Olami, Feder y Christensen (OFC) desarrollaron un autómata celular para simular la dinámica sísmica de las placas tectónicas. Su mecánica se entiende a partir de un sistema de bloques unidos por resortes de constante k_0, sujetos mediante resortes de constante k_1 a una carga externa que se mueve a una velocidad constante V (Fig. 1).

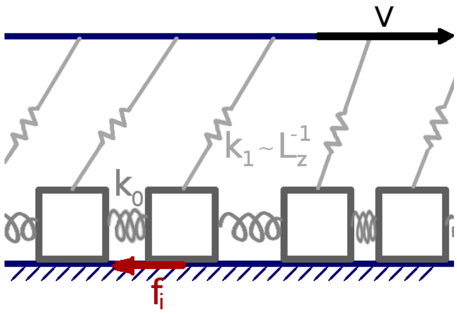

Figura 1 Modelo de bloques y resortes.

El autómata OFC toma como variables fundamentales la fuerza de fricción entre cada bloque y el sustrato, f_i. El esquema utilizado se divide en dos dinámicas diferentes:

Dinámica lenta: Se aplica una carga externa cuasiestática de manera que todos los valores de f_i crecen con el mismo ritmo constante en el tiempo (Fig. 2, izquierda):

$$\frac{df_i}{dt} = k_1 V, \quad \forall i. \tag{1}$$

En esta situación el sistema avanza hasta que en algún sitio i, la fuerza f_i alcanza su umbral f_i^c (máximo valor local de fricción estática). Los sitios cuyas fuerzas superen o igualen a su umbral serán sitios inestables y se los denotará i_c.

Numéricamente se implementa identificando el próximo primer sitio inestable, i_c, que es aquel cuya diferencia $\epsilon_i = f_i^c - f_i$ sea mínima ($\epsilon_{min} = \epsilon_{i_c}$). Una vez identificado el sitio que se volverá inestable (llamado epicentro), todas las fuerzas avanzan una cantidad ϵ_{min} en un intervalo de tiempo $k_1 V \epsilon_{min}$.

Dinámica rápida: Tras llegar al umbral f_i^c, el sitio inestable se relaja disminuyendo el valor de su fuerza en Δf e incrementando las fuerzas sobre sus primeros vecinos, j, en un factor $\alpha \Delta f$ (Fig. 2, derecha):

$$f_i \geq f_i^c \Rightarrow \begin{cases} f_i \to f_i - \Delta f, \\ f_j \to f_j + \alpha \Delta f. \end{cases} \tag{2}$$

De esta manera, uno o más vecinos j pueden volverse inestables marcando el comienzo de un "terremoto", en forma de avalancha de redistribuciones de fuerza.

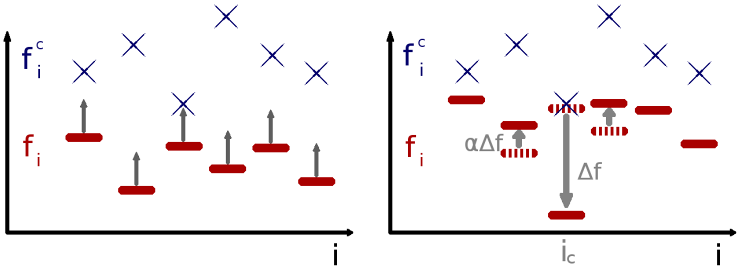

Figura 2 Izquierda: Dinámica lenta; se muestra para cada sitio i el valor de la fuerza de fricción f_i y su correspondiente umbral f_i^c. Las flechas indican un aumento uniforme de todas las fuerzas debido a la carga externa. Derecha: Dinámica rápida; al alcanzar su umbral, el sitio i_c se vuelve inestable disminuyendo el valor de su fuerza en Δf y aumentando el valor de la fuerza de los vecinos en $\alpha\Delta f$.

Por esta razón esta ecuación se itera hasta que todos los sitios sean estables ($f_i < f_i^c \ \forall i$). Vale la pena notar que un sitio puede volverse inestable más de una vez durante el terremoto. El *momento sísmico* de cada avalancha se define como la suma de todas las descargas involucradas: $S = \sum_{i_c} \Delta f$. En un rango de valores de S, la cantidad de avalanchas de momento S decae según una ley de potencias $S^{-\tau}$, reproduciendo la ley de Gutenberg-Richter que presentan los terremotos verdaderos.

Implemente el autómata OFC original en dos dimensiones, con condiciones abiertas de contorno. Considere que los umbrales son uniformes y adimensionales, $f_i^c = 1 \ \forall i$ y la caída de las fuerzas $\Delta f = 1$. Calcule la distribución de energías de las avalanchas $N(S)$ para tres sistemas de tamaño diferente y un valor fijo de α (cf. Fig. 6 de Ref. [1]) y viceversa: fije un tamaño del sistema y calcule $N(S)$ para tres valores de α. Observe en qué situaciones cambia la pendiente de $N(S)$ en escala logarítmica y en cuáles cambia el tamaño máximo de los terremotos. Elija algunos casos para graficar la secuencia temporal de S y de la fricción total del sistema, $\sum f_i$, donde se aprecie el transitorio de la dinámica. Fijando el tamaño del sistema en el más grande posible compare los resultados anteriores con el autómata OFC*, el cual considera que los umbrales son aleatorios con una distribución gaussiana centrada en 1 y ancho 0.3 (cf. Fig. 1 en Ref. [2]).

Recomendaciones numéricas:

- La conservación local de la energía implica que el aumento de las fuerzas de los vecinos del sitio inestable no puede superar la caída de la fuerza en dicho sitio. Esto impone la condición de que en una red cuadrada con cuatro primeros vecinos, α debe ser menor que $1/4$.

- Para simular condiciones de contorno abiertas considere un borde de sitios que nunca se descargan, pero absorben las descargas de los sitios vecinos.

Bibliografía

[1] P Grassberger, *Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system*. Phys. Rev. E 49:2436–2444 (1994).

[2] E Jagla, *Realistic spatial and temporal earthquake distributions in a modified Olami-Feder-Christensen model*. Phys. Rev. E 81:046117 (2010).