Universidad de la República
Facultad de Ingeniería

Teoría y Algoritmia de Optimización

Año 2023

Entregable 3

JUAN VARELA

Autor:

· Juan Manuel Varela

Docentes:
Ignacio Ramírez
Matías Valdes

23 de octubre de 2023

i) He leído y estoy de acuerdo con las Instrucciones especificadas en la carátula obligatorio. ii) He resuelto por mi propia cuenta los ejercicios, sin recurrir a informes de otros compañeros, o soluciones existentes. iii) Soy el único autor de este trabajo. El informe y todo programa implementado como parte de la resolución del obligatorio son de mi autoría y no incluyen partes ni fragmentos tomados de otros informes u otras fuentes, salvo las excepciones mencionadas.

Ejercicio 1 - Problema dual 5.22

P_1

a) Se quiere minimizar $f(x) = x$, y la restricción $x^2 \leq 1$ implica que $-1 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, basta con que x tome el menor valor dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = -1$ y $f^* = -1$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x^2 - 1$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu g(x) = x + \mu(x^2 - 1)$$

Se deriva el Lagrangeano respecto a x y se iguala a 0 para hallar el ínfimo:

$$\frac{\partial L(x^*, \mu)}{\partial x} = 1 + 2\mu x^* = 0$$
$$\Rightarrow x^* = -\frac{1}{2\mu}$$

Se sustituye el x^* hallado en el Lagrangeano para obtener la función dual:

$$d(\mu) = -\frac{1}{2\mu} + \mu(\frac{1}{4\mu^2} - 1)$$
$$\Rightarrow d(\mu) = -\frac{1}{4\mu} - \mu$$

Se plantea el problema dual:

$$sup_{\mu \in \mathbb{R}} \; -\frac{1}{4\mu} - \mu$$

$$s.a: \; \mu \geq 0$$

Se deriva la función respecto a μ y se iguala a 0 para resolver el problema dual:

$$\frac{1}{4\mu^{*2}} - 1 = 0$$

$$\mu^{*2} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto $\mu^* = \frac{1}{2}$ o $\mu^* = -\frac{1}{2}$. El único que cumple la restricción es $\mu^* = \frac{1}{2}$, entonces esa es la variable dual óptima, y $d^* = -1$

c) Como $g(\bar{x}) < 0 \ \forall \ \bar{x} \in (-1, 1)$, se cumple la condición de Slater.

Además, como $f^* = d^*$, se cumple dualidad fuerte (por lo tanto, también dualidad débil). Esto era esperable ya que se cumplen las condiciones del teorema de dualidad fuerte.

P_2

a) Se quiere minimizar $f(x) = x$, y la restricción $x^2 \leq 0$ implica que $x = 0$. Por lo tanto, hay un único valor de x dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = 0$ y $f^* = 0$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x^2$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu g(x) = x + \mu x^2$$

Se deriva el Lagrangeano respecto a x y se iguala a 0 para hallar el ínfimo:

$$\frac{\partial L(x^*, \mu)}{\partial x} = 1 + 2\mu x^* = 0$$

$$\Rightarrow x^* = -\frac{1}{2\mu}$$

Se sustituye el x^* hallado en el Lagrangeano para obtener la función dual:

$$d(\mu) = -\frac{1}{2\mu} + \mu\frac{1}{4\mu^2}$$

$$\Rightarrow d(\mu) = -\frac{1}{4\mu}$$

Se plantea el problema dual:

$$sup_{\mu \in \mathbb{R}} \ -\frac{1}{4\mu}$$

$$s.a: \ \mu \geq 0$$

Cuando $\mu \geq 0$ esta es una función creciente con una asíntota en $d(\mu) = 0$, por lo tanto $d^* = 0$ y $\mu^* = +\infty$, es decir, no existe la variable dual óptima en este caso.

c) Como $\nexists \ \bar{x} \ / \ g(\bar{x}) < 0$, no se cumple la condición de Slater.

De todas formas, como $f^* = d^*$, se cumple dualidad fuerte (por lo tanto, también dualidad débil). Aquí queda claro que las condiciones del teorema de dualidad fuerte son suficientes pero no necesarias.

P_3

a) Se quiere minimizar $f(x) = x$, y la restricción $|x| \leq 0$ implica que $x = 0$. Por lo tanto, hay un único valor de x dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = 0$ y $f^* = 0$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x$
- $g(x) = |x|$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu g(x) = x + \mu|x|$$

Se puede ver que hay dos casos posibles para el ínfimo del Lagrangeano:
Si $\mu \geq 1 \Rightarrow d(\mu) = 0$
Si $\mu < 1 \Rightarrow d(\mu) = -\infty$

Se plantea el problema dual:

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}} \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \geq 1, \\ -\infty & \text{si } \mu < 1. \end{cases}$$

$$s.a: \ \mu \geq 0$$

Como el caso donde $d(\mu) = -\infty$ nunca será el supremo, interesa estudiar el otro caso, entonces se plantea el problema equivalente:

$$sup_{\mu \in \mathbb{R}} \ 0$$
$$s.a: \ \mu \geq 1$$

Como se trata de una función constante, el supremo es $d^* = 0$ para cualquier $\mu^* \geq 1$.

c) Como $\nexists\ \bar{x}\ /\ g(\bar{x}) < 0$, no se cumple la condición de Slater.

De todas formas, como $f^* = d^*$, se cumple dualidad fuerte (por lo tanto, también dualidad débil)

P_4

a) Se quiere minimizar $f(x) = x$, y la restricción $g(x) \leq 0$ implica que $x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$. Por lo tanto, basta con que x tome el menor valor dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = -2$ y $f^* = -2$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x$
- $g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ x & \text{si } x \in (-1, 1) \\ -x-2 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x,\mu) = f(x) + \mu g(x) = \begin{cases} x + \mu(-x+2) & \text{si } x \geq 1 \\ x + \mu x & \text{si } x \in (-1, 1) \\ x + \mu(-x-2) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(x,\mu) = \begin{cases} (1-\mu)x + 2\mu & \text{si } x \geq 1 \\ (1+\mu)x & \text{si } x \in (-1, 1) \\ (1-\mu)x - 2\mu & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Se puede ver que hay dos casos posibles para el ínfimo del Lagrangeano:

Si $(1-\mu) = 0 \Rightarrow d(\mu) = min(-2\mu, -2, 2\mu)$
Si $(1-\mu) \neq 0 \Rightarrow d(\mu) = -\infty$

Se plantea el problema dual:

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}} \begin{cases} min(-2\mu, -2, 2\mu) & \text{si } 1-\mu = 0, \\ -\infty & \text{si } 1-\mu \neq 0. \end{cases}$$
$$s.a: \ \mu \geq 0$$

Como el caso donde $d(\mu) = -\infty$ nunca será el supremo, interesa estudiar el otro caso, entonces se plantea el problema equivalente:

$$sup_{\mu\in\mathbb{R}}\ min(-2\mu, -2, 2\mu)$$
$$s.a:\ 1-\mu = 0 \text{ y } \mu \geq 0$$

Como $\mu^* = 1$ para cumplir las restricciones, el supremo es $d^* = -2$, el único valor que puede tomar la función.

c) Como $g(\bar{x}) < 0\ \forall\ \bar{x} \in (-2,0) \cup (2,+\infty)$, se cumple la condición de Slater.

Además, como $f^* = d^*$, se cumple dualidad fuerte (por lo tanto, también dualidad débil), por más que el problema no sea convexo (la función $g(x)$ no es convexa).

P_5

a) Se quiere minimizar $f(x) = x^3$, y la restricción indica que $x \geq 1$. Como $f(x)$ es creciente, basta con que x tome el menor valor dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = 1$ y $f^* = 1$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x^3$
- $g(x) = -x + 1$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x,\mu) = f(x) + \mu g(x) = x^3 + \mu(-x+1)$$

Se puede ver que el ínfimo del Lagrangeano es $d(\mu) = -\infty$:

Se plantea el problema dual:

$$sup_{\mu\in\mathbb{R}}\ -\infty$$
$$s.a: \mu \geq 0$$

El supremo es $d^* = -\infty$ para cualquier $\mu^* \geq 0$.

c) Como $g(\bar{x}) < 0\ \forall\ \bar{x} > 1$, se cumple la condición de Slater.

De todas formas, como $f^* > d^*$, no se cumple dualidad fuerte, aunque si se cumple dualidad débil.

Como la función objetivo no es convexa, la dualidad fuerte no estaba asegurada. Claramente la resolución del problema dual no aporta ninguna información en este caso.

P_6

a) Se quiere minimizar $f(x) = x^3$, y la restriccion y el dominio indican que $x \geq 1$. Como $f(x)$ es creciente, basta con que x tome el menor valor dentro del conjunto factible, entonces se tiene que $x^* = 1$ y $f^* = 1$.

b) Se tiene:

- $f(x) = x^3$
- $g(x) = -x + 1$

Se escribe el Lagrangeano:

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu g(x) = x^3 + \mu(-x + 1)$$

Como el dominio del problema es $x \geq 0$ y $lim_{x\to+\infty} L(x, \mu) = +\infty$, el ínfimo del Lagrangeano solo se puede dar en el borde del dominio ($x = 0$) o en los puntos donde se anula la derivada, se calculan y se elige el menor:

$$L(0, \mu) = \mu$$

$$\frac{\partial L(x^*, \mu)}{\partial x} = 3x^{*2} - \mu = 0$$
$$\Rightarrow x^* = \pm\sqrt{\frac{\mu}{3}}$$

$$L(\sqrt{\frac{\mu}{3}}, \mu) = \mu(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mu}{3}} + 1)$$
$$L(-\sqrt{\frac{\mu}{3}}, \mu) = \mu(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mu}{3}} + 1)$$

Se puede ver que $L(\sqrt{\frac{\mu}{3}}, \mu) \leq L(0, \mu) \leq L(-\sqrt{\frac{\mu}{3}}, \mu)$ para todo $\mu \geq 0$ entonces
Entonces el ínfimo del Lagrangeano es $d(\mu) = \mu(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mu}{3}} + 1)$:

Se plantea el problema dual:

$$sup_{\mu\in\mathbb{R}}\ \mu(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mu}{3}} + 1)$$

$$s.a:\ \ \mu \geq 0$$

Se deriva la función respecto a μ y se iguala a 0 para resolver el problema dual:

$$-\sqrt{\frac{\mu^*}{3}}+1=0$$
$$\Rightarrow \mu^*=3$$

Sustituyendo la variable dual óptima en $d(\mu)$ se obtiene que $d^*=1$

c) Como $g(\bar{x})<0\ \forall\ \bar{x}>1$ (estos $\bar{x}$ están en el dominio del problema), se cumple la condición de Slater.

Además, como $f^*=d^*$, se cumple dualidad fuerte (por lo tanto, también dualidad débil), por más que no se cumplan las condiciones del teorema de dualidad fuerte ($f(x)$ no es convexa).

Ejercicio 2 - Gestión óptima de la demanda de energía eléctrica

a) Se reformula el problema original como un problema de programación lineal introduciendo la variable t y agregando las restricciones necesarias de tal forma que t represente el costo de g_2.

Para esto, se descompone la función no lineal $c_2(g_2)$ reescribiendola de la siguiente forma:

$$c_2(g_2)=t$$
$$t\geq 0$$
$$t\geq 4(g_2-40\ MW)$$

Queda claro que si se minimiza t, se está minimizando el máximo entre 0 y $4(g_2-40\ MW)$ porque t debe ser mayor o igual a estos dos valores, por lo que se minimiza $c_2(g_2)$

De esta forma, el problema pasa a ser:

$$\min_{p_1,p_2,p_3,g_1,g_2,t}\ g_1+t$$

sujeto a:

$$p_1+p_3=g_1$$
$$g_2+p_3+p_2=d_2$$
$$p_1-p_2=d_3$$
$$p_3-p_1-p_2=0$$
$$p_2\leq R$$
$$p_2\geq -R$$
$$t\geq 0$$
$$t\geq 4(g_2-40\ MW)$$
$$g_1\geq 0$$
$$g_2\geq 0$$

Las dos últimas restricciones salen del dominio de g_1 y g_2

b) Se resuelve numéricamente el problema para $R = 30MW$, $d_3 = 10MW$ y d_2 tomando todos los valores enteros en el intervalo $[0, 200]$. Se utiliza cvxpy para la resolución.

En las Figuras 1 y 2 se grafican los valores de g_1, g_2, p_2 y λ en función de d_2, donde λ es el multiplicador asociado a la restricción $p_1 - p_2 = d_3$.

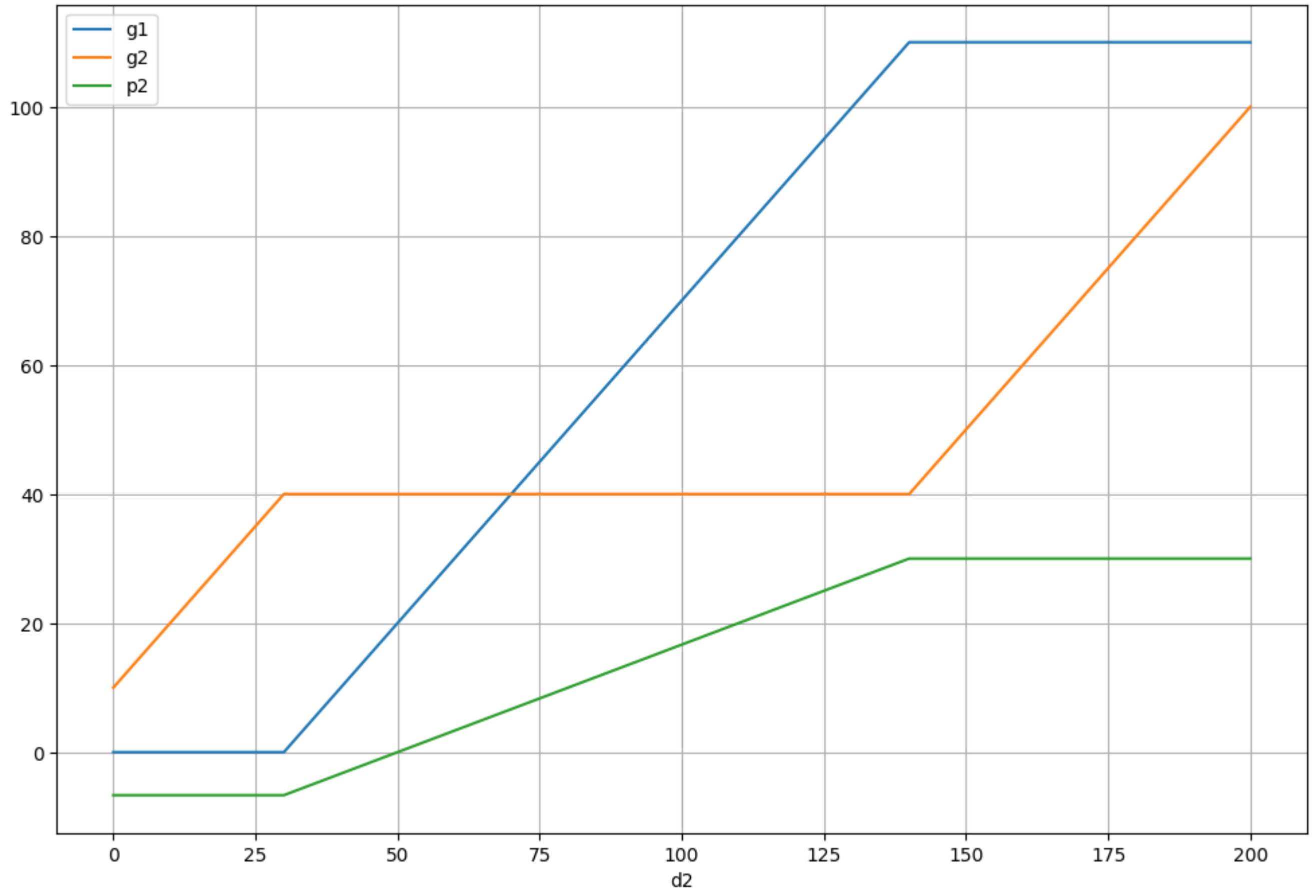

Figura 1: Valores de g_1, g_2, p_2 en función de d_2.

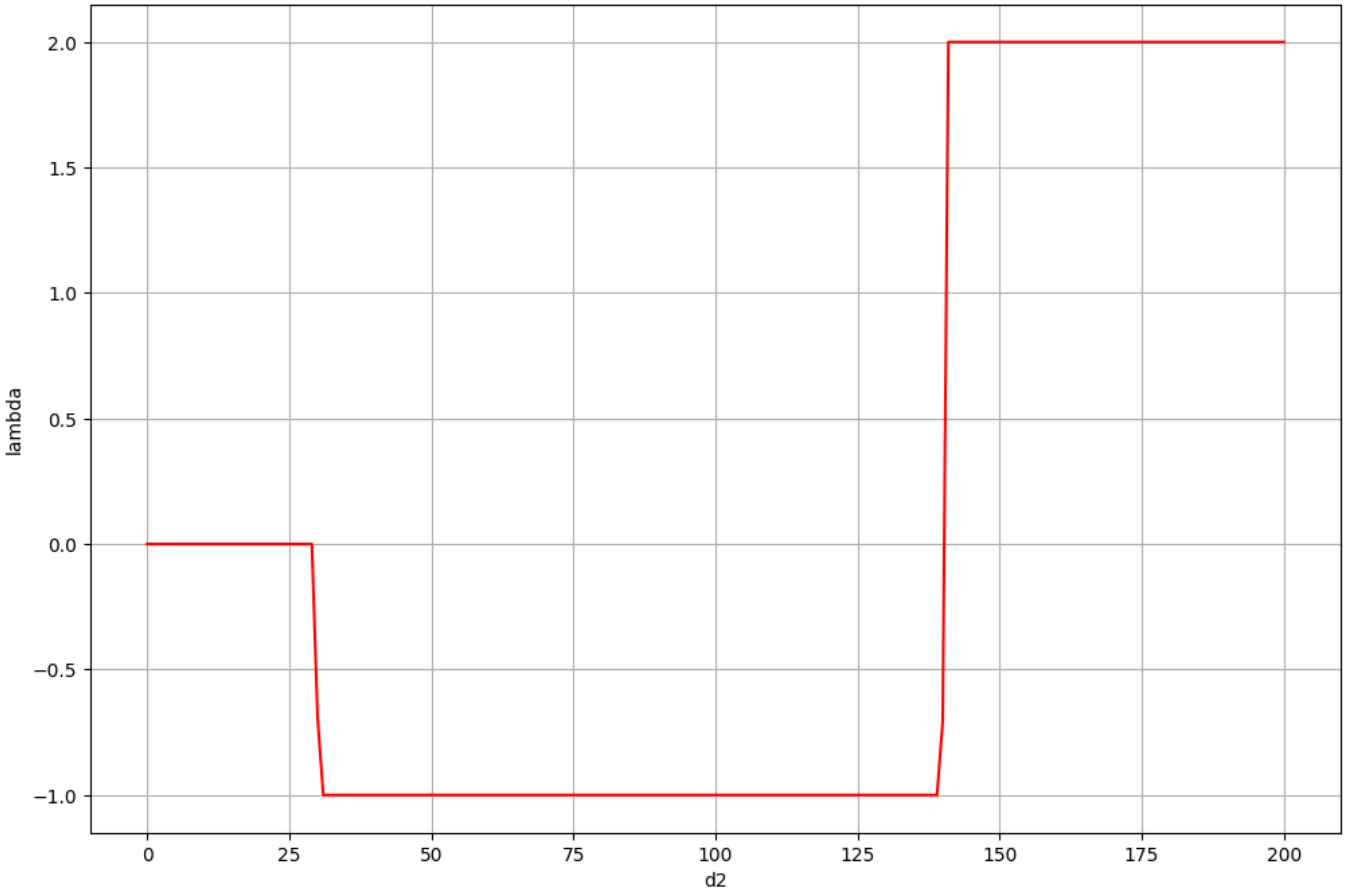

Figura 2: Valores de λ en función de d_2.

c) **$\mathbf{d_2}$ entre 0 y 30 MW:**

Las graficas anteriores muestran que en un principio, como el costo de g_2 es 0 hasta $40MW$ lo óptimo es cubrir la demanda total con energía de g_2, esto se ve reflejado en los valores de $g_2 = d_2 + d_3$ y $g_1 = 0MW$. Por otra parte $p_2 = -6{,}67MW$, lo que por las restricciones implica que $p_1 = 3{,}33MW$ y $p_3 = -3{,}33MW$. Lo que es importante, es notar que en esta etapa $|p_2|$ es menor a R, por lo que esa restricción no está activa.

Además, $\lambda = 0$ por lo que la restricción asociada a este multiplicador tampoco está activa, lo cual tiene sentido ya que la solución sería la misma por más que se quitara esta restricción (se está obteniendo el menor costo posible para el nivel de demanda).

$\mathbf{d_2}$ entre 30 y 140 MW:

Luego, a partir del punto donde $d_2 = 30MW$ y por lo tanto la demanda total es de $40MW$, es mejor cubrir el resto de la demanda con elergía de g_1 que es más barata (la recta de costo tiene pendiente 1 mientras que la de g_2 tiene pendiente 4), por lo que g_2 se mantiene constante en $40MW$ y g_1 comienza a aumentar linealmente.

Aquí, el multiplicador $\lambda = -1$, lo que indica que esta restricción empieza a estar activa, y más aún, que relajar un poco esta restricción aumentando d_3, resultaría en un mayor valor del costo (por Teorema de sensibilidad). Esto tiene sentido ya que al aumentar d_3 aumentaría la demanda total (y a partir de ahora generar energía extra tiene costo mayor a 0, en particular costo 1 por cada MW, de ahí el valor del multiplicador).

Además, en esta zona, p_2 comienza a aumentar linealmente hasta llegar al límite de $30MW$, por lo que luego de esto cambia nuevamente el comportamiento del problema.

$\mathbf{d_2}$ entre 140 y 200 MW:

A partir del punto donde $d_2 = 140MW$ (la demanda total es $150MW$), p_2 llega a un valor de $30MW$, por lo que llega a su máximo debido a la restricción de R, como se dijo anteriormente, entonces se debe mantener constante. Aquí la demanda d_2 extra debe comenzar a ser cubierta por g_2 independientemente del costo, ya que la energía no puede llegar a esta barra de otra forma (Aumentar p_1 o p_3 para llevar la energía de la barra 1 a la barra 2 implica inevitablemente aumentar p_2, a raíz de las demás restricciones). Es por esto que g_1 se mantiene constante en $110MW$.

En esta etapa $\lambda = 2$, esto significa que relajar la restricción aumentando d_3 resultaría en una disminución del costo (del doble de lo que se aumentó d_3). Esto tiene sentido ya que aumentar d_3 permite disminuir g_2 de igual forma (por el aumento de p_1) y aumentar el doble g_1 (por el aumento de p_1 y p_3, resultando en un costo menor (2 unidades por cada MW aumentado).

Demanda en la barra 3

Para los valores de d_2 entre 0 MW y 50 MW es cuando es conveniente ofrecer energía a precio nulo en la barra 3. Esto es claro en el intervalo entre 0 MW y 30 MW ya que toda la energía está siendo generada por g_2, luego de esto, a raiz de los valores de $p_2 < 0MW$ se puede ver que la barra 3 sigue recibiendo energía a precio nulo, pero se va complementando cada vez más con energía de g_1 hasta que se llega al punto donde $d_2 = 50MW$, aquí p_2 pasa a ser positivo (p_1 y p_3 ya lo eran), por lo que toda la demanda d_3 es cubierta por energía de g_1, esto se mantiene así al menos hasta $d_2 = 200MW$.