Trabajo práctico N°1

Dinámica de movimiento de un vehículo

Enunciado

Considere un vehículo que se desplaza definiendo una trayectoria tal que la posición en cada instante resulta $\boldsymbol{p}$(t), con una velocidad $\boldsymbol{v}$(t) y una aceleración $\boldsymbol{a}$(t), definidas en un plano de coordenadas [x,y] de acuerdo a:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

Asumiendo que la dinámica del movimiento satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{v}(t) \\ \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{a}(t) \\ \dot{\boldsymbol{a}}(t) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

De desea estimar la trayectoria del vehículo midiendo diferentes magnitudes (según corresponda, posición, velocidad y/o aceleración) para distintos parámetros y condiciones. En todos los casos extraiga conclusiones.

Ejercicio 1

(a) Defina las variables de estado asociadas a las ecuaciones de movimiento en tiempo continuo y la matriz de estados A.

(b) Implemente en *Matlab* la matriz de estados de tiempo discreto A_d, suponiendo que se mide en forma periódica, con un tiempo de muestreo $h = 1\ s$. Defina también la matriz de covarianza de ruido del proceso Q_d sabiendo que las varianzas de ruido de proceso discreto, para el sistema de estados de la ecuación (1), resultan: $\sigma^2_{\xi p} = 3 \times 10^{-4}$, $\sigma^2_{\xi v} = 2 \times 10^{-3}$ y $\sigma^2_{\xi a} = 10^{-2}$, asumiendo que las coordenadas x e y poseen igual varianza.

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_d \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\xi}_k \qquad \boldsymbol{\xi}_k = \begin{bmatrix} \xi_{px} & \xi_{py} & \xi_{vx} & \xi_{vy} & \xi_{ax} & \xi_{ay} \end{bmatrix}^t \tag{1}$$

Ejercicio 2

Implemente el filtro de Kalman de acuerdo a los datos del punto anterior. Utilice el archivo “datos.mat”para extraer las muestras de posición, velocidad, aceleración y tiempo, que consideraremos “ideales”, correspondientes al movimiento de un vehículo. Asuma como condiciones iniciales $\boldsymbol{x}_0 = [40\ -200\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$ para el vector de estados y $P_{0/0} = \text{diag}([10^6\ 10^6\ 100\ 100\ 10\ 10])$ para la matriz de inicial de covarianza de los estados.

(a) **Medición de la posición:** Defina la matriz C de salida. Utilice los datos suministrados para generar mediciones de posición agregando ruido gaussiano aditivo con desvío $\sigma_p =$

100 m (para ambas coordenadas x e y). Defina en este caso la matriz de covarianza para el ruido de medición R. Grafique la trayectoria $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^t$ (real, estimada y medición) y los estados p_x, p_y, v_x, v_y, a_x y a_y en función del tiempo. Verifique la validez del algoritmo de Kalman graficando las innovaciones y observando si son un proceso blanco. Determine cuántos estados no observables tiene el sistema.

(b) **Medición de la velocidad:** Repita el ítem a), pero generando mediciones de velocidad agregando a los datos disponibles ruido aditivo con desvío $\sigma_v = 10\ m/s$.

(c) **Medición de la aceleración:** Repita el ítem a), pero generando mediciones de aceleración agregando a los datos disponibles ruido aditivo con desvío $\sigma_a = 1\ m/s^2$.

Ejercicio 3

Suponiendo que se mide la posición afectada por ruido blanco gaussiano con desvío $\sigma_p = 100\ m$ y la covarianza inicial de los estados $P_{0/0}$ del ejercicio 2, grafique la trayectoria $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^t$ y el error de cada estado en función del tiempo, observando la convergencia para cada una de las siguientes condiciones iniciales:

1. - $\boldsymbol{x}_0 = [40\ \ -200\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
   - $P'_{0/0} = 100 P_{0/0}$
2. - $\boldsymbol{x}_0 = [200\ \ -3000\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
   - $P'_{0/0} = 100 P_{0/0}$
3. - $\boldsymbol{x}_0 = [40\ \ -200\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
   - $P'_{0/0} = 0,01 P_{0/0}$
4. - $\boldsymbol{x}_0 = [200\ \ -3000\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
   - $P'_{0/0} = 0,01 P_{0/0}$

Verifique las innovaciones en todos los casos.

Ejercicio 4

(a) Con los datos del ejercicio 2, estimar las variables de estado agregándole un sesgo $\boldsymbol{b}_p = [300m\ 200m]^t$ a las mediciones de posición. Redefinir el espacio de estados para estimar el sesgo y graficar las componentes de las variables de estado reales superpuestas a las estimadas por Kalman. Determinar cuántos estados son observables.

(b) Repetir el punto 4.a) pero midiendo posición, velocidad y aceleración (pero con sesgo sólo en la posición).

(c) Repetir el punto 4.a) pero en lugar de medir posición con sesgo, medir velocidad con un sesgo de $\boldsymbol{b}_v = [10m/s\ 20m/s]^t$.

(d) Repetir el punto 4.c) pero midiendo posición, velocidad y aceleración (sólo sesgo en velocidad).

(e) Repetir el punto 4.a) pero en lugar de medir posición con sesgo, medir aceleración con un sesgo de $\boldsymbol{b}_a = [2m/s^2 \ 1m/s^2]^t$.

(f) Repetir el punto 4.e) pero midiendo posición, velocidad y aceleración (sólo sesgo en aceleración).

Ejercicio 5

Considerando los datos del ejercicio 2, pero con una condición inicial $\boldsymbol{x}_0 = [40 \ -1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$, resuelva los siguientes puntos:

(a) Evalúe las expresiones teóricas para el estado estacionario y compute la matriz de covarianza de los estados P y el factor de ganancia K del algoritmo de Kalman.

(b) Compare los valores hallados en el ítem anterior con los valores de $P_{k/k}$ y K_k resultantes para el último instante de tiempo del algoritmo de Kalman no estacionario (es decir, sus valores finales).

(c) Grafique los estados estimados por Kalman estacionario y no estacionario. Verifique la función de autocorrelación de las innovaciones para la estimación en el caso estacionario.

Ejercicio 6

Repita el ejercicio 2.a) variando al matriz de covarianza del ruido de medición R (pero sin modificar el ruido generado) para los siguientes dos casos:

(a) Aumentando la matriz de covarianza de medición tal que $R' = 100R$.

(b) Disminuyendo la matriz de covarianza de medición tal que $R' = 0{,}01R$.

Nota: puede probar distintos valores aumentado o disminuyendo aún más la matriz R.

Ejercicio 7

Con los datos del ejercicio 2.a) compute y grafique las trayectorias real y estimada por Kalman midiendo posición, pero simulando la pérdida de mediciones aleatoriamente considerando los siguientes dos casos:

(a) Se pierden mediciones con una probabilidad 0,1 bernoulli.

(b) Se pierden mediciones con una probabilidad 0,9 bernoulli.

Ayuda: puede utilizar `ber=binornd(1,p,[1,N])`, donde p es la probabilidad de que `ber='1'` (siendo `(1-p)` la probabilidad de que `ber='0'`) y `N` la cantidad de elementos.