Miguel Gutierrez
Julian Ramirez

Taller Ecuaciones en diferencias #3

1.

$$x[k+1] = a x[k] + b$$

a) Para encontrar la solución particular Asumamos $x[k] = B$ (puesto que $x[k+1] - a x[k] = b$)

Luego

$$B = aB + b$$

$$(1-a)B = b$$

$$B = \begin{cases} \frac{b}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ x_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

$x[0]$

b) El polinomio Característico a la solución homogenea es

$$x[k+1] - a x[k] = 0$$

$$\lambda - a = 0$$

$$\lambda = a$$

Luego $x[k] = C_1 a^k$

c) Como la solución general es la particular + homogenea tenemos:

$$x[k] \begin{cases} C_1 a^k + \frac{b}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ x_0 + kb & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

2) Encuentre la solución a la ecuación

$$x[k+3] = 3x[k+2] - 3x[k+1] + x[k]$$

a) Como la solución es homogenea, tenemos

$$x[k+3] - 3x[k+2] + 3x[k+1] - x[k] = 0$$

Supongamos la solución de la forma

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda^1 - 1 = 0 \qquad \pm(1, \ldots)$$

λ^3	λ^2	λ	i
1	-3	3	-1
$1x$	1 $2x$	-2	1
1	-2	1	0
λ^2	λ^1	i	

$x = 1 \iff x - 1 = 0$

Luego

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda^1 - 1 = (\lambda^2 - 2\lambda^1 + 1)(\lambda - 1)$$
$$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 1)$$
$$= (\lambda - 1)^3 \qquad \lambda = 1$$

Como tenemos 3 raíces la solución es.

$$x[k] = C_1 + C_2 k 1^k + C_3 k^2 1^k$$
$$= C_1 + C_2 k + C_3 \cdot k^2$$

3. Considere la Serie Fibonacci.

Sabemos que la serie es

$K: \; 0 \quad 1 \quad 2$

$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13$

luego podemos ver que

$$F[K+2] = F[K+1] + F[K]$$, comenzando por el $K=0$

Para hallar una función que la reproduzca, recurrimos al polinomio característico.

$$F[K+2] - F[K+1] - F[K] = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

luego $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2(1)} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ llamemos $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

luego $$F[K] = A_1 \lambda_1^K + B \lambda_2^K$$

Sabiendo que $K=0 \Rightarrow F[0]=1$

$K=1 \Rightarrow F[1]=1$

tenemos que

(1) $1 = A_1\lambda_1^0 + B\lambda_2^0 \iff 1 = A + B$

(2) $1 = A_1\lambda_1 + B\lambda_2$

luego (si multiplicamos (1) por $-\lambda_1$. obtenemos:

(1)' $-\lambda_1 = -\lambda_1 A - \lambda_1 B$

$1 = \lambda_1 A + B\lambda_2$

$1-\lambda_1 = B(\lambda_2 - \lambda_1) \Rightarrow$

$$\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = B \iff B = \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-2\sqrt{5}}{2}} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{-\sqrt{5}\cdot 2}$$

$$B = \frac{1}{-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Luego $\lambda_2 = 1 - B$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

De esta manera la solución general es

$$F[K] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1}$$

4. Veamos que $\dfrac{F[K+1]}{F[K]} \xrightarrow[K\to\infty]{\lim} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Entonces

$$\frac{F[K+1]}{F[K]} = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{K+2}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{K+2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{K+2}}{\frac{1}{2^{K+1}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{K+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{K+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+\sqrt{5})^{K+2} - (1-\sqrt{5})^{K+1}}{(1+\sqrt{5})^{K+1} - (1-\sqrt{5})^{K+1}}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{(1+\sqrt{5})^{K+2}}{(1+\sqrt{5})^{K+1} - \underbrace{(1+\sqrt{5})^{K+1}}_{\approx 0}} - \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{(1-\sqrt{5})^{K+1}}^{\approx 0}}{\cancel{(1+\sqrt{5})^{K+1}} - \underbrace{(1-\sqrt{5})^{K+1}}_{\approx 0}}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$