$$

La suma de las potencias reactivas de cada fase. Para que cada vatímetro la indique debe tener la amperométrica en esa fase y la voltimétrica compuesta que atrasa 90° respecto a la simple de esa fase. Por ejemplo vatímetro cuya amperométrica está sobre la fase 1 tiene la voltimétrica conectada a la tensión V_{23} que atrasa 90° respecto a V_{10} . El vatímetro de fase 2 a la V_{31} y el de fase 3 a V_{12} , figura 28.

Como las tensiones compuestas son $\sqrt{3}$ veces mayores que las simples, al resultado debe dividírsele por $\sqrt{3}$.

Si P_1 , P_2 y P_3 son las potencias indicadas por los tres vatímetros;

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_1 + P_2 + P_3)$$

Adviértase que al neutro no va ninguna conexión.

Acá es también necesario conocer o la secuencia de la fase o la naturaleza.

Si alguno de los vatímetros invierte el sentido de su desviación, debe invertirse la voltimétrica y restarse su indicación que corresponde a una carga capacitiva.

Se construyen vármetros trifásicos basados en esta conexión, que sirven solo para tensiones simétricas.

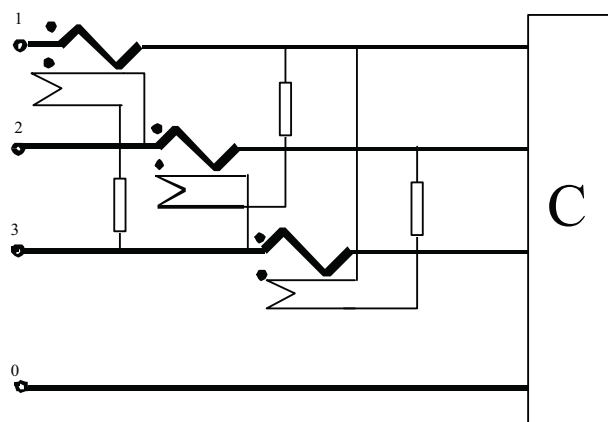


Figura 28

MÉTODO "DE LAS CUATRO LECTURAS" PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES DE UN SISTEMA TRIFÁSICO TRIFILAR CUALQUIERA.

Este método, mediante cuatro lecturas vatimétricas y tres voltimétricas, permite determinar, en la línea en un sistema trifásico trifilar cualquiera, la potencia activa total y en cada una de las fases, así como las intensidades de línea y sus desfases. Dijimos que permite realizar las mediciones en la línea que equivale a decir carga no accesible.

Un circuito trifilar cualquiera queda definido por siete parámetros: las magnitudes de las tres tensiones de línea, las magnitudes de las tres intensidades de línea y el desfase entre una cualquiera de esas tensiones y una cualquiera de esas intensidades.

Como las tres tensiones de línea forman triángulo, con solo conocer sus magnitudes quedan definidos sus desfases. Lo mismo sucede con las intensidades, que por ser trifilar el sistema, son de suma nula, de modo que sus vectores forman triángulo.

Para definir los desfase entre tensiones y corrientes basta conocer un ángulo como por ejemplo el α entre V_{12} e I_1 , como muestra la figura 29.

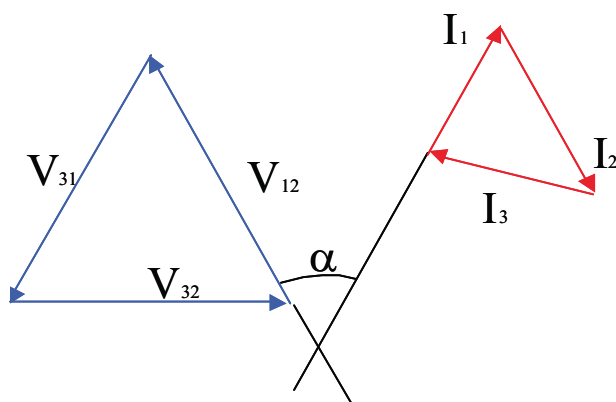


Figura 29

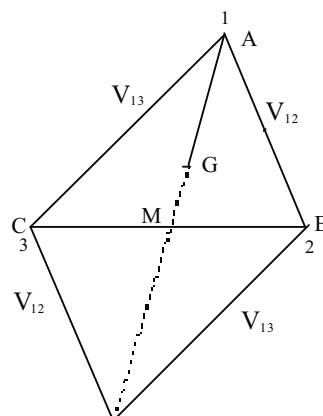


Figura 30

Porque son siete incógnitas es que bastan siete mediciones (a condición de que sean independientes entre sí) para definir el sistema y deducir todas su características.

El método de las cuatro lecturas, forma abreviada de decir: "Método de las cuatro lecturas vatimétricas y tres voltimétricas", se debe al profesor italiano Barbagelata.

Previamente al desarrollo del método estudiaremos un teorema auxiliar:

TEOREMA: " La suma de las lecturas de dos vatímetros cuyas amperométricas están alimentadas por la corriente de una misma fase (I_1 , por ejemplo) y las voltimétricas conectadas a las tensiones compuestas entre esta fase y las otras dos (V_{12} y V_{13}) es igual al triple de la potencia P_{IG} de esta

fase respecto a un punto neutro coincidente con el baricentro".

Es decir:

$$P_{13} + P_{12} = 3 P_{1G}$$

siendo P la potencia de la fase 1:

$$P_{1G} = \dot{V}_{1G} \cdot \dot{I}_1$$

cuya tensión simple corresponde a un neutro coincidente con el baricentro.

En efecto, es fácil demostrar que

$$\dot{V}_{13} + \dot{V}_{12} = 3 \cdot \dot{V}_{1G}$$

en palabras "La suma vectorial de dos tensiones compuestas concurrentes en un vértice del triángulo es igual al triple de la tensión simple de dicho vértice referida al baricentro". En el triángulo de tensiones ABC, figura 30 sea MA la mediana y G el baricentro. Como se sabe $AG = \frac{2}{3} AM$ o $AM = 1,5 AG$ es decir $AM = 1,5 V_{1G}$.

Completando el paralelogramo ABDC, M es punto medio de la diagonal AD o sea:

$$AD = 2 AM = 3 V_{1G}$$

pero además:

$$AD = \dot{V}_{12} + \dot{V}_{13} = 3 \cdot \dot{V}_{1G}$$

Si se multiplica escalarmente cada miembro de esta igualdad por la corriente I, se obtiene

$$P_{12} + P_{13} = 3 P_{1G}$$

que es lo que se quería demostrar.

Método de las cuatro lecturas vatimétricas

Las cuatro lecturas de potencia deben ser, como se dijo, independientes.

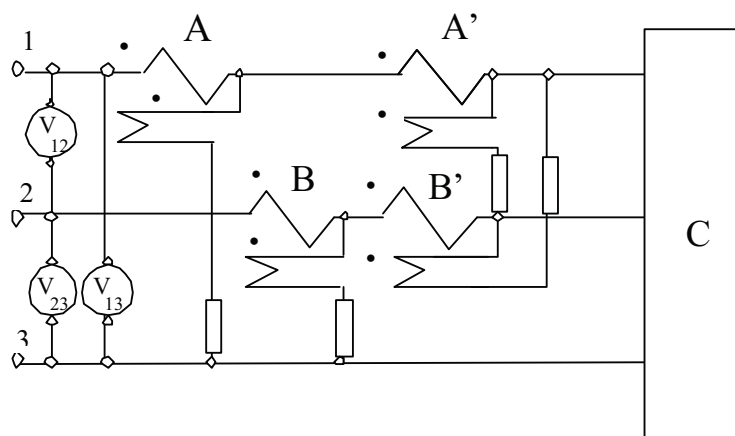


Figura 31

Existen tres formas de conectar los dos vatímetros para determinar potencia activa: Uno de los modos es el de la figura 14, en que la fase 2 es la común. Las otras dos formas son las que hacen comunes a las fases 1 y 3. Obviamente las sumas de estos tres pares de lecturas son iguales y todos dan la potencia activa total del sistema. Es decir:

$$P = P_{13} + P_{23} = P_{21} + P_{31} = P_{12} + P_{32}$$

De estas seis lecturas solo cuatro son independientes; por ejemplo:

$$P_{13} , P_{23} , P_{12} , P_{21}$$

Un par de lecturas y una de cada uno de los otros dos pares. Las otras lecturas, P_{32} y P_{31} ya no son independientes pues pueden deducirse de otras cuatro.

$$P_{32} = P - P_{12} = P_{13} + P_{23} - P_{12}$$

$$P_{31} = P - P_{21} = P_{13} + P_{23} - P_{21}$$

Es esencial entonces que las cuatro lecturas realizadas sean independientes. Las tres lecturas de tensión son de las existentes entre líneas.

El conexionado es el que indica la figura 31.

Se advierte en la figura que las cuatro amperométricas están en dos fases dos en cada una. Las voltimétricas tienen todas un extremo común con la amperométrica correspondiente y el otro borne de modo que dos de los vatímetros, A y V, estén conectados según el método de los dos vatímetros y los restantes, A' y B', intercambian sus extremos.

Las siete lecturas son entonces:

$$A = P_{13} , A' = P_{12} , B_{23} = P , B' = P_{21}$$

$$V_{12} , V_{13} , V_{23}$$

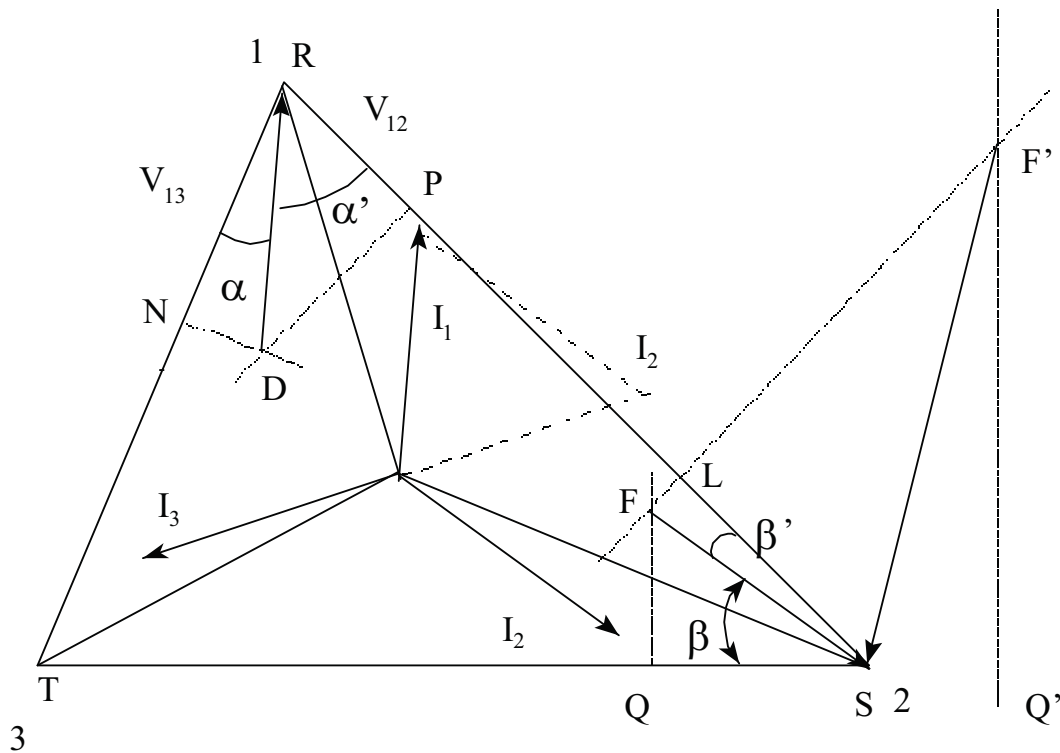


Figura 32

Si bien el problema puede resolverse analíticamente, la solución que daremos es la gráfica (figura 32).

Por el método de los dos vatímetros se deduce la potencia total:

$$P = A + B = P_{13} + P_{23}$$

por el teorema anterior:

$$A + A' = 3P_{1G} \text{ o } P_{1G} = 1/3 (A + A')$$

del mismo modo:

$$P_{2G} = 1/3 (B + B')$$

P_{3G} se deduce de:

$$P_{3G} = P - (P_{1G} + P_{2G})$$

Si se quiere deducir P_{3G} directamente de las cuatro lecturas:

$$P_{3G} = 2/3 (A + B) - 1/3 (A' + B')$$

Para hallar las intensidades se procede gráficamente (figura 32) hallando su proyección sobre dos tensiones.

Dibujando previamente el triángulo de tensiones, se determinan las proyecciones de I_1 sobre las tensiones V_{13} y V_{12} .

Proyección de I_1 sobre V_{13} : se deduce de las lecturas A y V_{13}

$$A = P_{13} = V_{13} \cdot I_1 \cdot \cos \alpha$$

la proyección es:

$$I_1 \cos \alpha = A/V_{13}$$

La proyección de I_1 sobre V_{12} , se deduce de las lecturas A' y V_{12}

$$A' = V_{12} \cdot I_1 \cos \alpha'$$

la proyección es:

$$I_1 \cos \alpha' = A'/V_{12}$$

Una vez calculadas las dos proyecciones de I_1 se determina sobre el lado RT el punto N tal que (en cierta escala de intensidades)

$$RN = I_1 \cos \alpha = A/V_{13}$$

y sobre el lado RS el punto P tal que (en la misma escala)

$$RP = I_1 \cos \alpha' = A'/V_{12}$$

Por N y P se trazan las perpendiculares a los lados RT y RS respectivamente, de modo tal que su punto de intersección D determine con el vértice R el segmento RD que tenga a RN y RP por proyecciones ortogonales sobre las tensiones.

Es decir RD es I_1 en la escala elegida para sus proyecciones RN y RP.

Del mismo modo se determina I_2 . Sus proyecciones sobre V_{23} y V_{21} son

$$SQ = B/V_{23} = I_2 \cos \beta$$

$$SL = B'/V_{21} = I_2 \cos \beta'$$

El segmento SF es I_2 .

Adviértase que en el caso ejemplificado se han supuesto positivas todas las potencias medidas. Pero como se sabe del método de los dos vatímetros eventualmente, algunas pueden ser negativas. El razonamiento que debe hacerse es sencillo. Si la potencia, digamos P_{23} , es positiva, lo es también la proyección QS, que tendrá el sentido de V_{23} , es decir, origen en Q y fin en S. Si P_{23} fuese negativa, la proyección de la corriente sobre V_{23} ($Q'S$), también y la corriente I_2 estaría representada por $F'S$. La I_3 se determina como vector equilibrante de la suma vectorial de $I_1 + I_2$.

Se determina el baricentro por intersección de dos medianas.

Se pueden calcular ahora las potencias reactivas.

$$Q_{13} = V_{13} \cdot I_1 \cdot \sin \alpha$$

Se calcula gráficamente:

$$I_1 \sin \alpha = \overline{ND} \quad \text{---} > Q_{13} = V_{13} \cdot \overline{ND}$$

De igual forma:

$$Q_{21} = V_{21} I_2 \sin \beta' = V_{21} \overline{LF}$$

Llamaremos a estas potencias reactivas:

$$Q_{13} = C \quad Q_{21} = D'$$

Del mismo modo se determinan:

$$Q_{23} = V_{23} \cdot I_2 \cdot \sin \beta = V_{23} \cdot \overline{QF} = D$$

$$Q_{12} = V_{12} \cdot I_1 \cdot \sin \alpha' = V_{12} \cdot \overline{PD} = C'$$

La potencia reactiva total es, por el método de los dos vármetros:

$$Q = C + D$$

La de cada una de las tres fases, referidas al baricentro, en virtud de un teorema válido para potencia reactiva, equivalente al visto de activa:

$$Q_{13} + Q_{12} = 3 Q_{1G}$$

resultan:

$$Q_{1G} = \frac{1}{3}(C + C')$$

$$Q_{3G} = \frac{2}{3}(C + D) - \frac{1}{3}(C' + D')$$

$$Q_{2G} = \frac{1}{3}(D + D')$$

En lo que se refiere al signo de las potencias reactivas, el razonamiento es simple. Si la corriente atrasa respecto a la tensión correspondiente, la potencia reactiva es positiva, como se sabe. Así en la figura 32, Q_{13} es negativa, lo mismo que Q_{21} , mientras que Q_{12} y Q_{23} , son positivas.

Finalmente digamos que no es necesario disponer de cuatro vatímetros. La figura 33 muestra como

con una llave conmutadora bipolar de dos posiciones se pueden realizar las cuatro lecturas con solo dos vatímetros. Las tensiones se pueden leer con un solo voltímetro y dos puntas. Las letras junto a la llave indican qué lectura realiza cada vatímetro en la correspondiente posición.

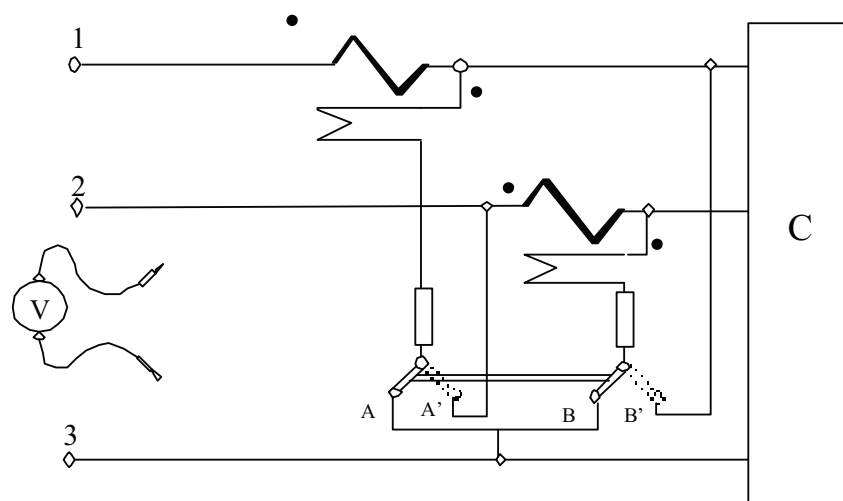


Figura 33

POTENCIA DE DEFORMACIÓN

Introducción:

En un circuito alimentado con una tensión alterna senoidal y carga representada por una impedancia lineal, existe una única potencia activa, una única potencia reactiva y por ende una única potencia aparente. De esta manera un simple triángulo rectángulo representa el diagrama de potencias.

Si ahora suponemos que las ondas de la caída de tensión y la corriente en una impedancia, tienen la forma de las siguientes expresiones:

$$u = U_0 + U_{01} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_{u1}) + U_{02} \cdot \text{sen}(2\omega t + \theta_{u2}) + \dots (1)$$

$$i = I_0 + I_{01} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_{i1}) + I_{02} \cdot \text{sen}(2\omega t + \theta_{i2}) + \dots (2)$$

Tendremos una potencia compleja total, suma geométrica de las potencias complejas correspondientes a las distintas armónicas.

A efectos de simplificar expresiones, supongamos un circuito con las siguientes ondas de tensión y corriente:

$$i = I_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_{i1}) + I_{03} \cdot \text{sen}(3\omega t + \theta_{i3}) (4)$$

$$u = U_{01} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_{u1}) + U_{03} \cdot \text{sen}(3\omega t + \theta_{u3}) (3)$$

La potencia activa total será:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_3 (5)$$

La reactiva total:

$$Q = U_1 \cdot I_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 + U_3 \cdot I_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 (6)$$

La compleja total:

$$\dot{S} = (P_1 + P_3) + j(Q_1 + Q_3) (7)$$

Para un circuito con ondas senoidales es cierta la expresión:

$$S^2 - P^2 - Q^2 = 0 (8)$$

En un circuito con ondas poliarmónicas la igualdad anterior no se cumple:

$$S^2 - P^2 - Q^2 \neq 0 (9)$$

puesto que S, potencia aparente, está definida como el producto entre los valores eficaces de las caídas de tensión y corriente en una impedancia:

$$S = U I = \sqrt{\sum U_n^2} \sqrt{\sum I_n^2} \quad (10)$$

que para nuestro ejemplo se reduce a:

$$S = U I = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} \sqrt{I_1^2 + I_3^2} \quad (11)$$

Si se tratara de ondas senoidales puras la (7) y (11) serían iguales; pero para poliarmonicas sucede en general que la potencia aparente $U.I$ es mayor que la potencia compleja. Para restablecer la igualdad de la (9), agregamos una nueva potencia, la llamada potencia de distorsión o deformación:

$$S^2 - P^2 - Q^2 = D^2$$

Podemos definir ahora a esta nueva componente de la potencia como la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la potencia aparente y del módulo de la potencia compleja:

$$D = \sqrt{(U I)^2 - \dot{S}^2}$$

Es evidente que la interpretación geométrica de todas las potencias intervinientes no pueden representarse en un eje de coordenadas $x-y$. Un nuevo eje "z" (normal al plano $x-y$) es necesario para representar a la potencia de deformación "D"; tal como lo ilustra el diagrama de la figura 34.

De acuerdo a los valores instantáneos de u e i dados por las expresiones (1) y (2) la potencia de deformación se deduce:

$$D = \sqrt{(U I)^2 - (P_1 + P_3)^2 - (Q_1 + Q_3)^2}$$

La interpretación de la aparición de esta nueva potencia denominada también de distorsión es conocida como el modelo de Budeanu (C.I. Budeanu, Potencias reactivas ficticias, Instituto Romano de Energía, Rumania, 1927).

Este modelo ha sido criticado por muchos investigadores por considerar entre otros motivos que no provee información suficiente acerca de la distorsión de la forma de onda.

Existen otros modelos que han tratado de reemplazarlo, pero lo cierto es que ninguno ha ganado la aceptación general en la comunidad científica y en todo caso el reconocimiento al modelo de Budeanu, sigue vigente.

Factor de potencia:

Por definición es el cociente entre las potencias activa y aparente:

$$\cos \psi = \frac{P}{U.I}$$

la representación geométrica del ángulo de este factor de potencia está ubicado en el triángulo rectángulo OAE y su valor difiere del $\cos \varphi$, puesto que éste es representativo del desfase de la fundamental de tensión con la fundamental de corriente.

Dos parámetros importantes definen las características de la corriente: uno es el factor de distorsión

F_d determinado por la relación entre el valor eficaz de la fundamental y el eficaz de la onda deformada.

$$F_d = \frac{I_1}{I}$$

El otro factor es el llamado de forma F_f , relación entre el valor eficaz I y el valor medio de la onda deformada:

$$F_f = \frac{I}{I_{med}}$$

Para concluir diremos que la potencia de distorsión es nula cuando se cumplen las condiciones:
De estos tres ensayos de laboratorio con tensión sinusoidal e impedancia alineal, se tomaron los datos, que se detallan en la Tabla I.

$$\varphi_1 = \varphi_3 \quad y \quad \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_3}{I_3}$$

Tabla I											
U	I	I_1	I_3	I_5	P	Q	S	D	F_d	$\cos\psi$	$\cos\varphi$
223	4.3	3.74	0.25	0.40	925	159	938	199	0.98	0.96	0.98
225	2.00	1.76	0.68	0.40	250	267	365	262	0.8	0.55	0.68
222	0.89	0.35	0.72	0.32	49.5	52	72	184	0.4	0.25	0.7

Se utilizaron instrumentos de hierro móvil y electrodinámicos para determinar el valor eficaz de la tensión y corriente.

Con un analizador de espectros fueron analizadas las componentes (hasta la quinta armónica) de la onda deformada y con un cofimetro patrón se tomaron las lecturas del factor de potencia.

Del análisis de los valores de la tabla se deduce que a medida que el factor de distorsión fue aumentando las diferencias entre el factor de potencia medido con el calculado se fue diferenciando, a punto tal que para un $F_d = 0.4$, la diferencia entre el valor medido y el calculado es de 0.7 a 0.25.

Si en los ensayos anteriores se intercalaran capacitores hasta hacer que la potencia reactiva se anule, se puede comprobar que con la presencia de poliarmónicas el factor de potencia no es igual a uno.

De lo analizado se desprende que la presencia de poliarmónicos repercute en la potencia que el generador deba entregar al receptor, obviamente esta potencia aparente es mayor que la nominal de la carga.

Es importante recordar estos conceptos por cuanto todo lo aprendido en este capítulo de Medición de Potencia, en la práctica pueden encontrarse diferencias si estamos en presencia de ondas deformadas, en especial en aquellos casos que presentan fuertes distorsiones, esto es F_d de valores muy bajos.