Computación y estructuras discretas I

Unidad 1: Métodos de demostración

Juan Marcos Caicedo Mejía – jmcaicedo@icesi.edu.co

Departamento de Computación y Sistemas Inteligentes
Facultad Barberi de Ingeniería, Diseño y Ciencias Aplicadas
Universidad ICESI
Material adaptado del material original del profesor Oscar Bedoya

2026

Tabla de contenido

Contenido

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. Si es viernes entonces hay carullazo
2. Hoy es viernes

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. Si es viernes entonces hay carullazo
2. Hoy es viernes

$\therefore$ Hay carullazo

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. Si es viernes entonces hay carullazo
2. Hoy es viernes
3. Hay carullazo, **modus ponens(1,2)**

Modus ponens

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. El carro es rojo o es negro

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

$\therefore$ El carro es negro, **silogismo disyuntivo(1,2)**

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto.

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

$\therefore$ El carro es negro, **silogismo disyuntivo(1,2)**

Silogismo disyuntivo

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Reglas de inferencia

Regla	Nombre	Regla	Nombre
$\dfrac{p \land q}{\therefore p}$	Simplificación	$\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{\therefore q}$	Modus ponens
$\dfrac{\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \end{array}}{\therefore q}$	Silogismo disyuntivo	$\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{\therefore p \to r}$	Silogismo hipotético
$\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$	Modus tollens	$\dfrac{p}{\therefore p \lor q}$	Adición

Reglas de inferencia

Aplicar las siguientes reglas:

- **Simplificación** sobre

  $1. \neg q \wedge \neg t$

- **Silogismo disyuntivo** sobre

  $1. t \vee \neg p$

  $2. p$

- **Modus tollens** sobre

  $1. \neg q \rightarrow \neg t$

  $2. t$

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow p$
3. $\neg r \rightarrow s$
4. $s \rightarrow t$

- Demuestre que t es cierto

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \to p$
3. $\neg r \to s$
4. $s \to t$
5. $\neg p$, simplificación(1)
6. $\neg r$, modus tollens(2,5)
7. s, modus ponens(3,6)
8. t, modus ponens(4,7)

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \to q$
2. $\neg p \to r$
3. $r \to s$

- Demuestre que $\neg p \to q$ es cierto

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \to q$
2. $\neg p \to r$
3. $r \to s$
4. $\neg p \to s$, silogismo hipotético(2,3)
5. $\neg p \to q$, silogismo hipotético(4,1)

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \to \neg q$
2. $\neg r$
3. $\neg p \to s$
4. $\neg q \to r$

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \to \neg q$
2. $\neg r$
3. $\neg p \to s$
4. $\neg q \to r$
5. q, modus tollens(2,4)
6. $\neg p$, modus tollens(1,5)
7. s, modus ponens(3,6)

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \vee \neg q$
2. $\neg p \wedge r$
3. $\neg q \rightarrow \neg s$
4. $s \vee t$

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \vee \neg q$
2. $\neg p \wedge r$
3. $\neg q \rightarrow \neg s$
4. $s \vee t$
5. $\neg p$, simplificación(2)
6. $\neg q$, silogismo disyuntivo(1,5)
7. $\neg s$, modus ponens(3,6)
8. t, silogismo disyuntivo(4,7)

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $u \vee w$
2. $p \wedge \neg q$
3. $t \rightarrow q$
4. $\neg w \vee s$
5. $u \rightarrow t$

Reglas de inferencia

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $u \vee w$
2. $p \wedge \neg q$
3. $t \rightarrow q$
4. $\neg w \vee s$
5. $u \rightarrow t$
6. $\neg q$, simplificación(2)
7. $\neg t$, modus tollens(3,6)
8. $\neg u$, modus tollens(5,7)
9. w, silogismo disyuntivo(1,8)
10. s, silogismo disyuntivo(4,9)

Contenido

Demostración directa

- Se parte de la hipótesis y se intenta llegar a la conclusión

Demostración directa

- **Demuestre que si n y m son impares, la suma es par**

Demostración directa

- **Demuestre que si n y m son impares, la suma es par**
- Si n y m son números impares, se pueden expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$
$$m = 2 \cdot k_2 + 1$$

- La suma $n + m$ será:

$$\begin{aligned} n + m &= (2 \cdot k_1 + 1) + (2 \cdot k_2 + 1) \\ &= 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \\ &= 2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) \\ &= 2 \cdot k_3 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $n + m$ debe ser un número par

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces $3n + 2$ es impar**

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces $3n + 2$ es impar**
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$

- Al calcular $3n + 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2 \cdot k_1 + 1) + 2 \\ &= 6 \cdot k_1 + 3 + 2 \\ &= 6 \cdot k_1 + 4 + 1 \\ &= 2(3 \cdot k_1 + 2) + 1 \\ &= 2 \cdot k_2 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $3n + 2$ debe ser un número impar

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar**

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar**
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2 \cdot k_1 + 1)^2 \\ &= (2 \cdot k_1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot k_1 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 4 \cdot k_1^2 + 4 \cdot k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 \\ &= 2 \cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^2 debe ser un número impar

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces $n^3 + 5$ es par**

Demostración directa

- **Demuestre que si n es impar, entonces $n^3 + 5$ es par**
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$

- Al calcular $n^3 + 5$ se tiene:

$$\begin{aligned} n^3 &= (2 \cdot k_1 + 1)^3 + 5 \\ &= (2 \cdot k_1)^3 + 3 \cdot (2k_1)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2k_1 \cdot 1^2 + 1^3 + 5 \\ &= 8 \cdot k_1^3 + 12 \cdot k_1^2 + 6 \cdot k_1 + 6 \\ &= 2(4 \cdot k_1^3 + 6 \cdot k_1^2 + 3 \cdot k_1 + 3) \\ &= 2 \cdot k_2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $n^3 + 5$ debe ser un número par

Demostración directa

- **Demuestre que si n es par y m es impar, entonces $m - 2n$ es impar**

Demostración directa

- **Demuestre que si n es par y m es impar, entonces $m - 2n$ es impar**
- Si n es par y m es impar, se pueden expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1$$
$$m = 2 \cdot k_2 + 1$$

- Al calcular $m - 2n$ se tiene:

$$\begin{aligned} m - 2n &= (2 \cdot k_2 + 1) - 2(2 \cdot k_1) \\ &= 2 \cdot k_2 + 1 - 4k_1 \\ &= 2(k_2 - 2 \cdot k_1) + 1 \\ &= 2 \cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $m - 2n$ debe ser un número impar

Demostración directa

- **Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2$ es impar**

Demostración directa

- **Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2$ es impar**
- Si m es impar y n es par, se pueden expresar de la forma:

$$m = 2 \cdot k_1 + 1$$
$$n = 2 \cdot k_2$$

- Al calcular $m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2 &= (2 \cdot k_1 + 1)^2 + 2(2 \cdot k_1 + 1)(2 \cdot k_2) + (2 \cdot k_2)^2 \\ &= 4 \cdot k_1^2 + 4 \cdot k_1 + 1 + 8 \cdot k_1 \cdot k_2 + 4 \cdot k_2 + 4 \cdot k_2^2 \\ &= 2(2 \cdot k_1^2 + 2 \cdot k_1 + 4 \cdot k_1 \cdot k_2 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_2^2) + 1 \\ &= 2 \cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2$ debe ser un número impar

Contenido

Demostración indirecta

- Utiliza la contrapositiva de $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$
- Toma como hipótesis $\neg q$ e intenta llegar a la conclusión $\neg p$

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar**

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar**
- Se demuestra que "si n es par, entonces $3n + 2$ es par"

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar**
- Se demuestra que "si n es par, entonces $3n + 2$ es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1$$

- Al calcular $3n + 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2 \cdot k_1) + 2 \\ &= 6 \cdot k_1 + 2 \\ &= 2(3 \cdot k_1 + 1) \\ &= 2 \cdot k_2, \text{ es decir, } 3n + 2 \text{ es par} \end{aligned}$$

Demostración indirecta

- **Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par**

Demostración indirecta

- **Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par**
- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"

Demostración indirecta

- **Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par**
- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2 \cdot k_1 + 1)^2 \\ &= (2 \cdot k_1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot k_1 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 4 \cdot k_1^2 + 4 \cdot k_1 + 1 \\ &= 4(k_1^2 + k_1) + 1 \\ &= 4 \cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } n^2 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $7n - 4$ es par, entonces n es par**

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $7n - 4$ es par, entonces n es par**
- Se demuestra que "si n es impar, entonces $7n - 4$ es impar"

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $7n - 4$ es par, entonces n es par**
- Se demuestra que "si n es impar, entonces $7n - 4$ es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1 + 1$$

- Al calcular $7n - 4$ se tiene:

$$\begin{aligned} 7n - 4 &= 7(2 \cdot k_1 + 1) - 4 \\ &= 14 \cdot k_1 + 7 - 4 \\ &= 14 \cdot k_1 + 3 \\ &= 14 \cdot k_1 + 2 + 1 \\ &= 2(7 \cdot k_1 + 1) + 1 \\ &= 2 \cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } 7n - 4 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $5n - 6$ es impar, entonces n es impar**

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $5n - 6$ es impar, entonces n es impar**
- Se demuestra que "si n es par, entonces $5n - 6$ es par"

Demostración indirecta

- **Demuestre que si $5n - 6$ es impar, entonces n es impar**
- Se demuestra que "si n es par, entonces $5n - 6$ es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n = 2 \cdot k_1$$

- Al calcular $5n - 6$ se tiene:

$$\begin{aligned} 5n - 6 &= 5(2 \cdot k_1) - 6 \\ &= 10 \cdot k_1 - 6 \\ &= 2(5 \cdot k_1 - 3) \\ &= 2 \cdot k_2, \text{ es decir, } 5n - 6 \text{ es par} \end{aligned}$$

Contenido

Demostración por contraejemplo

- Se muestra un caso donde no se cumple una expresión cuantificada universalmente

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
  - 2 es un contraejemplo ya que es par y primo

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
  - 2 es un contraejemplo ya que es par y primo
- Para cada número primo n, se cumple que $n + 2$ es primo

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
  - 2 es un contraejemplo ya que es par y primo
- Para cada número primo *n*, se cumple que $n + 2$ es primo
  - $n = 7$ es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
  - 2 es un contraejemplo ya que es par y primo
- Para cada número primo n, se cumple que $n + 2$ es primo
  - $n = 7$ es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no
- $n^2 + n + 41$ es un número primo para todos los enteros no negativos n

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
  - 2 es un contraejemplo ya que es par y primo
- Para cada número primo n, se cumple que $n + 2$ es primo
  - $n = 7$ es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no
- $n^2 + n + 41$ es un número primo para todos los enteros no negativos n
  - $n = 40$ es un contraejemplo ya que

$$40^2 + 40 + 41 = 1681$$

  no es primo (es divisible entre 41)

Demostración por contraejemplo

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que $n + 2$ es primo
- $n^2 + n + 41$ es un número primo para todos los enteros no negativos n
- $\forall x \; x^2 \geq x$
- $\forall x \forall y \; (x + y = x - y)$
- $\forall x \forall y \; ((x > 0 \land y > 0) \to x - y > 0)$

Contenido

Ejercicios

1) Demuestre q a partir de las siguientes sentencias:

1. $p \vee \neg t$
2. $\neg s \vee w$
3. $t \wedge \neg r$
4. $p \rightarrow \neg w$
5. $\neg q \rightarrow s$

2) Demuestre de forma directa que si n y m son impares, entonces

$$\frac{n^2 + m^2}{2}$$

es impar.

Ejercicios

3) Demuestre de forma indirecta que si $n^2 + 2m$ es par, entonces n y m son pares.

4) Demuestre por contradicción que la siguiente afirmación no es correcta:

"$2^n + 1$ es un número primo para todos los enteros no negativos n"