Trabalho Prático 01 da Disciplina DCC207 - Algoritmos 2

# Geometria Computacional e Classificação Linear

Alunos:

- Juan Braga
- Lucas Almeida
- Luiz Romanhol

# 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é empregar algoritmos de `geometria computacional` para a criação de um modelo de `classificação linear`.

**Descrição:** A partir de um conjunto de dados de treinamento, o algoritmo deve encontrar uma envoltória (contorno) que delimite uma região de classificação para um conjunto de dados (pontos no plano cartesiano). A partir de duas dessas envoltórias, será possível determinar se há separabilidade (ou se elas tem áreas sobrepostas) e então determinar uma reta que separe os dois conjuntos de dados.

**Apresentação do modelo:** Cada etapa do algoritmo será apresentada e explicada separadamente, e utilizará um conjunto de dados aleatório gerado a cada execução. O leitor pode livremente re-executar as células das seções 1 a 5 para visualizar conjuntos de dados diferentes.

Passos envolvidos no modelo (enumerado segundo as seções deste documento/arquivo): 2. Envoltória Convexa (encontrar o contorno)

3. Varredura Linear (definir separabilidade/sobreposição entre modelos)
4. Modelo de Classificação (encontrar a reta de separabilidade)
5. Classificador e cálculo de métricas (computar teste e calcular precisão do modelo gerado)

Uma vez apresentado o algoritmo e sua interface definida, serão realizados testes e calculadas métricas de precisão para o modelo em diferentes bases de dados.

## 1.1 Primitivas

Para a execução dos algoritmos de geometria computacional, serão utilizadas algumas primitivas apresentadas em aula:

**Inicializando bibliotecas**

In [ ]:
```
import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import functools
import pandas as pd
import seaborn as sns
```

> A função `orientacao()` determina a orientação relativa entre três pontos no plano cartesiano. A partir da determinação do sinal do determinante da matriz formada pelos três pontos, é possível determinar se os pontos estão em sentido horário, anti-horário ou colineares. Com esta informação, se soubermos que dois pontos pertencem a uma reta, podemos determinar para qual lado o terceiro ponto está.

Tal escolha almeja evitar operações de divisão entre os pontos, que podem produzir imprecisões indesejadas que podem se propagar ao longo do algoritmo (o fenômeno chamado de *underflow*).

Seguindo o Teorema 22.1 do livro Algorithm Design and Applications (por Goodrich e Tamassia), de 2015.

In [ ]:
```
def orientacao(p, q, r):
        """Retorna a orientação do caminho P-Q-R
        :params p, q, r: pontos
        :return: 0 = colinear, 1 = sentido horário, 2 = sentido anti-horá
        """
        val = (q[1] - p[1]) * (r[0] - q[0]) - \
                  (q[0] - p[0]) * (r[1] - q[1])

        if val == 0:
                return 0
        elif val > 0:
                return 1
        else:
                return 2
```

> Aqui, o uso da distância quadrada na função `distanciaQuadrada` também se dá para evitar o uso de divisão em operações mais tradicionais, como a Distância Euclidiana.

In [ ]:
```
def distanciaQuadrada(ancora, ponto):
        """Retorna o quadrado da distância entre o ponto âncora e o ponto
        dist_ancora_ponto = (ponto[0] - ancora[0])**2 + (ponto[1] - ancor
        return dist_ancora_ponto
```

> Uma função para determinar se um dado ponto está sobre um segmento de linha (um par de pontos).

In [ ]:
```
def estaNoSegmento(segment, point):
        """Retorna True se o ponto está no segmento de linha"""
        if (point[0] <= max(segment[0][0], segment[1][0]) and \
                point[0] >= min(segment[0][0], segment[1][0]) and \
                point[1] <= max(segment[0][1], segment[1][1]) and \
                point[1] >= min(segment[0][1], segment[1][1])):
                return True
        return False
```

A função `segmentosInterceptam` determina se dois segmentos se interceptam.

Como cada segmento é representado como um par de pontos no plano cartesiano, a função `orientacao` é utilizada para determinar se cada ponto de um segmento está de um lado diferente do outro segmento.

In [ ]:
```
def segmentosInterceptam(seg1, seg2):
        """Retorna True se os segmentos se interceptam"""

        # não considera interseção se os segmentos compartilham um vértic
        if np.array([seg1[0] == seg2[0], seg1[0] == seg2[1], seg1[1] == s
                return False

        d1 = orientacao(seg2[0], seg2[1], seg1[0])
        d2 = orientacao(seg2[0], seg2[1], seg1[1])
        d3 = orientacao(seg1[0], seg1[1], seg2[0])
        d4 = orientacao(seg1[0], seg1[1], seg2[1])

        if (d1==1 and d2==2) or (d1==2 and d2==1) and \
           (d3==1 and d4==2) or (d3==2 and d4==1):
                return True
        elif (d1==0 and estaNoSegmento(seg2, seg1[0])) or \
                 (d2==0 and estaNoSegmento(seg2, seg1[1])) or \
                 (d3==0 and estaNoSegmento(seg1, seg2[0])) or \
                 (d4==0 and estaNoSegmento(seg1, seg2[1])):
                return True
        return False
```

## 1.2 Funções auxiliares

Para a implementação do algoritmo, serão aqui inicializadas bibliotecas e definidas funções para gerar conjuntos de dados aleatórios e também "plotá-los".

**Geração de pontos:**

> Função `geraRect` produz uma nuvem de pontos aleatórios dentro de um retângulo (bom para produzir casos com pontos colineares ao âncora)

> Função `geraCirc` produz uma nuvem de pontos aleatórios dentro de um círculo.

> Função `geraPontos` escolhe aleatóriamente entre `geraRect` e `geraCirc` para gerar os pontos.

> Função `plotaPontos` usa a biblioteca matplotlib para visualizar um conjunto de pontos.

In [ ]:
```python
def geraRect(num, intervalo):
        """Gera pontos aleatórios dentro de um retângulo"""
        pontos = []
        for _ in range(num):

                # Gera um ponto aleatório dentro do intervalo
                x = random.randint(intervalo[0], intervalo[1])
                y = random.randint(intervalo[0], intervalo[1])

                pontos.append((x,y))
        return pontos
```

In [ ]:
```python
def geraCirc(num, intervalo=(50,100)):
        """Gera pontos aleatórios dentro de um círculo"""
        pontos = []

        # pega o menor valor do intervalo para usar como raio
        raio_maximo = min(intervalo)

        for _ in range(num):

                # Gera um ângulo aleatório entre 0 e 2*pi (360 graus)
                angulo = random.uniform(0, 2 * math.pi)

                # Gera um raio aleatório entre 0 e o raio máximo
                raio = random.uniform(0, raio_maximo)

                # Converte coordenadas polares em coordenadas cartesianas
                x = raio * math.cos(angulo) + 1.5*intervalo[0]
                y = raio * math.sin(angulo) + 1.5*intervalo[0]

                pontos.append((int(x), int(y)))

        return pontos
```

In [ ]:
```python
def geraPontos(num=200, intervalo=(50,100)):
        """Gera pontos aleatórios dentro de um retângulo ou círculo"""
        pontos = []

        aleatorio = random.randint(0,1)

        if aleatorio == 0:
                pontos = geraRect(num, intervalo)
        else:
                pontos = geraCirc(num, intervalo)

        return pontos
```

In [ ]:
```python
def plotaPontos(pontos):
        plt.scatter(*zip(*pontos), s=5, c='black')
        plt.show()
```

In [ ]:
```python
def desenha_pontos(points_1, points_2, label_1, label_2):
    # Defina cores personalizadas para cada classe
    colors = ['red', 'green']

    # Crie um gráfico de dispersão com cores mapeadas para os pontos das
    plt.scatter(points_1[:, 0], points_1[:, 1], c=colors[0], label=label_
    plt.scatter(points_2[:, 0], points_2[:, 1], c=colors[1], label=label_

    # Adicione a legenda com os rótulos descritivos e as cores correspond
    plt.legend()
```

**Plotar o desenho da envoltória**

In [ ]:
```python
def desenhaEnvoltoria(envoltoria, pontos=None, show=False):
        """
        Plota os pontos, e os segmentos da envoltória em vermelho
        :param pontos: Lista de pontos
        :param envoltoria: Lista de pontos que formam a envoltória convex
        :param show: Se False, apenas gera o plot. Se True, gera o plot e
        :return: None
        """
        if pontos is None:
                        pontos = envoltoria

        x, y = zip(*pontos)
        plt.scatter(x, y, s=5, c='black')

        # plt.xlim(0, 1.5*max(x))
        # plt.ylim(0, 1.5*max(y))

        for i in range(len(envoltoria)):
                x = (envoltoria[i][0], envoltoria[(i + 1) % len(envoltori
                y = (envoltoria[i][1], envoltoria[(i + 1) % len(envoltori

                # plota o segmento de linha entre o ponto atual e o próxi
                plt.plot(x, y, color='red')

        if show:
                plt.show()
```

# 2. Envoltória Convexa

O primeiro passo para a criação do modelo é encontrar o contorno de um dado conjunto de dados (pontos no plano). Para isso, foi escolhido o algoritmo da `Envoltória Convexa de Graham`.

> **Descrição do algoritmo:**

1. Encontrar o ponto com menor coordenada y (se houver empate, escolher o de menor coordenada x). Este ponto é chamado de âncora.
2. Ordenar os pontos restantes em ordem crescente de acordo com o ângulo que eles formam com o âncora e a horizontal.
3. Iniciar uma pilha vazia.

4. Empilhar o âncora e o primeiro ponto da ordenação.
5. Para cada ponto restante, enquanto a orientação formada pelos três pontos do topo da pilha for anti-horária, desempilhar o topo da pilha.
6. Empilhar o ponto restante.

Note que a principal parte do algoritmo se trata do critério com o qual os pontos são ordenados no passo 2. As primitivas `orientacao` e `distanciaQuadrada` são essenciais, pois permitem definir o "ângulo polar" relativo entre cada um dos pontos em relação ao ponto âncora, sem usar operações de divisão (como a `atan2` da biblioteca `math`).

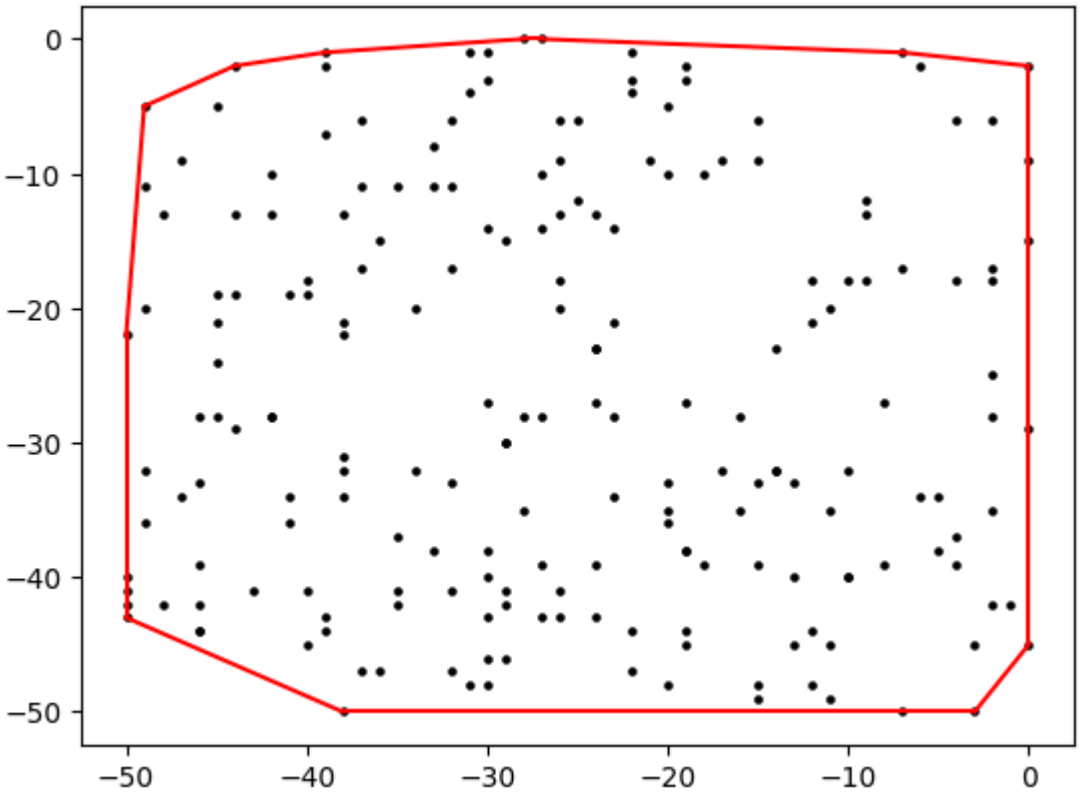
In [ ]:
```
def envoltoriaConvexa(pontos):
        """
        Calcula a envoltória convexa de uma lista de pontos.
        :return: Lista de pontos que formam a envoltória convexa
        """
        # Faz com que a entrada seja uma lista se for dada uma instância
        pontos = list(pontos)

        # Se houver menos de 3 pontos, não há envoltória convexa
        if len(pontos) <= 3:
                return None

        # Encontre o ponto âncora com a menor coordenada y (e menor x se
        ponto_ancora = min(pontos, key=lambda p: (p[1], p[0]))

        # Função dentro do escopo de envoltoriaConvexa() para acessar a v
        def comparaAngulos(p1, p2):
                """Função auxiliar para ordenar os pontos por ângulo pola
                direcao = orientacao(ponto_ancora, p1, p2)
                if direcao == 0:
                        if distanciaQuadrada(ponto_ancora, p2) >= distanc
                                return -1
                        else:
                                return 1
                elif direcao == 2:
                        return -1
                else:
                        return 1

        # Ordena os pontos por ângulo polar em relação ao ponto âncora (e
        pontos = sorted(pontos, key=functools.cmp_to_key(comparaAngulos))

        # move o ancora para o inicio da lista (a função sortnão garante
        pontos.remove(ponto_ancora)
        pontos.insert(0, ponto_ancora)

        # cria uma pilha e insere os três primeiros pontos nela
        pilha = []
        pilha.append(pontos[0])
        pilha.append(pontos[1])
        pilha.append(pontos[2])

        for i in range(3, len(pontos)):
                # continue removendo o topo enquanto o último ponto e o p
                while len(pilha) > 1 and orientacao(pilha[-2], pilha[-1],
                        pilha.pop()
```

```
                pilha.append(pontos[i])

        return pilha
```

**Visualizando a envoltória encontrada**

Utilizando as funções auxiliares da Seção 1, vamos criar uma nuvem de pontos aleatória e checar como a envoltória ficará no plano cartesiano.

In [ ]:
```
p = geraPontos(200, (-50,0))
env = envoltoriaConvexa(p)

desenhaEnvoltoria(env, p, show=True)
```




# 3. Varredura Linear

O segundo passo para a criação do modelo, uma vez que já temos duas envoltórias convexas, é determinar se elas são separáveis ou não (isto é, se há sobreposição entre as áreas das envoltórias). Para isso foi escolhido o algoritmo da `Varredura Linear`.

Ele consiste em descobrir se os lados dos polígonos (envoltórias) se cruzam. Isto é feito ao percorrer os pontos da esquerda para a direita, verificando se as retas próximas se encontram com a reta que contém o ponto atual (utilizando a primitiva `orientacao`, veja a seção 1.1 para maiores detalhes).

O principal componente do algritmo da varredura é sua ordenação, pois é ela que irá ditar sua complexidade assintótica de tempo. Assim, definimos primeiro a implementação de uma `árvore binária balanceada` para garantir uma

complexidade $O(n * \log(n))$, que irá ordenar os pontos de acordo com a coordenada y de cada *endpont* (pontos que compõem cada uma das retas).

In [ ]:
```
# possíveis posições de um ponto em relação a um segmento
esquerda, direita = 0, 1

class EndPoint:
        """Representa um ponto de varredura
        :param ponto: ponto de varredura
        :param posicao: posição do ponto em relação ao segmento (início o
        :param numSegmento: número do segmento ao qual o ponto pertence""
        def __init__(self, ponto, posicao, numSegmento):
                self.ponto = ponto
                self.posicao = posicao
                self.numSegmento = numSegmento

class No:
        """Representa um nó de uma árvore binária balanceada
        :param data: dado armazenado no nó
        :param esquerda: filho esquerdo
        :param direita: filho direito"""
        def __init__(self, data):
                self.data = data
                self.setaFilhos(None, None)

        def setaFilhos(self, esquerda, direita):
                self.esquerda = esquerda
                self.direita = direita

        def balanco(self):
                prof_esq = 0
                if self.esquerda:
                        prof_esq = self.esquerda.profundidade()
                prof_dir = 0
                if self.direita:
                        prof_dir = self.direita.profundidade()
                return prof_esq - prof_dir

        def profundidade(self):
                prof_esq = 0
                if self.esquerda:
                        prof_esq = self.esquerda.profundidade()
                prof_dir = 0
                if self.direita:
                        prof_dir = self.direita.profundidade()
                return 1 + max(prof_esq, prof_dir)

        def rotacaoEsquerda(self):
                self.data, self.direita.data = self.direita.data, self.da
                old_esquerda = self.esquerda
                self.setaFilhos(self.direita, self.direita.direita)
                self.esquerda.setaFilhos(old_esquerda, self.esquerda.esqu

        def rotacaoDireita(self):
                self.data, self.esquerda.data = self.esquerda.data, self.
                old_direita = self.direita
                self.setaFilhos(self.esquerda.esquerda, self.esquerda)
                self.direita.setaFilhos(self.direita.direita, old_direita
```

```
        def rotacaoEsquerdaDireita(self):
                self.esquerda.rotacaoEsquerda()
                self.rotacaoDireita()

        def rotacaoDireitaEsquerda(self):
                self.direita.rotacaoDireita()
                self.rotacaoEsquerda()

        def executaBalanco(self):
                bal = self.balanco()
                if bal > 1:
                        if self.esquerda.balanco() > 0:
                                self.rotacaoDireita()
                        else:
                                self.rotacaoEsquerdaDireita()
                elif bal < -1:
                        if self.direita.balanco() < 0:
                                self.rotacaoEsquerda()
                        else:
                                self.rotacaoDireitaEsquerda()

        def insere(self, data, func):
                """Insere um nó na árvore binária de busca com base em um
                if func(data, self.data):
                        if not self.esquerda:
                                self.esquerda = No(data)
                        else:
                                self.esquerda.insere(data, func)
                else:
                        if not self.direita:
                                self.direita = No(data)
                        else:
                                self.direita.insere(data, func)
                self.executaBalanco()

        def remove(self, data, func):
                """Remove um nó da árvore binária de busca com base em um
                if self.data == data:
                        if self.esquerda:
                                self.data = self.esquerda.maximo()
                                self.esquerda.remove(self.data, func)
                        elif self.direita:
                                self.data = self.direita.minimo()
                                self.direita.remove(self.data, func)
                        else:
                                self.data = None
                elif self.esquerda and func(data, self.data):
                        self.esquerda.remove(data, func)
                elif self.direita and not func(data, self.data):
                        self.direita.remove(data, func)
                self.executaBalanco()

        def acima(self, ponto):
                if self.data.ponto[1] <= ponto[1]:
                        return self.data
                else:
                        if self.esquerda:
                                return self.esquerda.acima(ponto)
                        else:
                                return None
```

```
        def abaixo(self, ponto):
                if self.data.ponto[1] >= ponto[1]:
                        return self.data
                else:
                        if self.direita:
                                return self.direita.abaixo(ponto)
                        else:
                                return None
```

Antes de realizar a varredura, é necessário perparar os dados. Note que as envoltórias são retornadas do `Algoritmo de Graham` na forma de lista de pontos, enquanto a função `varreduraLinear` espera uma lista de segmentos (pares de pontos). Portanto, é necessário converter as listas de pontos das duas envoltórias em uma única lista de segmentos.

A função `preparaSegmentos` recebe as duas listas de pontos das envoltórias e retorna a lista de segmentos pronta para a varredura linear.

In [ ]:
```
def preparaSegmentos(envoltoria1, envoltoria2):
        """Formata as envoltórias para a varredura linear"""
        segmentos1 = [(envoltoria1[i], envoltoria1[(i+1)%len(envoltoria1)
        segmentos2 = [(envoltoria2[i], envoltoria2[(i+1)%len(envoltoria2)

        segmentosVarredura = segmentos1 + segmentos2
        return segmentosVarredura
```

> **Descrição do algoritmo:**

1. Criar a lista de pontos com as extremidades dos segmentos.
2. Ordenar a lista pelas coordenadas `x` dos pontos e, em caso dê empate, colocar uma extremidade esquerda de um segmento antes da extremidade direita de outro.
3. Criar árvore binária com o primeiro ponto da lista.
4. Para cada segmento da lista:
   A. Se for uma extremidade esquerda, insere na árvore e verifica interseção do segmento com os segmentos logo acima e logo abaixo.
   B. Se for uma extremidade direita, verifica interseção entre os segmentos logo acima e logo abaixo do segmento e remove o segmento
5. Se em alguma verificação houver segmento, retorna `True`. Se percorrer todo o vetor e não houverem interseções, retorna `False`.

In [ ]:
```
def varreduraLinear(segmentos):
        """Verifica se há interseção entre segmentos em tempo O(n log n)
        :param segmentos: lista de segmentos de linha
        :return: True se há interseção, False caso contrário"""
        pontosVarredura = []
        for i in range(len(segmentos)):
                pontosVarredura.append(EndPoint(segmentos[i][0], esquerda
                pontosVarredura.append(EndPoint(segmentos[i][1], direita,

        #       # produz uma perturbação por causa de possíveis pontos de
        # for i in range(len(pontosVarredura)):
```

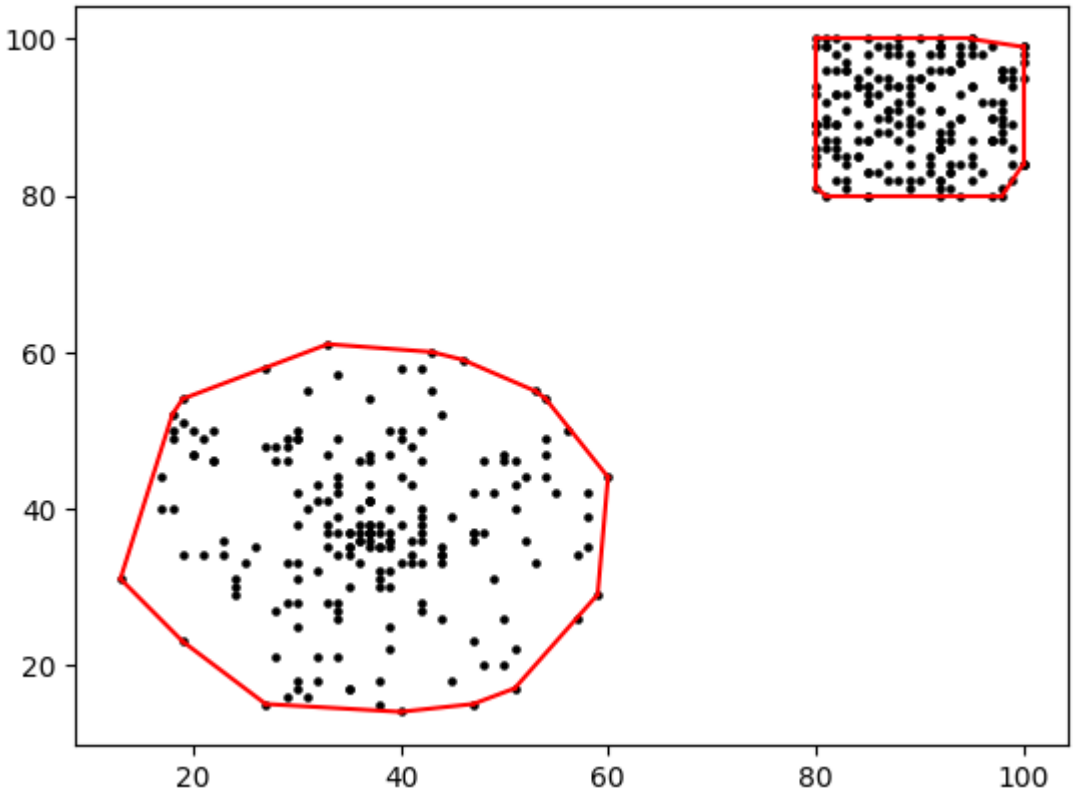
```
        #       pontosVarredura[i].ponto = (pontosVarredura[i].ponto[0],

        # ordena os pontos de varredura por x e pelo endpoint da esquerda
        pontosVarredura.sort(key=lambda endPoint: (endPoint.ponto[0], end

        # árvore binária de busca
        arvore = No(pontosVarredura[0])

        # varre os pontos de varredura
        for endpoint in pontosVarredura:
                cima = arvore.acima(endpoint.ponto)
                baixo = arvore.abaixo(endpoint.ponto)

                if endpoint.posicao == esquerda:
                        arvore.insere(endpoint, lambda a, b: a.ponto[1] <

                        if cima != None and \
                        segmentosInterceptam(segmentos[cima.numSegmento],
                                return True
                        elif baixo != None and \
                        segmentosInterceptam(segmentos[baixo.numSegmento]
                                return True

                if endpoint.posicao == direita:
                        if cima != None and baixo != None:
                                if segmentosInterceptam(segmentos[cima.nu
                                        return True
                        arvore.remove(endpoint, lambda a, b: a.ponto[1] <
        return False
```

**Visualizando as envoltórias e definindo a sobreposição.**

Utilizando as funções auxiliares da Seção 1, vamos criar duas nuvens de pontos e verificar se há sobreposição entre seus contornos (envoltórias).

Execute quantas vezes precisar, há chances dos conjuntos se sobreporem ou não a cada execução.

In [ ]:
```
p1 = geraPontos(200, (80,100))
env1 = envoltoriaConvexa(p1)
desenhaEnvoltoria(env1, p1)

p2 = geraPontos(200, (25,75))
env2 = envoltoriaConvexa(p2)
desenhaEnvoltoria(env2, p2)

plt.show()

segmentosVarredura = preparaSegmentos(env1, env2)

intersecao = varreduraLinear(segmentosVarredura)

if intersecao:
    print("As envoltórias convexas se intersectam.")
else:
    print("As envoltórias convexas não se intersectam.")
```




`As envoltórias convexas não se intersectam.`

# 4. Modelo de Classificação

Com as duas envoltórias em mãos e o conhecimento de elas não têm sobreposição, podemos definir o `modelo de classificação linear`.

Isto será feito ao encontrarmos uma linha (ou melhor, a equação de uma linha) que separe ambos os conjuntos.

> **Descrição do algoritmo:**
>
> 1. Encontrando os pontos mais próximos de cada envoltória
> 2. Encontrar o ponto médio na reta que liga estes dois pontos, onde a reta passará.
> 3. Encontrar a reta de separação dos conjuntos, que deverá ser tangente à reta que liga os pontos mais próximos e passar através do ponto médio.

Primeiro precisamos **encontrar os pontos mais próximos de cada envoltória**, ou seja, o par de pontos que têm a menor distância e que sejam de contornos diferentes.

`Uma abordagem quadrática foi tomada`, comparando todos os pares possíveis de pontos. Apesar de outras técnicas terem sido consideradas, como bibliotecas de python que usariam o algoritmo mais eficiente de Gilbert-Johnson-Keerthi (que usaria simplex), ou uma possível alteração do algoritmo da seção 22.4 do livro Algorithm Design and Applications (por Goodrich e Tamassia, de 2015), os alunos julgaram que seria o mais rápido de se implementar.

In [ ]:
```python
def pontos_mais_proximos(envoltoria1, envoltoria2):
  """Encontra os pontos mais próximos entre dois polígonos convexos."""

  distancia_minima = np.inf
  pontos_mais_proximos = None

  for i in range(len(envoltoria1)):
    for j in range(len(envoltoria2)):
      distancia = np.linalg.norm(np.array(envoltoria1[i]) - np.array(envo
      if distancia < distancia_minima:
        distancia_minima = distancia
        pontos_mais_proximos = (envoltoria1[i], envoltoria2[j])

  return pontos_mais_proximos
```

Em seguida **calculamos o ponto médio entre esses pontos**. Neste caso a divisão é inevitável.

In [ ]:
```python
def calcula_ponto_medio(ponto1, ponto2):
  """Calcula o ponto médio entre dois pontos"""
  return ((ponto1[0] + ponto2[0]) / 2, (ponto1[1] + ponto2[1] ) / 2)
```

Por fim, usamos a informação dos pontos mais próximos e do ponto médio para **encontrar a reta que é tangente à reta entre os pontos**, e que passe pelo ponto médio delas.

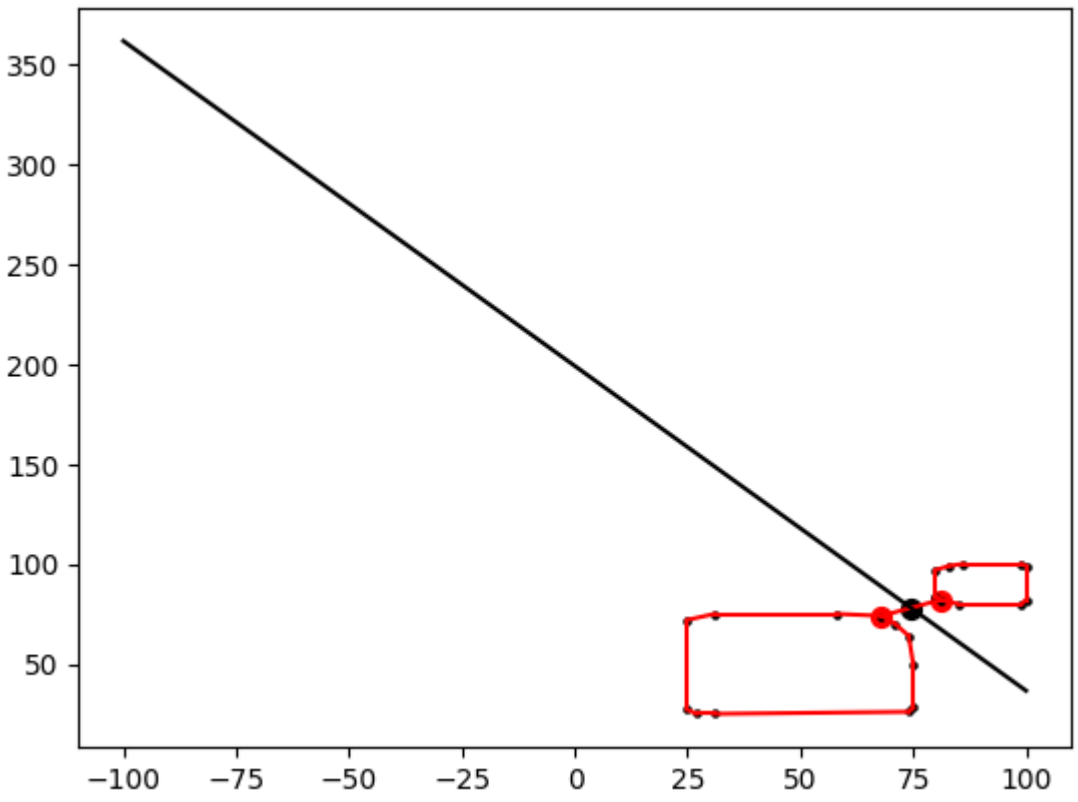
**Lembremos da equação de uma reta:** $(a * x + b)$, onde $a$ é a inclinação e $b$ é o coeficiente linear.

In [ ]:
```python
def linha_classificadora(envoltoria1, envoltoria2):
  """Calcula um modelo classificador entre duas envoltórias.
  Retorna: Equação da reta (inclinacao, b) que separa as envoltórias
  """
  # O caso em que os pontos sejam iguais não é tratado aqui

  ponto1, ponto2 = pontos_mais_proximos(envoltoria1, envoltoria2)

  dx = ponto2[0] - ponto1[0]
  dy = ponto2[1] - ponto1[1]

  ponto_medio = calcula_ponto_medio(ponto1, ponto2)

  if dx == 0:
    # A reta é vertical, então a tangente é horizontal
    inclinacao = 0
    b = ponto_medio[0]  # O valor de 'b' é a coordenada x do ponto médio
  else:
    inclinacao = dy / dx
    # calcula a inclinação e equação da reta tangente que passa sobre o p
  if inclinacao == 0:
    inclinacao += 0.0001
  inclinacao_tangente = -1 / inclinacao
  b_tangente = ponto_medio[1] - inclinacao_tangente * ponto_medio[0]

  return (inclinacao_tangente, b_tangente)
```

**Visualizando os resultados.** Aqui vamos encontrar os pontos mais próximos, o ponto médio e a equação da reta tangente que desejamos.

Note que as envoltórias são aleatórias, e podem não ser separáveis. Por favor continue re-executando até que um resultado separável ocorra.

In [ ]:
```
# Gera dois conjuntos de dados e verifica a separabilidade
env1 = envoltoriaConvexa(geraPontos(200, (80,100)))
env2 = envoltoriaConvexa(geraPontos(200, (25,75)))
intersecta = varreduraLinear(preparaSegmentos(env1,env2))

pontos = pontos_mais_proximos(env1, env2)
ponto_medio = calcula_ponto_medio(pontos[0], pontos[1])
linha = linha_classificadora(env1, env2)

# Plot dos pontos mais próximos e do ponto médio
plt.scatter(*zip(*pontos), s=50, c='red')
plt.scatter(*ponto_medio, s=50, c='black')
plt.plot([pontos[0][0], pontos[1][0]], [pontos[0][1], pontos[1][1]], c='r

# Plot da reta tangente passando pelo ponto médio
plt.plot([-100, 100], [linha[0] * -100 + linha[1], linha[0] * 100 + linha

# Restante do código para plotar as envoltórias
desenhaEnvoltoria(env1)
desenhaEnvoltoria(env2)

plt.show()
if not intersecta:
  print("As envoltórias convexas se intersectam.")
```




# 5. Classificador e Produtor de Métricas

Com as ferramentas apresentadas em mãos, a `envoltória` a `varredura` e o `modelo classificador`, iremos agora criar uma interface para aplicar estes algoritmos a qualquer conjunto de dados.

A interface escolhida será na forma de uma clase `Classificador`, que será criada a partir de duas bases de dados e irá automaticamente:

- Dividir os dados em conjuntos treinamento/teste
- Produzir o modelo de classificação linear
- Calcular as métricas de precisão para o conjunto de teste

In [ ]:
```
import numpy as np
from sklearn.model_selection import train_test_split

class Classificador:
    def __init__(self, classe1, classe2, label1, label2, test_size=0.2, r
        self.classe1 = classe1
        self.classe2 = classe2
        self.label1 = label1
        self.label2 = label2
        self.centroide_classe1 = None
        self.centroide_classe2 = None
        self.treino_classe1 = None
        self.teste_classe1 = None
        self.treino_classe2 = None
        self.teste_classe2 = None
        self.reta_perpendicular = None
        self.intersecao = False

        if rodar_automaticamente:

            # Separar conjuntos de treino e teste
            self.separar_treino_teste(test_size, random_state)

            # Treinar com os conjuntos de treino
            self.treinar()

            if self.intersecao:
              print("Os dados de treinamento de", self.label1, "e", self.
            else:
              # Mostra o gráfico
              self.desenha_grafico()

    def setar_treino_teste(self, treino_classe1, teste_classe1, treino_cl
      self.treino_classe1 = treino_classe1
      self.teste_classe1 = teste_classe1
      self.treino_classe2 = treino_classe2
      self.teste_classe2 = teste_classe2

    def separar_treino_teste(self, test_size=0.3, random_state=None):
        self.treino_classe1, self.teste_classe1 = train_test_split(self.c
        self.treino_classe2, self.teste_classe2 = train_test_split(self.c

    def treinar(self):
        envoltoria1 = envoltoriaConvexa(self.treino_classe1)
        envoltoria2 = envoltoriaConvexa(self.treino_classe2)
```

```
        self.intersecao = varreduraLinear(preparaSegmentos(envoltoria1, e

        self.centroide_classe1 = np.mean(envoltoria1, axis=0)
        self.centroide_classe2 = np.mean(envoltoria2, axis=0)

        self.linha_classificadora = linha_classificadora(envoltoria1, env

    def classificar(self, ponto):
        if self.centroide_classe1 is None or self.centroide_classe2 is No
            raise ValueError("Os centroides ou a linha classificadora ain

        inclinacao_tangente, b_tangente = self.linha_classificadora

        # Calcular o valor da reta no ponto dado
        valor_da_reta = ponto[1] - (inclinacao_tangente * ponto[0] + b_ta

        # Comparar as alturas dos centroides
        altura_centroide_classe1 = self.centroide_classe1[1]
        altura_centroide_classe2 = self.centroide_classe2[1]

        if altura_centroide_classe1 > altura_centroide_classe2:
            return self.label1 if valor_da_reta > 0 else self.label2
        else:
            return self.label2 if valor_da_reta > 0 else self.label1

    def desenha_grafico(self):
        # Calcule as envoltórias convexas
        env1 = envoltoriaConvexa(self.treino_classe1)
        env2 = envoltoriaConvexa(self.treino_classe2)

        # Desenhe as envoltórias convexas
        desenhaEnvoltoria(env1)
        desenhaEnvoltoria(env2)

        # Desenhe os conjuntos de pontos
        desenha_pontos(self.classe1,self.classe2,self.label1, self.label2

        if not self.intersecao:
          # Desenha a linha classificadora apenas caso os dados sejam sep
          original_xlim = plt.gca().get_xlim()
          original_ylim = plt.gca().get_ylim()

          pontos = pontos_mais_proximos(env1, env2)
          ponto_medio = calcula_ponto_medio(pontos[0], pontos[1])
          linha = linha_classificadora(env1, env2)

          plt.scatter(*zip(*pontos), s=50, c='black')
          plt.scatter(*ponto_medio, s=50, c='black')
          plt.plot([pontos[0][0], pontos[1][0]], [pontos[0][1], pontos[1]
          plt.plot([pontos[0][0]-100, pontos[1][0]+100], [linha[0] * (pon

          plt.xlim(original_xlim)
          plt.ylim(original_ylim)

        plt.xlabel('Componente 1')
        plt.ylabel('Componente 2')
        plt.title('Iris dataset com 2 componentes')

        plt.show()
```

```
    def exibir_metricas(self):
        if self.intersecao:
          print("Não há como realizar métricas pois os dados de treinamen
          print("")
          return

        acertos_treino = 0
        erros_treino = 0
        acertos_teste = 0
        erros_teste = 0

        if self.treino_classe1 is not None and self.treino_classe2 is not
            for ponto in self.treino_classe1:
                if self.classificar(ponto) == self.label1:
                    acertos_treino += 1
                else:
                    erros_treino += 1
            for ponto in self.treino_classe2:
                if self.classificar(ponto) == self.label2:
                    acertos_treino += 1
                else:
                    erros_treino += 1

        if self.teste_classe1 is not None and self.teste_classe2 is not N
            for ponto in self.teste_classe1:
                if self.classificar(ponto) == self.label1:
                    acertos_teste += 1
                else:
                    erros_teste += 1
            for ponto in self.teste_classe2:
                if self.classificar(ponto) == self.label2:
                    acertos_teste += 1
                else:
                    erros_teste += 1

        total_acertos = acertos_treino + acertos_teste
        total_erros = erros_treino + erros_teste

        # Calcular os verdadeiros positivos, falsos positivos e falsos ne
        verdadeiros_positivos = acertos_teste
        falsos_positivos = erros_teste  # Supondo que tudo o que foi clas
        falsos_negativos = erros_treino  # Supondo que tudo o que não foi

        # Calcular precisão e revocação
        precisao = verdadeiros_positivos / (verdadeiros_positivos + falso
        revocacao = verdadeiros_positivos / (verdadeiros_positivos + fals

        indice_acerto = total_acertos / (total_acertos + total_erros) * 1

        print("Para a classificação entre", self.label1, "e", self.label2

        print("Se interceptam:", self.intersecao)

        print("Porcentagem de acertos (treino):", (acertos_treino / (acer
        print("Porcentagem de erros (treino):", (erros_treino / (acertos_
        print("Porcentagem de acertos (teste):", (acertos_teste / (acerto
        print("Porcentagem de erros (teste):", (erros_teste / (acertos_te
        print("Índice de acerto:", indice_acerto, "%")
        print("Precisão:", precisao)
```

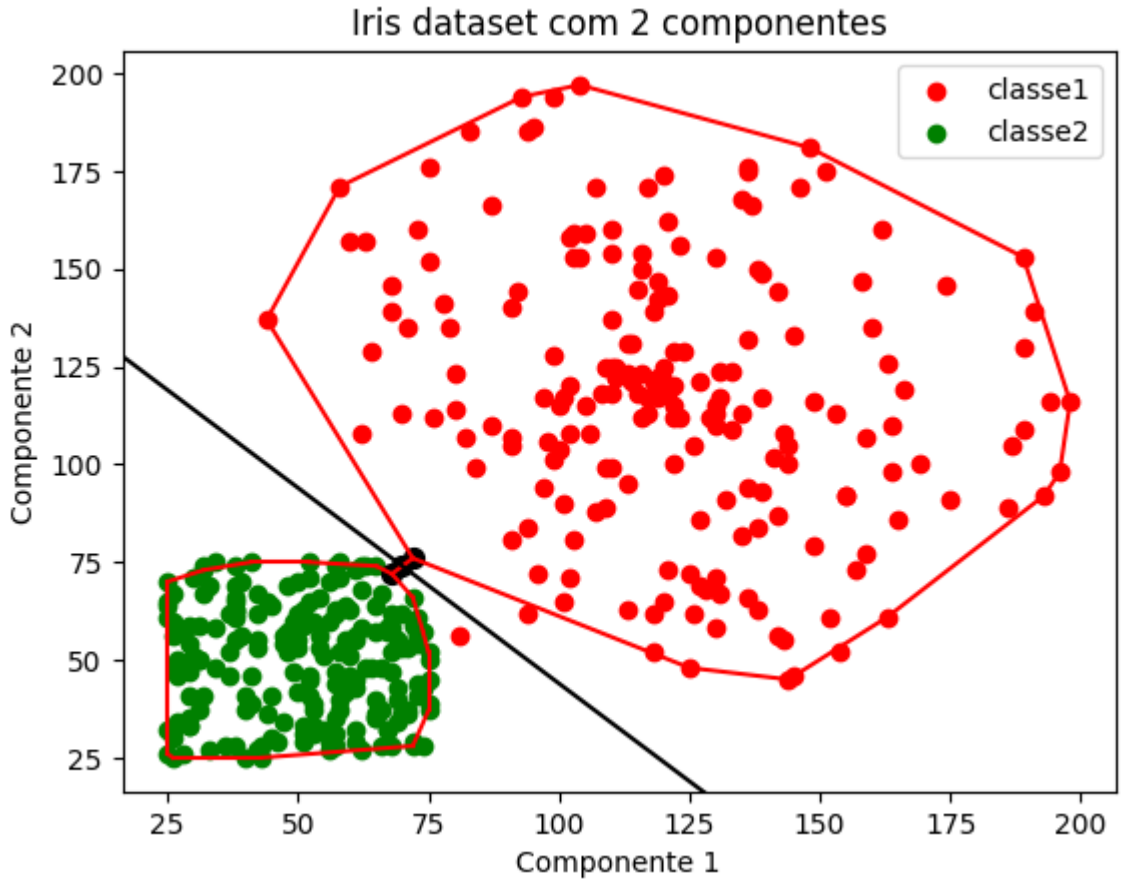
```
        print("Revocação:", revocacao)
        print("")
```

**Visualizando os resultados.**

Note que as envoltórias são aleatórias, e podem não ser separáveis. Por favor continue re-executando até que um resultado separável ocorra.

In [ ]:
```
# Gera dois conjuntos de dados e verifica a separabilidade
pontos1 = np.array(geraPontos(200, (80,100)))
pontos2 = np.array(geraPontos(200, (25,75)))
env1 = envoltoriaConvexa(pontos1)
env2 = envoltoriaConvexa(pontos2)
```

In [ ]:
```
Classificador(pontos1,pontos2,"classe1","classe2")
```




Out[ ]:
```
<__main__.Classificador at 0x7eb48d8b1270>
```

# 6. Definição dos datasets

## Iris Dataset

O conjunto de dados `Iris` contém informações sobre três espécies de flores Iris, sendo elas: Setosa, Versicolor e Virginica. Para cada espécie, quatro características botânicas são registradas: o comprimento e largura das sépalas e o comprimento e largura das pétalas.

In [ ]:
```
from sklearn.datasets import load_iris
iris = load_iris()

pd.DataFrame(iris.data).head(2)
```

Out[ ]:

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 5.1 | 3.5 | 1.4 | 0.2 |
| **1** | 4.9 | 3.0 | 1.4 | 0.2 |

In [ ]:
```
from sklearn.decomposition import TruncatedSVD

svd = TruncatedSVD(n_components=2)
iris_2d = svd.fit_transform(iris.data)

setosa_points = iris_2d[iris.target == 0]
versicolor_points = iris_2d[iris.target == 1]
virginica_points = iris_2d[iris.target == 2]
```

## Wine dataset

O conjunto de dados `Wine` contém informações sobre três tipos de vinhos. Para cada vinho, temos dadods como teor alcoólico, acidez, intensidade da cor, entre outros. No total são 13 atributos, todos numéricos.

In [ ]:
```
from sklearn.datasets import load_wine
wine = load_wine()

pd.DataFrame(wine.data).head(2)
```

Out[ ]:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 14.23 | 1.71 | 2.43 | 15.6 | 127.0 | 2.80 | 3.06 | 0.28 | 2.29 | 5.64 | 1.04 | 3.92 | 1065.0 |
| **1** | 13.20 | 1.78 | 2.14 | 11.2 | 100.0 | 2.65 | 2.76 | 0.26 | 1.28 | 4.38 | 1.05 | 3.40 | 1050.0 |

In [ ]:
```
svd = TruncatedSVD(n_components=2)
wine_2d = svd.fit_transform(wine.data)

wine_classe0 = wine_2d[wine.target == 0]
wine_classe1 = wine_2d[wine.target == 1]
wine_classe2 = wine_2d[wine.target == 2]
```

## Page Blocks dataset

De https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Page+Blocks+Classification.

In [ ]:
```
url = 'https://github.com/juanmbraga/linear-classifier-with-computational
p_blocks = pd.read_csv(url)
p_blocks.head()
```

```
svd = TruncatedSVD(n_components=2)
p_blocks_2d = svd.fit_transform(p_blocks[p_blocks.columns[:-1]])
```

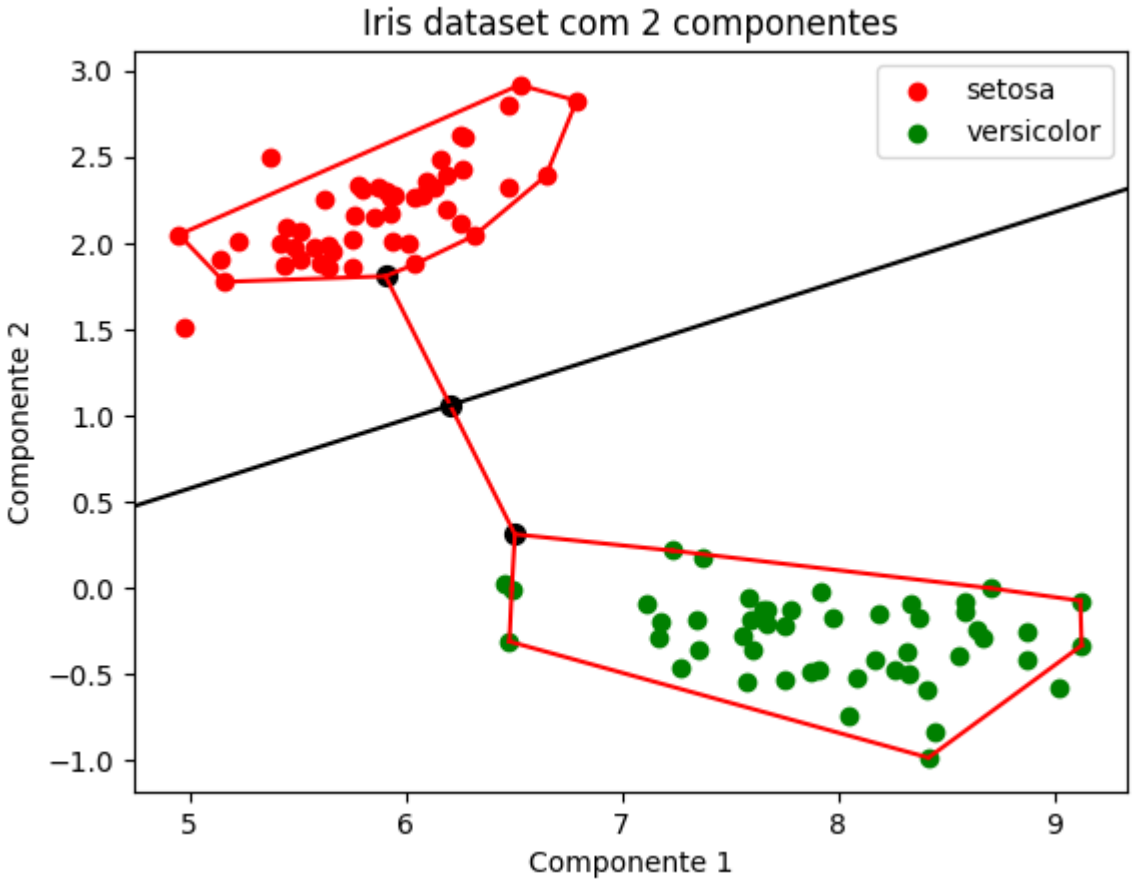
# Avaliação das Métricas

Por fim, vamos calcular diversas métricas e analisar o resultado.

## Teste 1 - Classes Setosa e Versicolor

Os dados das classes Setosa e Versicolor são bem separados, não se sobrepõem. O modelo obteve uma taxa de acerto de 100% tanto no treinamento quanto no teste. A precisão e revocação também são ideais, com valores de 1.0.

In [ ]:
```
teste1 = Classificador(setosa_points,versicolor_points,"setosa","versicol
teste1.exibir_metricas()
```




```
Para a classificação entre setosa e versicolor temos que:
Se interceptam: False
Porcentagem de acertos (treino): 100.0
Porcentagem de erros (treino): 0.0
Porcentagem de acertos (teste): 100.0
Porcentagem de erros (teste): 0.0
Índice de acerto: 100.0 %
Precisão: 1.0
Revocação: 1.0
```

## Teste 2 - Classes Virginica e Versicolor

As classes Virginica e Versicolor têm uma sobreposição considerável, e não são linearmente separáveis. Por causa disso, o modelo não foi calculado e as métricas não foram feitas.

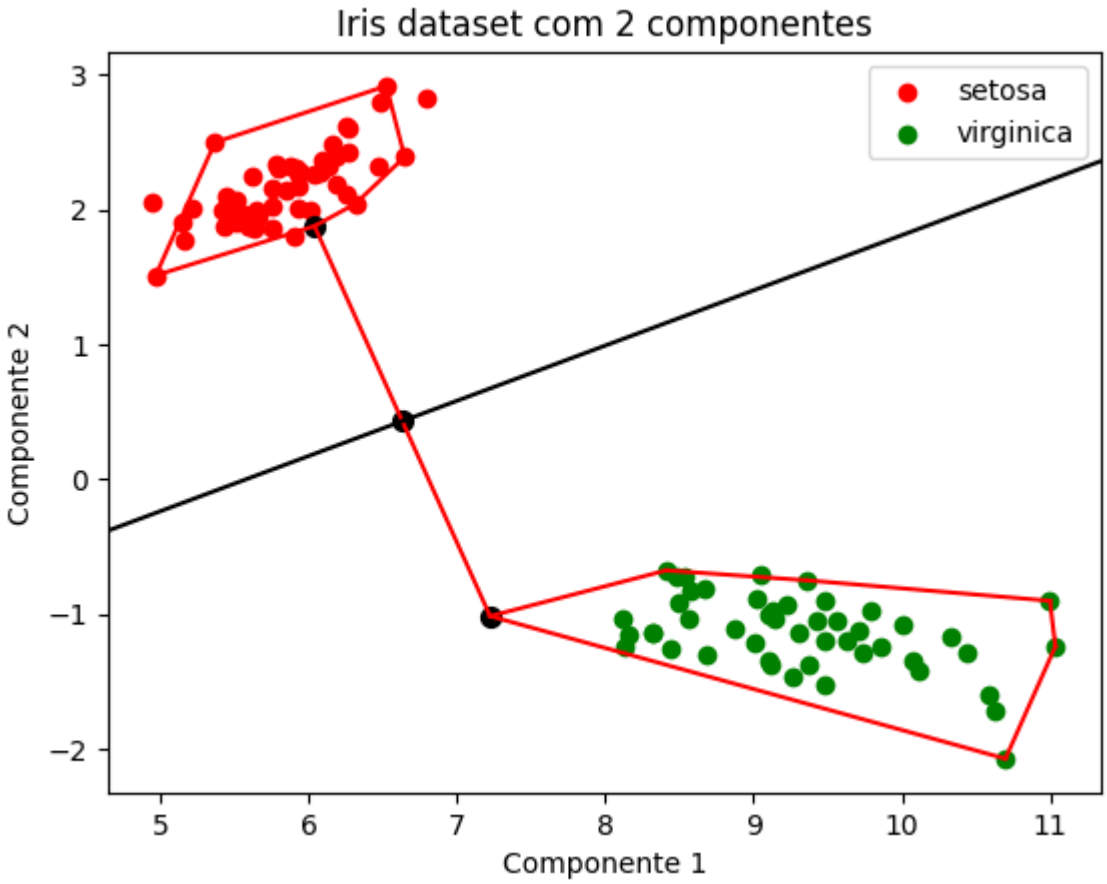
In [ ]:
```
teste2 = Classificador(virginica_points,versicolor_points,"virginica","ve
teste2.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de virginica e versicolor não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes vir
ginica e versicolor não são separáveis
```

## Teste 3 - Classes Setosa e Virginica

Assim como a Setosa e a Versicolor, as classes Setosa e Virginica são bem separadas. O modelo obteve uma taxa de acerto de 100% tanto no treinamento quanto no teste. A precisão e revocação também são ideais, com valores de 1.0.

In [ ]:
```
teste3 = Classificador(setosa_points,virginica_points,"setosa","virginica
teste3.exibir_metricas()
```



```
Para a classificação entre setosa e virginica temos que:
Se interceptam: False
Porcentagem de acertos (treino): 100.0
Porcentagem de erros (treino): 0.0
Porcentagem de acertos (teste): 100.0
Porcentagem de erros (teste): 0.0
Índice de acerto: 100.0 %
Precisão: 1.0
Revocação: 1.0
```

Os resultados destes três primeiros testes indicam que o modelo foi altamente eficaz no dataset iris, separando corretamente os dados quando separáveis e indentificando quando não são.

Os próximos 3 testes foram feitos com a base de dados wine, e mostram diferentes casos de interseção de envoltórias

## Teste 4 - Classes 0 e 1

In [ ]:
```
teste4 = Classificador(wine_classe0, wine_classe1, "wine_0", "wine_1")
teste4.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_0 e wine_1 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_0 e wine_1 não são separáveis
```

## Teste 5 - Classes 0 e 2

In [ ]:
```
teste5 = Classificador(wine_classe0, wine_classe2, "wine_0", "wine_2")
teste5.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_0 e wine_2 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_0 e wine_2 não são separáveis
```

## Teste 6 - Classes 1 e 2

In [ ]:
```
teste6 = Classificador(wine_classe1, wine_classe2, "wine_1", "wine_2")
teste6.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_1 e wine_2 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_1 e wine_2 não são separáveis
```

## Teste 7 - Dataset wine com alterações - Classes 0 e 1

In [ ]:
```
wine = load_wine()
```

```
wine_data = wine.data

wine_data = wine_data[:, [2,4,5,6,10]]

svd = TruncatedSVD(n_components=2)
wine_teste = svd.fit_transform(wine_data)

wine_teste_0 = wine_teste[wine.target == 0]
wine_teste_1 = wine_teste[wine.target == 1]
wine_teste_2 = wine_teste[wine.target == 2]
```

In [ ]:
```
teste7 = Classificador(wine_teste_0, wine_teste_1, "wine_teste_0", "wine_
teste7.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_teste_0 e wine_teste_2 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_teste_0 e wine_teste_2 não são separáveis
```

## Teste 8 - Dataset wine com alterações - Classes 0 e 2

In [ ]:
```
teste8 = Classificador(wine_teste_0, wine_teste_1, "wine_teste_0", "wine_
teste8.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_teste_0 e wine_teste_1 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_teste_0 e wine_teste_1 não são separáveis
```

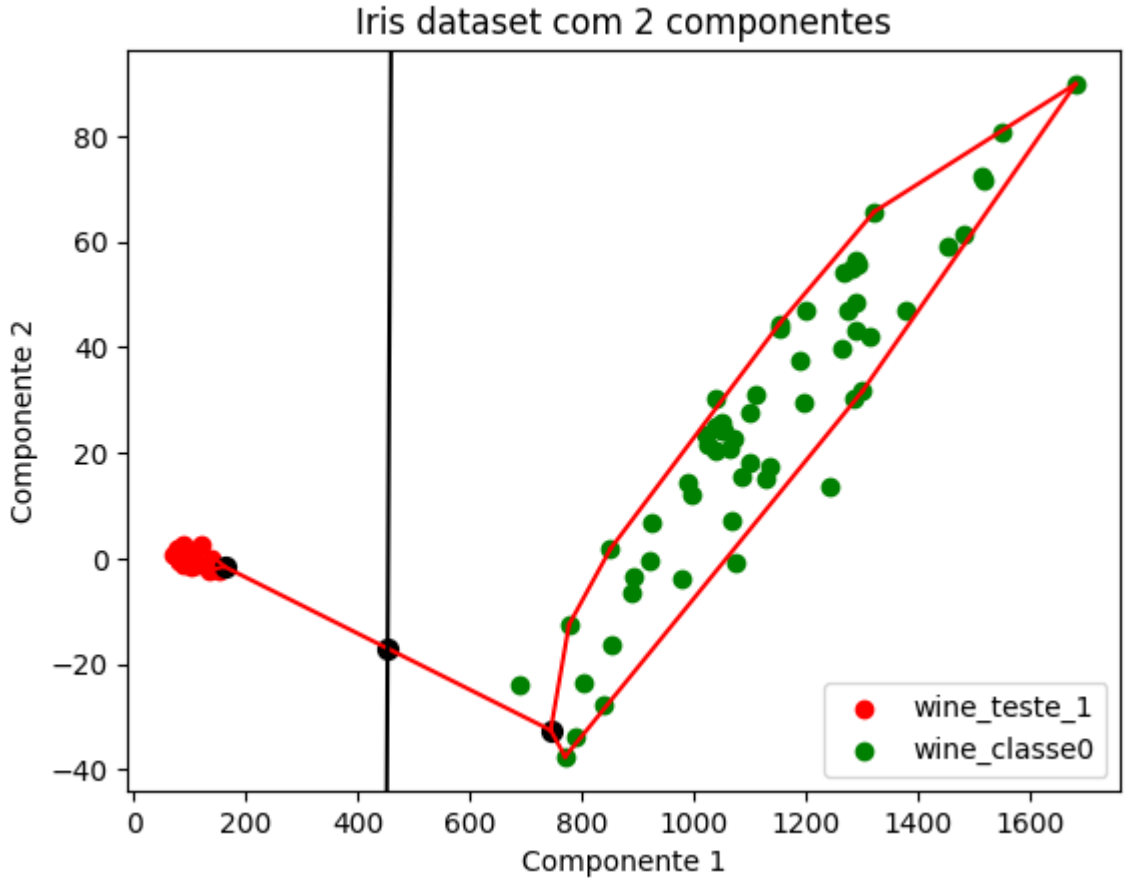
## Teste 9 - Dataset wine com alterações - Classes 1 e 2

In [ ]:
```
teste9 = Classificador(wine_teste_1, wine_teste_2, "wine_teste_1", "wine_
teste9.exibir_metricas()
```

```
Os dados de treinamento de wine_teste_1 e wine_teste_2 não são separáveis
Não há como realizar métricas pois os dados de treinamento das classes win
e_teste_1 e wine_teste_2 não são separáveis
```

## Teste 10 - Mescla do wine original e com alterações

In [ ]:
```
teste10 = Classificador(wine_teste_1, wine_classe0, "wine_teste_1", "wine
teste10.exibir_metricas()
```

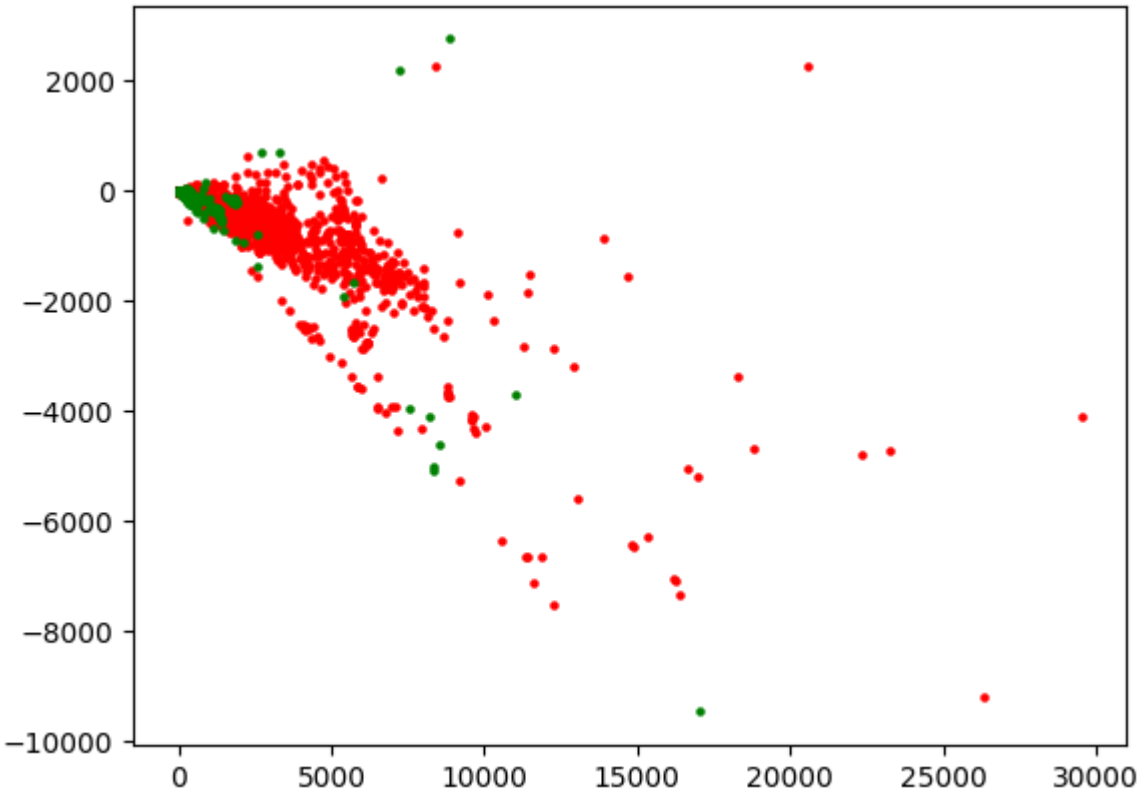



```
Para a classificação entre wine_teste_1 e wine_classe0 temos que:
Se interceptam: False
Porcentagem de acertos (treino): 0.0
Porcentagem de erros (treino): 100.0
Porcentagem de acertos (teste): 0.0
Porcentagem de erros (teste): 100.0
Índice de acerto: 0.0 %
Precisão: 0.0
Revocação: 0.0
```

# Teste 11 - Page-blocks

In [ ]:
```
# Executa o classificador nas classes
Classificador(p_blocks_2d[p_blocks["Class"]==1], p_blocks_2d[p_blocks["Cl
```

```
Os dados de treinamento de classe1 e classe2 não são separáveis
```


2000
0
−2000
−4000
−6000
−8000
−10000
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000