

Comparación de diferentes variantes del modelo Olami-Feder-Christensen para la simulación de terremotos

Juan Manuel Paez

Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUYO). Av. Bustillo 9500, 8400. Bariloche, Río Negro, Argentina.

19 de diciembre de 2021

Resumen

Se analizaron variantes del modelo de autómata celular propuesto por Olami, Feder y Christensen para la simulación de terremotos, con dos métodos de relajación distintos y con dos posibles distribuciones para los valores umbrales que pueden alcanzar los sitios de red antes de relajarse. Sólo con una de las distribuciones y una de las dos relajaciones se reprodujo la ley de Gutenberg-Richter observada en los terremotos reales.

1. Introducción

El modelo propuesto por Olami, Feder y Christensen [1] (modelo OFC) ha tenido un rol importante en el estudio de la fenomenología de los terremotos, logrando reproducir la ley de Gutenberg-Richter que presentan los terremotos verdaderos [2]. Según esta ley empírica, el número N de terremotos con una magnitud M mayor o igual a m en una dada región y en un período tiempo viene dado por

$$\log_{10} N(M \geq m) = a - b m, \quad (1)$$

donde a y b son constantes [2]. Por otro lado, el momento sísmico S , se define como la energía liberada en un terremoto y crece exponencialmente con la magnitud,

$$\log_{10} S = c + d m, \quad (2)$$

con c y d constantes [1]. De este modo, la ley de Gutenberg-Richter en términos del momento sísmico se transforma en una ley de

potencias para el número de terremotos de momento sísmico S_0 mayor o igual a S

$$N(S_0 \geq S) \propto S^{-\tau}. \quad (3)$$

En los terremotos reales se ha observado que el exponente τ en la Ec. 3 toma valores típicamente entre 0.8 y 1.05 [1].

El modelo OFC es un modelo de autómata celular que consiste en una red bidimensional cuadrada de $L \times L$ sitios a los que se asigna una determinada fuerza de fricción F_i (variable real), donde el subíndice i refiere a la correspondiente posición en la red. Esta fuerza F_i se asocia a la fricción entre porciones de las placas tectónicas y el sustrato. Además, en el modelo OFC se considera una fuerza crítica F_c , tal que si $F_i > F_c$ el sitio se vuelve inestable y se descarga, disminuyendo su valor F_i y aumentando el de sus primeros cuatro vecinos en la red.

Inicialmente, los valores de F_i se distribuyen uniformemente entre 0 y F_c . La evolución

del sistema se divide en dos partes. En primer lugar un mecanismo lento en el que cada F_i se incrementa al mismo ritmo hasta que una de ellas alcanza el valor umbral F_c . Llegado a este punto, la evolución sigue un mecanismo rápido, considerado instantáneo, en el que no transcurre el tiempo. Durante esta etapa, el sitio que alcanzó el umbral se relaja, disminuyendo su fuerza en ΔF e incrementando la fuerza F_j de sus vecinos en $\alpha\Delta F$

$$\begin{cases} F_i \rightarrow F_i - \Delta F \\ F_j \rightarrow F_j + \alpha\Delta F \end{cases} \quad (4)$$

De esta manera, uno o más vecinos j pueden volverse inestables marcando el comienzo de una avalancha de redistribuciones de fuerza, la cual se identifica con un terremoto. Por esta razón esta ecuación se itera hasta que todos los sitios sean estables ($F_i < F_c \forall i$). Luego se vuelve a la dinámica lenta para realizar el mismo ciclo.

El momento sísmico S de cada avalancha está dado por la suma de todas las descargas ΔF involucradas y de acuerdo con la ley de Gutenberg-Richter en un rango de valores de S la cantidad de avalanchas de momento mayor o igual a S decrece según una ley de potencias dada por la Ec. 3.

Por otro lado, la conservación local de la energía implica que el aumento de las fuerzas de los vecinos del sitio inestable no puede superar la caída de la fuerza en dicho sitio. Esto impone la condición de que en una red cuadrada con cuatro primeros vecinos, α debe ser menor que $\frac{1}{4}$.

En el modelo OFC original, los sitios inestables se relajan hasta 0, es decir $\Delta F = F_i$ en la Ec. 4. Por lo tanto durante una avalancha un sitio puede volverse inestable más de una vez. Sin embargo, considerando una relajación uniforme con $\Delta F = F_c$ no es posible que un sitio de la red se vuelva inestable más de una vez en una misma avalancha, pues a lo sumo podrá recibir una fuerza $4\alpha\Delta F < \Delta F$

de sus vecinos (si los cuatro vecinos se vuelven inestables). Como inicialmente $F_i \leq F_c$ (el igual sólo si se trata del sitio que inicia la avalancha) entonces $(F_i - \Delta F + 4\alpha\Delta F) < F_c$ y el sitio no puede volver a ser inestable. Notar que en el modelo OFC original, con $\Delta F = F_i \geq F_c$, $4\alpha\Delta F$ puede ser mayor que F_c y un sitio puede volverse inestable más de una vez.

Una variante del modelo OFC, de ahora en más OFC*, propone que a cada sitio i de la red le corresponda una fuerza umbral F_i^c , tomada en forma aleatoria siguiendo una distribución gaussiana centrada en F_c y con desviación estándar σ [3]. Además, cada vez que un sitio i se vuelve inestable y se descarga, se le asigna un nuevo valor umbral F_i^c de la misma distribución gaussiana. Observar que en este modelo tanto con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) como con la relajación de las fuerzas en 1, un sitio de la red puede volverse inestable más de una vez durante una misma avalancha. En el primer caso porque, siguiendo el razonamiento ya mencionado para el OFC, F_i puede ser inicialmente mayor a F_i^c y luego puede alcanzar un valor cercano al de antes de relajarse, lo cual podría ser mayor que el nuevo F_i^c . Para la relajación en 1, nuevamente F_i no puede superar el valor de F_i^c que tenía el sitio antes de relajarse, pero ahora posee otro valor de F_i^c que podría ser menor que el anterior, por lo que sí puede volverse inestable una vez más.

En este trabajo se buscó hallar la dependencia de la distribución del momento sísmico de las avalanchas, $N(S_0 \geq S)$, en los modelos OFC y OFC* en función del valor para el parámetro α y del tamaño de la red de sitios en dos dimensiones. Además, se determinaron las diferencias entre utilizar la relajación uniforme (con $\Delta F = F_c$) o la relajación a cero ($\Delta F = F_i$) en cada modelo.

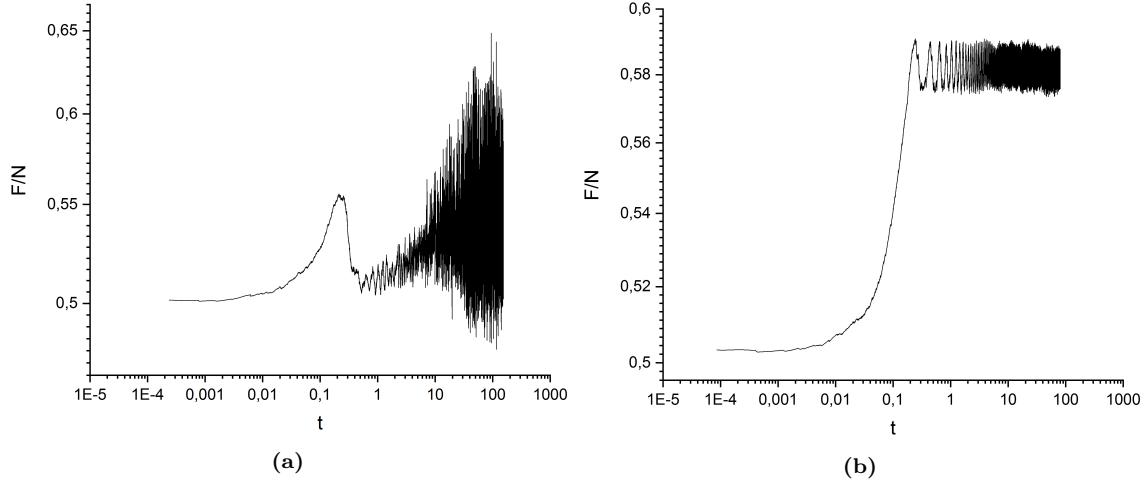


Figura 1: Evolución temporal de la fricción total acumulada en el sistema, normalizada por el número de sitios, F/N para una red de 100×100 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4).

2. Metodología

Las simulaciones computacionales fueron realizadas en C++. Para la generación de números aleatorios se utilizó la función *Ranq1* introducida por [4] y para la distribución gaussiana se implementó el método del rechazo [5].

Se consideraron redes bidimensionales de $L \times L$, con $L=25, 50, 100$ y 200 . En todos los casos se consideraron condiciones de borde abiertas, agregando una fila o columna extra en los extremos de la red con sitios que solo absorbían las descargas de sus vecinos pero nunca se descargaban.

Para el modelo OFC se tomó una fuerza umbral adimensional $F_c = 1$, mientras que para el modelo OFC* se consideró una distribución gaussiana centrada en 1 de ancho $\sigma = 0.3$.

El tiempo t durante las simulaciones se consideró como aquel que transcurre durante el mecanismo lento de la evolución, cuando las fuerzas de fricción de cada sitio se incrementan hasta que uno alcanza su umbral. En las unidades arbitrarias elegidas, un tiempo unitario se corresponde con aquel en el que la fuerza de los sitios se incrementa en una uni-

dad.

3. Resultados y discusión

En la Fig. 1 se exhiben los gráficos de la evolución temporal de la fricción total acumulada en el sistema, normalizada por el número de sitios, para una red de 100×100 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC. En la Fig. 1a se muestra el caso con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y en la Fig. 1b para el caso con la relajación en 1 ($\Delta F = F_c$ en la Ec. 4, con $F_c = 1$). En la Fig. 2 se muestra la evolución temporal del momento sísmico S de las avalanchas para los mismos casos. Para los dos tipos de relajación se observa la presencia de un estado transitorio, evidenciado en la evolución de F/N . Además en la evolución temporal de S se ve que al principio sólo se tienen avalanchas pequeñas y luego comienzan a aparecer las más grandes. Por lo tanto, para analizar los datos obtenidos se debió llegar al estado estacionario del sistema.

En la Fig. 3 se muestra la distribución del número de avalanchas de momento sísmico S_0 mayor o igual a S normalizada por la canti-

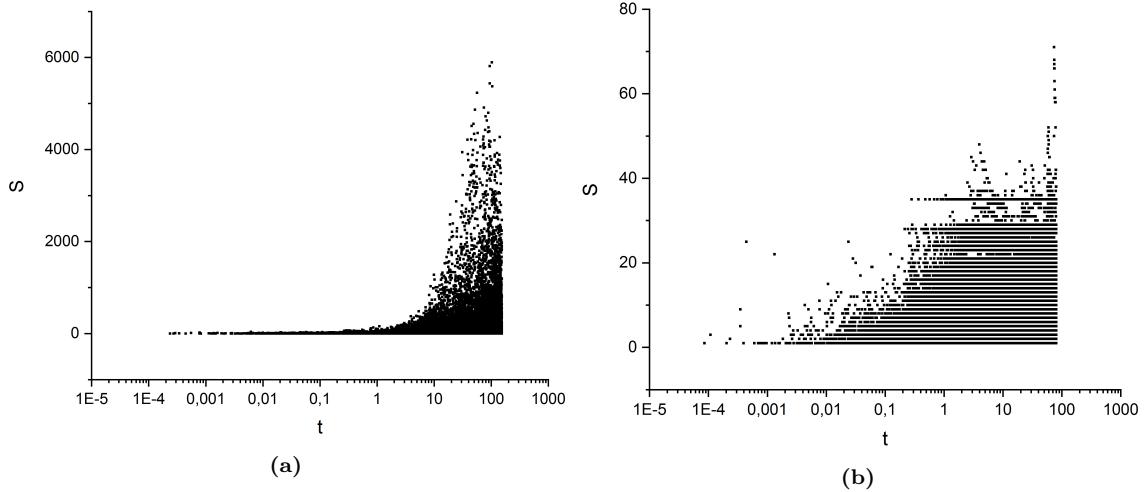


Figura 2: Evolución temporal del momento sísmico S de las avalanchas para una red de 100×100 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4).

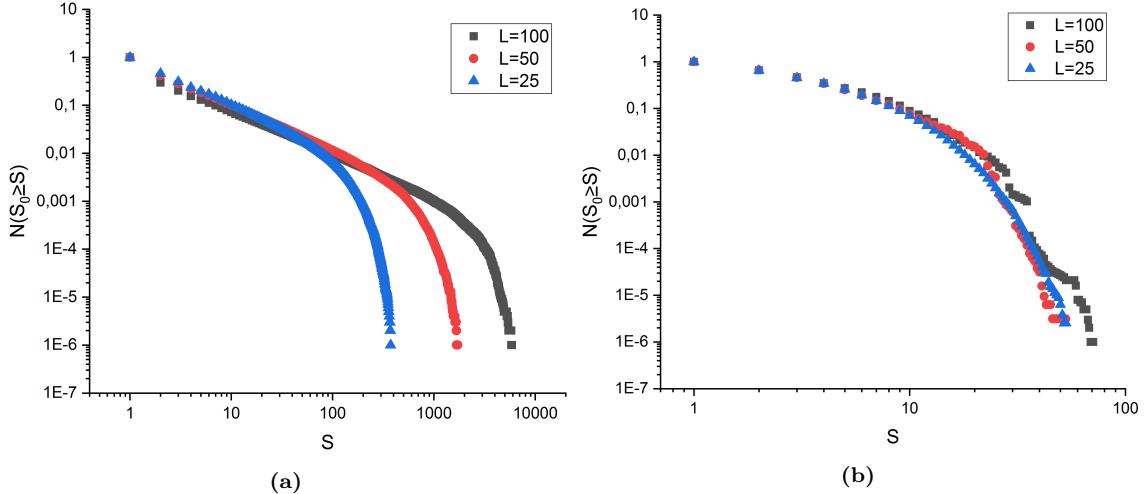


Figura 3: Distribución del número de avalanchas de momento sísmico S_0 mayor o igual a S normalizada por la cantidad total de avalanchas, $N(S_0 \geq S)$, para el modelo OFC al variar el tamaño de la red de $L \times L$ a un valor fijo de $\alpha = 0.2$ (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4). En todos los casos las simulaciones son de 1×10^6 avalanchas.

dad total de avalanchas, $N(S_0 \geq S)$, en función de S para tres sistemas de tamaños diferentes y un valor fijo $\alpha = 0.2$ con el modelo OFC. Se exhiben los resultados tanto para la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4), Fig. 3a, como para la relajación en 1 ($\Delta F = F_c$ en la Ec. 4, con $F_c = 1$), Fig. 3b.

Comparando los gráficos exhibidos en la Fig. 3 se observa que con la relajación a cero

se producen terremotos de mayor momento sísmico S , lo cual se debe a que, a diferencia de lo que sucede con la relajación en 1, en este caso los sitios pueden volverse inestables más de una vez durante una misma avalancha. Por otro lado, se advierte que en los dos casos las distribuciones están prácticamente superpuestas para los distintos tamaños de red, aunque para la relajación a cero se sepa-

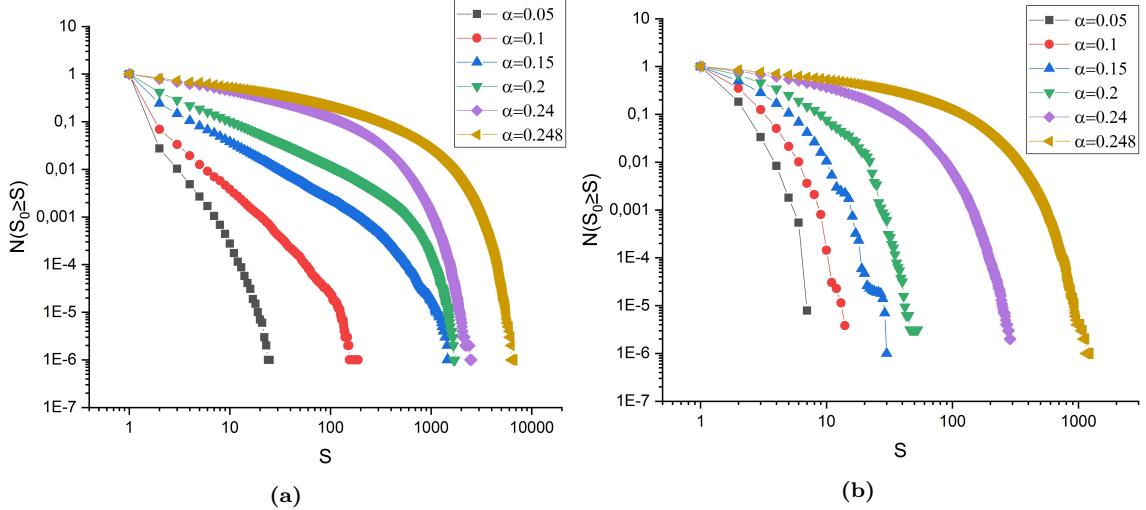


Figura 4: Distribución del número de avalanchas de momento sísmico S_0 mayor o igual a S normalizada por la cantidad total de avalanchas, $N(S_0 \geq S)$, en el modelo OFC para una red de 50×50 y distintos valores de α (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4). En todos los casos las simulaciones son de 1×10^6 avalanchas.

ran cuando llegan a los máximos valores de momento sísmico alcanzados. En este último caso, el momento sísmico máximo de las avalanchas aumenta al aumentar el tamaño de la red, mientras que para la relajación en uno, prácticamente no hay diferencias introducidas por el tamaño. También se ve que la forma de la distribución $N(S_0 \geq S)$ es diferente según el tipo de relajación y sólo en el caso de la relajación a cero se reproduce la ley de Gutenberg-Richter (Ec. 1), con S decayendo según una ley de potencias $S^{-\tau}$. Para $L = 25$ se obtuvo un valor $\tau = 1.012(8)$, para $L = 50$, $\tau = 0.937(3)$ y para $L = 100$, $\tau = 0.918(2)$. Se ve que los tres valores de τ obtenidos están en buen acuerdo con los exponentes observados para terremotos reales (de entre 0.8 y 1.05 [1]).

En la Fig. 4 se muestra la distribución $N(S_0 \geq S)$ para un tamaño de red fijo y seis valores de α en el modelo OFC para los dos tipos de relajación. Se ve que en ambos casos al aumentar α aumenta el momento sísmico máximo de las avalanchas, así como la proporción de avalanchas de más de una descarga, por lo que a diferencia de lo visto en la

Fig. 3 las distribuciones ya no están superpuestas. Esto se debe a que un valor mayor de α en la Ec. 4 implica que los sitios que se relajan aumentan en una cantidad mayor la fuerza de sus vecinos, por lo que se hace más probable que éstos se vuelvan inestables. Para el caso con la relajación de las fuerzas hasta 0 (Fig. 4a) se observa que sólo en un rango de valores de α (aproximadamente α entre 0.1 y 0.2) aparece una región lineal en la que se cumple la ley de Gutenberg-Richter (Ec. 3). También se ve que para los valores de α entre 0.15 y 0.24, el valor máximo de momento sísmico S alcanzado se mantiene casi invariante. Por otro lado para el caso con la relajación de las fuerzas en 1 (Fig. 4b), nuevamente se ve que la distribución $N(S_0 \geq S)$ no sigue una ley de potencias para ninguno de los valores de α exhibidos.

En la Fig. 5 se exhiben los gráficos de la evolución temporal de la fricción total acumulada en el sistema, normalizada por el número de sitios, para una red de 50×50 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC*. En la Fig. 5a se muestra la evolución temporal para el caso con la relajación de las fuerzas a cero

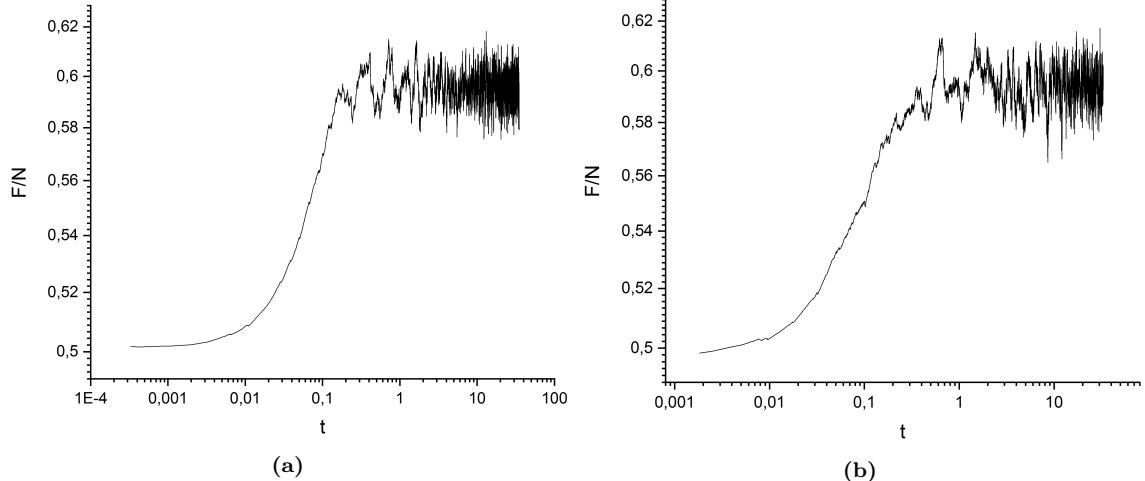


Figura 5: Evolución temporal de la fricción total acumulada en el sistema, normalizada por el número de sitios, F/N para una red de 50×50 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC* (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4). En ambos casos las simulaciones consideradas son de 1×10^5 avalanchas.

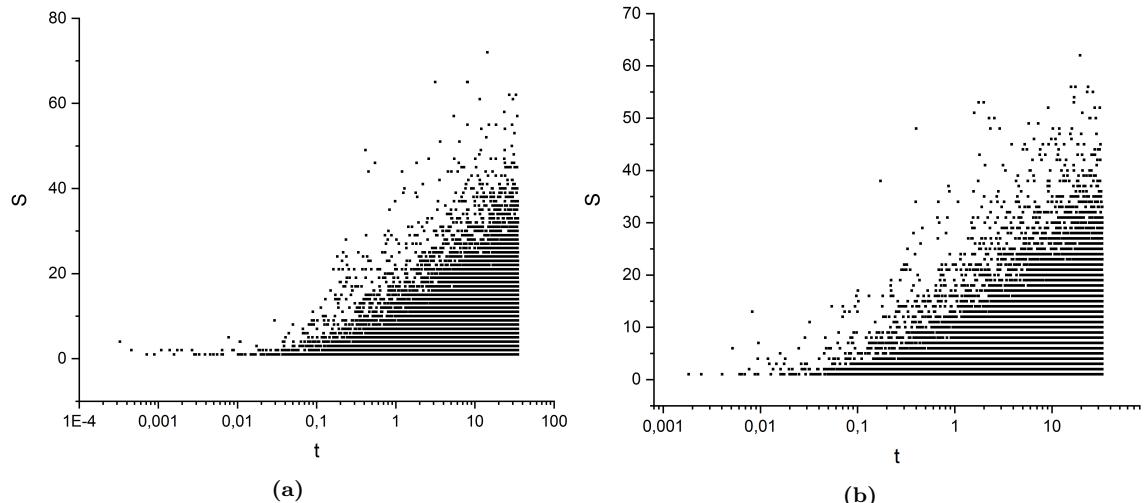


Figura 6: Evolución temporal del momento sísmico S de las avalanchas para una red de 50×50 y tomando $\alpha = 0.2$ en el modelo OFC* (a) con la relajación de las fuerzas a cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4) y (b) con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4). En ambos casos las simulaciones consideradas son de 1×10^5 avalanchas.

($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4), mientras que en la Fig. 5b se muestra el caso con la relajación en 1 ($\Delta F = F_c$ en la Ec. 4, con $F_c = 1$). En la Fig. 6 se exhibe la evolución temporal del momento sísmico S de las avalanchas para los mismos casos. Nuevamente, en la evolución de F/N se advierte la presencia de un estado transitorio, por lo que se debía esperar

que este finalizara para poder realizar las mediciones. Además en la evolución temporal de S otra vez se ve que al principio sólo se tienen avalanchas pequeñas y luego comienzan a aparecer avalanchas de momento sísmico cada vez mayor.

En la Fig. 7 se muestran las distribuciones $N(S_0 \geq S)$ correspondientes al modelo OFC*

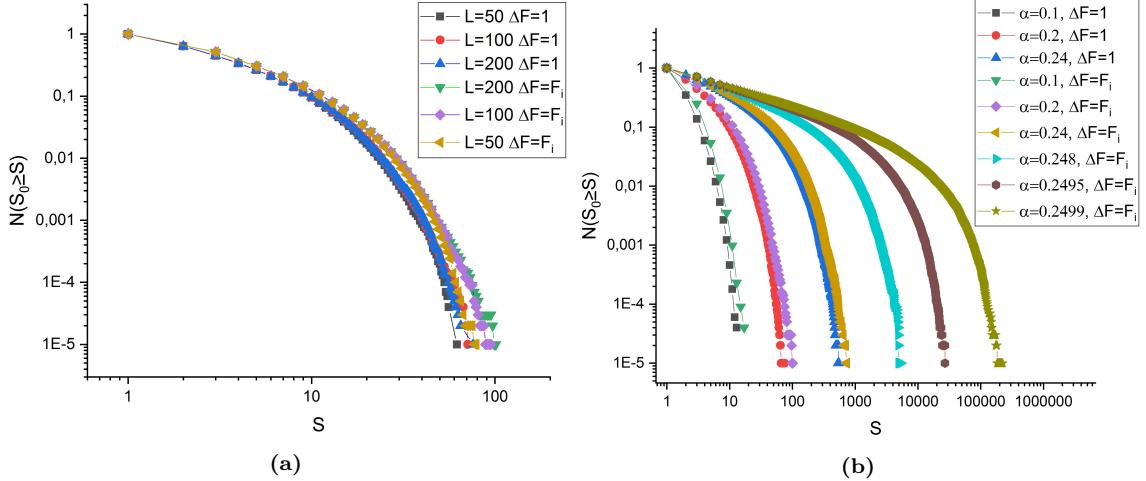


Figura 7: Distribución del número de avalanchas de momento sísmico S_0 mayor o igual a S normalizada por la cantidad total de avalanchas, $N(S_0 \geq S)$, en el modelo OFC* (a) Con $\alpha = 0.2$ y variando el tamaño de la red de $L \times L$ (b) Para una red de 200×200 y variando el α . En todos los casos, se consideraron simulaciones de 1×10^5 avalanchas. Se exhiben los resultados obtenidos con la relajación de las fuerzas en 1 ($\Delta F = F_c = 1$ en la Ec. 4) y con la relajación de las fuerzas hasta cero ($\Delta F = F_i$ en la Ec. 4).

variando el tamaño del sistema con un α fijo en 0.2 (Fig. 7a) y variando α para un tamaño fijo en $L = 200$ (Fig. 7b). Se exhiben los resultados obtenidos para los dos tipos de relajaciones. Se ve que las distribuciones son similares con las dos relajaciones, presentando la misma forma y el mismo comportamiento al variar L o α . Esto puede verse como una consecuencia de que, a diferencia de lo que sucede en el modelo OFC, en el OFC* los sitios pueden volverse inestables más de una vez durante una misma avalancha para los dos tipos de relajación. Por lo tanto este modelo sería independiente de los detalles microscópicos de la dinámica del sistema, como en este caso lo es el tipo de relajación elegida.

Por otro lado, en la Fig. 7 se observa que la distribución no varía al cambiar el tamaño del sistema, mientras que al variar el valor de α aumenta la proporción de avalanchas de mayor momento sísmico y el momento sísmico máximo alcanzado, por lo que las distribuciones correspondientes a distintos valores de α no se superponen. Nuevamente, la aparición de más avalanchas con mayor momento sísmico al aumentar α se debe a que los si-

tios que se relajan aumentan en una cantidad mayor la fuerza de sus vecinos, por lo que se hace más probable que éstos se vuelvan inestables. Sin embargo en este caso no se observa una ley de potencias para la distribución $N(S_0 \geq S)$ para ninguno de los valores de α o L y ninguno de los dos tipos de relajación. Esto fue solucionado por Jagla [3] introduciendo un mecanismo distinto de relajación estructural.

4. Conclusiones

Se realizaron simulaciones computacionales del modelo OFC para la representación de la fenomenología de los terremotos utilizando distintos métodos de relajación del sistema. Además se analizaron las consecuencias de elegir umbrales distintos y dinámicos para cada sitio de la red propuesta en el modelo, siguiendo una distribución gaussiana alrededor de un valor central.

Se observó que el modelo OFC original es sensible al tipo de relajación elegida, lo cual no sucede con la variante con los distintos um-

brales para cada sitio. Además se encontró que en la versión original, eligiendo un valor fijo para la relajación de los sitios de red, y en la versión con los distintos umbrales, no se reproduce la ley de Gutenberg-Richter observada en los terremotos reales, la cual sí se obtiene con una relajación dependiente del estado del sitio en cuestión en la versión original del modelo OFC para ciertos valores de los parámetros del modelo.

Referencias

- [1] Olami, Z., Feder, H. J. S., & Christensen, K. (1992). *Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes*. Physical Review Letters, 68(8), 1244–1247.
- [2] Crampin, S., & Gao, Y. (2015). *The physics underlying Gutenberg-Richter in the earth and in the moon*. Journal of Earth Science, 26(1), 134–139.
- [3] Jagla, E. A. (2010). *Realistic spatial and temporal earthquake distributions in a modified Olami-Feder-Christensen model*. Physical Review E, 81(4).
- [4] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes, the art of scientific computing*. (Third Ed.) Cambridge University Press, p. 351.
- [5] Abramson, G. (2020). *Física computacional - Notas de clase*. Versión 25 de octubre de 2021. Instituto Balseiro, UNCUYO - CNEA. p. 82.