SOLUCIÓN: Seguimiento 1 (Prueba escrita) - Unidad 1 - Computación y estructuras discretas I

Técnicas de demostración

1. Use las reglas de inferencia para demostrar que las hipótesis

> "Si no llueve o si no hay niebla, entonces la carrera de botes se llevará a cabo y la demostración de los salvavidas se realizará", "Si la carrera de botes se lleva a cabo, entonces el trofeo será entregado", y "El trofeo no fue entregado"

implican la conclusión "Llovió".

Sea r: "Llueve", f: "Hay niebla", s: "La carrera de botes se llevará a cabo", l: "La demostración de los salvavidas se realizará", t: "El trofeo será entregado".
Entonces las premisas son:

$$(\neg r \vee \neg f) \rightarrow (s \wedge l), \quad s \rightarrow t, \quad \neg t$$

y queremos concluir r.
Demostración

Paso	**Enunciado**	**Razón**
1.	$\neg t$	Hipótesis
2.	$s \rightarrow t$	Hipótesis
3.	$\neg s$	Modus tollens usando (1) y (2)
4.	$(\neg r \vee \neg f) \rightarrow (s \wedge l)$	Hipótesis
5.	$\neg(s \wedge l) \rightarrow \neg(\neg r \vee \neg f)$	Contrapositiva de (4)
6.	$(\neg s \vee \neg l) \rightarrow (r \wedge f)$	Ley de De Morgan y doble negación
7.	$\neg s \vee \neg l$	Adición, usando (3)
8.	$r \wedge f$	Modus ponens usando (6) y (7)
9.	r	Simplificación usando (8)

2. Demuestre que la suma de dos números enteros impares es par.

Demostración directa: Un entero impar es de la forma $2n+1$, donde n es un entero. Sean los dos enteros impares $2a+1$ y $2b+1$. Entonces

$$(2a+1)+(2b+1) = 2(a+b+1),$$

que es par porque es 2 veces un entero.

3. Demuestre que si m y n son números enteros y mn es par, entonces m es par o n es par.

Demostración indirecta: Demostramos la contraposición: *Si m es impar y n es impar, entonces mn es impar.* Si m y n son impares, entonces $m = 2a+1$ y $n = 2b+1$ para algunos enteros a, b. Su producto es

$$mn = (2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1,$$

que es de la forma $2k+1$ (con $k = 2ab + a + b$), por lo tanto mn es impar. Así, por contrapositiva, si mn es par entonces m es par o n es par.

4. Evalúe el valor de verdad (Verdadero o Falso) de las siguientes proposiciones y argumente brevemente, si el dominio es el conjunto de todos los enteros:

a) $\forall n\,(n + 1 > n)$

b) $\exists n\,(2n = 3n)$

c) $\exists n\,(n = -n)$

d) $\forall n\,(3n \leq 4n)$

a) **Verdadero**. Para cualquier entero n, sumar 1 aumenta su valor, así que $n + 1 > n$.

b) **Verdadero**. Tome $n = 0$: entonces $2n = 0$ y $3n = 0$, por lo que $2n = 3n$.

c) **Verdadero**. Tome $n = 0$: entonces $n = -n$ porque $0 = -0$.

d) **Falso**. La proposición $3n \leq 4n$ es equivalente a $0 \leq n$ (restando $3n$), lo cual falla para enteros negativos (por ejemplo, $n = -1$ da $-3 \leq -4$, que es falso).