TP5

September 11, 2025

1 Temas Tratados en el Trabajo Práctico 5

- Comportamiento y operaciones bajo incertidumbre.
- Teorema de Bayes.
- Representación de la información incierta en Redes Bayesianas.
- Inferencia por enumeración.
- Redes de Markov y matrices de transición.
- Tiempo esperado y probabilidad de absorción.

1.1 Ejercicios Teóricos

1. ¿Cuáles son los tres axiomas de Kolmogorov?

Los **tres axiomas de Kolmogórov (1933)** son la base de la teoría de la probabilidad.
Se formulan en un espacio de probabilidad (Ω, F, P), donde:

- Ω: espacio muestral (todos los resultados posibles).
- F: colección de subconjuntos de Ω (sucesos).
- P: función de probabilidad.

Los axiomas son:

1. **No negatividad**
   Para todo suceso A en F:

   $$P(A) \geq 0$$

   Es decir, la probabilidad nunca es negativa.

2. **Normalización**
   La probabilidad de todo el espacio muestral es:

   $$P(\Omega) = 1$$

   Esto significa que algún resultado debe ocurrir con certeza.

3. **Aditividad (o σ-aditividad)**
   Si $A_1, A_2, A_3, ...$ son sucesos mutuamente excluyentes (no pueden ocurrir al mismo tiempo), entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

   Es decir, la probabilidad de la unión de sucesos excluyentes es la suma de sus probabilidades.

2. Una fábrica de clavos dispone de 2 máquinas que elaboran el 30% y 70% de los clavos que producen respectivamente. El porcentaje de clavos defectuosos de cada máquina es del 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona al azar un clavo de la producción y este fue defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina?

P(M1)=0.3 P(M2)=0.7 Defectuosos:

P(D M1)=0.02 (2)=0.03

Se pide calcular:

- $P(M_1 \mid D)$
- $P(M_2 \mid D)$

es decir, la probabilidad de que el clavo defectuoso venga de cada máquina.

1.1.1 Paso 1: Probabilidad total de que un clavo sea defectuoso

$$P(D) = P(M_1)P(D \mid M_1) + P(M_2)P(D \mid M_2)$$

$$P(D) = (0.3)(0.02) + (0.7)(0.03)$$

$$P(D) = 0.006 + 0.021 = 0.027$$

1.1.2 Paso 2: Aplicamos el Teorema de Bayes

Para M_1:

$$P(M_1 \mid D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D \mid M_1)}{P(D)}$$

$$P(M_1 \mid D) = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.027}$$

$$P(M_1 \mid D) = \frac{0.006}{0.027} \approx 0.2222 \quad (22.2\%)$$

Para M_2:

$$P(M_2 \mid D) = \frac{P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)}{P(D)}$$

$$P(M_2 \mid D) = \frac{0.7 \cdot 0.03}{0.027}$$

$$P(M_2 \mid D) = \frac{0.021}{0.027} \approx 0.7778 \quad (77.8\%)$$

Si el clavo es defectuoso:

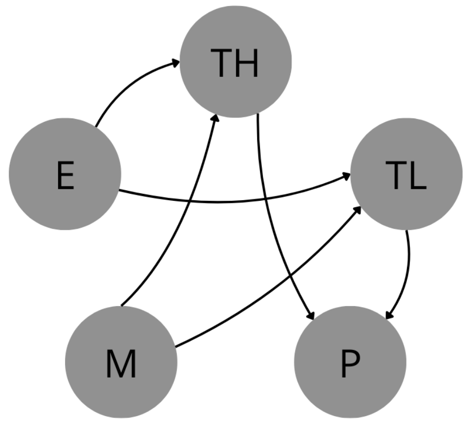
La probabilidad de que lo haya fabricado la máquina 1 es 22.2%.

La probabilidad de que lo haya fabricado la máquina 2 es 77.8%.

3. La probabilidad de que un motor que sale de una fábrica con una *avería eléctrica* es de 10^{-3}, y la probabilidad de que salga con una *avería mecánica* es de 10^{-5}. Si existe un tipo de avería no se producen averías del otro tipo. Si el motor presenta *temperatura elevada* se enciende un *piloto luminoso* el 95% de las veces, cuando la *temperatura es reducida* el *piloto luminoso* se enciende el 99% de las veces, y a veces cuando la *temperatura se encuentra en un rango normal* el *piloto luminoso* se enciende erróneamente en un caso por millón. Cuando *no hay averías*, la *temperatura se eleva* en el 17% de los casos y es *reducida* el 5% de las veces. Si hay una *avería eléctrica*, la *temperatura se eleva* en el 90% de los casos y es *reducida* en el 1% de los casos. Finalmente cuando la *avería es mecánica*, la *temperatura está elevada* el 10% de los casos y *reducida* el 40% de las veces. Construya una Red Bayesiana y utilice inferencia por enumeración para calcular:

3.1 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si se enciende el piloto.

3.2 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si se enciende el piloto y la temperatura es elevada.



Construyamos primero la Red Bayesiana y luego aplicamos inferencia por enumeración paso a paso.

Red Bayesiana (variables y dependencias)

F = tipo de falla: {None, E, M} con probabilidades a priori P(E)=10^-3, P(M)=10^-5, P(None)=1−10^{-3-10}-5 = 0.99899.

T = temperatura: {H (elevada), L (reducida), N (normal)}. T depende de F, con las condicionales:

P(H|None)=0.17, P(L|None)=0.05, P(N|None)=0.78

P(H|E)=0.90, P(L|E)=0.01, P(N|E)=0.09

P(H|M)=0.10, P(L|M)=0.40, P(N|M)=0.50

P = piloto luminoso: {on, off}. P depende de T, con:

P(on|H)=0.95, P(on|L)=0.99, P(on|N)=10^-6

Red Bayesiana:

Para TN (temperatura normal)<= -TH^-TL

Para NA (ninguna avería)<= -E^-M

Por ende, se pueden quitar de la red bayesiana para reducirla lo mas posible

Resolución: "Método de enumeración parcial"

Paso 1 — calcular todas las hojas relevantes (solo consideramos las hojas con P=on, porque queremos condicionamiento por piloto encendido)

Cada hoja: P(F=f, T=t, P=on) = P(f) · P(t | f) · P(on | t).

Hojas (f, t, P(f,t,on)) — valores numéricos:

Para F = None (P=0.99899)

(None, H, on): 0.99899 · 0.17 · 0.95 = 0.161336885

(None, L, on): 0.99899 · 0.05 · 0.99 = 0.049450005000000005

(None, N, on): 0.99899 · 0.78 · 1e-6 = 0.000000779212

Suma de contribuciones de None a P(on): 0.21078766921220005

Para F = E (eléctrica, P=0.001)

(E, H, on): 0.001 · 0.90 · 0.95 = 0.000855

(E, L, on): 0.001 · 0.01 · 0.99 = 0.0000099

(E, N, on): 0.001 · 0.09 · 1e-6 = 0.00000000009 (negligible)

Suma de contribuciones de E a P(on): 0.00086490009

Para F = M (mecánica, P=0.00001)

(M, H, on): 0.00001 · 0.10 · 0.95 = 0.00000095 → 9.5 · 10

(M, L, on): 0.00001 · 0.40 · 0.99 = 0.00000396

(M, N, on): 0.00001 · 0.50 · 1e-6 = 0.000000000005 (negligible)

Suma de contribuciones de M a P(on): 0.000004910005

Probabilidad total de piloto encendido (P(on)) = suma de todas las hojas on: P(on) = 0.21078766921220005 + 0.00086490009 + 0.000004910005 = 0.21165747930720002

Ahora resolvemos las preguntas.

3.1 — P(Mecánica | piloto = on)

Usamos Bayes por enumeración sobre el árbol: P(M | on) = P(M on) / P(on).

Numerador P(M on) = suma de hojas con F=M y P=on = 0.000004910005.

Denominador P(on) = 0.21165747930720002.

Cálculo: P(M | on) = 0.000004910005 / 0.21165747930720002 2.31978809162402 · 10

En porcentaje: 0.0023198 %.

(Interpretación: si el piloto está encendido, la probabilidad de que exista una avería mecánica es extremadamente baja porque P(M) es muy pequeña y la mayor parte del evento “piloto on” procede de casos sin avería.)

3.2 — P(Mecánica | piloto = on, temperatura = elevada)

En el árbol consideramos únicamente las ramas con T = H y P = on. Podemos usar la relación: P(M | on, T=H) = P(M | T=H) (porque P es independiente de F dado T).

Usamos Bayes condicionado en T=H: P(M | H) = P(M) · P(H | M) / Σ_f P(f) · P(H | f)

Cálculo por ramas H del árbol:

P(M H on) = hoja (M,H,on) = 9.5 · 10 .

P(H on) = suma de hojas con T=H y P=on = (None,H,on) + (E,H,on) + (M,H,on) = 0.161336885 + 0.000855 + 0.00000095 = 0.162192835

Entonces: P(M | on, T=H) = P(M H on) / P(H on) = 9.5 · 10 / 0.162192835 5.857225444021618 · 10

En porcentaje: 0.00058572 %.

(Alternativamente, calcular P(M|H) directamente: P(M) · 0.10 / (0.99899 · 0.17 + 0.001 · 0.90 + 0.00001 · 0.10) da el mismo resultado 5.8572 · 10 .)

Resumen final (valores redondeados)

P(M | piloto = on) 2.3198 · 10 0.0023198 %.

P(M | piloto = on, temperatura = elevada) 5.8572 · 10 0.00058572 %.

Resolución: "Método de enumeración total"

Variables: - F: Falla (None, E, M)
- T: Temperatura (H, L, N)
- P: Piloto luminoso (on, off)

Probabilidades:

Prior (F):

$$P(E) = 10^{-3}, \quad P(M) = 10^{-5}, \quad P(None) = 0.99899$$

Condicional (T|F):
- None: $P(H|None) = 0.17, P(L|None) = 0.05, P(N|None) = 0.78$
- E: $P(H|E) = 0.90, P(L|E) = 0.01, P(N|E) = 0.09$
- M: $P(H|M) = 0.10, P(L|M) = 0.40, P(N|M) = 0.50$

Condicional (P|T):

$$P(on|H) = 0.95, \quad P(on|L) = 0.99, \quad P(on|N) = 10^{-6}$$

Paso 1: P(M | P=on)

Fórmula Bayes:

$$P(M \mid on) = \frac{P(M, on)}{P(on)}$$

Enumeración total:

$$P(P = on) = \sum_{t \in \{H,L,N\}} P(P = on \mid T = t) \cdot P(T = t)$$

T	P(T)	P(on|T)	Producto = P(on|T) P(T)
H	0.10	0.95	0.095
L	0.40	0.99	0.396
N	0.50	10	0.0000005

Multiplicamos por P(M)=0.00001:

$$P(M, on) = 0.00001 \cdot (0.095 + 0.396 + 0.0000005) \approx 4.91 \cdot 10^{-6}$$

P(on) se calcula sumando todas las combinaciones F y T:

$$P(on) = \sum_{f \in \{None, E, M\}} \sum_{t \in \{H, L, N\}} P(f) \cdot P(T = t|f) \cdot P(P = on|T = t)$$

Contribuciones:

- F=None → 0.99899 · (0.17 · 0.95 + 0.05 · 0.99 + 0.78 · 10^-6)   0.210788
- F=E → 0.001 · (0.90 · 0.95 + 0.01 · 0.99 + 0.09 · 10^-6)   0.0008649
- F=M → 0.00001 · (0.10 · 0.95 + 0.40 · 0.99 + 0.50 · 10^-6)   0.00000491

Suma:

$$P(on) \approx 0.210788 + 0.0008649 + 0.00000491 = 0.2116578$$

Resultado:

$$P(M \mid on) = \frac{4.91 \cdot 10^{-6}}{0.2116578} \approx 2.3198 \cdot 10^{-5} \approx 0.00232\%$$

Paso 2: P(M | P=on, T=H)

Dado T, el piloto es independiente de F:

$$P(M \mid on, T = H) = P(M \mid T = H)$$

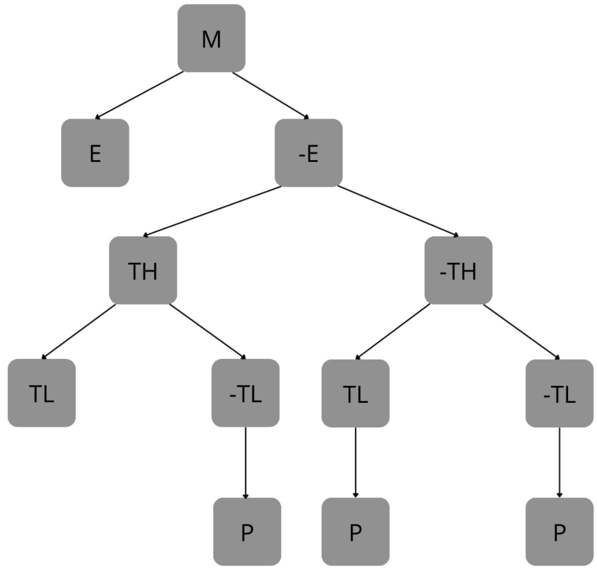
Aplicando Bayes:

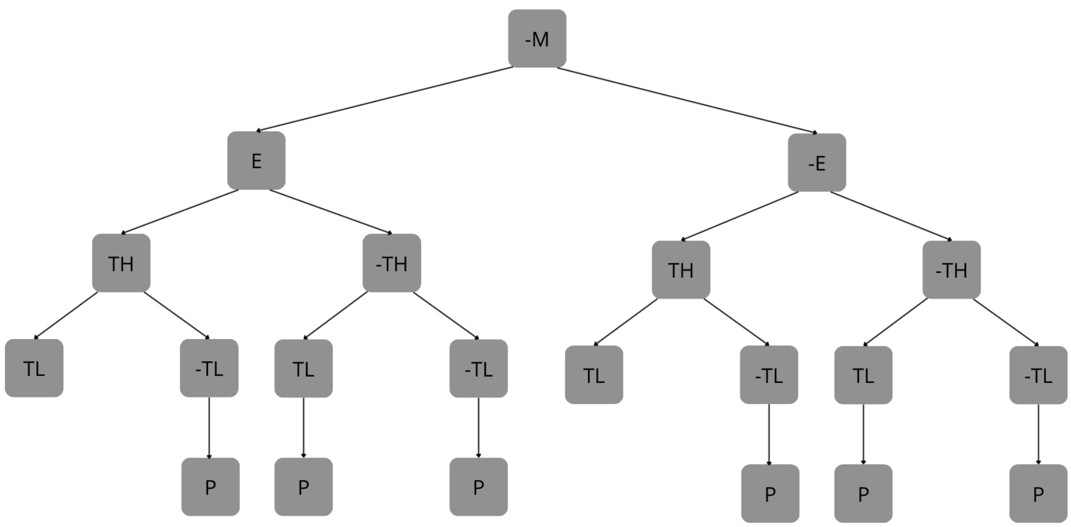
$$P(M \mid H) = \frac{P(M) \cdot P(H|M)}{\sum_{f \in \{None, E, M\}} P(f) \cdot P(H|f)}$$

Cálculo numérico:

- Numerador: 0.00001 · 0.10 = 1 · 10^-6
- Denominador: 0.99899 · 0.17 + 0.001 · 0.90 + 0.00001 · 0.10   0.1707293

$$P(M \mid H) = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0.1707293} \approx 5.8572 \cdot 10^{-6} \approx 0.000586\%$$





4. Cada día se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, M1 y M2. Una inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas. Hay un 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay un 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada y un 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. Si una unidad pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

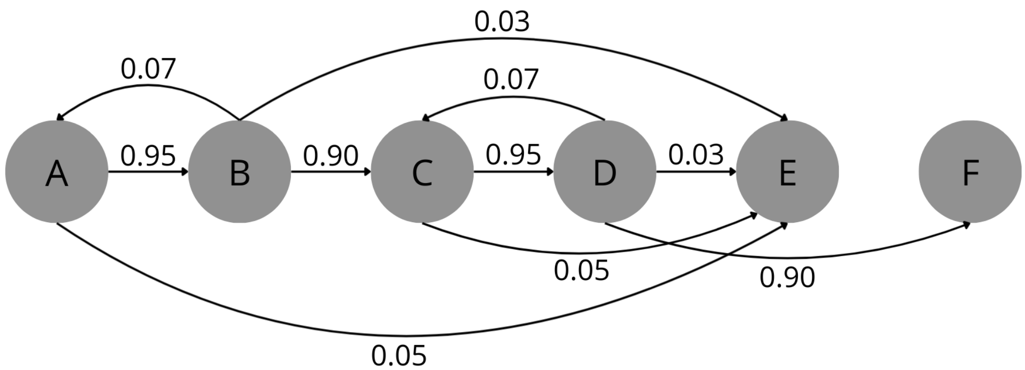
4.1 Dibuje la cadena de Markov que representa este problema y describa para cada estado si es transitorio, recurrente, o absorbente.

4.2 Arme la matriz de transición

4.3 Calcule la probabilidad de que una pieza que inicia el proceso en la máquina M1 sea desechada.

4.4 Calcule la probabilidad de que una pieza de la máquina M2 sea terminada.

4.5 Si los tiempos de procesamiento en las máquinas M1 y M2 son respectivamente de 20 y 30 minutos y los tiempos de inspección son respectivamente de 5 y 7 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en ser procesada una pieza que inicia en la máquina M1?



[5]:
```python
import numpy as np

# Matriz de Transicion
T = np.array([
    [0, 0.95, 0, 0, 0.05, 0],
    [0.07, 0, 0.9, 0, 0.03, 0],
    [0, 0, 0, 0.95, 0.05, 0],
    [0, 0, 0.07, 0, 0.03, 0.9],
    [0, 0, 0, 0, 1, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 1]
])
print("Matriz de Transición:\n")
print(T,"\n")

# --- 1. Definir los componentes de la matriz de transición ---
# Estados no absorbentes (M1 y M2)
# Estados absorbentes (Desechado y Bueno)

# N: Transiciones de estados no absorbentes a no absorbentes
N = np.array([
    [0, 0.95, 0, 0],  # M1 -> M1, M2
```

```python
    [0.07, 0, 0.9, 0],   # M2 -> M1, M2
    [0, 0, 0, 0.95],
    [0, 0, 0.07, 0]
])

# A: Transiciones de estados no absorbentes a absorbentes
A = np.array([
    [0.05, 0],  # M1 -> Desechado, Bueno
    [0.03, 0],  # M2 -> Desechado, Bueno
    [0.05, 0],
    [0.03, 0.9]
])

# --- 2. Calcular la matriz fundamental (I - N)^-1 ---
# Crear la matriz de identidad
I = np.identity(N.shape[0])

# Calcular (I - N)
I_minus_N = I - N

# Calcular la inversa de (I - N)
matriz_fundamental = np.linalg.inv(I_minus_N)

# --- 3. Calcular la probabilidad de absorción B = (I-N)^-1 * A ---
# Multiplicar la matriz fundamental por la matriz A
probabilidades_absorcion = np.dot(matriz_fundamental, A)

# --- 4. Mostrar los resultados ---
print("Matriz N:")
print(N)
print("\nMatriz A:")
print(A)
print("\nMatriz Fundamental (I-N)^-1:")
print(matriz_fundamental)
print("\nProbabilidades de Absorción:")
print(probabilidades_absorcion)

# Imprimir Respuestas

print(f"\nLa probabilidad de que una pieza que inicia en M1 sea desechada es: 
 ↪{probabilidades_absorcion[0, 0]:.4f}")
print(f"La probabilidad de que una pieza que inicia en M2 sea buena es: 
 ↪{probabilidades_absorcion[2, 1]:.4f}\n")



# --- 5. Tiempos ---
# Vector de Tiempos de M1 y M2
```

```python
tiempos = np.array([
    [20],
    [5],
    [30],
    [7]
])

tiempoDeProcesamiento = np.dot(matriz_fundamental, tiempos)
print("Los tiempos de prosesamiento de M1 y M2 son: ")
print(tiempoDeProcesamiento, "\n")

print("¿Cuánto tiempo tarda en ser procesada una pieza que inicia en la máquina␣
 ↪M1?")
print(tiempoDeProcesamiento[0])
```

```
Matriz de Transición:

[[0.   0.95 0.   0.   0.05 0.  ]
 [0.07 0.   0.9  0.   0.03 0.  ]
 [0.   0.   0.   0.95 0.05 0.  ]
 [0.   0.   0.07 0.   0.03 0.9 ]
 [0.   0.   0.   0.   1.   0.  ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   1.  ]]

Matriz N:
[[0.   0.95 0.   0.  ]
 [0.07 0.   0.9  0.  ]
 [0.   0.   0.   0.95]
 [0.   0.   0.07 0.  ]]

Matriz A:
[[0.05 0.  ]
 [0.03 0.  ]
 [0.05 0.  ]
 [0.03 0.9 ]]

Matriz Fundamental (I-N)^-1:
[[1.07123728 1.01767542 0.98115466 0.93209693]
 [0.07498661 1.07123728 1.03279438 0.98115466]
 [0.         0.         1.07123728 1.01767542]
 [0.         0.         0.07498661 1.07123728]]

Probabilidades de Absorción:
[[0.16111277 0.83888723]
 [0.11696081 0.88303919]
 [0.08409213 0.91590787]
 [0.03588645 0.96411355]]
```

```
La probabilidad de que una pieza que inicia en M1 sea desechada es: 0.1611
La probabilidad de que una pieza que inicia en M2 sea buena es: 0.9159

Los tiempos de prosesamiento de M1 y M2 son:
[[62.47244089]
 [44.70783251]
 [39.26084628]
 [ 9.74825924]]

¿Cuánto tiempo tarda en ser procesada una pieza que inicia en la máquina M1?
[62.47244089]
```

2 Bibliografía

Russell, S. & Norvig, P. (2004) *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno*. Pearson Educación S.A. (2a Ed.) Madrid, España

Poole, D. & Mackworth, A. (2023) *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press (3a Ed.) Vancouver, Canada