Proyección Estereográfica

Juan Miguel Gutierrez Vidal

Marzo 13 del 2019

1. Proyección Estereográfica

La representación sistemática de parte o toda la superficie de un sólido 'redondo', se le denomina proyección. Ahora, no es posible representar la superficie de un de una esfera sobre un plano sin que se produzca algún tipo de distorsión. Cada proyección tiene sus características particulares y proporciona, en consecuencia, una imagen diferente de la superficie de la esfera. La proyección estereográfica tomo un papel importante a la hora de construcción de planisferios. En este informe nos enfocaremos en la proyección de la esfera de Riemann [1].

Figura 1: Planisferio de Rumold Mencantor

2. Esfera de Riemman

Para considerar la esfera de Riemann, es necesario consideremos la esfera de 3 dimensiones (x_1, x_2, x_3) , una esfera con radio 1 ,que cumple la siguiente ecuación.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (1)$$

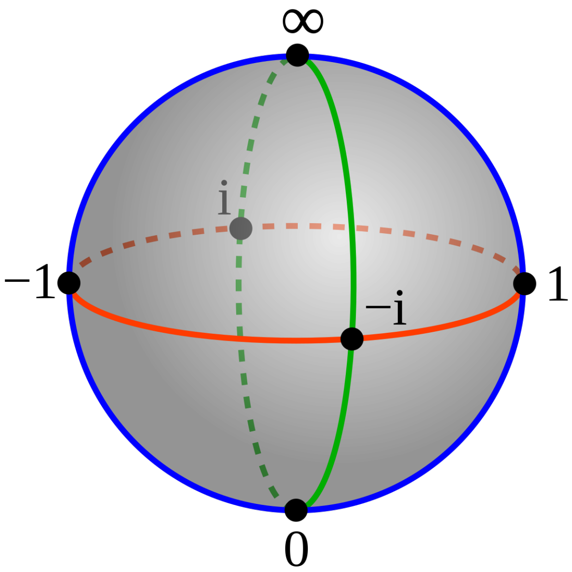

Figura 2: Esfera de Riemann

y sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección estereográfica (mapeo) definido como y teniendo en cuenta $z = x + iy$:

$$f(x, y, z) = \Big(\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\Big) \tag{2}$$

$$f(x, y, z) = \Big(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\Big) \tag{3}$$

La idea de esta proyección es asociar cada punta de $z = i + iy$ en el plano ecuatorial a un único punto Z en la esfera. Esto se logra construyendo una linea que pase por el polo norte $N = (0, 0, 1)$ de la esfera y el punto z en el plano (x, y). Los puntos que $|z| > 1$ tiende a proyectarse en el polo norte. Mientras que los puntos $|z| < 1$ tiende a proyectarse en lineas mas grande en la esfera [4].

3. Diagramas

3.1. Cardoide

El cardoide fue primeramente nombrada en el libro "Philosopical Transactions of the Royal Society.^{en} 1741 [2]. Tiene una amplia aplicación en Radares y Micrófonos. El micrófono escopeta y micrófono cardoide son aplicaciones de la vida real de esta función. Por ejemplo el micrófono cardoide toma sonidos con altitud si proveniente del frente pero pobremente si vienen de sus lados. Sus ecuaciones parametricas vienen dadas por:

$$x(t) = a(2cos(t) - cos(2t)) - 1.5; \tag{4}$$

$$y(t) = a(2sin(t) - sin(2t)) - 1.5; \tag{5}$$

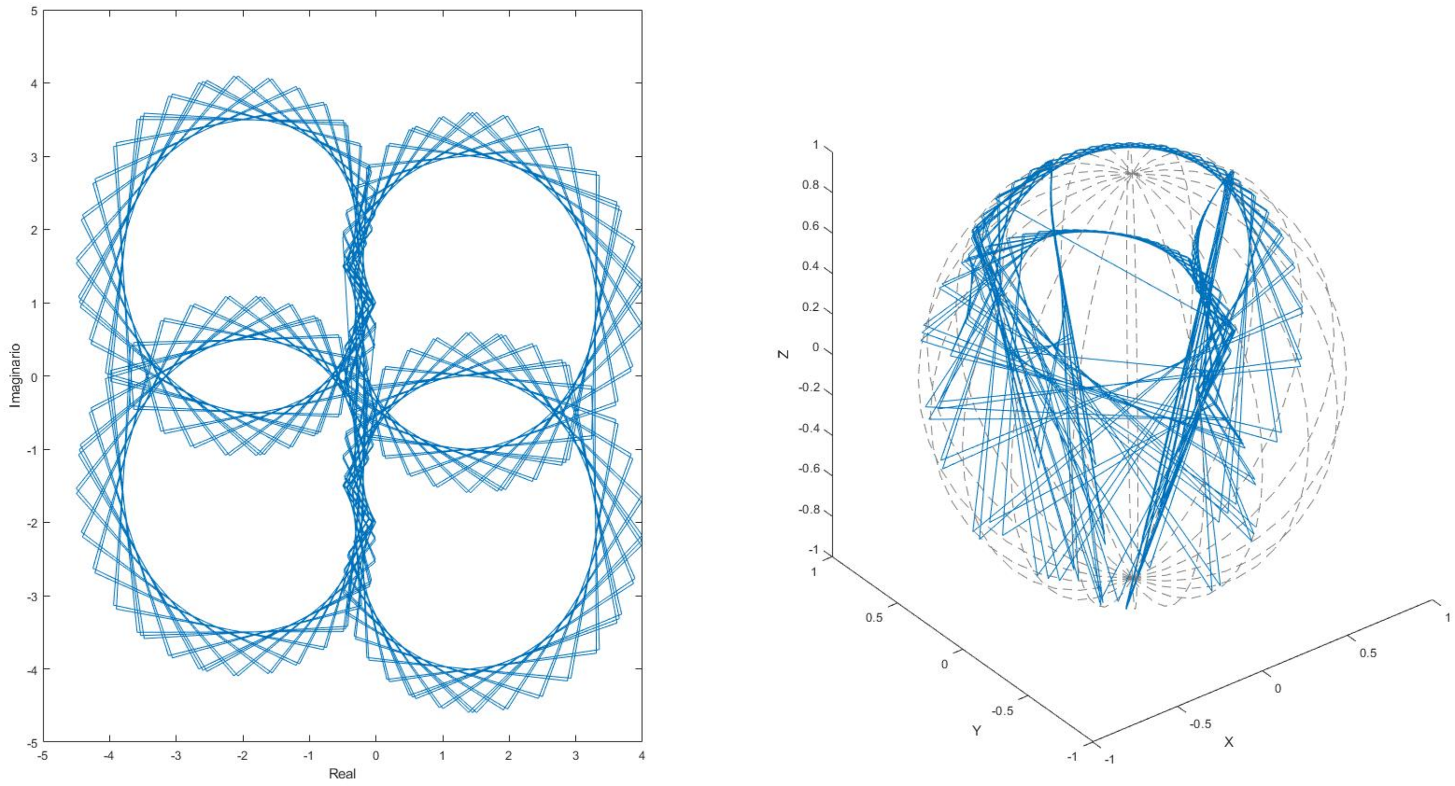

Figura 3: Proyección Estereografica del Cardoide

donde $0 \leq t \leq k\pi$ donde $k \in Z_+$

3.2. Corazon

Existen diversas funciones para graficar un corazón, sin embargo para complejizar su forma se dibujo corazones en una parábola, haciendo de alguna forma cada vez que se acercan formando un corazón 3D. En especifico las ecuaciones estan dadas por:

$$x(t) = cx + 0.1(15sin(t)^3) \tag{6}$$

$$y(t) = cy + 0.1(13cos(t) - 5cos(2t) - 2cos(3t) - cos(4t)) \tag{7}$$

donde $cx \in Re(\mathbb{C})$ y $cy \in Im(\mathbb{C})$. donde $0 \leq t \leq k\pi$ donde $k \in Z_+$

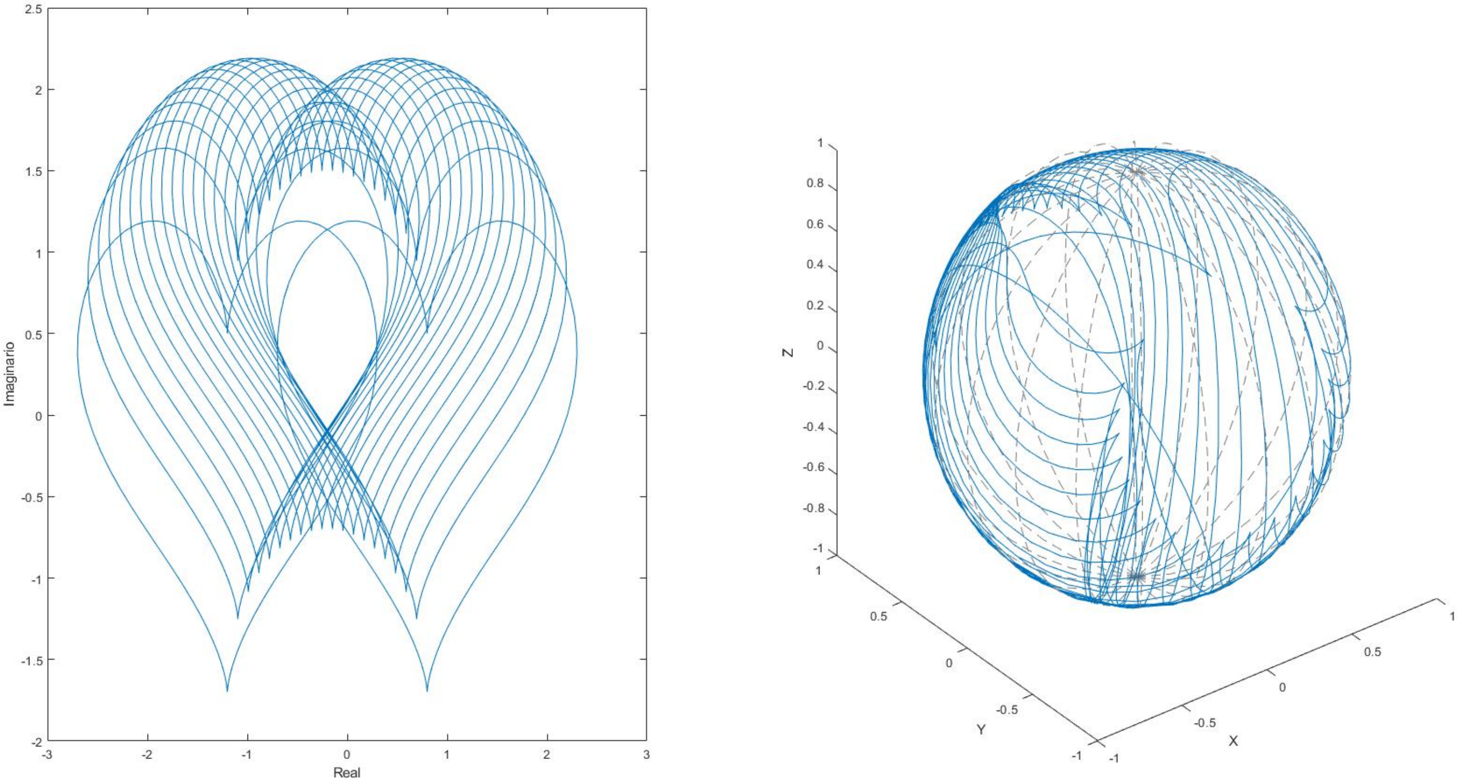

Figura 4: Proyección Estereográfica del Corazón

3.3. Curva de la Mariposa

La curva de la mariposa fue introducida por Temple H. Fay en 1989. Esta es una función transcendental es decir, no se puede expresar como una secuencia finita con las propiedades de la multiplicación,división y raíz. Sus ecuaciones están dadas por:

$$x(t) = sin(t)(exp(cos(t)) - 2cos(4t) - (sin(t/12)^5)); \tag{8}$$

$$y(t) = cos(t)(exp(cos(t)) - 2cos(4t) - (sin(t/12)^5)); \tag{9}$$

donde $0 \leq t \leq k\pi$ donde $k \in Z_+$

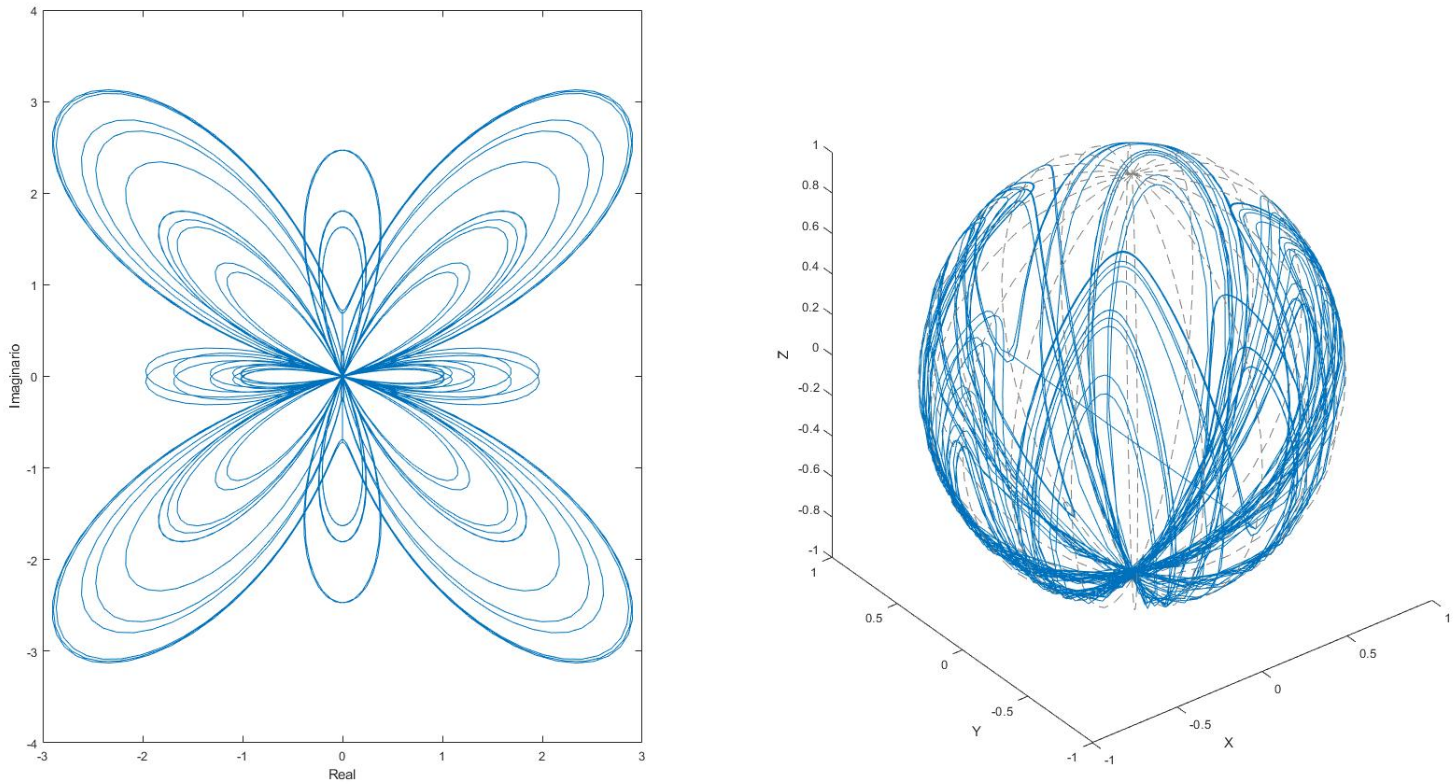

Figura 5: Proyección Estereográfica de la curva mariposa

3.4. Curva del astroide

El astroide es un tipo particular de hipocicloide, una curva con cuatro vertices. Fue originalmente propuesta por Joseph Johann Von Littwor en 1838. Se ha utilizado para la simulación de como se abre una puerta de un bus[3]. Sus ecuaciones están dadas por:

$$x(t) = acos(t)^3; \tag{10}$$

$$y(t) = asin(t)^3; \tag{11}$$

donde $0 \leq t \leq k\pi$ donde $k \in Z_+$

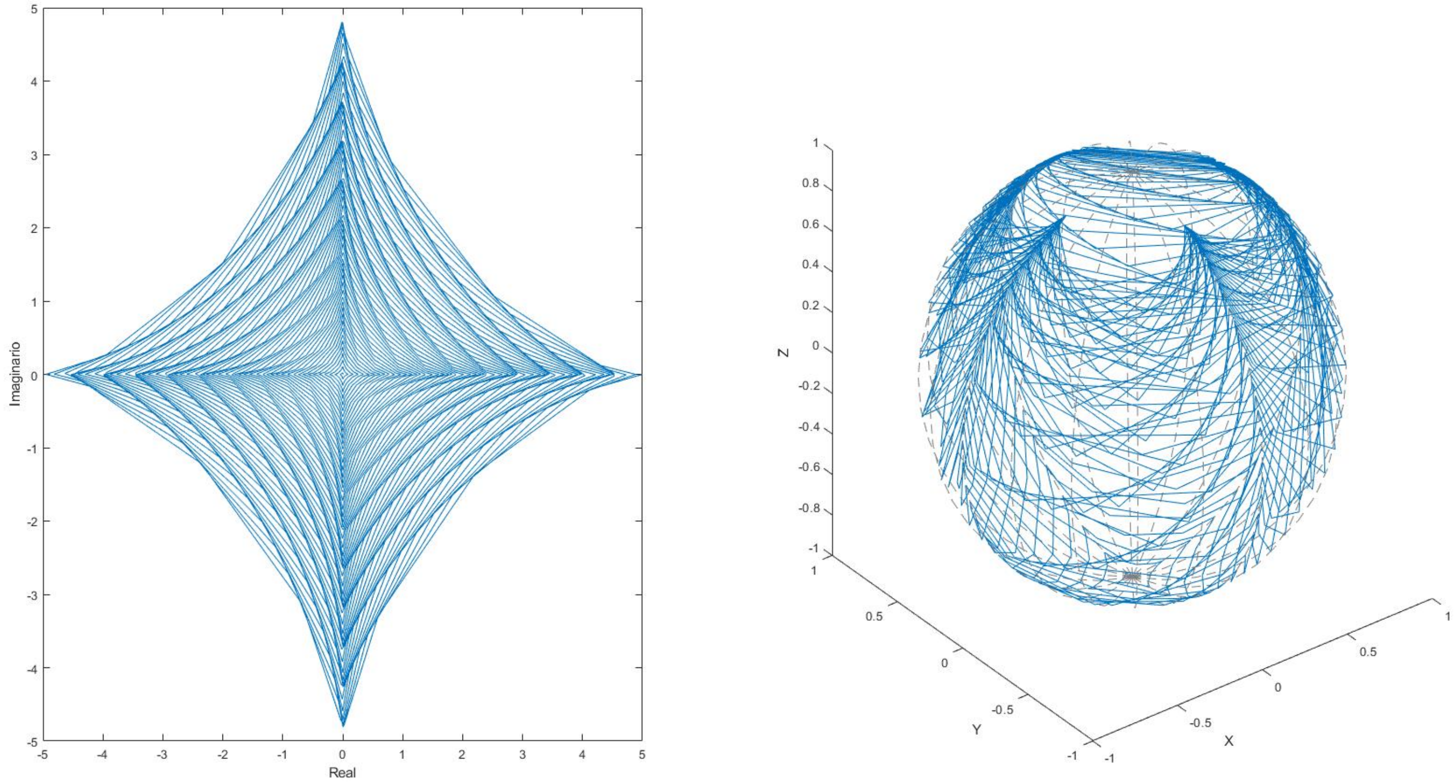

Figura 6: Proyección Estereográfica del astroide

4. Problema y solución al problema

4.1. Proyección Diagramas

El problema reside en crear figuras complejas en el plano (Real,Imaginario) de los números complejos. Para esto se generaba los vectores de x, y de las funciones dadas, y después se graficaban en el plano bidimensional. Posteriormente se utilizaban la función de proyección mostrada (2) ó (3), utilizando el pseudocódigo de Proyección de Diagramas (**Algorithm1**) para generar la proyecciones de las figuras en la esfera de Riemmann.

4.2. interfaz Gráfica

El problema reside en crear una interfaz gráfica que permita que el usuario cree su propia figura y esta se proyecte en tiempo real en la esfera de Riemann (**Algorithm3**). Para solucionar este primero, era necesario permitir que el usuario mediante clicks izquierdo , decidiera crear una nueva linea entre dos puntos o clicks derecho (**Algorithm2**) , partir esa linea y hacer otra figura nueva (**Algorithm4**) . Esto requiere que no solo se guarden los puntos seleccionados, si no que se pueda abstraer la linea, para proyectarla correctamente en la esfera de Riemann. Una vez echo esto, se creo el boton 'reset', que permite borrar todo lo creado para volver a comenzar a crear una nueva figura.

5. Pseudo-códigos

Algorithm 1: Proyeccion de Diagramas

Result: $[X, Y, Z]$ (Valores x,y,z para graficar la proyección)
X_{1*m}, Y_{1*m}; Datos generados por las funciones especificas
[X,Y,Z]=Proyección(X,Y):
$Z = X + iY$;
$X = [\quad]$;
$Y = [\quad]$;
$Z = [\quad]$;
for *i=1 to n* **do**
  $|z_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$;
  $z_i = \frac{2real(Z_i)}{(|Z_i|^2+1)}$;
  $y_i = \frac{2imag(Z_i)}{(|Z_i|^2+1)}$;
  $z_i = \frac{|Z_i|^2-1)}{|Z_i|^2+1}$);
  $X = [X \quad x_i]$;
  $Y = [Y \quad y_i]$;
  $Z = [Z \quad z_i]$;
end
return X,Y,Z

Algorithm 2: Inicialización Interfaz Gráfica

Result: $[X, Y, Z]$ (Valores x,y,z para graficar la proyección)
$Axes1, Axes2$; Graficas
Inicializacion(Axes1,Axes2):
crear_esfera(Axes2)
t = 0;
xtemp = [ ];
xtemp = NaN;
ytemp = NaN;
while *true* **do**
  [x,y,button]=recibe_click(Axes2,1 click)
  2
  ;
  if *click_derecho(button) == true* **then**
    x=NaN;
    y=NaN;
    xtemp = NaN;
    ytemp = NaN;
  end
  l1 , l2 =linea(x,y,xtemp,ytemp);
  t= t+1;
  xtemp = x ;
  ytemp = y ;
  graficar(x,y);
end
return

Algorithm 3: Crear Esfera de Riemann

Result:
$Axes1, Axes2$; Graficas
Crear_esfera(Axes2)):
X,Y,Z= crear_esfera(20 caras);
Graficar(X,Y,Z);
return X,Y,Z

Algorithm 4: Crear proyección linea entre dos puntos

Result: $[l1, l2]$ (Vectores de la linea entre los dos puntos)
$x, y, ytemp, xtemp \in R$;
l1 , l2 =linea(x,y,xtemp,ytemp):
x1 = x;
x2 = xtemp;
y1 = y;
y2 = ytemp;
ax+b = polyfit([x2,x1],[y2,y1],1);
if $(x1 \geq x2)$ **then**
| $x_p = \{x_1, ..., x_2\}$;
else
| $x_p = \{x_2, ..., x_1\}$;
end
l1 = $x_p * a + b$;
l2 = x_p;
return l1,l2

6. Bibliografia

- Juan Antonio Garcia Cruz (2006), La proyección estereográfica... sicut in caelo et in terra . Unión : revista iberoamericana de educación matemática.[1]

- Cardoid, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Cardioid.html[2]

- Wang, Bei Geng, Yuejie & Chu, Jixun. (2019). Generation and application of hypocycloid and astroid. Journal of Physics: Conference Series. 1345. 032085. 10.1088/1742-6596/1345/3/032085.[3]

- Saff, Edward B.; Snider, Arthur David (2003).Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics (3rd Edition) [4]

- GINPUT funtion to be used in GUIs, https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39799-ginput-funtion-to-be-used-in-guis?focused=3774986&tab=function [5]