



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Estimación de parámetros - Método de Cuadrados Mínimos

1 de agosto de 2018

INTEGRANTES:

| | |
|---------------------------|----------|
| Araya, Camilo | - #96049 |
| <arayaacamil@gmail.com> | |
| Testino, Giuliano | - #95870 |
| <gtestino92@hotmail.com > | |

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Objetivo | 2 |
| 2. Introducción | 2 |
| 2.1. Método <i>LS</i> | 2 |
| 2.2. Ensayos de laboratorio | 3 |
| 3. Desarrollo | 5 |
| 3.1. Varianza del Estimador | 5 |
| 3.2. Resultados | 7 |
| 3.2.1. Estimación de errores de instrumental | 7 |
| 3.2.2. Corrección de trayectoria | 10 |
| 3.2.3. Punto de llegada del vehículo | 11 |
| 3.2.4. Limitaciones del Método | 12 |
| 4. Conclusiones | 16 |
| 5. Apéndice: Códigos | 17 |
| 5.1. Código principal | 17 |
| 5.2. Calculo de trayectorias con menor N de muestras en ensayo | 21 |
| 5.3. Funcion elipse.m | 24 |

1. Objetivo

El objetivo del presente trabajo es estimar los errores que afectan al instrumental de una medición (en éste caso dos acelerómetros) a partir de dos ensayos experimentales, usando el método de estimación LS (*Least Squares* o Cuadrados Mínimos). De ésta manera, se busca corregir las mediciones con dicho instrumental para minimizar, dentro de lo posible, los errores que surjan de su uso. Con ésta corrección se busca determinar la trayectoria real de un vehículo y dar un intervalo de confianza para el punto de llegada del mismo.

2. Introducción

La trayectoria de un vehículo sobre una superficie puede calcularse (según la teoría cinemática) conociendo los valores de las aceleraciones a cada instante para dos direcciones independientes sobre dicha superficie. Para estimar dicha trayectoria experimentalmente, se hace uso de dos acelerómetros orientados de manera ortogonal entre sí, los cuales muestrean con determinado periodo el valor de la aceleración para la respectiva dirección. Se asume que el cuerpo no rota durante la trayectoria, por lo que las direcciones en las que los acelerómetros operan son constantes (por conveniencia, direcciones x e y).

Conociendo la posición y velocidad inicial del vehículo, se puede calcular la trayectoria integrando numéricamente. Sin embargo, ambos acelerómetros tienen errores (dados por el mismo sistema electrónico, o por condiciones inherentes a la medición) de los cuales se desea estimar sus características.

De esta manera, para cierta medición A_{medida} se busca conocer su valor "real" compensando el error estimado, de manera que no se propague el error al estimar una trayectoria:

$$A_{medida} = A_{medida} = A_{real} + Errores_{acel} \quad (1)$$

$$V_{calculada}(t) = V_{inicial} + \int_{t_0}^t A_{medida}(\tau) d\tau = V_{real} + \int_{t_0}^t Errores_{acel}(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$P_{calculada}(t) = P_{inicial} + \int_{t_0}^t V_{calculada}(\tau) d\tau = P_{real} + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} Errores_{acel}(\eta) d\eta \quad (3)$$

donde cada cantidad involucrada tiene dos direcciones (una para cada elemento de medición).

2.1. Método LS

Dado un sistema incompatible:

$$y = Ax + v \quad (4)$$

donde $y \in \{Col(A)\}$ y x es un vector de parámetro desconocidos pero determinísticos, buscamos un estimador \hat{x} que aproxime a la solución del sistema que incluye a v , al que llamamos residuo.

Es fácil ver que el problema radica en que $b = y - v$ no está en el subespacio generado por las columnas de A .

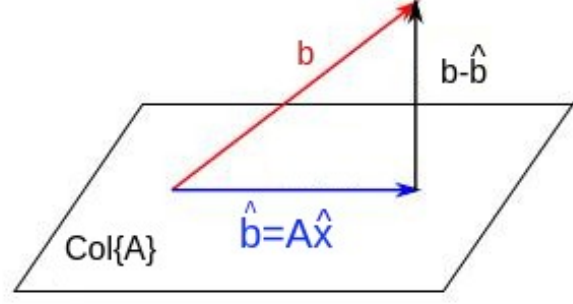


Figura 1: Esquema de proyección ortogonal para LS - abstracción para $\dim(Col(A)) = 2$

Como puede verse, la aproximación \hat{x} surge de proyectar el vector \vec{b} sobre el $Col(A)$, con lo que obtendremos $\hat{b} = A\hat{x}$. Para ésto, tomamos como criterio encontrar el \hat{x} que minimice la norma del vector de residuos. Ésto es, buscamos el mínimo de:

$$\|v\|^2 = \|y - A\hat{x}\|^2 = (y - A\hat{x})^t(y - A\hat{x}) \quad (5)$$

Desarrollando la expresión:

$$(y - A\hat{x})^t(y - A\hat{x}) = y^t y - \hat{x}^t A^t y - y^t A\hat{x} + \hat{x}^t A^t A\hat{x} \quad (6)$$

Como $(y^t A\hat{x})^t = \hat{x}^t A^t y$, buscamos:

$$\underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}}[y^t y - 2\hat{x}^t A^t y + \hat{x}^t A^t A\hat{x}] \quad (7)$$

Como $y^t y$ no depende de \hat{x} , lo desestimamos para la minimización. Sacando factor común 2, obtenemos:

$$\underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}}[2 \cdot (\frac{1}{2}\hat{x}^t A^t A\hat{x} - \hat{x}^t A^t y)] \quad (8)$$

La expresión entre paréntesis es una forma cuadrática. Tomando $A^* = A^t A$ e $y^* = A^t y$, obtenemos el \hat{x} que minimiza la norma del residuo según:

$$\hat{x} = (A^*)^{-1} y^* \quad (9)$$

$$\hat{x} = (A^t A)^{-1} A^t y \quad (10)$$

El cual es el mejor estimador según mínimos cuadrados de x .

2.2. Ensayos de laboratorio

Para estimar los errores de los acelerómetros se efectúan dos pruebas experimentales. En la primera, se determinó que existen tres fuentes de error para cada uno: un sesgo constante aditivo (ε_s), un factor de escala multiplicativo (ε_e) y ruido blanco gaussiano aditivo de media nula y varianza conocida (σ_v^2).

Entonces la medición de cada acelerómetro estará dada por:

$$A_{medida} = A_{real} + \varepsilon_e \cdot A_{real} + \varepsilon_s + Ruido \quad (11)$$

donde además se obtuvo experimentalmente que $Ruido_x \sim \mathcal{N}(0; 0,25)$ y $Ruido_y \sim \mathcal{N}(0; 0,64)$ (ruido para cada acelerómetro).

El segundo ensayo nos proporcionó la información necesaria para estimar las constantes ε_e y ε_s (ambas con una componente por dirección) que afectan la medición "real". Para ésto, se procedió a medir la gravedad (asumimos $|\vec{g}| = 9,8m/s^2$) con los acelerómetros colocados ortogonalmente, para distintos ángulos de inclinación (θ).

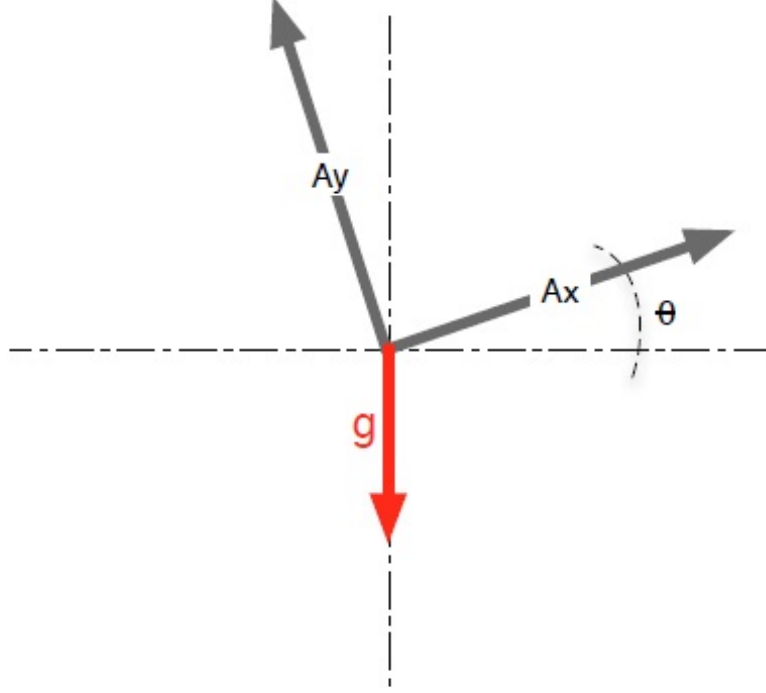


Figura 2: Configuración de acelerómetros para segundo ensayo - medición de gravedad para distintos ángulos

Vemos según la figura 2 que el valor teórico de la aceleración en las direcciones (x e y) que se encuentran los acelerómetros en función de θ pueden expresarse como:

$$A_{rx} = -|\vec{g}|\cos(\theta) \quad (12)$$

$$A_{ry} = -|\vec{g}|\sen(\theta) \quad (13)$$

donde distinguimos con el subíndice r para diferenciar el valor "real" de la aceleración, en contraste con el medido por cada acelerómetro.

Con los datos del segundo ensayo se procede a estimar los errores con el método LS , y a calcular la trayectoria de un vehículo cuyas mediciones de aceleración conocemos.

3. Desarrollo

Para las mediciones obtenidas, buscamos modelar el problema de forma que obtengamos una expresión del tipo:

$$y = Ax + v \quad (14)$$

para así poder aplicar el método *LS*. El desarrollo presente se hace para una coordenada genérica, pero el método se aplicará para ambas direcciones en cuestión.

Sabemos según la ecuación (11) que la medición de un acelerómetro (para un instante i) es de la forma:

$$A_{mi} = \varepsilon_s + kA_{ri} + v_i \quad (15)$$

donde A_{mi} es la medición de la aceleración, $k = 1 + \varepsilon_e$ es una constante que multiplica al valor teórico real, y v_i representa el ruido aditivo en la i -ésima medición.

Teniendo en cuenta que contamos con $N = 20000$ mediciones para un acelerómetro, las $i = \{1..N\}$ ecuaciones implícitas en (15) pueden expresarse de manera matricial según:

$$\begin{pmatrix} A_{m1} \\ A_{m2} \\ \vdots \\ A_{mN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A_{r1} \\ 1 & A_{r2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & A_{rN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_s \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad (16)$$

En forma más simplificada, podemos expresar:

$$\underline{A}_m = \mathbf{G}\underline{c} + \underline{v} \quad (17)$$

De ésta manera, por lo que derivamos de la teoría de *LS* podemos calcular el $\hat{\underline{c}}$ que minimiza el error según:

$$\hat{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_s \\ \hat{k} \end{pmatrix} = (\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t \underline{A}_m \quad (18)$$

con lo que obtenemos así los $\hat{\varepsilon}_s$ y $\hat{\varepsilon}_e = 1 - \hat{k}$ que minimizan el error del acelerómetro.

3.1. Varianza del Estimador

Buscamos la covarianza de $\hat{\underline{c}}$, es decir el estimador para alguno de los acelerómetros.

Usando (18) calculamos:

$$Cov(\hat{\underline{c}}) = Cov((\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t \underline{A}_m) \quad (19)$$

Aplicando propiedades del operador Covarianza, resulta:

$$Cov(\hat{\underline{c}}) = [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t \underline{A}_m] Cov(\underline{A}_m) [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t \underline{A}_m]^t \quad (20)$$

Buscamos ahora la covarianza de \underline{A}_m usando (17):

$$Cov(\underline{A}_m) = \mathbb{E}[\underline{A}_m \underline{A}_m^t] - \underline{\mu}_{\underline{A}_m} \underline{\mu}_{\underline{A}_m}^t \quad (21)$$

Para el segundo término de ésta ecuación, necesitamos la media de \underline{A}_m , la cual puede obtenerse de (17) como:

$$\mathbb{E}[\underline{A}_m] = \mathbb{E}[\underline{G}\underline{c}] + \mathbb{E}[\underline{v}] = \underline{G}\underline{c} \quad (22)$$

ya que el primér término es una matriz de constantes, y el segundo es la media del ruido (nula para ambos acelerómetros).

Puedo desarrollar entonces:

$$(\underline{G}\underline{c}) = \begin{pmatrix} 1 & A_{r1} \\ 1 & A_{r2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & A_{rN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_s \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_s + A_{r1}k \\ \varepsilon_s + A_{r2}k \\ \vdots \\ \varepsilon_s + A_{rN}k \end{pmatrix} \quad (23)$$

Entonces el segundo término de la expresión de la covarianza queda:

$$\underline{\mu}_{\underline{A}_m} \underline{\mu}_{\underline{A}_m}^t = (\underline{G}\underline{c})(\underline{G}\underline{c})^t = \begin{pmatrix} (\varepsilon_s + A_{r1}k)^2 & \cdots & \cdots & (\varepsilon_s + A_{r1}k)(\varepsilon_s + A_{rN}k) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_s + A_{rN}k)(\varepsilon_s + A_{r1}k) & \cdots & \cdots & (\varepsilon_s + A_{rN}k)^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Ahora bién, el primer término de la expresión de la covarianza está dado por la correlación del vector \underline{A}_m con sí mismo:

$$\mathbb{E}[\underline{A}_m \underline{A}_m^t] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[A_{m1}^2] & \cdots & \cdots & \mathbb{E}[A_{m1}A_{mN}] \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}[A_{mN}A_{m1}] & \cdots & \cdots & \mathbb{E}[A_{mN}^2] \end{pmatrix} \quad (25)$$

En éste punto podemos diferenciar los elementos de la diagonal de los restantes. Para todo $i \in \{1..N\}$:

$$A_{mi} = \varepsilon_s + kA_{ri} + v_i \quad (26)$$

$$A_{mi}^2 = (\varepsilon_s + kA_{ri})^2 + 2(\varepsilon_s + kA_{ri})v_i + v_i^2 \quad (27)$$

Aplicando el operador Esperanza en ambos miembros, y teniendo en cuenta que $\mathbb{E}[v_i] = 0$ y $\mathbb{E}[v_i^2] = Var(v) = Var(Ruido) = \sigma_v^2$ obtenemos:

$$\mathbb{E}[A_{mi}^2] = (\varepsilon_s + kA_{ri})^2 + \sigma_v^2 \quad (28)$$

Por otro lado, para los elementos que no se encuentran en la diagonal tenemos, para $i \neq j$:

$$\mathbb{E}[A_{mi}A_{mj}] = \mathbb{E}[(\varepsilon_s + kA_{ri}) + v_i][(\varepsilon_s + kA_{rj}) + v_j] \quad (29)$$

Distribuyendo los términos y aplicando linealidad de la esperanza:

$$\mathbb{E}[A_{mi}A_{mj}] = \mathbb{E}[(\varepsilon_s + kA_{ri})(\varepsilon_s + kA_{rj})] + \mathbb{E}[(\varepsilon_s + kA_{ri})v_j] + \mathbb{E}[(\varepsilon_s + kA_{rj})v_i] + \mathbb{E}[v_iv_j] \quad (30)$$

Como \underline{v} es un proceso de ruido blanco gaussiano, la correlación es nula para realizaciones en distintos instantes, por lo que $\mathbb{E}[v_iv_j] = 0$. Teniendo en cuenta eso y su media nula, la expresión queda:

$$\mathbb{E}[A_{mi}A_{mj}] = (\varepsilon_s + kA_{ri})(\varepsilon_s + kA_{rj}) \quad (31)$$

Vemos entonces que la matriz de correlación de \underline{A}_m puede escribirse como:

$$\mathbb{E}[\underline{A}_m \underline{A}_m^t] = \begin{pmatrix} (\varepsilon_s + A_{r1}k)^2 & \cdots & \cdots & (\varepsilon_s + A_{r1}k)(\varepsilon_s + A_{rN}k) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_s + A_{rN}k)(\varepsilon_s + A_{r1}k) & \cdots & \cdots & (\varepsilon_s + A_{rN}k)^2 \end{pmatrix} + \sigma_v^2 \mathbb{I}_N \quad (32)$$

donde \mathbb{I}_N es la identidad de dimensiones $N \times N$. La matriz del primer término es igual a la obtenida para $\underline{\mu}_{\underline{A}_m} \underline{\mu}_{\underline{A}_m}^t$, por lo que la covarianza de \underline{A}_m según (21) queda:

$$Cov[\underline{A}_m] = \sigma_v^2 \mathbb{I}_N \quad (33)$$

Finalmente podemos calcular la covarianza del estimador $\hat{\underline{c}}$ según:

$$Cov(\hat{\underline{c}}) = [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t] \sigma_v^2 \mathbb{I}_N [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t] \quad (34)$$

Por propiedad de transposición de producto de matrices obtenemos:

$$Cov(\hat{\underline{c}}) = \sigma_v^2 [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{G}] \cdot [(\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1}]^t \quad (35)$$

Como el producto entre una matriz y su inversa es la misma, y además la matriz de covarianza es simétrica, obtenemos finalmente:

$$Cov(\hat{\underline{c}}) = \sigma_v^2 (\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \quad (36)$$

3.2. Resultados

3.2.1. Estimación de errores de instrumental

Implementamos el método de estimación en *MATLAB*, usando los resultados de los ensayos de laboratorio para ambos acelerómetros (los cuales diferenciamos por conveniencia con los subíndices x e y). Para cada acelerómetro se planteó el modelo ya desarrollado y se obtuvieron los estimadores $\hat{\underline{c}}_x$ y $\hat{\underline{c}}_y$. Graficamos las mediciones junto con el ajuste lineal que ofrece el modelo a modo de verificación de los resultados.

Acelerómetro X Visualizamos el ajuste de las mediciones según LS para el acelerómetro en la dirección x :

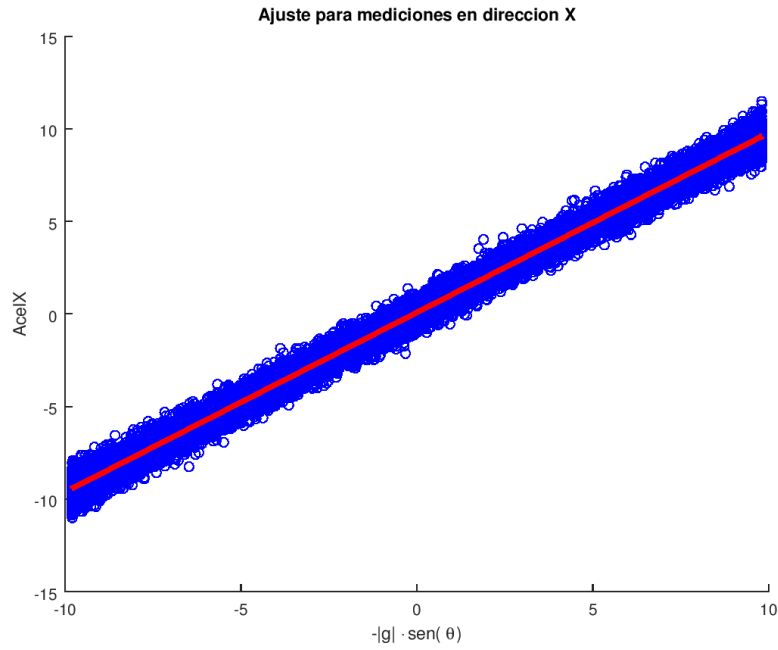


Figura 3: Resultados del valor de la aceleración con su ajuste correspondiente, en el eje x
Y en función del ángulo θ :

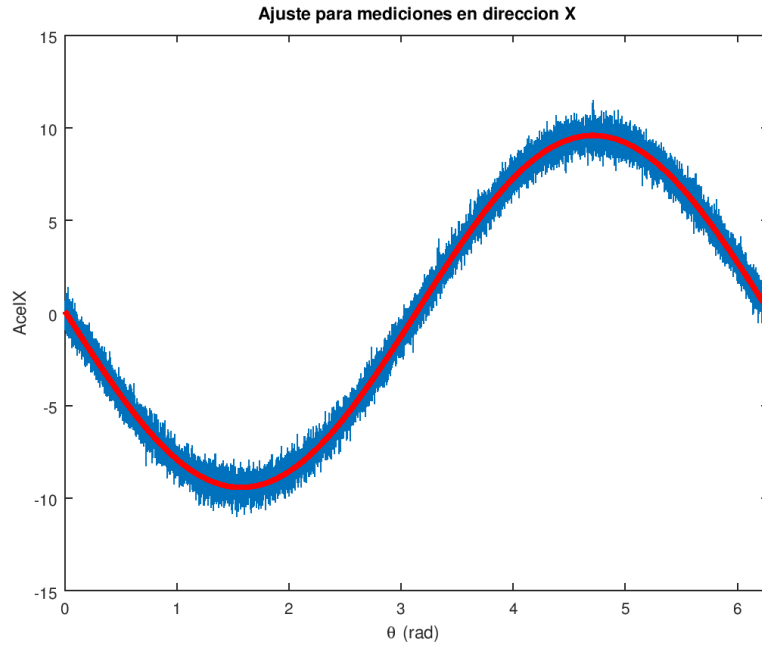


Figura 4: Resultados del valor de la aceleración con su ajuste correspondiente, en el eje x

Los errores de instrumental obtenidos fueron:

$$\varepsilon_{ex} = 0,076664 \quad (37)$$

$$\varepsilon_{sx} = -0,030142 \quad (38)$$

La covarianza del estimador resultó:

$$Cov(\hat{\underline{c}}_x) = \begin{pmatrix} 1,25 \times 10^{-5} & -8,92 \times 10^{-19} \\ -8,92 \times 10^{-19} & 2,60 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Acelerómetro Y Por otro lado, para el acelerómetro en la dirección y el ajuste resultó:

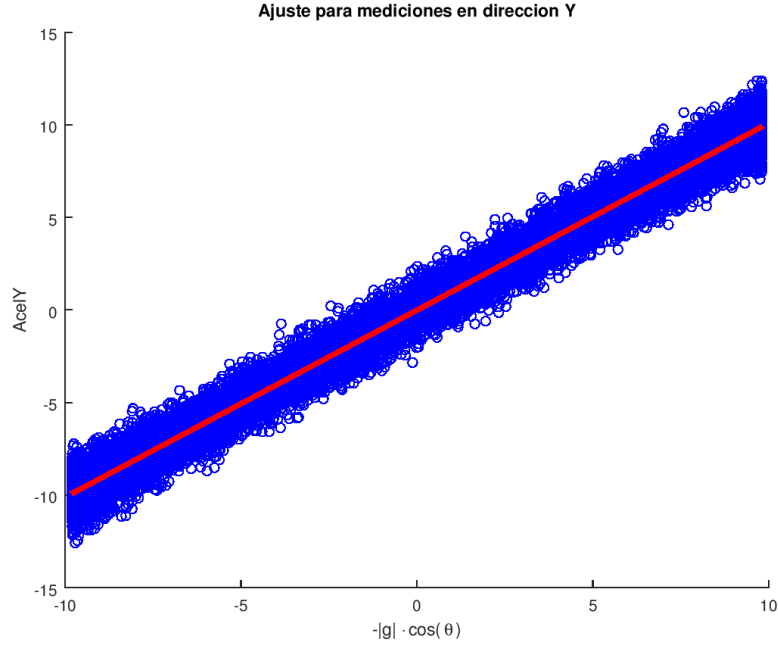


Figura 5: Resultados del valor de la aceleración con su ajuste correspondiente, en el eje y

Y en función del ángulo θ :

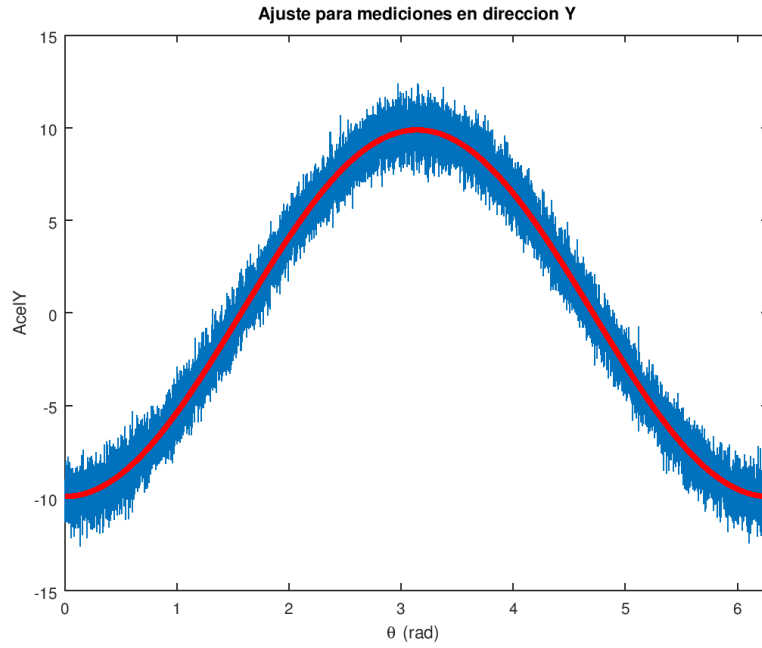


Figura 6: Resultados del valor de la aceleración con su ajuste correspondiente, en el eje y

Los errores del instrumental estimados fueron:

$$\varepsilon_{ey} = -0,017508 \quad (40)$$

$$\varepsilon_{sy} = 0,010042 \quad (41)$$

Y la covarianza del estimador resultó:

$$Cov(\hat{\underline{c}}_y) = \begin{pmatrix} 3,20 \times 10^{-5} & 3,26 \times 10^{-10} \\ 3,27 \times 10^{-10} & 6,66 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (42)$$

3.2.2. Corrección de trayectoria

Mediante el método de integración propuesto en las ecuaciones (1), (2) y (3), podemos obtener la trayectoria corregida del vehículo. Para comparar, observamos en primer lugar que trayectoria resulta al usar los datos de aceleración que arroja el ensayo (es decir, previo a la estimación de los errores).

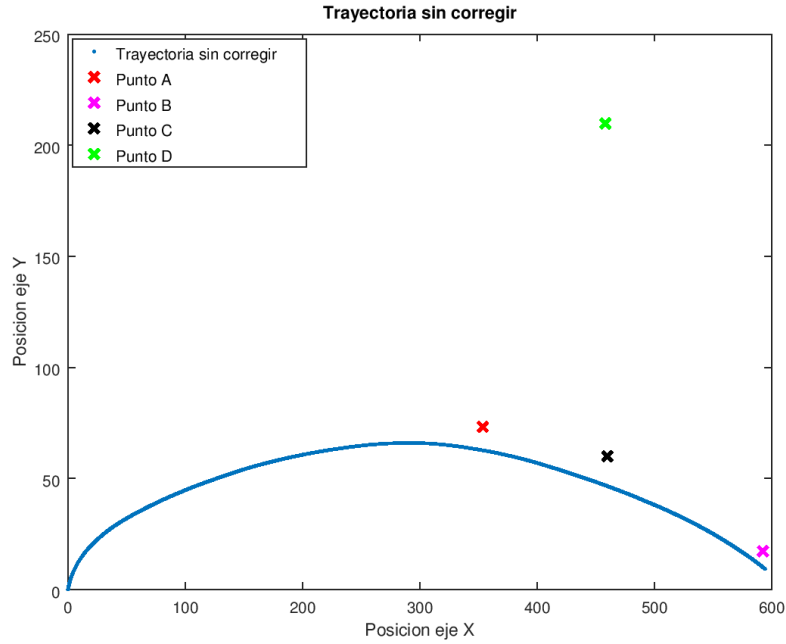


Figura 7: Resultados de la trayectoria corregida sin correcciones

Para encontrar la trayectoria calculada (es decir incluyendo las correcciones del instrumental), aplicamos sobre los datos de aceleración:

$$A_m = A_{real}(1 + \varepsilon_e) + \varepsilon_s \quad (43)$$

$$A_{real} = \frac{A_m - \varepsilon_s}{1 + \varepsilon_e} \quad (44)$$

Con lo cual al integrar obtenemos la siguiente trayectoria:

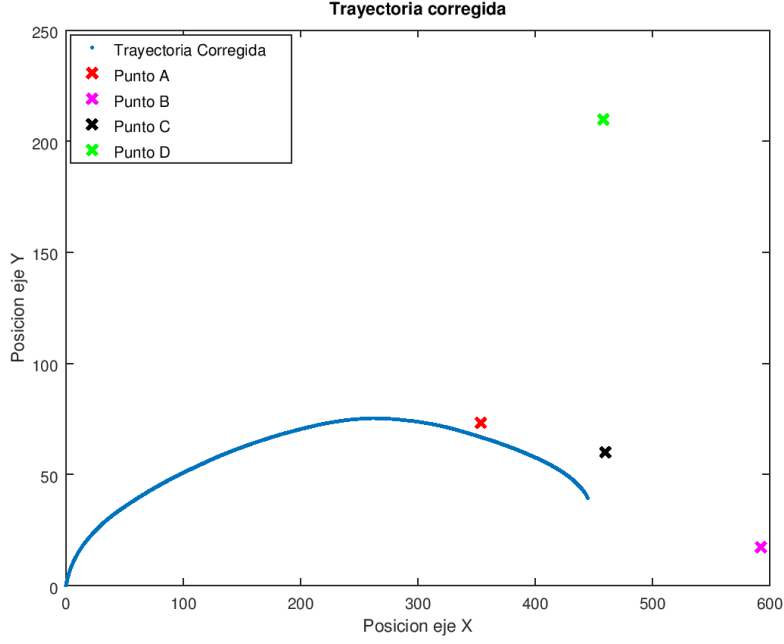


Figura 8: Resultados de la trayectoria

3.2.3. Punto de llegada del vehículo

Con la trayectoria que surge de la corrección de los errores, buscamos dar una cota de confianza para asegurar que el vehículo llegó a uno de cuatro puntos en el plano (llamemos puntos A, B, C y D).

Asumimos que, para una coordenada (x o y) la diferencia de posición entre el punto de llegada real y, el calculado con las correcciones, depende de las diferencias entre los errores estimados ($\hat{\varepsilon}_s$ y $\hat{\varepsilon}_e$) y los errores reales del instrumental (llamemos ε_s y ε_e). Entonces esa diferencia de error en la posición final (δP) para una coordenada, puede expresarse como:

$$\delta P = \left\| \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (\delta a) dt \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (\delta \varepsilon_s + a_{real} \cdot \delta \varepsilon_e) dt \right\| \quad (45)$$

Reemplazando los diferenciales con las diferencias ya mencionadas, y acotando por desigualdad triangular:

$$\delta P < \left\| \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (|\hat{\varepsilon}_s - \varepsilon_s|) dt \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (a_{real} \cdot |\hat{\varepsilon}_e - \varepsilon_e|) dt \right\| \quad (46)$$

Ahora bien, como pretendemos dar un intervalo de confianza para la posición final, podemos acotar los términos de la expresión. Sabemos que para un estimador con distribución normal (como es éste caso), la probabilidad de que el valor real se encuentre en un intervalo de tres desvíos alrededor del calculado es de aprox. 99,7%, por lo que las diferencias mencionadas pueden acotarse con ése valor de desviación.

Mediante LS estimamos los valores de $\hat{\varepsilon}_s$ y $\hat{k} = 1 - \hat{\varepsilon}_e$. Es fácil ver que la $Var(\hat{\varepsilon}_e) = Var(\hat{k})$, por lo que sus desvíos son idénticos.

Para la segunda integral, al no conocer el valor real de la aceleración, podemos acotar integrando ésta con el valor máximo obtenido para cada eje. Finalmente, haciendo uso de la matriz de covarianza calculada para cada estimador, podemos integrar y acotar:

$$\delta P < \frac{t_f^2}{2} 3\sigma_{\varepsilon_s} + \frac{t_f^2}{2} |a_{max}| 3\sigma_{\varepsilon_e} \quad (47)$$

Con lo cual calculamos para cada eje de coordenadas:

$$\delta P_x = 22,25 \quad (48)$$

$$\delta P_y = 45,18 \quad (49)$$

Tenemos a priori cuatro puntos en el plano (A,B,C,D) posibles de llegada. Para evaluar (o dar un intervalo de confianza) cuál es el verdadero, podemos pensar que la probabilidad de que el punto de llegada calculado sea algún (x, y) dado que la trayectoria real terminó en, por ejemplo, el punto A, está dada por una distribución normal bi-variable centrada precisamente en A (y de manera análoga con los otros puntos posibles de destino). Entonces la cota que encontramos para δP_x y δP_y está relacionada con el intervalo de confianza de (por lo menos) 99,7 % de que la trayectoria real termine en el punto que se presupone.

Como las curvas de nivel de la densidad de probabilidad de una gaussiana bivariable son elipses, podemos graficar las regiones de decisión como:

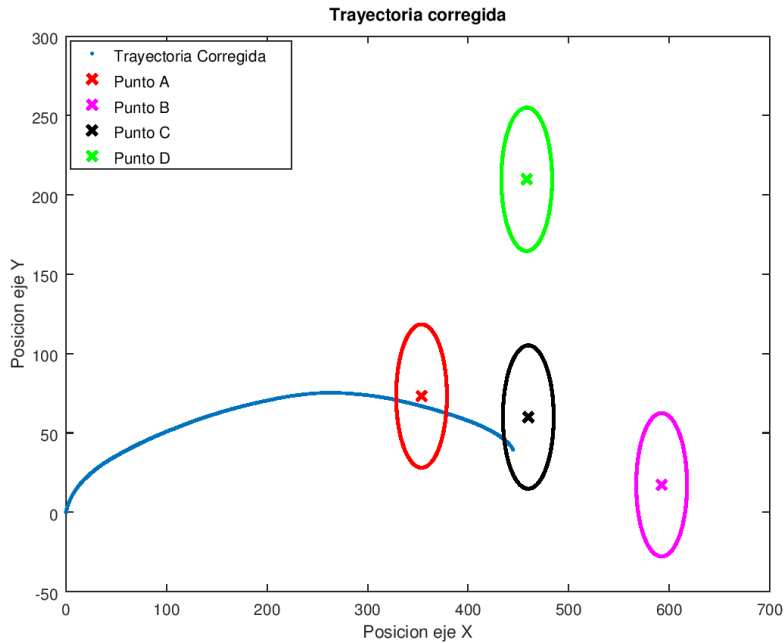


Figura 9: Resultados de la trayectoria corregida junto con los intervalos de confianza de cada punto

Por lo que podemos asegurar con un buen margen de confianza que el vehículo tuvo como destino real el punto C.

3.2.4. Limitaciones del Método

La eficacia del método desarrollado para la ubicación del vehículo tiene una fuerte dependencia con la capacidad de cómputo al hacer el ensayo de estimación de errores del instrumental. En particular, si se limita la cantidad de datos que pueden ser almacenados al hacer las mediciones de \vec{g} , la estimación se verá inevitablemente afectada.

Hemos visto que para un acelerómetro, la varianza del estimador \hat{c} propuesto está dada por:

$$Cov(\hat{c}) = \sigma_v^2 (\mathbf{G}^t \mathbf{G})^{-1} \quad (50)$$

Ahora bien, para el estimador en el eje x la matriz a invertir está dada por:

$$(\mathbf{G}^t \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -|g|\cos(\theta_1) & -|g|\cos(\theta_2) & \cdots & -|g|\cos(\theta_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -|g|\cos(\theta_1) \\ 1 & -|g|\cos(\theta_1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -|g|\cos(\theta_N) \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$(\mathbf{G}_x^t \mathbf{G}_x) = \begin{pmatrix} N & -|g| \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i) \\ -|g| \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i) & |g|^2 \sum_{i=1}^N \cos^2(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (52)$$

donde N es la cantidad de muestras usadas en el ensayo ($N = 20000$ para el ensayo original). De manera similar, para el estimador en y resulta:

$$(\mathbf{G}_y^t \mathbf{G}_y) = \begin{pmatrix} N & -|g| \sum_{i=1}^N \sen(\theta_i) \\ -|g| \sum_{i=1}^N \sen(\theta_i) & |g|^2 \sum_{i=1}^N \sen^2(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (53)$$

Si los θ_i para los que se hace el ensayo son equiespaciados en el intervalo $(0; 2\pi)$, es fácil ver que los elementos que no están en las diagonales son cercanos a cero (la suma para la primera mitad de las mediciones compensa la suma para la segunda mitad, tanto en seno como en coseno). Por lo que las inversas de las matrices, las cuales se usan para calcular la covarianza, se pueden aproximar como:

$$(\mathbf{G}_x^t \mathbf{G}_x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|g|^2 \sum_{i=1}^N \cos^2(\theta_i)} \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$(\mathbf{G}_y^t \mathbf{G}_y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|g|^2 \sum_{i=1}^N \sen^2(\theta_i)} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Por un lado, ésto demuestra que el estimador es consistente: a mayor numero de muestras, menor será la varianza para ambas variables estimadas. Además, como los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza son las respectivas varianzas de $\hat{\varepsilon}_s$ y $\hat{\varepsilon}_e$ se ve que los intervalos de confianza estimados en la sección anterior se incrementan al reducir el N .

Si reducimos la cantidad de muestras usadas en el ensayo a la mitad ($N = 10000$) y calculamos la trayectoria del vehículo, observamos los resultados:

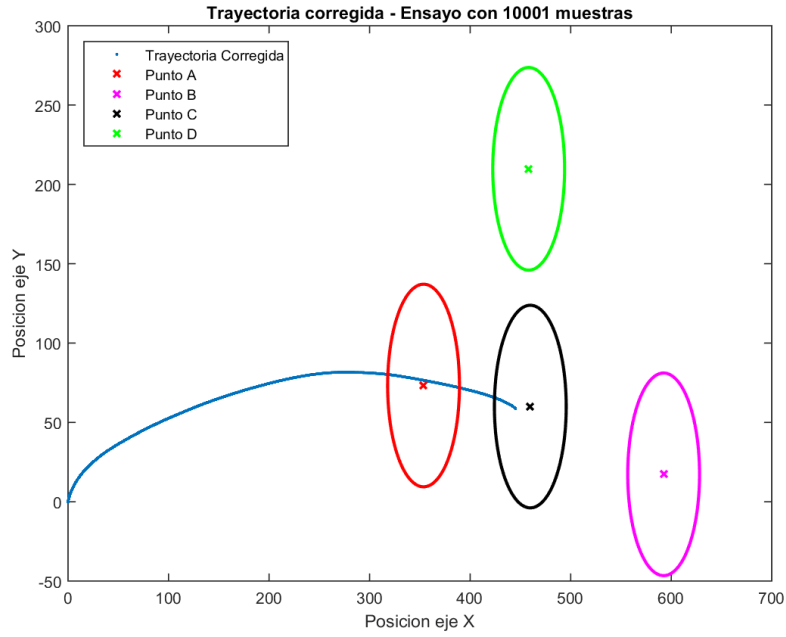


Figura 10: Resultados de la trayectoria final tomando una cantidad de muestras igual a 10001

Vemos que no hay diferencia sustancial respecto al ensayo original. Sin embargo, al reducir N a 1539 muestras (que surge de descartar 13 de cada 14 mediciones realizadas), obtenemos:

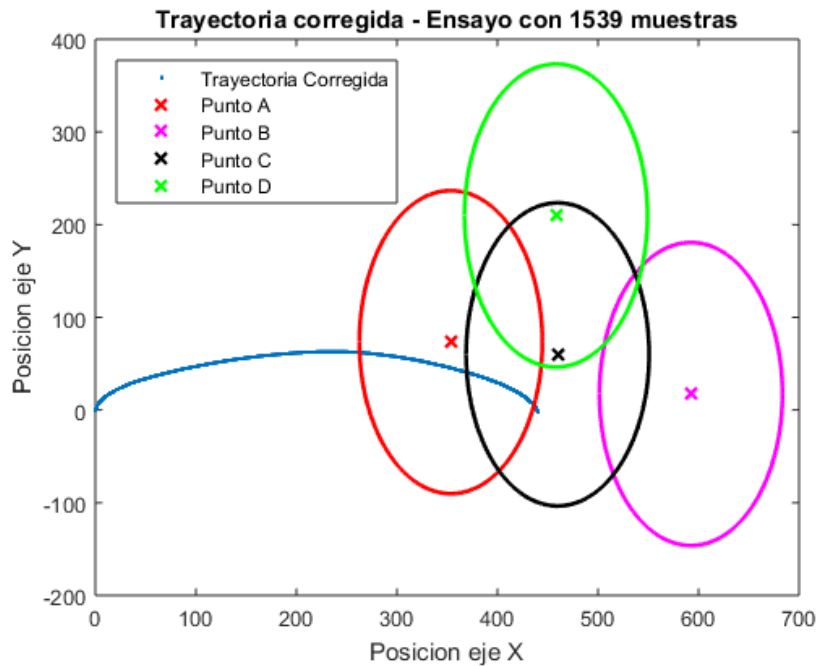


Figura 11: Resultados de la trayectoria final tomando una cantidad de muestras igual a 1539

Si bien existe una zona de *overlap* entre las regiones de decisión, el punto de llegada se encuentra excusivamente en el intervalo de confianza del punto C , por lo que la distinción sigue siendo unívoca. Sin embargo, si reducimos el numero de muestras a $N = 1429$ (descarto 14 de cada 15 mediciones) resulta:

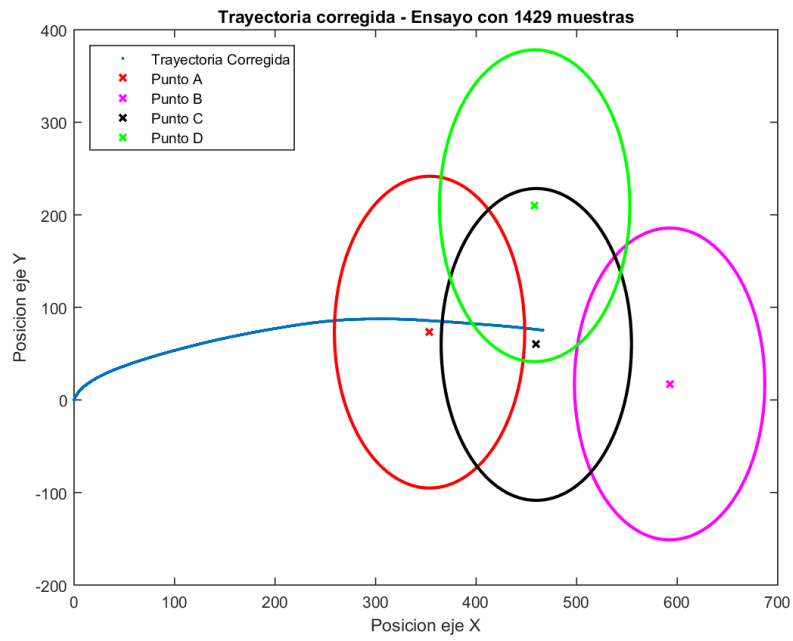


Figura 12: Resultados de la trayectoria final tomando una cantidad de muestras igual a 1429

En éste caso el punto de llegada no está definido unívocamente, por lo que con ése numero de muestras no se podría distinguir según el criterio establecido.

4. Conclusiones

Habiendo estimado los errores que afectan los instrumentos de medición, se pudo observar en los gráficos como estos influyeron en el punto de llegada. De acuerdo con las simulaciones, la trayectoria sin corregir termina en el punto B mientras que la corregida termina en el punto C.

Por otro lado, la cantidad de muestras que se toman para estimar los errores de medición cumplen un papel importante para determinar a que punto corresponde la trayectoria. Los resultados arrojaron que cuanto menos sean las muestras utilizadas para estimar los errores, no será posible determinar a que punto pertenece el final de la trayectoria. Tal como pudo observarse en los gráficos, los intervalos de confianza de cada punto de llegada comienzan a solaparse.

En cuanto al mínimo N con el que se puede distinguir el punto real de llegada, es preciso aclarar que éste valor no es generalizable. Ésto se debe a que la estimación de los errores del instrumental, al ser menos precisa, trae aparejado errores para la trayectoria que se amplificarán a calcular la posición.

5. Apéndice: Códigos

5.1. Código principal

```
clear all;close all;

% Cargo las struct de los .mat %
Ensayo=load('ensayo.mat');
Puntos=load('puntos.mat');
Acel=load('acel.mat');

% Paso los datos de struct a matrices %

% Datos de aceleracion y angulo (Ensayo) %
Tita=Ensayo.tita; % angulos en radianes %
N=length(Tita);
Amx=Ensayo.datos(:,1);
Amy=Ensayo.datos(:,2);

% Puntos posibles de llegada %
PuntosLlegadaXY=zeros(4,2);
PuntosLlegadaXY(1,:)=Puntos.A;
PuntosLlegadaXY(2,:)=Puntos.B;
PuntosLlegadaXY(3,:)=Puntos.C;
PuntosLlegadaXY(4,:)=Puntos.D;

% Aceleracion de trayectoria%
Tiempo=Acel.t;
T=length(Tiempo);
AcelVehiculoX=Acel.Aerr(:,1);
AcelVehiculoY=Acel.Aerr(:,2);

% Obtengo los datos iniciales y de ruido (datos.txt) %
N=length(Tita);
PosInicial=[0 0];
VelInicial=[1 3];
VarRuido=[0.25 0.64];
g=9.8; % modulo de la aceleracion de la gravedad en m/s2 %
```

Modelo en X: $A_{mx}=G_x \cdot c_x + V_x$ %

```
% Armo la matriz Gx para el modelo en la direccion X %
```

```
Arx=-g.*sin(Tita); % vector de valores de Arx %
Gx=[ones(N,1) Arx];
```

```
% Obtengo el cx que minimiza el ECM %
```

```
cx=inv((Gx')*Gx)*(Gx')*Amx;
```

```

% Obtengo los valores estimados de Esx y Eex %

Esx=cx(1) % Error de sesgo en X %
kx=cx(2);
Eex=kx-1 % Error de escala en X %

% Grafico para visualizar el ajuste %
figure;
hold on;
plot(Arx,Amx,'bo');

Xfit=kx.*Arx+Esx;
plot(Arx,Xfit,'r','Linewidth',3);
title('Ajuste para mediciones en direccion X');
ylabel('AcelX');
xlabel('-|g|\cdotsen(\theta)');
print('img/x_acel.png', '-dpng');
figure;
plot(Tita,Amx);
hold on;
plot(Tita,Xfit,'r','Linewidth',3);
title('Ajuste para mediciones en direccion X');
ylabel('AcelX');
xlabel('\theta (rad)');
xlim([0 6.28])
print('img/x_adj_acel.png', '-dpng');
% Varianza del estimador cx %

CovEstimadorX=VarRuido(1)*inv((Gx')*Gx)

```

Modelo en Y: $Amy = Gy \cdot cy + Vy$

```

% Armo la matriz Gy para el modelo en la direccion Y %

Ary=-g.*cos(Tita); % vector de valores de Ary %
Gy=[ones(N,1) Ary];

% Obtengo el cy que minimiza el ECM %

cy=inv((Gy')*Gy)*(Gy')*Amy;

% Obtengo los valores estimados de Esy y Eey %

Esy=cy(1) % Error de sesgo en Y %
ky=cy(2);
Eey=ky-1 % Error de escala en Y %

% Grafico para visualizar el ajuste %
figure;

```

```

hold on;
plot(Ary,Amy,'bo');

Yfit=ky.*Ary+Esy;
plot(Ary,Yfit,'r','Linewidth',3);
title('Ajuste para mediciones en direccion Y');
ylabel('AcelY');
xlabel('-|g|\cdot cos(\theta)');
print('img/y_acel.png', '-dpng');
figure;
plot(Tita,Amy);
hold on;
plot(Tita,Yfit,'r','Linewidth',3);
title('Ajuste para mediciones en direccion Y');
ylabel('AcelY');
xlabel('\theta (rad)');
xlim([0 6.28])

print('img/y_adj_acel.png', '-dpng');
% Varianza del estimador cy %

CovEstimadorY=VarRuido(2)*inv((Gy')*Gy)

```

Calculo trayectorias (corregida y sin corregir)

```

% Corrijo la aceleracion en X e Y%

AcelCorrX=(AcelVehiculoX-Esx)./(1-Eex);
AcelCorrY=(AcelVehiculoY-Esy)./(1-Eey);

% Calculo las trayectorias corregidas %

VelX=VelInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,AcelCorrX);
PosX=PosInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,VelX);

VelY=VelInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,AcelCorrY);
PosY=PosInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,VelY);

figure;
plot(PosX,PosY,'.');
hold on;

plot(PuntosLlegadaXY(1,1),PuntosLlegadaXY(1,2),'rx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(2,1),PuntosLlegadaXY(2,2),'mx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(3,1),PuntosLlegadaXY(3,2),'kx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(4,1),PuntosLlegadaXY(4,2),'gx','Linewidth',2);
title('Trayectoria corregida');
xlabel('Posicion eje X');
ylabel('Posicion eje Y');
legend('Trayectoria Corregida','Punto A','Punto B','Punto C','Punto D',...

```

```

... 'location', 'northwest');
print('img/t_correc.png', '-dpng');
Tf=Tiempo(T);
dX=Tf*Tf*0.5*3*(sqrt(CovEstimadorX(1,1))+max(abs(AcelCorrX))*sqrt(CovEstimadorX(2,2)))
dY=Tf*Tf*0.5*3*(sqrt(CovEstimadorY(1,1))+max(abs(AcelCorrY))*sqrt(CovEstimadorY(2,2)))
for i=1:4
    ellipse(dX,dY,PuntosLlegadaXY(i,1),PuntosLlegadaXY(i,2),i)
end
print('img/t_correc_elip', '-dpng');
% Calculo las trayectorias sin corregir para comparar %

VelXErr=VelInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,AcelVehiculoX);
PosXErr=PosInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,VelXErr);

VelYErr=VelInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,AcelVehiculoY);
PosYErr=PosInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,VelYErr);

figure;
plot(PosXErr,PosYErr, '.');
hold on;
plot(PuntosLlegadaXY(1,1),PuntosLlegadaXY(1,2), 'rx', 'Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(2,1),PuntosLlegadaXY(2,2), 'mx', 'Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(3,1),PuntosLlegadaXY(3,2), 'kx', 'Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(4,1),PuntosLlegadaXY(4,2), 'gx', 'Linewidth',2);

title('Trayectoria sin corregir');
xlabel('Posicion eje X');
ylabel('Posicion eje Y');
legend('Trayectoria sin corregir', 'Punto A', 'Punto B', 'Punto C', 'Punto D', ...
... 'location', 'northwest');
print('img/t_nocorrec.png', '-dpng');

```

5.2. Cálculo de trayectorias con menor N de muestras en ensayo

```
clear all;close all;

% Cargo las struct de los .mat %
Ensayo=load('ensayo.mat');
Puntos=load('puntos.mat');
Acel=load('acel.mat');
Paso=[2 13 14];

for h=1:3

% Paso los datos de struct a matrices %

% Datos de aceleracion y angulo (Ensayo) %
Tita2=Ensayo.tita; % angulos en radianes %
N2=length(Tita2);
Ax2=Ensayo.datos(:,1);
Ay2=Ensayo.datos(:,2);

paso=Paso(h); % Cambio el paso de muestreo para simular un ensayo con menos puntos %
Amx=Ax2(1:paso:N2);
Amy=Ay2(1:paso:N2);
Tita=Tita2(1:paso:N2);
N=length(Tita);

% Puntos posibles de llegada %
PuntosLlegadaXY=zeros(4,2);
PuntosLlegadaXY(1,:)=Puntos.A;
PuntosLlegadaXY(2,:)=Puntos.B;
PuntosLlegadaXY(3,:)=Puntos.C;
PuntosLlegadaXY(4,:)=Puntos.D;

% Aceleracion de trayectoria%
Tiempo=Acel.t;
T=length(Tiempo);
AcelVehiculoX=Acel.Aerr(:,1);
AcelVehiculoY=Acel.Aerr(:,2);

% Obtengo los datos iniciales y de ruido (datos.txt) %
N=length(Tita);
PosInicial=[0 0];
VelInicial=[1 3];
VarRuido=[0.25 0.64];
g=9.8; % modulo de la aceleracion de la gravedad en m/s2 %
```

Modelo en X: $A_{mx}=G_x \cdot c_x + V_x$ %

```
% Armo la matriz Gx para el modelo en la direccion X %
```

```

Arx=-g.*sin(Tita); % vector de valores de Arx %
Gx=[ones(N,1) Arx];

% Obtengo el cx que minimiza el ECM %

cx=inv((Gx')*Gx)*(Gx')*Amx;

% Obtengo los valores estimados de Esx y Eex %

Esx=cx(1); % Error de sesgo en X %
kx=cx(2);
Eex=kx-1; % Error de escala en X %

% Varianza del estimador cx %

CovEstimadorX=VarRuido(1)*inv((Gx')*Gx);

```

Modelo en Y: $Amy = Gy \cdot cy + Vy$

```

% Armo la matriz Gy para el modelo en la direccion Y %

Ary=-g.*cos(Tita); % vector de valores de Ary %
Gy=[ones(N,1) Ary];

% Obtengo el cy que minimiza el ECM %

cy=inv((Gy')*Gy)*(Gy')*Amy;

% Obtengo los valores estimados de Eesy y Eey %

Eesy=cy(1); % Error de sesgo en Y %
ky=cy(2);
Eey=ky-1; % Error de escala en Y %

% Varianza del estimador cy %

CovEstimadorY=VarRuido(2)*inv((Gy')*Gy);

```

Calculo trayectorias (corregida y sin corregir)

```

% Corrijo la aceleracion en X e Y%

AcelCorrX=(AcelVehiculoX-Esx)./(1-Eex);
AcelCorrY=(AcelVehiculoY-Eesy)./(1-Eey);

% Calculo las trayectorias corregidas %

VelX=VelInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,AcelCorrX);
PosX=PosInicial(1)+cumtrapz(Tiempo,VelX);

```

```

Vely=VelInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,AcelCorrY);
PosY=PosInicial(2)+cumtrapz(Tiempo,Vely);

figure;
plot(PosX,PosY,'. ');
hold on;

plot(PuntosLlegadaXY(1,1),PuntosLlegadaXY(1,2),'rx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(2,1),PuntosLlegadaXY(2,2),'mx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(3,1),PuntosLlegadaXY(3,2),'kx','Linewidth',2);
plot(PuntosLlegadaXY(4,1),PuntosLlegadaXY(4,2),'gx','Linewidth',2);
str=sprintf('Trayectoria corregida - Ensayo con %d muestras',N);
title(str);
xlabel('Posicion eje X');
ylabel('Posicion eje Y');
legend('Trayectoria Corregida','Punto A','Punto B','Punto C','Punto D','location','nor

Tf=Tiempo(T);
dX=Tf*Tf*0.5*3*(sqrt(CovEstimadorX(1,1))+max(abs(AcelCorrX))*sqrt(CovEstimadorX(2,2)))
dY=Tf*Tf*0.5*3*(sqrt(CovEstimadorY(1,1))+max(abs(AcelCorrY))*sqrt(CovEstimadorY(2,2)))
for i=1:4
    ellipse(dX,dY,PuntosLlegadaXY(i,1),PuntosLlegadaXY(i,2),i)
end
print('img/elip(h).png', '-dpng');
clear Amx
clear Amy
clear Tita
clear Gx
clear Gy
clear cx
clear cy
clear Arx
clear Ary
end

```


5.3. Funcion ellipse.m

```
function ellipse(a,b,x0,y0,color);
t=-pi:0.01:pi;
x=x0+a*cos(t);
y=y0+b*sin(t);
hold on;
    if color==1
        plot(x,y,'r','linewidth',2)
    elseif color ==2
        plot(x,y,'m','linewidth',2)
    elseif color ==3
        plot(x,y,'k','linewidth',2)
    elseif color ==4
        plot(x,y,'g','linewidth',2)
    end
end
```