utilizan propiedades del extremo superior. Las materias en el texto que dependan del axioma del extremo superior se señalarán claramente.

Para desarrollar el Cálculo como una teoría matemática completa, sería necesario exponer, junto al sistema de axiomas del número real, un conjunto de «métodos de demostración» que permitieran deducir los teoremas a partir de los axiomas. Cada afirmación en la teoría tendría que ser justificada o como «una ley establecida» (es decir, un axioma, una definición o un teorema previamente probado), o como el resultado de aplicar a leyes establecidas uno de los métodos de demostración aceptados. Un programa de esta naturaleza resultaría extremadamente largo y trabajoso, y ayudaría muy poco a la comprensión de la materia por el principiante. Afortunadamente no es necesario proceder de esta forma para llegar a una buena comprensión y manejo del Cálculo. En este libro se introducen las cuestiones prescindiendo de un formalismo exagerado y se hace amplio uso del razonamiento geométrico cuando se cree conveniente; pero al mismo tiempo, se procura que la exposición de las materias goce de la precisión y claridad propias de la ciencia moderna. Todos los teoremas importantes de la teoría en cuestión, están explícitamente expuestos y rigurosamente demostrados.

Para evitar interrumpir la sucesión de ideas, algunas de las demostraciones aparecen en secciones separadas señaladas con asterisco. Por la misma razón, algunos de los capítulos van acompañados de secciones suplementarias en las cuales se tratan con detalle algunos temas importantes relacionados con el Cálculo. Algunos de ellos están también señalados con asterisco para indicar que pueden omitirse o posponerse sin que se interrumpa la continuidad de la exposición. El que se tomen más o menos en consideración los apartados con asterisco, depende en parte de la preparación del lector y en parte de su interés. La persona que desee un curso completo de Cálculo tanto en teoría como en la práctica, tendrá que leer toda la materia. El que se interese primeramente por las ideas básicas y la práctica, podrá suprimir los apartados con asterisco.

Parte II. - Conceptos básicos de la Teoría de conjuntos

I 2.1 Introducción a la Teoría de conjuntos

En el estudio de cualquier rama de la Matemática, sea Análisis, Álgebra o Geometría, resulta útil emplear la notación y la terminología de la Teoría de conjuntos. Esta teoría, que fue desarrollada por Boole y Cantor (†) a fines del siglo XIX, ha tenido una profunda influencia en el desarrollo de la Matemática en el si-

(†) George Boole (1815-1864) fue un lógico-matemático inglés. Su libro, *Investigación de las leyes del pensamiento,* publicado en 1854, señala la creación del primer sistema práctico de Lógica simbólica. George F. L. P. Cantor (1845-1918) y su escuela crearon la moderna Teoría de conjuntos en el período 1874-1895.

glo xx. Ha unificado muchas ideas aparentemente inconexas y ha contribuido a reducir gran número de conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos por un método elegante y sistemático. Un estudio riguroso de la Teoría de conjuntos requeriría una amplia discusión que consideramos fuera del alcance de este libro. Por fortuna, las nociones básicas son en número reducido, y es posible desarrollar un conocimiento práctico de los métodos e ideas de la Teoría de conjuntos a través de una discusión informal. En realidad, no vamos a hacer una discusión de la moderna Teoría de conjuntos, sino precisar la terminología que deberemos aplicar a las ideas más o menos familiares.

En Matemáticas, la palabra «conjunto» se emplea para representar una colección de objetos considerada como una sola entidad. Las colecciones designadas con nombres tales como «rebaño», «tribu», «muchedumbre», «equipo» y «electorado» son todas ejemplos de conjunto. Los objetos que constituyen la colección se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto, y de ellos se dice que *pertenecen* o que están *contenidos* en el conjunto. A su vez, se dice que el conjunto *contiene* o está *compuesto de* sus elementos.

Nos ocuparemos principalmente de conjuntos de entes matemáticos: conjuntos de números, de curvas, de figuras geométricas, etc. En muchas aplicaciones conviene considerar conjuntos en los que no se supone nada acerca de la naturaleza de sus elementos. Tales conjuntos se llaman abstractos. La Teoría de conjuntos abstractos ha sido desarrollada para tratar con tales colecciones de objetos arbitrarios, y precisamente a esa generalidad se debe el gran alcance de tal teoría.

I 2.2. Notaciones para designar conjuntos

Corrientemente los conjuntos se designan con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$; y los elementos con minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Utilizamos la notación

$$x \in S$$

para indicar que «x es un elemento de S» o que «x pertenece a S». Si x no pertenece a S escribimos $x \notin S$. Cuando convenga, designaremos conjuntos escribiendo los elementos entre corchetes; por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos pares menores que 10 se expresa con el símbolo $\{2, 4, 6, 8\}$ mientras que el de *todos* los enteros positivos se representa con $\{1, 2, 3, \ldots\}$; los tres puntos significan «y así sucesivamente». Los puntos suspensivos tan sólo se utilizan cuando el significado de «y así sucesivamente» sea claro. El método de citar los elementos de un conjunto entre corchetes se llama frecuentemente la *notación en lista.*

El primer concepto fundamental que relaciona un conjunto con otro es la *igualdad* de conjuntos:

DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE CONJUNTOS. *Se dice que dos conjuntos A y B son iguales (o idénticos) si constan exactamente de los mismos elementos, en cuyo* *caso escribiremos $A = B$. Si uno de los conjuntos contiene algún elemento que no está en el otro, decimos que los conjuntos son distintos y escribimos $A \neq B$.*

EJEMPLO 1. De acuerdo con esta definición, los dos conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ y $\{2, 8, 4, 6\}$ son iguales, ya que ambos constan de los cuatro elementos 2, 4, 6, y 8. De este modo, cuando usamos la notación en lista para expresar un conjunto, el orden en que aparecen los elementos es indiferente.

EJEMPLO 2. Los conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ y $\{2, 2, 4, 4, 6, 8\}$ son iguales a pesar de que en el segundo conjunto los elementos 2 y 4 están citados dos veces. Ambos conjuntos contienen los cuatro elementos 2, 4, 6, 8 y no otros, así que la definición exige que consideremos iguales esos conjuntos. Este ejemplo pone de manifiesto que no debemos exigir que los elementos citados en la notación en lista sean todos distintos. Análogamente el conjunto de letras en la palabra *Mississippi* es idéntico al conjunto $\{M, i, s, p\}$ que consta de las cuatro letras distintas M, i, s, y p.

I 2.3 Subconjuntos

A partir de un conjunto dado podemos formar nuevos conjuntos, llamados *subconjuntos* de aquél. Por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos menores que 10 y divisibles por 4 (que es el conjunto $\{4, 8\}$) es un subconjunto de los enteros positivos pares menores que 10. En general, daremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN DE SUBCONJUNTO. *Se dice que un conjunto A es un subconjunto del conjunto B, y escribimos*

$$A \subseteq B,$$

cuando todo elemento de A pertenece también a B. Decimos también que A está contenido en B o que B contiene a A. El símbolo $\subseteq$ se utiliza para representar la relación de inclusión de conjuntos.

La relación $A \subseteq B$ no excluye la posibilidad de que $B \subseteq A$. En realidad, podemos tener las dos relaciones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ pero esto se presenta tan sólo si A y B tienen los mismos elementos. En otras palabras,

$$A = B \quad \textit{si y sólo si} \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A .$$

Este teorema es consecuencia inmediata de las definiciones anteriores de igualdad e inclusión. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, decimos que A es un *subconjunto propio* de B; indicamos esto escribiendo $A \subset B$.

En todas nuestras aplicaciones ocurrirá que tendremos fijado de antemano un cierto conjunto S, y sólo nos interesarán subconjuntos de aquél. El conjunto fundamental S puede variar de una aplicación a otra; y será considerado como el *conjunto universal* de cada teoría particular. La notación

$$\{x \mid x \in S \quad \text{y} \quad x \text{ satisface } P\}$$

designará el conjunto de todos los elementos x de S que satisfacen la propiedad P. Cuando el conjunto universal al que nos refiramos se sobrentiende, omitiremos el citarlo abreviando la notación poniendo $\{x \mid x \text{ satisface } P\}$. Esto se lee «el conjunto de todos los x que satisfacen P». Los conjuntos representados de este modo quedan caracterizados por una *propiedad definidora.* Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales positivos podría designarse por $\{x \mid x>0\}$; el conjunto universal S en este caso se sobrentiende que es el conjunto de todos los números reales. Del mismo modo, el conjunto de todos los números pares positivos $\{2, 4, 6, \ldots\}$ puede designarse con $\{x \mid x \text{ entero par positivo}\}$. Naturalmente, la letra x puede reemplazarse por otro signo adecuado. Así, se puede escribir

$$\{x \mid x > 0\} = \{y \mid y > 0\} = \{t \mid t > 0\}$$

etcétera.

Puede ocurrir que un conjunto no contenga elementos. Un tal conjunto se llama *conjunto vacío,* y se representa mediante el símbolo $\varnothing$. Consideremos el $\varnothing$ como subconjunto de cualquier conjunto. Hay quien imagina un conjunto como un recipiente (tal como una bolsa o una caja) que contiene ciertos objetos, sus elementos. Entonces, el conjunto vacío sería un recipiente vacío.

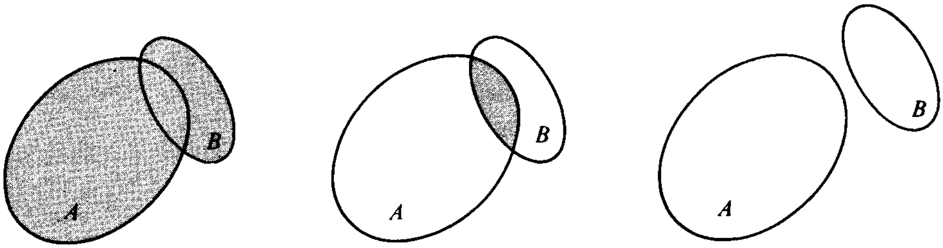
Para evitar dificultades y confusiones, debemos distinguir entre el elemento x y el conjunto $\{x\}$ cuyo único elemento es x. (Una caja con un sombrero dentro, es conceptualmente distinto del sombrero considerado solo.) En particular el conjunto vacío $\varnothing$ no es lo mismo que el conjunto $\{\varnothing\}$. En realidad el conjunto vacío $\varnothing$ no contiene elementos, mientras que el conjunto $\{\varnothing\}$ contiene un elemento, $\varnothing$ (Una bolsa que contiene una bolsa vacía no está vacía.) Los conjuntos que contienen un solo elemento se llaman *conjuntos de un elemento.*

Con frecuencia nos ayudamos de diagramas para hacer intuitivas las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, podemos pensar que el conjunto universal S es una región en el plano, y cada uno de sus elementos un punto. Los subconjuntos de S pueden imaginarse como colecciones de puntos interiores a S. Por ejemplo, en la figura I.6(b) la porción sombreada es un subconjunto de A y también de B. Las ayudas gráficas de este tipo se llaman *diagramas de Venn* y se utilizan para comprobar la validez de ciertos teoremas de la Teoría de conjuntos o para sugerir métodos de demostración de los mismos. Naturalmente, tales demostraciones se basan en las definiciones y conceptos y su validez dependerá de un razonamiento correcto y no precisamente de los diagramas.

I 2.4 Reuniones, intersecciones, complementos

A partir de dos conjuntos dados A y B, siempre podemos formar un nuevo conjunto llamado *reunión* de A y B. Este nuevo conjunto se representa con el símbolo

$$A \cup B \text{ (se lee «}A\text{ reunión }B\text{»)}$$



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap B = \varnothing$

FIGURA I.6 *Reuniones e intersecciones.*

y se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Es decir, $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos A, B. En la figura I.6(a) la parte sombreada representa $A \cup B$.

Análogamente, la *intersección* de A y B que se representa con el símbolo

$$A \cap B \text{ (se lee: «}A\text{ intersección }B\text{»)}$$

se define como el conjunto de los elementos comunes a A y a B. En la figura I.6(b) se representa la intersección de A y B. En la figura I.6(c) se ve que la intersección de A y B es el conjunto $\varnothing$, puesto que A y B no tienen elementos comunes. Dos conjuntos A y B se llaman *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$.

Dados dos conjuntos A y B, se define la *diferencia* $A - B$ (que también se llama *complemento de B relativo a A*) como el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B. Así pues, según la definición

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}.$$

En la figura I.6(b) la porción no sombreada de A representa $A - B$; la no sombreada de B representa $B - A$.

Las operaciones de reunión e intersección poseen muchas analogías formales con la adición y multiplicación ordinarias de números reales. Por ejemplo, puesto que no existe cuestión de orden en las definiciones de reunión e intersección, se deduce que $A \cup B = B \cup A$ y que $A \cap B = B \cap A$. Es decir, la reunión y la intersección son operaciones *conmutativas*. Asimismo dichas definiciones están dadas de tal modo que las operaciones son *asociativas*:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{y} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Estos y otros teoremas relativos al «álgebra de conjuntos» se citan como Ejercicios en la Sección I 2.5. Uno de los mejores métodos para que el lector se familiarice con la terminología y las notaciones antes introducidas es deducir las demostraciones de cada una de estas leyes formales. Una muestra del tipo de razonamiento que se necesita aparece inmediatamente después de los Ejercicios.

Las operaciones de reunión e intersección pueden extenderse a colecciones finitas o infinitas de conjuntos, de la manera siguiente: Sea $\mathscr{F}$ una clase (†) no vacía de conjuntos. La reunión de todos los conjuntos de $\mathscr{F}$ se define como el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de $\mathscr{F}$, y se representa con el símbolo

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Si $\mathscr{F}$ es una colección finita de conjuntos, sea por ejemplo $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, escribimos

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n .$$

Análogamente, la intersección de todos los conjuntos de $\mathscr{F}$ se define como el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathscr{F}$; se representa con el símbolo

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Al igual que antes, para colecciones finitas de conjuntos escribimos:

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

(†) Para simplificar el lenguaje llamamos *clase* a una colección de conjuntos. Para representar clases empleamos letras mayúsculas cursivas. La terminología y la notación usuales de la Teoría de conjuntos se aplica, naturalmente, a las clases. Así, por ejemplo, $A \in \mathscr{F}$ significa que A es uno de los conjuntos de la clase $\mathscr{F}$, y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ significa que todo conjunto de $\mathscr{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$, y así sucesivamente.

La reunión y la intersección se han definido de manera que las leyes asociativas se satisfacen inmediatamente. En consecuencia no existirá ambigüedad cuando escribimos $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ o $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

I 2.5 Ejercicios

1. Utilizar la notación en lista para representar los siguientes conjuntos de números reales.

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}. \qquad D = \{x \mid x^3 - 2x^2 + x = 2\}.$$

$$B = \{x \mid (x - 1)^2 = 0\}. \qquad E = \{x \mid (x + 8)^2 = 9^2\}.$$

$$C = \{x \mid x + 8 = 9\}. \qquad F = \{x \mid (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}.$$

2. Para los conjuntos del Ejercicio 1, obsérvese que $B \subseteq A$. Citar todas las relaciones de inclusión $\subseteq$ que son válidas entre los conjuntos A, B, C, D, E, F.
3. Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Discutir la validez de las afirmaciones siguientes (probar que unas son ciertas y explicar por qué las otras son falsas).

(a) $A \subset B$. (d) $1 \in A$.
(b) $A \subseteq B$. (e) $1 \subseteq A$.
(c) $A \in B$. (f) $1 \subset B$.

4. Resolver el Ejercicio 3 si $A = \{1\}$ y $B = \{\{1\}, 1\}$.
5. Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Expresar todos los subconjuntos de S. Hay en total 16, si contamos $\varnothing$ y S.
6. Dados los cuatro conjuntos siguientes

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \qquad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \qquad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

discutir la validez de las afirmaciones siguientes (probar que unas son ciertas y explicar por qué las otras no lo son).

(a) $A = B$. (d) $A \in C$. (g) $B \subset D$.
(b) $A \subseteq B$. (e) $A \subset D$. (h) $B \in D$.
(c) $A \subset C$. (f) $B \subset C$. (i) $A \in D$.

7. Demostrar las propiedades siguientes de la igualdad de conjuntos.

(a) $\{a, a\} = \{a\}$.
(b) $\{a, b\} = \{b, a\}$.
(c) $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.

Demostrar el conjunto de relaciones de los Ejercicios 8 al 19. (Al final de esta Sección se dan ejemplos de estas demostraciónes).

8. *Leyes conmutativas*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

9. *Leyes asociativas:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

10. *Leyes distributivas:* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

11. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A,$
12. $A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A.$
13. $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$
14. $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$
15. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C.$
16. Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq A \cap B.$
17. (a) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, probar que $A \subset C.$
    (b) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, probar que $A \subseteq C.$
    (c) ¿Qué puede afirmarse si $A \subset B$ y $B \subseteq C$?
    (d) Si $x \in A$ y $A \subseteq B$, ¿es cierto necesariamente que $x \in B$?
    (e) Si $x \in A$ y $A \in B$, ¿es cierto necesariamente que $x \in B$?
18. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$
19. Sea $\mathscr{F}$ una clase de conjuntos. Entonces

$$B - \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{F}} (B - A) \qquad \text{y} \qquad B - \bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} (B - A).$$

20. (a) Demostrar que una de las dos fórmulas siguientes es siempre correcta y la otra algunas veces es falsa:

$$\text{(i) } A - (B - C) = (A - B) \cup C,$$

$$\text{(ii) } A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

(b) Establecer una condición necesaria y suficiente adicional para que la fórmula que sea incorrecta sea siempre válida.

Demostración de la ley conmutativa $A \cup B = B \cup A$. Sean $X = A \cup B$, $Y = B \cup A$. Para demostrar que $X = Y$ se demuestra que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$. Supóngase que $x \in X$. Entonces x está por lo menos en A o en B. Luego, x está por lo menos en B o en A; de modo que $x \in Y$. Así, pues, todo elemento de X está también en Y, con lo que $X \subseteq Y$. Análogamente, encontramos que $Y \subseteq X$, de modo que $X = Y$.

Demostración de $A \cap B \subseteq A$. Si $x \in A \cap B$, x está simultáneamente en A y en B. En particular, $x \in A$. Así, pues, todo elemento de $A \cap B$ está también en A; por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.

Parte III. - Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales

I 3.1 Introducción

Hay muchos métodos para introducir el sistema de los números reales. Un método corriente es el de empezar con los enteros positivos 1, 2, 3, . . . y utilizarlos como base para construir un sistema más amplio que tenga las propiedades deseadas. Brevemente, la idea de este método es tomar los enteros positivos como base para formar un sistema más amplio, que es el de los números *racionales* positivos (cocientes de enteros positivos). Los números racionales positivos se utilizan a su vez como base para construir los *irracionales* positivos (números reales como $\sqrt{2}$ y π que no son racionales). El paso final es la introducción de los números reales negativos y el cero. La parte más difícil del proceso total es el paso de los números racionales a los números irracionales.

Aunque la necesidad del número irracional se había presentado ya a los matemáticos de la antigua Grecia en sus estudios geométricos, no se introdujeron métodos satisfactorios de construcción de los números reales a partir de los racionales hasta entrado el siglo XIX. En esta época se perfilaron tres teorías distintas por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916). En 1889, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) dio cinco axiomas para los enteros positivos que se utilizaron como punto de partida para la construcción total. Una exposición detallada de esta construcción empezando por los axiomas de Peano y utilizando el método de Dedekind para introducir el número irracional, se encuentra en el libro de E. Landau, *Fundamentos del Análisis* (Nueva York, Chelsea Publishing Co., 1951).

El punto de vista adoptado aquí no es constructivo. Se inicia el proceso en un punto bastante avanzado, considerando los números reales como conceptos primitivos que satisfacen a un cierto número de propiedades que se toman como axiomas; es decir, se supone que existen ciertos objetos, llamados números reales, que satisfacen los 10 axiomas enunciados en las cinco Secciones que siguen. Todas las propiedades de los números reales que se utilizarán en este libro, o están entre los axiomas o se pueden deducir de ellos. Cuando los números reales se definen mediante un proceso constructivo, las propiedades que se toman como axiomas tendrán que demostrarse como teoremas.

Mientras no se diga lo contrario, las letras $a, b, c, \ldots x, y, z$ que aparecen en los axiomas representan números reales cualesquiera. Los axiomas se agrupan en forma natural en tres grupos, que son, *axiomas de cuerpo, axiomas de orden* y *axioma del extremo superior* (llamado también *axioma de continuidad* o *axioma de completitud*).

I 3.2 Axiomas de cuerpo

Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas *adición y multiplicación,* tales que para cada par de números reales x e y se puede formar la *suma* de x e y, que es otro número real designado por $x+y$ y el *producto* de x por y designado por xy o $x \cdot y$. La suma $x+y$ y el producto xy están unívocamente determinados por x e y. A los signos $+$ y $\cdot$ no se les asigna otro significado especial que el precisado en los axiomas.

AXIOMA 1. PROPIEDAD CONMUTATIVA. $x+y=y+x, \quad xy=yx.$

AXIOMA 2. PROPIEDAD ASOCIATIVA. $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x(yz)=(xy)z.$

AXIOMA 3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. $x(y+z)=xy+xz.$

AXIOMA 4. EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS. *Existen dos números reales distintos, que se indican por* 0 *y* 1 *tales que para cada número real x se tiene:* $0+x=x+0=x$ y $1 \cdot x=x \cdot 1=x.$

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE NEGATIVOS. *Para cada número real x existe un número real y tal que* $x+y=y+x=0.$

AXIOMA 6. EXISTENCIA DEL RECÍPROCO. *Para cada número real* $x \neq 0$ *existe un número real y tal que* $xy=yx=1.$

Nota: Los números 0 y 1 de los axiomas 5 y 6 son los mismos que los del axioma 4.

De los axiomas anteriores se puede deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental. Las más importantes de ellas se recogen a continuación como teoremas. En todos estos teoremas las letras $a, b, c, d,$ representan números reales cualesquiera.

TEOREMA I.1. LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA SUMA. *Si* $a+b=a+c$, *entonces* $b=c$. *(En particular esto prueba que el número* 0 *del axioma* 4 *es único.)*

TEOREMA I.2. POSIBILIDAD DE LA SUSTRACCIÓN. *Dados a y b existe uno y sólo un x tal que $a+x=b$. Este x se designa por $b-a$. En particular $0-a$ se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a.*

TEOREMA I.3. $b-a=b+(-a).$

TEOREMA I.4. $-(-a)=a.$

TEOREMA I.5. $a(b-c)=ab-ac.$

TEOREMA I.6. $0 \cdot a=a \cdot 0=0.$

TEOREMA I.7. LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN. *Si $ab=ac$ y $a \neq 0$, entonces $b=c$. (En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único.)*

TEOREMA I.8. POSIBILIDAD DE LA DIVISIÓN. *Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax=b$. La x se designa por b/a o $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a.*

TEOREMA I.9. *Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$.*

TEOREMA I.10. *Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.*

TEOREMA I.11. *Si $ab=0$ entonces o $a=0$ o $b=0$.*

TEOREMA I.12. $(-a)b = -(ab)$ *y* $(-a)(-b) = ab$.

TEOREMA I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ *si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$.

TEOREMA I.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ *si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$.

TEOREMA I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *si* $b \neq 0, c \neq 0$, y $d \neq 0$.

Para poner de manifiesto cómo estos teoremas pueden obtenerse como consecuencia de los axiomas, se dan las demostraciones de I.1 hasta I.4, y sería instructivo para el lector tratar de demostrar los restantes.

Demostración de I.1. Dado $a+b=a+c$. En virtud del axioma 5, se puede elegir y de manera que $y+a=0$, con lo cual $y+(a+b)=y+(a+c)$, y aplicando la propiedad asociativa $(y+a)+b=(y+a)+c$, o sea, $0+b=0+c$. Pero en virtud del axioma 4, se tiene $0+b=b$ y $0+c=c$, o sea, $b=c$. Obsérvese que este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y 0′ tuvieran ambos esta propiedad, entonces, $0+0'=0$ y $0+0=0$; por tanto, $0+0'=0+0$ y por la ley de simplificación $0=0'$.

Demostración de I.2. Dados a y b se elige y de manera que $a+y=0$ y sea $x=y+b$. Entonces, $a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$. Por tanto, hay por lo menos una x tal que $a+x=b$. Pero en virtud del teorema I.1, hay a lo sumo una. Luego hay *una y sólo una* x en estas condiciones.

Demostración de I.3. Sea $x=b-a$ y sea $y=b+(-a)$. Se trata de probar que $x=y$. Por definición de $b-a$, $x+a=b$ y

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Por tanto, $x+a=y+a$, y en virtud de I.1, $x=y$.

Demostración de I.4. Se tiene $a+(-a)=0$ por definición de $-a$. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $(-a)$, es decir, que $a=-(-a)$ como se afirma en el teorema.

*I 3.3 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas del I.5 al I.15, utilizando los axiomas 1 al 6 y los teoremas I.1 al I.4.

En los ejercicios del 2 al 10, demostrar las afirmaciones indicadas, o establecer las igualdades dadas. Aplíquense los axiomas 1 al 6 y los teoremas del I.1 al I.15.

2. $-0 = 0$.
3. $1^{-1} = 1$.
4. El cero no tiene recíproco.
5. $-(a + b) = -a - b$.
6. $-(a - b) = -a + b$.
7. $(a - b) + (b - c) = a - c$.
8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$.
9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$.
10. $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

I 3.4 Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece una *ordenación* entre los números reales. Según esta ordenación se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden, como un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de *positivo,* para definir después los conceptos de *mayor que* y *menor que* a partir del de *positivo.*

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$, llamado conjunto de números *positivos,* que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

AXIOMA 7. *Si x e y pertenecen a $\mathbf{R}^+$, lo mismo ocurre a $x+y$ y xy.*

AXIOMA 8. *Para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbf{R}^+$ o $-x \in \mathbf{R}^+$, pero no ambos.*

AXIOMA 9. $0 \notin \mathbf{R}^+$.

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$, y $\geq$ llamados respectivamente *menor que, mayor que, igual o menor que,* e *igual o mayor que,* de la manera siguiente:

$$x<y \text{ significa que } y-x \text{ es positivo.}$$

$y > x$ significa que $x < y$.

$x \leq y$ significa que o $x < y$ o $x = y$.

$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Por lo tanto, se tiene $x > 0$ si y sólo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es *negativo*; si $x \geq 0$ se dice que x es *no negativo*. El par de desigualdades simultáneas $x < y$, $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, $x \leq y \leq z$.

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes de las cuales se dan a continuación como teoremas.

TEOREMA I.16. PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA. *Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$.*

TEOREMA I.17. PROPIEDAD TRANSITIVA. *Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$.*

TEOREMA I.18. *Si $a < b$ es $a + c < b + c$.*

TEOREMA I.19. *Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$.*

TEOREMA I.20. *Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$.*

TEOREMA I.21. $1 > 0$.

TEOREMA I.22. *Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$.*

TEOREMA I.23. *Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.*

TEOREMA I.24. *Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.*

TEOREMA I.25. *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.*

También aquí se demostrarán sólo algunos de estos teoremas, como ejemplo de cómo se procede en la demostración. Los demás se dejan como ejercicio al lector.

Demostración de I.16. Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$ y, por tanto, en virtud del axioma 9 no puede ser ni $a > b$ ni $b > a$.

Si $x \neq 0$, el axioma 8 afirma que o $x > 0$ o $x < 0$, pero no ambos; por consiguiente, o es $a < b$ o es $b < a$, pero no ambos. Por tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

Demostración de I.17. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud del axioma 7 se puede sumar obteniéndose $(b - a) + (c - b) > 0$. Es decir, $c - a > 0$, y por tanto, $a < c$.

Demostración de I.18. Sea $x = a + c$, $y = b + c$. Entonces $y - x = b - a$. Pero $b - a > 0$, por tanto, $a < b$. De donde $y - x > 0$, lo que significa $x < y$.

Demostración de I.19. Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Si $c > 0$ en virtud del axioma 7, se puede multiplicar c por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a)c > 0$. Pero $(b - a)c = bc - ac$, por tanto, $bc - ac > 0$ y esto significa $bc > ac$ como se quería demostrar.

Demostración de I.20. Si $a > 0$, en virtud del axioma 7 $a \cdot a > 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y, por tanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$ en virtud del axioma 7. En ambos casos se tiene $a^2 > 0$.

Demostración de I.21. Aplicando el teorema I.20 al caso $a = 1$.

*I 3.5 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas I.22 al I.25 utilizando los teoremas anteriores y los axiomas del 1 al 9.

En los ejercicios del 2 al 10 demostrar las proposiciones y establecer las desigualdades dadas. Se pueden utilizar los axiomas del 1 al 9 y los teoremas del I. 1 al I. 25.

2. No existe ningún número real tal que $x^2 + 1 = 0$.
3. La suma de dos números negativos es un número negativo.
4. Si $a > 0$, también $1/a > 0$; si $a < 0$, entonces $1/a < 0$.
5. Si $0 < a < b$, entonces, $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
6. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, es $a \leq c$.
7. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ y $a = c$, entonces $b = c$.
8. Para números reales a y b cualesquiera, se tiene $a^2 + b^2 \geq 0$. Si $ab \neq 0$, entonces es $a^2 + b^2 > 0$.
9. No existe ningún número real a tal que $x \leq a$ para todo real x.
10. Si x tiene la propiedad que $0 \leq x < h$ para *cada* número real positivo h, entonces $x = 0$.

I 3.6 Números enteros y racionales

Hay ciertos subconjuntos de **R** que se distinguen porque tienen propiedades especiales de que no gozan todos los números reales. En esta Sección se discutirán dos de estos subconjuntos, los *números enteros* y los *números racionales*.

Para introducir los enteros positivos se empieza con el número 1, cuya existencia queda asegurada por el axioma 4. El número $1 + 1$ se representa por 2, el $2 + 1$ por 3, y así sucesivamente. Los números 1, 2, 3, ..., obtenidos de este modo por la adición repetida del 1 son todos positivos, y se llaman *enteros positivos.* En rigor, esta descripción de los enteros positivos no es del todo precisa pues no hemos explicado con detalle lo que entendemos por «y así sucesivamente» o por «adición repetida del 1». Si bien la significación intuitiva puede parecer clara, en un estudio cuidadoso del sistema de los números reales es necesario dar una definición más precisa de los enteros positivos. Hay varios modos de hacerlo. Un método consiste en introducir primero la noción de *conjunto inductivo.*

DEFINICIÓN DE CONJUNTO INDUCTIVO. *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las propiedades siguientes:*

a) *El número* 1 *pertenece al conjunto.*

b) *Para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ pertenece también al conjunto.*

Por ejemplo, **R** es un conjunto inductivo. También lo es el conjunto $\mathbf{R}^+$. Definiremos los enteros positivos como aquellos números reales que pertenecen a todo conjunto inductivo.

DEFINICIÓN DE ENTEROS POSITIVOS. *Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.*

Sea **P** el conjunto de todos los enteros positivos. Es un conjunto inductivo ya que a) contiene el 1, y b) contiene a $x + 1$ siempre que contenga x. Puesto que los elementos de **P** pertenecen a todo conjunto inductivo, nos referiremos a **P** como el *menor* conjunto inductivo. Esta propiedad del conjunto **P** constituye la base lógica para un tipo de razonamiento que los matemáticos denominan *demostración por inducción,* que se expone con detalle en la parte 4 de esta Introducción.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos.* Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), constituyen un conjunto **Z** que se llama simplemente *conjunto de los enteros.*

En un estudio completo del sistema de los números reales, sería necesario al llegar aquí demostrar ciertos teoremas acerca de los enteros. Por ejemplo, la suma, la diferencia o el producto de dos enteros es un entero, pero el cociente de dos enteros no es necesariamente entero. Sin embargo, no entraremos en los detalles de tales demostraciones.

Los cocientes de enteros a/b (siendo $b \neq 0$) se llaman *números racionales.* El conjunto de los números racionales, representado por **Q**, contiene a **Z** como subconjunto. El lector debería comprobar que **Q** satisface todos los axiomas de cuerpo y de orden. Por esta razón se dice que el conjunto de los números racionales es un *cuerpo ordenado*. Los números reales que no pertenecen a **Q** se llaman *irracionales*.

I 3.7 Interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta

Sin duda que el lector debe estar familiarizado con la representación de los números reales por medio de los puntos de una recta. Se elige un punto para representar el 0 y otro a la derecha del 0 para representar el 1, como se indica en la figura I.7. Esta elección determina la escala. Si se adopta un conjunto de axiomas apropiados para la Geometría euclídea, cada número real corresponde a uno y sólo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y sólo uno. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente *recta real* o *eje real*, y es costumbre utilizar las palabras *número real* y *punto* como sinónimos. Por eso se dice muchas veces el *punto* x en vez del punto correspondiente al número real x.

La relación de orden entre los números reales tiene una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como se ve en la figura I.7. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$, si y sólo si x está entre a y b.

Esta posibilidad de representar geométricamente los números reales es un auxiliar poderoso, pues permite descubrir y comprender mejor ciertas propiedades de los números reales. Aunque el lector debe observar que todas las propiedades de los números reales que se han dado como teoremas deben deducirse de los axiomas sin ninguna referencia geométrica, esto no prejuzga que no deba hacerse uso de la Geometría en el estudio de las propiedades de los números reales. Por el contrario, la Geometría sugiere a menudo el método de demostración para un teorema particular, y algunas veces un argumento geométrico es más sugestivo que la demostración puramente *analítica* (dependiente exclusivamente de los axiomas del número real). En este libro, se utiliza con frecuencia la intuición geomé-

FIGURA I.7 *Números reales representados geométricamente en una línea*

trica para aclarar determinadas cuestiones o para inducir a discusiones de otras. No obstante, las demostraciones de todos los teoremas importantes se presentan en forma analítica.

I 3.8 Cota superior de un conjunto. elemento máximo, extremo superior

Los nueve axiomas expuestos hasta ahora contienen todas las propiedades de los números reales estudiados ordinariamente en Álgebra elemental. Hay otro axioma de importancia fundamental en el Cálculo que de ordinario no se estudia en los cursos de Álgebra elemental. Este axioma (u otro equivalente) es necesario para establecer la existencia del número irracional.

En Álgebra elemental se presentan números irracionales cuando se trata de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea tener un número real x tal que $x^2 = 2$. A partir de los nueve axiomas anteriores no se puede probar que exista un x en el sistema de los números reales que verifique tal ecuación, ya que estos nueve axiomas son satisfechos también por los números racionales y no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. (En el Ejercicio 11 de la Sección I 3.12 se esboza una demostración de esta afirmación.) El axioma 10 permite introducir números irracionales en el sistema de los números reales. Se verá también que atribuye al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que es especialmente importante en el estudio del Cálculo.

Antes de exponer el axioma 10, conviene introducir alguna terminología y notación especiales. Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B tal que

$$x \leq B$$

para todo x de S. Entonces se dice que S está *acotado superiormente* por B. El número B se denomina una *cota superior* para S. Decimos *una* cota superior debido a que todo número mayor que B también es una cota superior. Si una cota superior B pertenece también a S, entonces B se llama el *elemento máximo* de S. A lo sumo puede existir un B que sea elemento máximo. Si existe, se escribe

$$B = \max S .$$

Así que, $B = \max S$ si $B \in S$ y $x \leq B$ para todo x de S. Un conjunto sin cota superior se dice que es *no acotado superiormente*.

Los ejemplos que siguen ilustran el significado de estas denominaciones.

EJEMPLO 1. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos. Es un conjunto no acotado superiormente. No tiene cotas superiores ni elemento máximo.

EJEMPLO 2. Sea S el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. Este conjunto está acotado superiormente por el 1. Su elemento máximo es el 1.

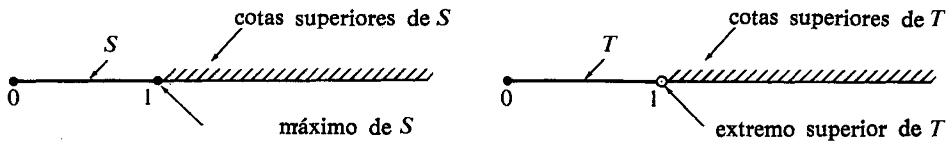
EJEMPLO 3. Sea T el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x < 1$. Es parecido al conjunto del ejemplo 2 salvo que el punto 1 no está incluido. Este conjunto está acotado superiormente por el 1 pero no tiene elemento máximo.

Algunos conjuntos, parecidos al del ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al del máximo. Este se llama *extremo superior* del conjunto y se define como sigue:

DEFINICIÓN DE EXTREMO SUPERIOR. *Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:*

a) *B es una cota superior de S.*
b) *Ningún número menor que B es cota superior para S.*

Si S tiene máximo, éste es también extremo superior de S. Pero si S no posee máximo, puede tener extremo superior. En el ejemplo 3 precedente, el número 1 es extremo superior para T si bien T no tiene máximo. (Ver figura I.8.)



a) S tiene máximo: $\max S = 1$

b) T no tiene máximo, pero sí extremo superior: $\sup T = 1$

FIGURA I.8 *Cotas superiores, máximo y extremo superior.*

TEOREMA I.26. *Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.*

Demostración. Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad b) implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego, tenemos $B = C$.

Este teorema nos expresa que si existe extremo superior para un conjunto S, hay *solamente* uno y puede decirse *el* extremo superior.

Con frecuencia se emplea el término *supremo* de un conjunto en vez de extremo superior utilizando la abreviatura *sup,* escribiendo entonces:

$$B = \sup S .$$

I 3.9 Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Podemos ahora establecer el axioma del extremo superior para el sistema de números reales.

AXIOMA 10. *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = \sup S$.*

Insistamos una vez más en que el extremo superior de S no pertenece necesariamente a S. En realidad $\sup S$ pertenece a S si y sólo si S posee máximo, en cuyo caso $\max S = \sup S$.

Las definiciones de *cota inferior, acotado inferiormente, mínimo,* se formulan en forma parecida. El lector debería hacerlo como ejercicio. Si S tiene mínimo, se expresa poniendo $\min S$.

Un número L se llama *extremo inferior* (o *ínfimo*) de S si a) L es una cota inferior para S, y b) ningún número mayor que L es cota inferior para S. El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $\inf S$. Si S posee mínimo, entonces $\min S = \inf S$.

Con el axioma 10, se puede demostrar el siguiente

TEOREMA I.27. *Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior; esto es, existe un número real L tal que $L = \inf S$.*

Demostración. Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = \inf S$.

Consideremos una vez más los ejemplos de la Sección anterior. En el ejemplo 1, el conjunto de todos los números reales positivos, tiene el 0 como extremo inferior. Ese conjunto no tiene mínimo. En los ejemplos 2 y 3, el 0 es el mínimo.

En todos esos ejemplos resulta fácil decidir si el conjunto S es o no acotado superior o inferiormente, y también es fácil determinar los números $\sup S$ e $\inf S$. El ejemplo siguiente muestra que averiguar la existencia de las cotas superior o inferior puede resultar difícil.

EJEMPLO 4. Sea S el conjunto de todos los números de la forma $(1 + 1/n)^n$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si, por ejemplo, hacemos $n = 1, 2,$ y 3, encontramos que los números 2, $\frac{9}{4}$, y $\frac{64}{27}$ pertenecen a S. Todo número del conjunto es mayor que 1, con lo que el conjunto está acotado inferiormente y por tanto tiene un extremo inferior. Con un pequeño esfuerzo podemos probar que 2 es el menor elemento de S de modo que $\inf S = \min S = 2$. También el conjunto S está acotado superiormente, aunque no es tan fácil demostrarlo. (¡Inténtese!) Una vez sabido que S está acotado superiormente, el axioma 10 nos asegura la existencia del extremo superior de S. En este caso no resulta fácil determinar el valor del extremo superior de S a partir de la definición de este conjunto. En un próximo capítulo veremos que el $\sup S$ es un número irracional aproximadamente igual a 2,718. Es un número importante en Cálculo llamado número de Euler o número e.

I 3.10 La propiedad arquimediana del sistema de los números reales

Esta Sección contiene algunas propiedades importantes del sistema de los números reales que son consecuencia del axioma del extremo superior.

TEOREMA I.28. *El conjunto* **P** *de los enteros positivos* 1, 2, 3, ... *no está acotado superiormente.*

Demostración. Supóngase **P** acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que **P** no es vacío, el axioma 10 nos dice que **P** tiene extremo superior, sea éste b. El número $b - 1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de **P**. Luego, existe un mínimo entero positivo n tal que $n > b - 1$. Para este n tenemos $n + 1 > b$. Puesto que $n + 1$ pertenece a **P**, esto contradice el que b sea una cota superior para **P**.

Como corolarios del teorema I.28, se obtienen inmediatamente las consecuencias siguientes:

TEOREMA I.29. *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Demostración. Si no fuera así, x sería una cota superior de **P**, en contradicción con el teorema I.28.

TEOREMA I.30. *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Demostración. Aplicar el teorema I.29 cambiando x por y/x.

La propiedad descrita en el teorema I.30, se denomina frecuentemente *propiedad arquimediana* del sistema de los números reales. Geométricamente significa que cada segmento, tan largo como se quiera, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud positiva dada, tan pequeña como se quiera. En otras palabras, una regla corta puede medir distancias tan largas como se quiera colocándola consecutivamente. Arquímedes, considerando ésta como una propiedad fundamental de la línea recta, la consideró como uno de los axiomas de la Geometría. En los siglos XIX y XX se han construido geometrías no arquimedianas en las que se prescinde de este axioma.

A partir de la propiedad arquimediana, podemos demostrar el teorema siguiente que nos será útil en Cálculo integral.

TEOREMA I.31. *Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{I.14}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

Demostración. Si $x > a$, el teorema I.30 nos dice que existe un entero positivo n que satisface $n(x - a) > y$, en contradicción con (I.14). Luego no puede ser $x > a$, con lo que deberá ser $x = a$.

I 3.11 Propiedades fundamentales del extremo superior

En esta Sección se consideran tres propiedades fundamentales de los extremos superior e inferior que se utilizarán en lo sucesivo. La primera de ellas establece que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo; del mismo modo, un conjunto con extremo inferior contiene números tan próximos a él como se quiera.

TEOREMA I.32. *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

a) *Si S tiene extremo superior, para un cierto x de S se tiene*

$$x > \sup S - h .$$

b) *Si S tiene extremo inferior, para un cierto x de S se tiene*

$$x < \inf S + h .$$

Demostración de a). Si es $x \leq \sup S - h$ para todo x de S, entonces $\sup S - h$ sería una cota superior de S menor que su extremo superior. Por consiguiente debe ser $x > \sup S - h$ por lo menos para un x de S. Esto demuestra a). La demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.33. PROPIEDAD ADITIVA. *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de* $\mathbf{R}$, *sea C el conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} .$$

a) *Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior, y*

$$\sup C = \sup A + \sup B .$$

b) *Si A y B tienen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior, e*

$$\inf C = \inf A + \inf B .$$

Demostración. Supongamos que A y B tengan extremo superior. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq \sup A + \sup B$;

de modo que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de C. Esto demuestra que C tiene extremo superior y que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B\,.$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema I.32 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \qquad b > \sup B - \frac{1}{n}.$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}, \quad \text{o} \quad \sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n},$$

puesto que $a + b \leq \sup C$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema I.31, debe ser $\sup C = \sup A + \sup B$. Esto demuestra a), y la demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.34. *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de* **R** *tales que*

$$s \leq t$$

para todo s de S y todo t de T. Entonces S tiene extremo superior, y T extremo inferior, y se verifica

$$\sup S \leq \inf T\,.$$

Demostración. Cada t de T es cota superior para S. Por consiguiente S tiene extremo superior que satisface la desigualdad $\sup S \leq t$ para todo t de T. Luego $\sup S$ es una cota inferior para T, con lo cual T tiene extremo inferior que no puede ser menor que $\sup S$. Dicho de otro modo, se tiene $\sup S \leq \inf T$, como se afirmó.

*I 3.12 Ejercicios

1. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$.

2. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.
3. Si $x > 0$, demostrar que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$.
4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5, [\frac{5}{2}] = 2$, $[-\frac{8}{3}] = -3$.
5. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un entero único n que satisface la desigualdad $n \leq x < n + 1$.
6. Si x e y son números reales arbitrarios, $x < y$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $x < r < y$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es *denso* en el sistema de los números reales.
7. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, y/x son todos irracionales.
8. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?
9. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos.
10. Un entero n se llama *par* si $n = 2m$ para un cierto entero m, e *impar* si $n + 1$ es par. Demostrar las afirmaciones siguientes:
    a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.
    b) Todo entero es par o es impar.
    c) La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares?
    d) Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2 = 2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.
    e) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.
11. Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

    [*Indicación.* Utilizar el razonamiento de reducción al absurdo. Supóngase $(a/b)^2 = 2$, siendo a y b enteros, uno de ellos por lo menos impar. Utilizar partes del Ejercicio 10.]

12. La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del extremo superior. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del extremo superior. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del extremo superior.

*I 3.13 Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Se ha visto anteriormente que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución entre los números racionales. Con auxilio del axioma 10 se puede demostrar que la ecuación $x^2 = a$ tiene solución entre los números *reales* si $a \geq 0$. Tal x se denomina *raíz cuadrada de a.*

En primer lugar, sin tener en cuenta el axioma 10, se pueden hacer las siguientes consideraciones. Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema I.20). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema I.11). 'upóngase, pues, $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \neq 0$ y $(-x)^2 = a$, por tanto, x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero *a lo sumo* tiene *dos,* porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2$ y $(x + y)(x - y) = 0$, y en virtud del teorema I.11, o $x = y$ o $x = -y$. Por tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene *exactamente dos.*

La existencia de una raíz cuadrada por lo menos se deducirá posteriormente de un teorema importante de Cálculo, conocido por el teorema del valor intermedio para las funciones continuas, pero es instructivo ver como la existencia de la raíz cuadrada se puede probar directamente a partir del axioma 10.

TEOREMA I.35. *Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.*

Nota: Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ o $-\sqrt{a}$.

Demostración. Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a > 0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1 + a)^2 > a$, el número $(1 + a)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1 + a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1 + a)^2$ y por tanto $a^2/(1 + a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un extremo superior que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1 + a)$ y por tanto $b > 0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$, $b^2 = a$.

Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b - (b^2 - a)/(2b) = \frac{1}{2}(b + a/b)$. Entonces $0 < c < b$ y $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Por tanto, $c^2 > x^2$ para cada x en S, es decir, $c > x$ para cada x en S; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c < b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el *extremo superior* de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 > a$ es imposible.

Supóngase $b^2 < a$. Puesto que $b > 0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c < b$ y tal que $c < (a - b^2)/(3b)$. Se tiene entonces:

$$(b + c)^2 = b^2 + c(2b + c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a\,.$$

Es decir, $b + c$ pertenece a S. Como $b + c > b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 < a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2 = a$.

*I 3.14 Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo *impar,* para cada real x existe un número real y, y uno solo tal que $y^n = x$. Esta y se denomina *raíz n-sima* de x y se indica por:

$$(I.15) \qquad y = x^{1/n} \quad \text{o} \quad y = \sqrt[n]{x}\,.$$

Si n es *par*, la situación es un poco distinta. En este caso, si x es negativo, no existe un número real y tal que $y^n = x$, puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Sin embargo, si x es positivo, se puede probar que existe un número positivo y sólo uno tal que $y^n = x$. Este y se denomina la *raíz n-sima positiva* de x y se indica por los símbolos (I.15). Puesto que n es par, $(-y)^n = y^n$ y, por tanto, cada $x > 0$ tiene dos raíces *n-simas* reales, y y $-y$. Sin embargo, los símbolos $x^{1/n}$ y $\sqrt[n]{x}$ se reservan para la raíz *n-sima* positiva. No exponemos aquí las demostraciones de estas afirmaciones porque se deducirán más adelante como consecuencia del teorema del valor intermedio para las funciones continuas (ver Sección 3.10).

Si r es un número racional positivo, sea $r = m/n$, donde m y n son enteros positivos, se define x^r como $(x^m)^{1/n}$, es decir como raíz *n-sima* de x^m, siempre que ésta exista. Si $x \neq 0$, se define $x^{-r} = 1/x^r$ con tal que x^r esté definida. Partiendo de esas definiciones, es fácil comprobar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para exponentes racionales: $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, y $(xy)^r = x^r y^r$.

*I 3.15 Representación de los números reales por medio de decimales

Un número real de la forma

$$(I.16) \qquad r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\,,$$

donde a_0 es un entero no negativo, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$, se escribe corrientemente en la forma más breve siguiente:

$$r = a_0.a_1a_2 \cdots a_n\,.$$

Se dice que ésta es la *representación decimal finita* de r. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02\,, \qquad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25\,.$$

Números reales de esta clase son necesariamente racionales y todos ellos son de la forma $r = a/10^n$ donde a es un entero. Sin embargo, no todos los números racionales pueden expresarse por medio de una representación decimal finita. Por ejemplo, si $\frac{1}{3}$ se pudiera expresar así, se tendría $\frac{1}{3} = a/10^n$ o $3a = 10^n$ para algún entero a. Pero esto es imposible, puesto que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10.

No obstante, cualquier número real $x > 0$ puede aproximarse con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma de la forma (I.16) si se toma n suficientemente grande. La razón de ello puede verse mediante el siguiente argumento geométrico: si x no es entero, x está comprendido entre dos enteros consecutivos, es decir, $a_0 < x < a_0 + 1$. El segmento que une a_0 y $a_0 + 1$ puede subdividirse en diez partes iguales. Si x no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, x debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a un par de desigualdades de la forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

donde a_1 es un entero ($0 \leq a_1 \leq 9$). Se divide ahora, el segmento que une $a_0 + \dfrac{a_1}{10}$ y $a_0 + \dfrac{a_1 + 1}{10}$ en diez partes iguales (cada una de longitud 10^{-2}) y se continúa el proceso. Si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con x, x es un número de la forma (I.16). Si no es así, el proceso se continúa indefinidamente y se engendra un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ En este caso se dice que x tiene la representación decimal infinita

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots .$$

Después de n subdivisiones, x satisface las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

las cuales dan dos aproximaciones de x, una por exceso y otra por defecto, por medio de decimales finitos que difieren en 10^{-n}. Por tanto, se puede lograr un grado de aproximación deseado sin más que tomar n suficientemente grande.

Si $x = \frac{1}{3}$, es fácil comprobar que $a_0 = 0$ y $a_n = 3$ para cada $n \geq 1$, y por tanto la aproximación decimal correspondiente es:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333 \cdots .$$

Cada número irracional tiene una representación decimal infinita. Por ejemplo, si $x = \sqrt{2}$ se pueden calcular por tanteo tanto dígitos como se deseen de su aproximación decimal. Pues $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,4 y 1,5 ya que $(1{,}4)^2 <$

$2 < (1{,}5)^2$. Análogamente, elevando al cuadrado y comparando con 2 se obtienen las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42\,, \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\,, \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143\,.$$

Obsérvese que el proceso anterior engendra una sucesión de intervalos de longitud 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, $\ldots$, cada uno contenido en el anterior y conteniendo cada uno el punto x. Esto es un ejemplo del llamado encaje de intervalos, concepto que se utiliza algunas veces como base para construir los números irracionales a partir de los racionales.

Puesto que en este libro se hará poco uso de los decimales, no se estudiarán sus propiedades con todo detalle, y sólo se verá cómo se pueden definir analíticamente expresiones decimales, con auxilio del axioma del extremo superior.

Si x es un número real positivo dado, sea a_0 el mayor entero $\leq x$. Tomado a_0, sea a_1 el mayor entero tal que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x\,.$$

En general, determinados a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, sea a_n el mayor entero tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x\,. \tag{I.17}$$

Sea S el conjunto de todos los números:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \tag{I.18}$$

obtenidos de esta forma para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Puesto que S es no vacío y acotado superiormente, tiene un extremo superior que es fácil comprobar que coincide con x. Los enteros a_0, a_1, a_2, $\ldots$ así obtenidos se pueden utilizar para definir una expresión decimal de x, poniendo:

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$$

donde el dígito a_n que ocupa el lugar n es el mayor entero que satisface (I.17). Por tanto, se puede escribir:

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000 \cdots.$$

Si en (I.17) se sustituye el signo de desigualdad $\leq$ por $<$, se obtiene una definición de la expresión decimal algo distinta. El extremo superior de todos los números de la forma (I.18) es también x; sin embargo, los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ no han de ser necesariamente los mismos que satisfacen (I.17). Por ejemplo, si se aplica la segunda definición a $x = \frac{1}{8}$, se encuentra $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, y $a_n = 9$ para cada $n \geq 4$. Esto conduce a la representación decimal infinita

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots .$$

El que dos números reales puedan tener dos representaciones decimales distintas es un simple ejemplo del hecho de que dos conjuntos distintos de números reales pueden tener un mismo extremo superior.

Parte IV. - Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas

I 4.1 Ejemplo de demostración por inducción matemática

Puesto que sumando 1 al entero k se obtiene $k + 1$ que es mayor que k, no existe ningún entero que sea el *mayor de todos*. Sin embargo, partiendo del número 1, se pueden alcanzar todos los enteros positivos, después de un número finito de pasos, pasando sucesivamente de k a $k + 1$. Ésta es la base de un método de razonamiento que los matemáticos llaman *demostración por inducción*. Se ilustrará la aplicación de este método, demostrando el par de desigualdades usadas en el apartado I 1.3 para el cálculo del área del segmento parabólico, es decir:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2. \tag{I.19}$$

En primer lugar, se considera la desigualdad de la izquierda, fórmula que abreviadamente se indicará por $A(n)$ (afirmación referida a n). Es fácil comprobar esta afirmación directamente para los primeros valores de n. Pues para $n = 1, 2, 3$, por ejemplo, se tiene:

$$A(1)\colon 0 < \frac{1^3}{3}, \qquad A(2)\colon 1^2 < \frac{2^3}{3}, \qquad A(3)\colon 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3},$$

supuesto que se interpreta que la suma del primer miembro es 0 cuando $n = 1$.