

Procesamiento de Señales II
TP1: Estimación de trayectorias utilizando el filtro de Kalman

Sampayo, Sebastián Lucas
Padrón: 93793

Segundo Cuatrimestre 2015



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Índice

1. Ejercicio 1	1
1.1. Planteo del problema	1
1.2. Modelo de la dinámica del sistema	2
1.3. Discretización del sistema	4
2. Ejercicio 2	6
3. Ejercicio 3	8
4. Ejercicio 4	10
5. Ejercicio 5	12
6. Ejercicio 6	14
7. Ejercicio 7	15

1. Ejercicio 1

Indique cómo haría para utilizar un filtro de Kalman para estimar la trayectoria utilizando la información disponible. Indique cuáles serían las matrices del modelo, tenga en cuenta que el modelo debe ser discretizado.

1.1. Planteo del problema

En primer lugar, se muestra a continuación el sistema de referencias utilizado a lo largo del desarrollo teórico, que servirá de guía para nombrar a cada variable del modelo.

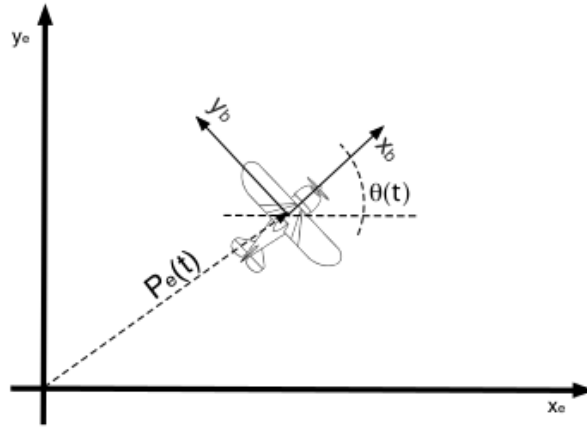


Figura 1: Ejes de referencia utilizados.

En este trabajo lo que se busca concretamente es estimar

- Posición ($\overline{P^e}(t) = [P_x^e \ P_y^e]^T$)
- Velocidad ($\overline{V^e}(t) = [V_x^e \ V_y^e]^T$)
- Ángulo de orientación ($\Theta(t)$)

de un avión que realiza una trayectoria sobre un plano de 2 dimensiones. Como datos, se tienen las mediciones de aceleración y velocidad angular inerciales referidas al propio vehículo, es decir

- $\overline{A^b}(t) = [a_x^b \ a_y^b]^T$
- $\omega(t)$

(con error despreciable), y al mismo tiempo (pero con distinta frecuencia de actualización) las mediciones de un radar externo al avión, que detecta $\overline{P^e}(t)$ y $\overline{V^e}(t)$ con cierto error a considerar.

1.2. Modelo de la dinámica del sistema

Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del vehículo están dadas por (nota: se asume que todas las variables dependen del tiempo t , por lo tanto no se escribirá " $X(t)$ ", sino directamente " X "):

$$1) \quad \boxed{\dot{\overline{P}}^e = \overline{V}^e} \quad (1)$$

$$\dot{\overline{V}}^e = \overline{A}^e = \begin{bmatrix} a_x^e \\ a_y^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x^b \\ a_y^b \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C_b^e \triangleq \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$2) \quad \boxed{\dot{\overline{V}}^e = C_b^e \cdot \overline{A}^b} \quad (4)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \int_{t_0}^t \omega dt \quad (5)$$

$$3) \quad \boxed{\dot{\Theta} = \omega} \quad (6)$$

Y las condiciones iniciales necesarias son:

$$\overline{P}^e(0), \overline{V}^e(0), \Theta(0)$$

Con esto es fácil ver que si tomamos como variables de estado aquellas magnitudes que queremos estimar (P^e, V^e, Θ) , entonces la ecuación 2 es no lineal en Θ . Por lo tanto, lo que se hace es tomar como variables de estado a z_1, z_2, z_3, z_4 que pueden escribirse como función de Θ y luego obtener Θ a partir de sus inversas. Además se puede ver que:

$$z_1 = z_4 = \cos \Theta$$

$$z_2 = -z_3 = -\sin \Theta$$

con lo cual es posible reducir estas últimas a solo 2 variables de estado z_1, z_2 . Luego, para encontrar el ángulo de orientación se utiliza la información de ambas variables para módulo y signo:

$$\boxed{\Theta = -\text{sign}(z_2) \cdot \arccos(z_1)} \quad (7)$$

Las ecuaciones diferenciales del sistema entonces quedan de la siguiente forma:

$$1) \quad \boxed{\dot{\overline{P}}^e = \overline{V}^e} \quad (8)$$

$$\dot{\overline{V}}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x^b & a_y^b \\ a_y^b & -a_x^b \end{bmatrix}}_{\triangleq M_a} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq \overline{Z}} \quad (9)$$

$$2) \quad \boxed{\dot{\overline{V}}^e = M_a \cdot \overline{Z}} \quad (10)$$

Derivando \overline{Z} queda:

$$\dot{\overline{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \cdot z_2 \\ -\omega \cdot z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq M_z} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$3) \quad \boxed{\dot{\overline{Z}} = M_z \cdot \overline{Z}} \quad (12)$$

Ahora como las 3 ecuaciones diferenciales son lineales, podemos escribir todo el sistema matricialmente de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\overline{P^e}} \\ \dot{\overline{V^e}} \\ \dot{\overline{Z}} \end{bmatrix}}_{\triangleq \dot{\overline{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & M_a \\ 0_2 & 0_2 & M_z \end{bmatrix}}_{\triangleq A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P^e} \\ \overline{V^e} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}}_{=\overline{X}} \quad (13)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P^e} \\ \overline{V^e} \end{bmatrix}}_{\triangleq \overline{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 & 0_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P^e} \\ \overline{V^e} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}}_{=\overline{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\eta_P} \\ \overline{\eta_V} \end{bmatrix}}_{=\overline{\eta}} \quad (14)$$

$$\Sigma \triangleq \begin{cases} \dot{\overline{X}} = A \cdot \overline{X} \\ Y = C \cdot \overline{X} + \overline{\eta} \end{cases} \quad (15)$$

1.3. Discretización del sistema

Para discretizar el sistema se utiliza la aproximación de Taylor:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(T^3/6)$$

donde $T \triangleq t - t_0$

En nuestro caso aproximaremos las ecuaciones alrededor del instante actual t_k y evaluaremos en el próximo instante t_{k+1} es decir

$$t = t_{k+1}$$

$$t_0 = t_k$$

De esta manera, las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$\overline{P^e}(t_{k+1}) = \overline{P^e}(t_k) + \dot{\overline{P^e}}(t_k)T + \ddot{\overline{P^e}}(t_k)\frac{T^2}{2} + \mathcal{O}(T^3/6)$$

$$1) \quad \boxed{\overline{P^e}(t_{k+1}) = \overline{P^e}(t_k) + \overline{V^e}(t_k)T + M_a \cdot \overline{Z}(t_k)\frac{T^2}{2} + \mathcal{O}(T^3/6)} \quad (16)$$

$$2) \quad \boxed{\overline{V^e}(t_{k+1}) = \overline{V^e}(t_k) + M_a \cdot \overline{Z}(t_k)T + \mathcal{O}(T^2/2)} \quad (17)$$

$$\overline{Z}(t_{k+1}) = \overline{Z}(t_k) + M_z \cdot \overline{Z}(t_k)T + \mathcal{O}(T^2/2)$$

$$3) \quad \boxed{\overline{Z}(t_{k+1}) = \underbrace{(I - M_z \cdot T)}_{\triangleq M_{z2}} \overline{Z}(t_k) + \mathcal{O}(T^2/2)} \quad (18)$$

Este sistema podemos escribirlo matricialmente como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P^e}(t_{k+1}) \\ \overline{V^e}(t_{k+1}) \\ \overline{Z}(t_{k+1}) \end{bmatrix}}_{\triangleq \overline{X}(t_{k+1})} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & I_2 T & M_a \frac{T^2}{2} \\ 0_2 & I_2 & M_a T \\ 0_2 & 0_2 & M_{z2} \end{bmatrix}}_{\triangleq A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P^e}(t_k) \\ \overline{V^e}(t_k) \\ \overline{Z}(t_k) \end{bmatrix}}_{=\overline{X}(t_k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\xi_P}(t_k) \\ \overline{\xi_V}(t_k) \\ \overline{\xi_Z}(t_k) \end{bmatrix}}_{=\overline{\xi}(t_k)} \quad (19)$$

$$\overline{Y}(t_k) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 & 0_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq C} \cdot \overline{X}(t_k) + \overline{\eta} \quad (20)$$

$$B = I_6$$

$$\Sigma \triangleq \begin{cases} \overline{X}(t_{k+1}) = A \cdot \overline{X}(t_k) + B \cdot \overline{\xi} \\ \overline{Y}(t_k) = C \cdot \overline{X}(t_k) + \overline{\eta} \end{cases} \quad (21)$$

donde ξ representa el ruido de proceso proveniente de la discretización aproximada del sistema en tiempo continuo. La matriz de correlación de este proceso podemos pensar que está relacionada con el orden de los términos despreciados en la aproximación:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Por otro lado, η representa el ruido de medición y su matriz de correlación está relacionada con la incerteza de las mediciones:

$$R = \begin{bmatrix} 10^2 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0,1^2 I_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Además, para iniciar el algoritmo, es necesario definir condiciones iniciales $X(0)$ y $P(0)$, con P la matriz de correlación del estimador de \bar{X} . En este caso se inició el algoritmo con los siguientes valores:

$$\bar{X}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ \cos 40^\circ \\ -\sin 40^\circ \end{bmatrix}, \quad P(0) = \begin{bmatrix} 100I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0,2I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & P0_z \end{bmatrix}, \quad P0_z \triangleq \begin{bmatrix} \cos 40^\circ & 0_2 \\ 0_2 & -\sin 40^\circ \end{bmatrix}$$

2. Ejercicio 2

Estime la trayectoria del vehículo. Para esto utilice las mediciones de los acelerómetros (archivo Acel.mat), la del giróscopo (archivo Gyro.mat) y la del radar (Radar.mat). Calcule el error de estimación comparando con la trayectoria real (archivo trayectoria.mat)

Para este punto se codificó una aplicación en MATLAB a partir de las fórmulas enunciadas en el punto anterior. Para la trayectoria del vehículo se obtuvo el siguiente resultado, donde la posición "medida" corresponde a los valores en bruto que arroja el radar:

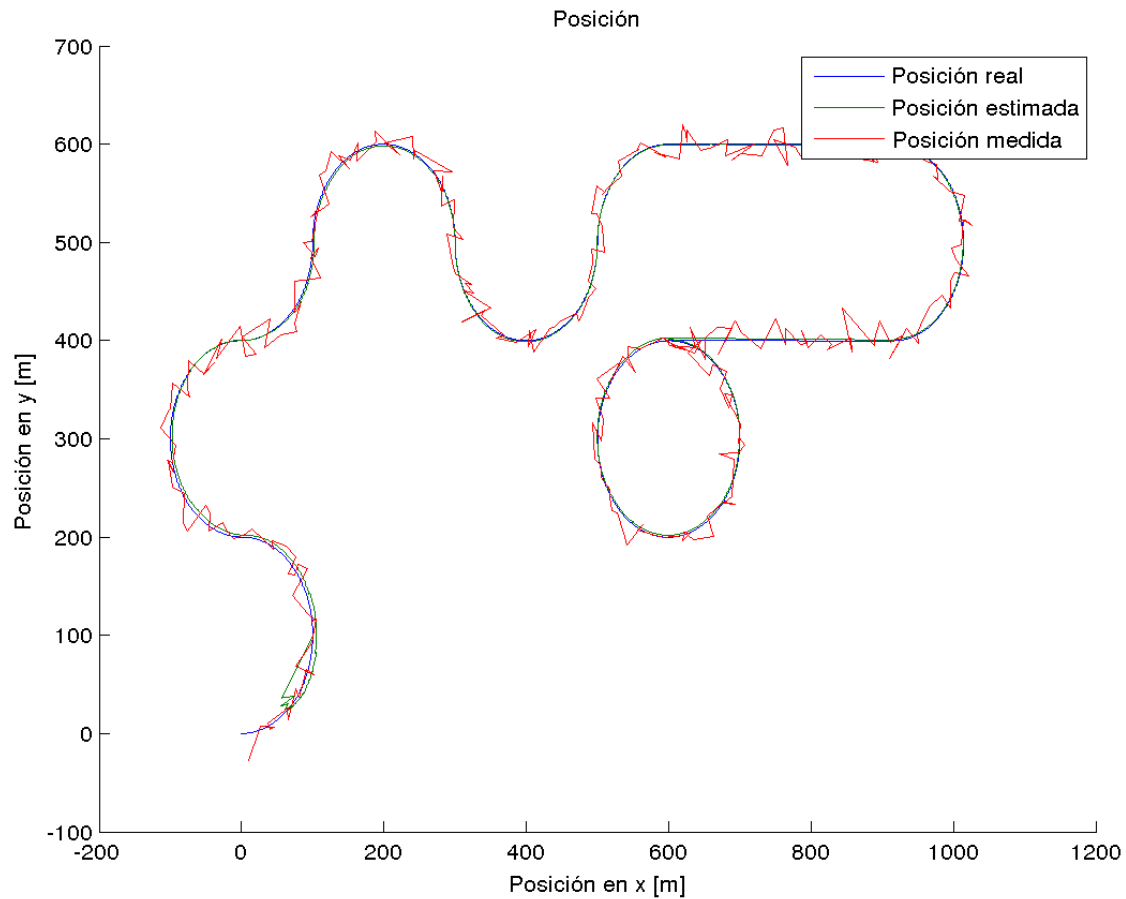


Figura 2: Trayectoria.

Por otro lado, la realización de los errores de estimación se calculó como

$$error = Valor_{real} - Valor_{estimado}$$

En la siguiente figura puede verse de arriba hacia abajo los errores en: Posición, Velocidad y Ángulo de orientación.

Realización del error

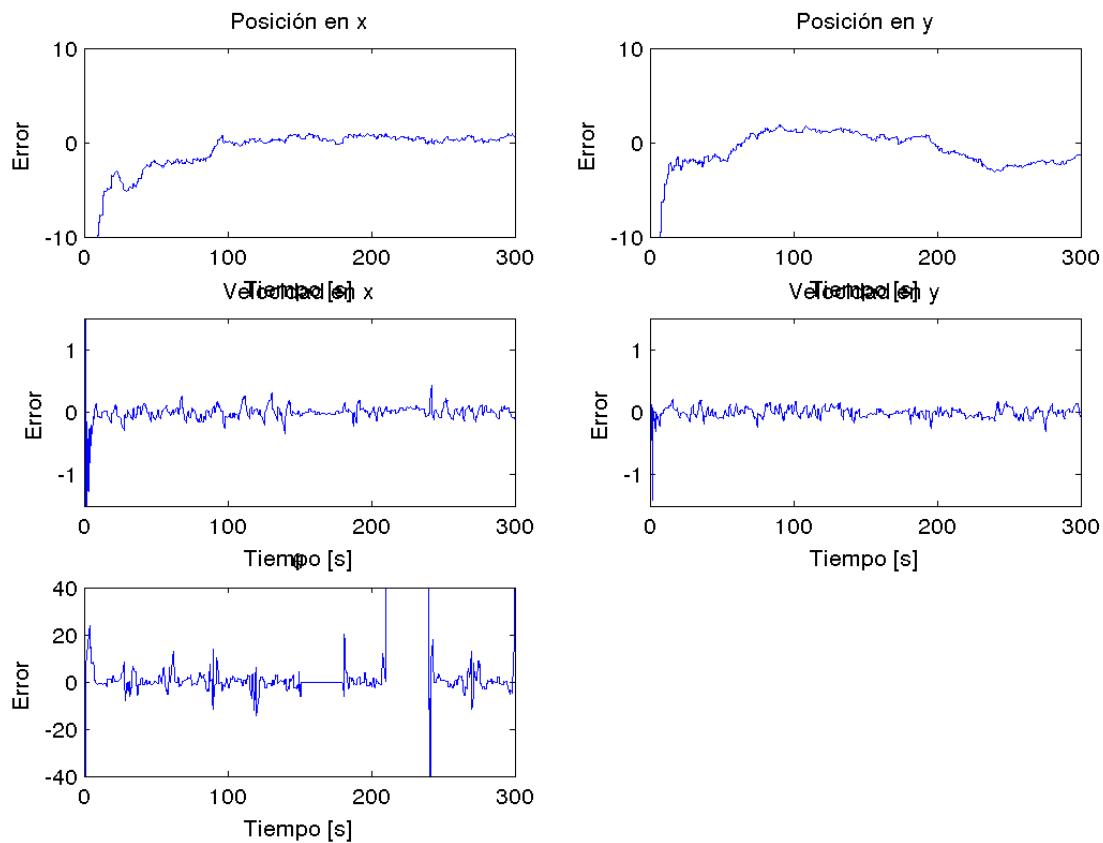


Figura 3: Realización del error.

Nota: En el caso el error en la estimación del ángulo Θ se puede ver en un tramo una discontinuidad de error aparente infinito. Esto se debe a que el valor indicado como real es de 180 y el estimado es de -180, por lo tanto debe interpretarse en realidad como un error mínimo.

3. Ejercicio 3

Suponga ahora que el radar posee un sesgo en velocidad (del orden de 1m/s en cada eje). Modifique el modelo de estado del sistema de manera tal de poder incluir el sesgo del radar y estimarlo. La medición del radar está dada en el archivo Radar-sesgo-vel.mat. Grafique el error de estimación tanto de la trayectoria como del sesgo del sensor. Discuta los resultados.

Para incluir el sesgo en el modelo se agregaron 1 variable de estado: el sesgo (de 2 componentes: según el eje 'x' y según el eje 'y'). Las matrices del sistema se reescribieron de la siguiente manera:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, \quad \bar{X}' = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{b} \end{bmatrix}, \quad A' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0_{6 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 6} & I_{2 \times 2} \end{array} \right], \quad B' = \begin{bmatrix} B \\ 0_{2 \times 6} \end{bmatrix}, \quad C' = \left[\begin{array}{c|c} C & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 6} & I_{2 \times 2} \end{array} \right]$$

Cabe destacar que en el programa se calculó el rango de la matriz de observabilidad asociada a este modelo y el resultado fue 8, con lo cual todas las variables son observables y por lo tanto el sesgo puede estimarse y corregirse.

Con estas expresiones se volvió a correr el algoritmo obteniendo los siguientes resultados:

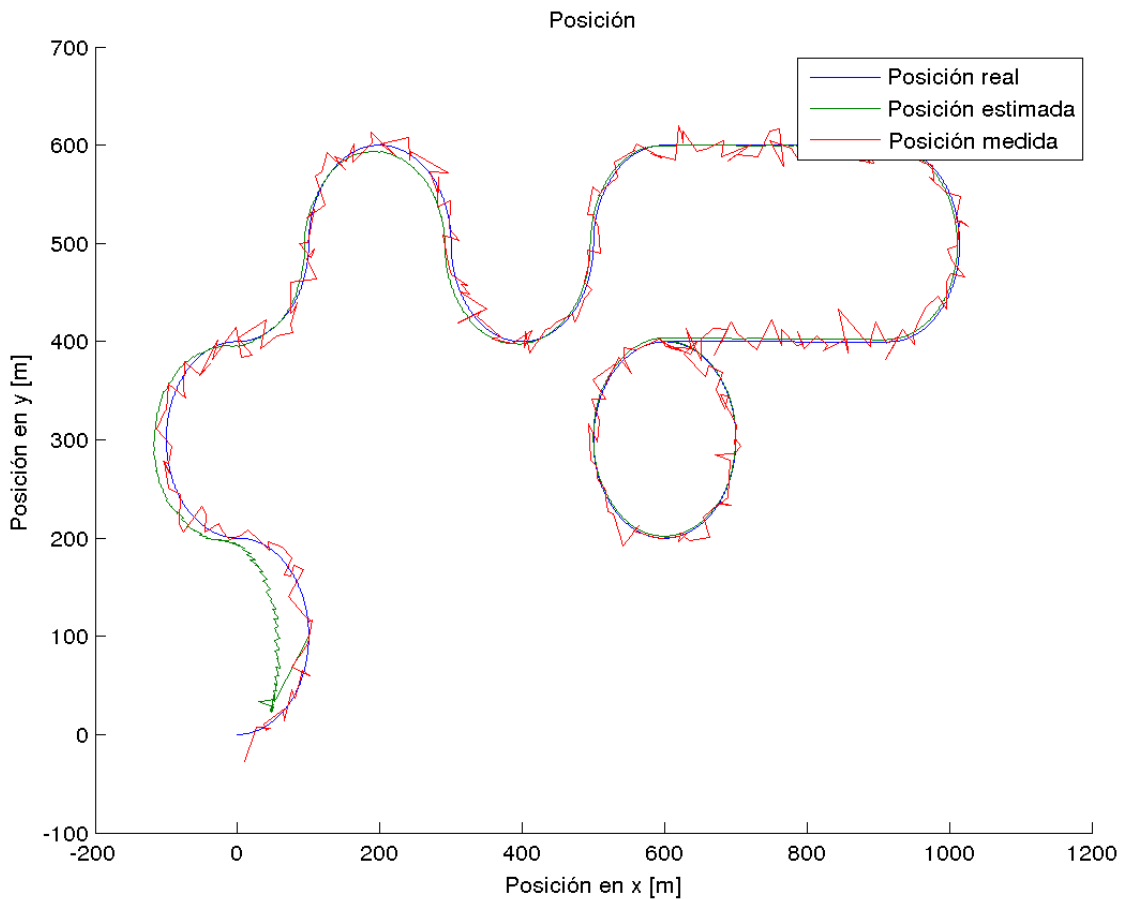


Figura 4: Trayectoria.

En la siguiente figura puede verse de arriba hacia abajo los errores en: Posición, Velocidad y Ángulo de orientación.

Realización del error

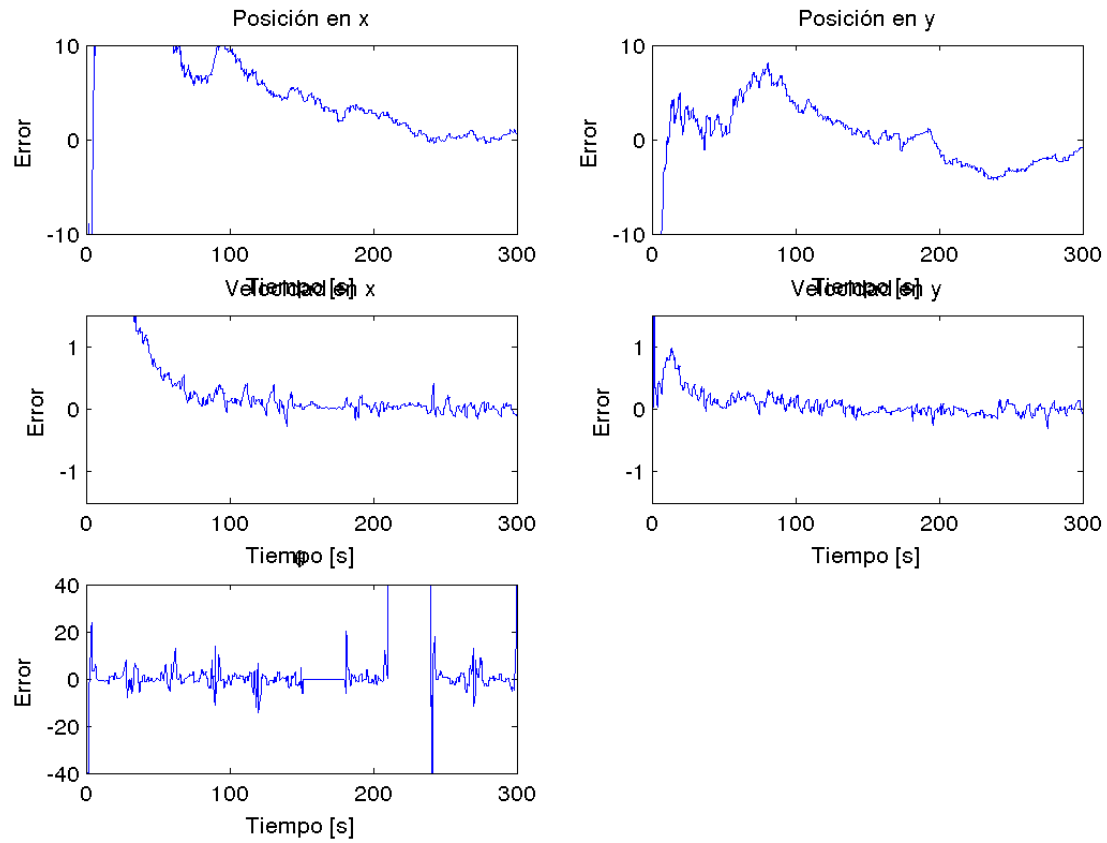


Figura 5: Realización del error.

4. Ejercicio 4

Suponga ahora que el radar posee un sesgo en posición (del orden de 20m en cada eje). Modifique el modelo de estado del sistema de manera tal de poder incluir el sesgo del radar y estimarlo. La medición del radar está dada en el archivo Radar-sesgo-pos.mat. Grafique el error de estimación tanto de la trayectoria como del sesgo del sensor. Discuta los resultados.

En este caso lo único que cambia respecto al punto anterior es que la matriz C queda de la siguiente manera:

$$C' = \left[C \mid \begin{array}{c} I_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} \end{array} \right]$$

y que ahora \bar{b} representa el sesgo en la posición.

Recalculando la matriz de observabilidad, en este caso se obtiene rango 6, indicando que en esta situación, el sesgo no es observable. En este sentido, no se espera conseguir un resultado satisfactorio.

Con estas expresiones se volvió a correr el algoritmo obteniendo los siguientes resultados:

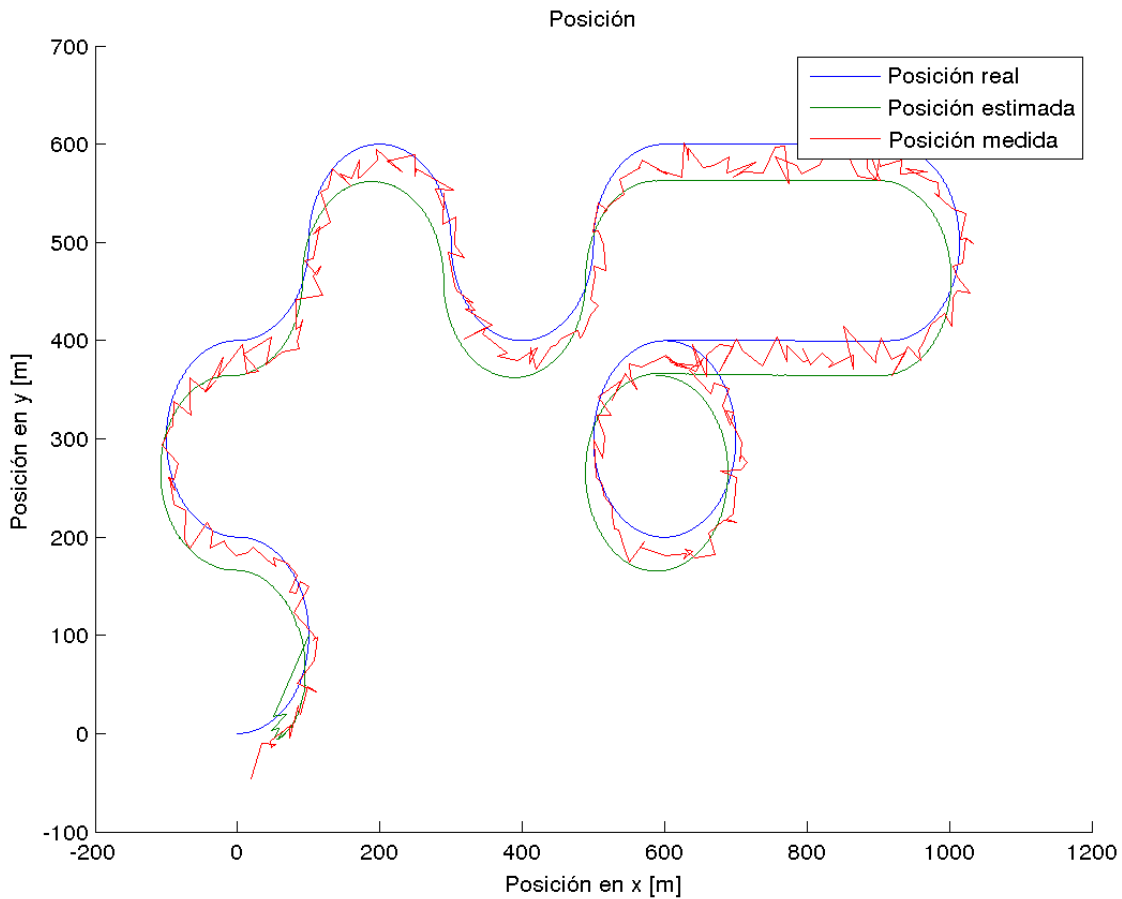


Figura 6: Trayectoria.

En la siguiente figura puede verse de arriba hacia abajo los errores en: Posición, Velocidad y Ángulo de orientación.

Realización del error

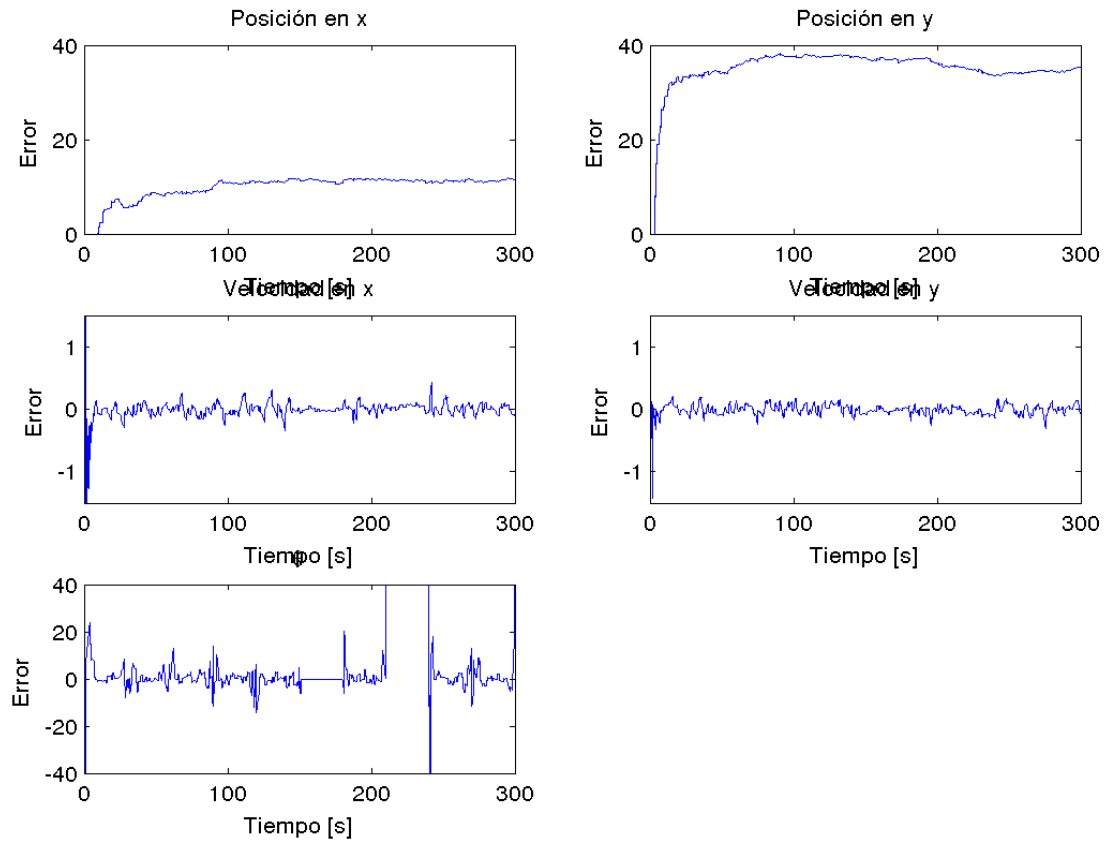


Figura 7: Realización del error.

5. Ejercicio 5

Programe el algoritmo de Kalman basado en la factorizaciones QR y de Cholesky vistos en el curso y realice nuevamente el punto 2. comparando los resultados.

Para este ejercicio se armó la matriz M en cada paso de actualización con los siguientes datos:

$$M = \begin{bmatrix} R_k^{cH} & C_k P_{k|k-1}^{cH} & 0_{pq} \\ 0_{Nxp} & A_k P_{k|k-1}^{cH} & B_k Q_k^{cH} \\ -y_k^H R_k^{c-1} & \hat{x}_k^H P_{k|k-1}^{c-1} & 0_{1xq} \end{bmatrix}$$

Aplicando la factorización $A = QR$ con $A = M^H$, se obtiene una matriz R_{QR} con las siguientes componentes:

$$R_{QR}^H = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & Z & 0 \\ W1 & W2 & W3 \end{bmatrix}$$

Haciendo las cuentas se llega a :

$$P_{k+1|k} = ZZ^H$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = ZW_2^H$$

$$\hat{e}_k = -XW_1^H$$

donde \hat{e}_k es la innovación en el paso k .

Con estas expresiones se volvió a correr el algoritmo obteniendo los siguientes resultados:

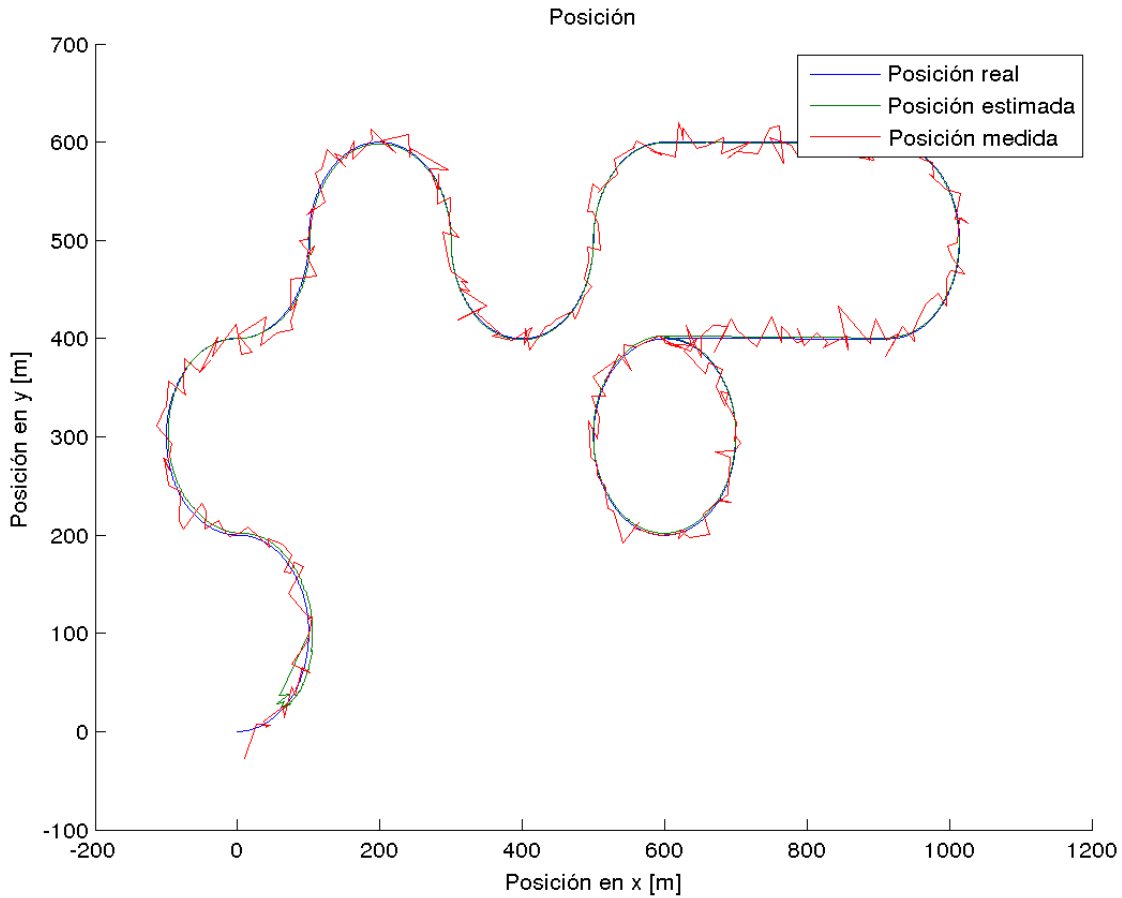


Figura 8: Trayectoria.

En la siguiente figura puede verse de arriba hacia abajo los errores en: Posición, Velocidad y Ángulo de orientación.

Realización del error

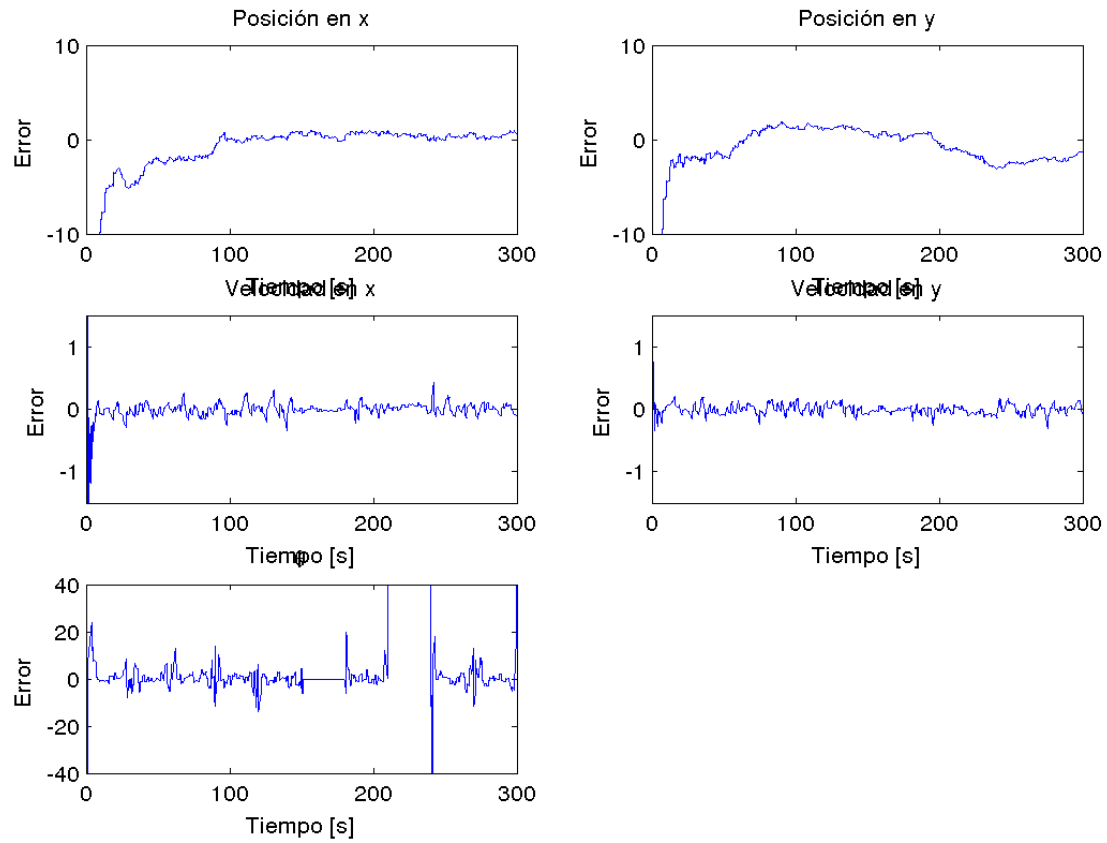


Figura 9: Realización del error.

6. Ejercicio 6

Dado que en la práctica uno no puede comparar los resultados obtenidos con la trayectoria real ¿Qué le parece que podría hacer para "verificar" si el filtro de Kalman está funcionando correctamente? ¿Cómo sabría si los datos que está teniendo son útiles o no? De una explicación concisa.

El filtro de Kalman se basa en que en cada paso las innovaciones sean ortogonales entre si, i. e. que estén descorrelacionadas. De esta forma, la autocorrelación de este proceso debería ser una delta en el origen. Para comprobar que esta condición se mantenga es posible estimar la autocorrelación de las innovaciones en cada paso y graficar el resultado.

En el caso del ejercicio 2 se puede ver en la siguiente figura el resultado final:

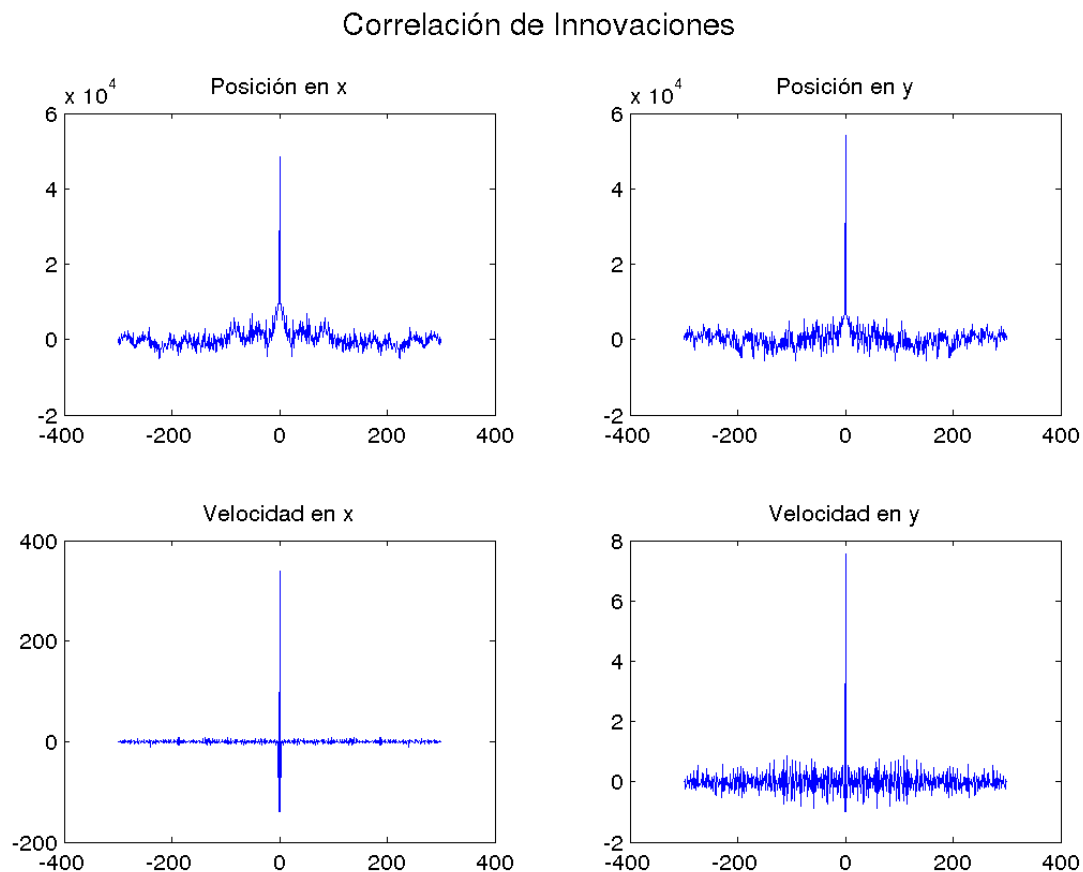


Figura 10: Autocorrelación del proceso de innovacion.

7. Ejercicio 7

Suponga que tiene un sesgo en la medición de los acelerómetros (del orden de $0,2\text{m/s}^2$ en cada eje). Explique cómo modificaría el esquema de estimación para poder estimar el sesgo de los acelerómetros.

En principio, se define nuevamente la medición de aceleración inercial como

$$\tilde{A}^b(t) = \overline{A}^b(t) + \bar{b}$$

Por lo tanto se debe reemplazar en las ecuaciones del modelo dicha aceleración real por la correspondiente resta entre la medición y el sesgo (es decir, despejando $\overline{A}^b(t)$ de la ecuación anterior). Como puede verse en el modelo del sistema, las únicas ecuaciones que están afectadas por esta aceleración son la 1) y la 2) (ecs. 16 y 17).

En esencia, lo que cambia es la matriz M_a (ec. 9), que hasta el momento era constante y ahora depende del sesgo:

$$M'_a = \begin{bmatrix} \tilde{a}_x^b - b_x & \tilde{a}_y^b - b_y \\ \tilde{a}_y^b - b_y & -\tilde{a}_x^b + b_x \end{bmatrix}$$

Y la función no-lineal está dada por:

$$f_2(t_k, \bar{X}) = M'_a(t_k, \bar{b}) \cdot \bar{Z}(t_k)$$

Considerando al sesgo como una nueva variable de estado, se tiene entonces que las ecuaciones 1) y 2) del modelo resultan no-lineales, dado que implican la multiplicación de los sesgos por las variables z_1 y z_2 .

Para resolver esta situación, se acude a la aproximación de Taylor de orden 1 de dichas ecuaciones alrededor del instante anterior, y para escribir el nuevo modelo a estimar se reemplaza la matriz A por el jacobiano de las 3 ecuaciones. Las matrices resultantes son las siguientes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P}^e(t_{k+1}) \\ \overline{V}^e(t_{k+1}) \\ \overline{Z}(t_{k+1}) \\ \bar{b}(t_{k+1}) \end{bmatrix}}_{\triangleq \bar{X}(t_{k+1})} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & I_2 T & M f_z \frac{T^2}{2} & M f_b \frac{T^2}{2} \\ 0_2 & I_2 & M f_z T & M f_b T \\ 0_2 & 0_2 & M_{z2} & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{P}^e(t_k) \\ \overline{V}^e(t_k) \\ \overline{Z}(t_k) \\ \bar{b}(t_k) \end{bmatrix}}_{=\bar{X}(t_k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\xi}_P(t_k) \\ \overline{\xi}_V(t_k) \\ \overline{\xi}_Z(t_k) \\ \bar{0} \end{bmatrix}}_{=\bar{\xi}(t_k)} \quad (24)$$

$$\bar{Y}(t_k) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq C} \cdot \bar{X}(t_k) + \bar{\eta} \quad (25)$$

$$B = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0_{2 \times 6} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma \triangleq \begin{cases} \bar{X}(t_{k+1}) = A \cdot \bar{X}(t_k) + B \cdot \bar{\xi} \\ \bar{Y}(t_k) = C \cdot \bar{X}(t_k) + \bar{\eta} \end{cases} \quad (26)$$

donde $M f_z$ y $M f_b$ son las derivadas de f_2 respecto de Z y de b evaluadas en el instante anterior (t_k):

$$M f_z \triangleq \frac{df_2}{dZ} \Big|_{X(t_k)} = M'_a \Big|_{t_k}$$

$$M f_b \triangleq \frac{df_2}{db} \Big|_{X(t_k)} = \begin{bmatrix} -z_1(t_k) & -z_2(t_k) \\ z_2(t_k) & -z_1(t_k) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, las matrices de correlación Q y R se mantienen iguales.

Es importante destacar, que en este caso la tolerancia en las condiciones iniciales es mucho menor. Es posible que si dicho punto de partida se encuentra demasiado alejado del valor real, el algoritmo diverja.

Asimismo, cabe destacar que el paso de predicción en vez de realizarse con la matriz A , debe hacerse con la función no-lineal f_2 .

Por otro lado, se debe tener en cuenta que al calcular la matriz de observabilidad del sistema resultante (de 8×8), el rango da 6, con lo cual los sesgos no son observables.

Con estas expresiones se corrió el algoritmo agregando un sesgo constante de 0.1 en el eje 'x' y -0.3 en el eje 'y', y partiendo de condiciones iniciales muy favorables, obteniendo los siguientes resultados:

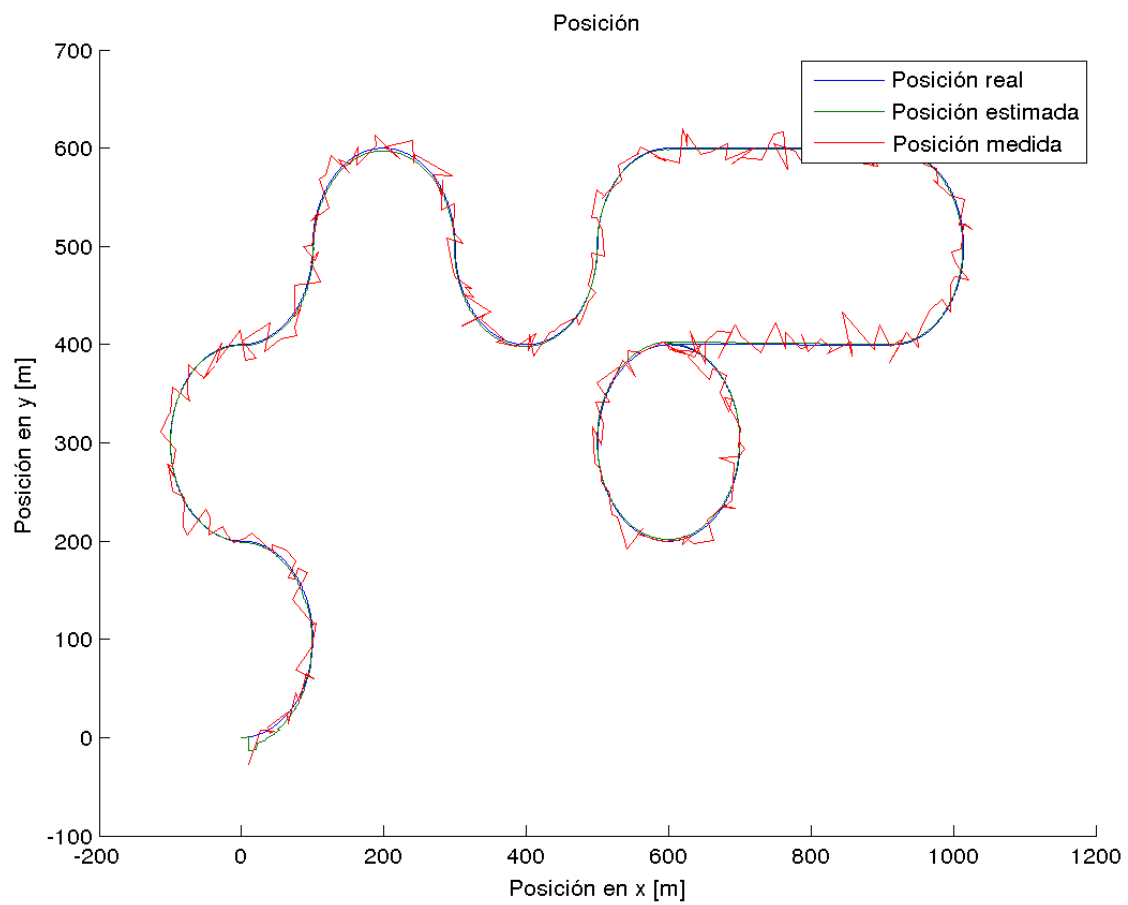


Figura 11: Trayectoria.

En la siguiente figura puede verse de arriba hacia abajo los errores en: Posición, Velocidad y Ángulo de orientación.

Realización del error

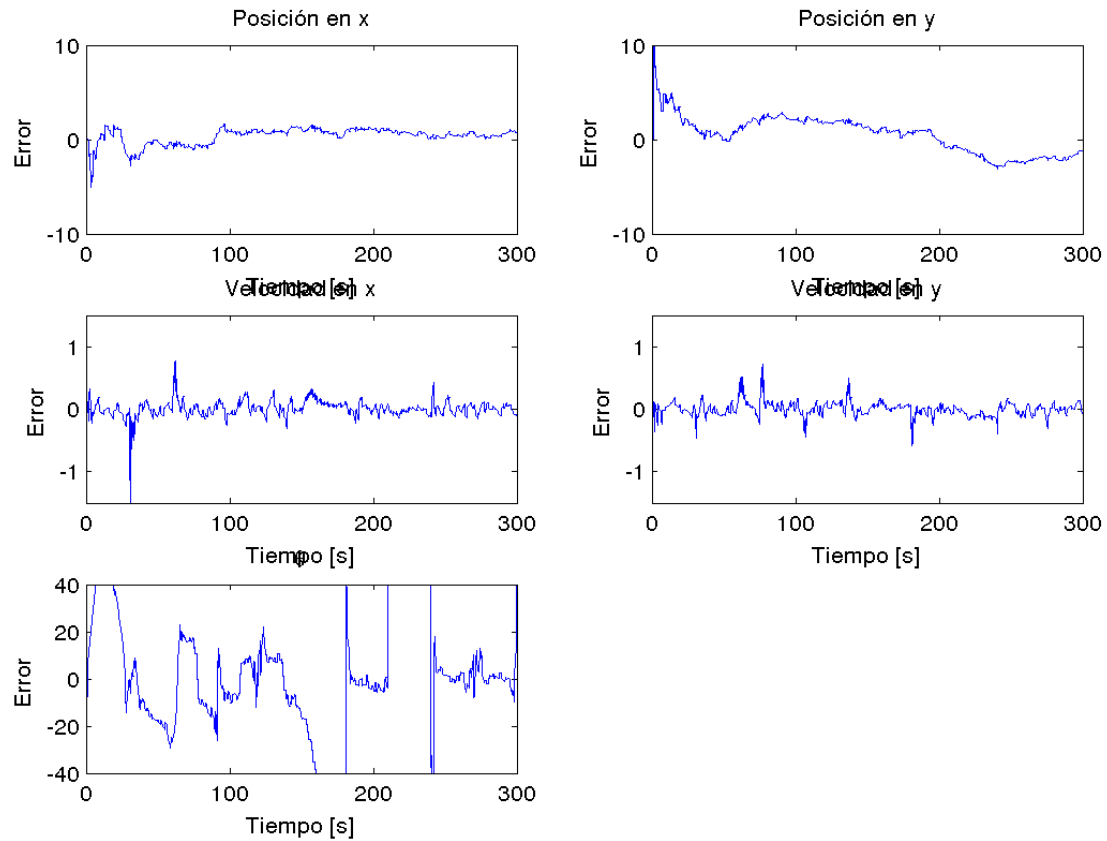


Figura 12: Realización del error.

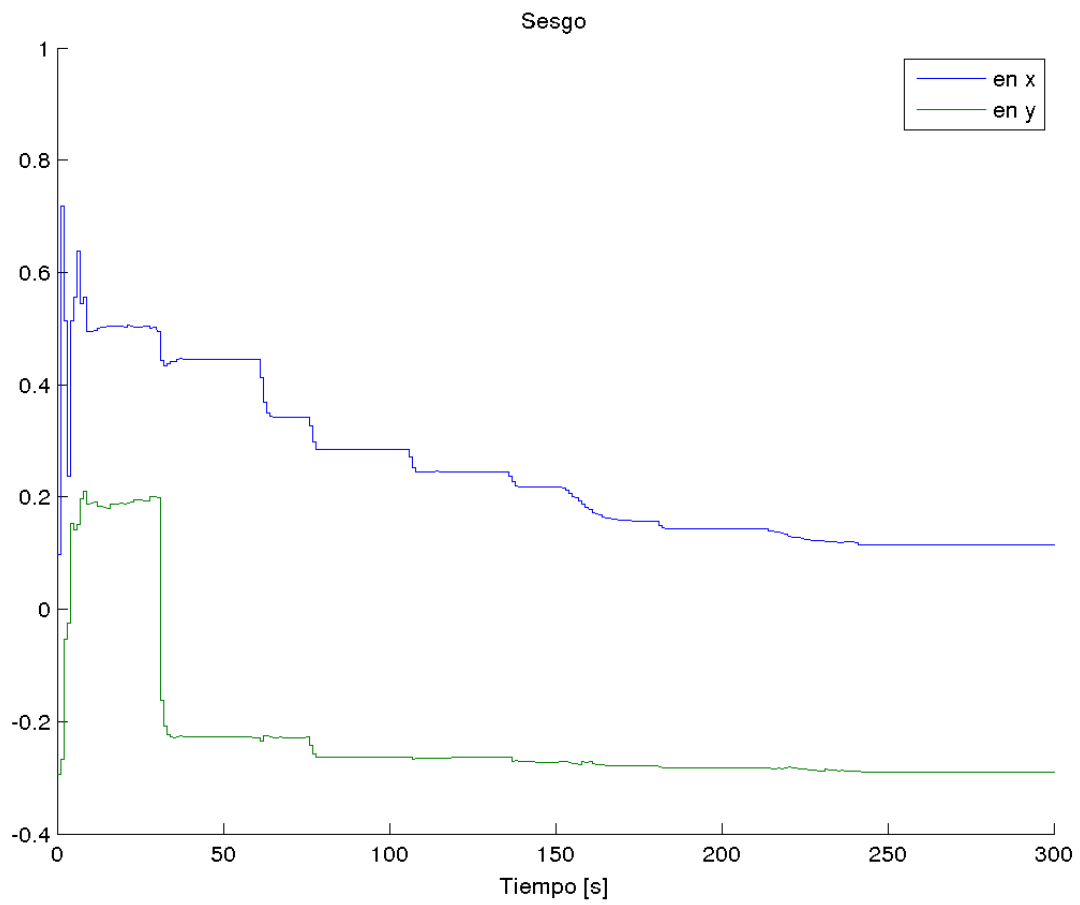


Figura 13: Estimación de los sesgos.