Juan Miguel Guherrez Vidal - Julian Ramirez

Problema 1: TAller #7 MSD

4.2

$$x[K+1] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[K] \\ x_2[K] \end{pmatrix}$$

1) Hiramos matrices

$A[K] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \phi[0,0] = I$

2) Lo Hacemos en la forma matricial

$$\Phi[1,0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi[2,0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Phi[3,0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Phi[4,0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Luego $\Phi[4,0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 80 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$

$\phi[K,0] = \begin{pmatrix} 2^K & \\ & 2^K \end{pmatrix}$

3) Encontramos su patron

$$\phi[K,0] = \begin{pmatrix} 2^K & 2^{K-1}(K) \\ 0 & 2^K \end{pmatrix}$$

Problema: 2:

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x[k] \Rightarrow$$

$$x_1[k+1] = 1x_1[k] + (k+1)x_2[k];$$
$$x_2[k+1] = x_2[k])$$

2. Para el este caso evaluamos

$x_1[k] = A$

$x_2[k] = B$

luego

$kB + (k+1)B = B(2k+1)$

• $x[1] = \begin{pmatrix} A + B \\ B \end{pmatrix}$

• $x_2[2] = \begin{pmatrix} (A+B) + (2)B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+3B \\ B \end{pmatrix}$

• $x_3[3] = \begin{pmatrix} (A+3B) + (3)B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+6B \\ B \end{pmatrix}$

• $x_4[4] = \begin{pmatrix} (A+6B) + 4B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+10B \\ B \end{pmatrix}$

• $x_5[5] = \begin{pmatrix} A+10B+5B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+15B \\ B \end{pmatrix}$

4) Notemos que el patron es

$$X[K] = \begin{pmatrix} A + \sum K B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \frac{K(K+1)}{2} B \\ B \end{pmatrix}$$

luego X

$$X[K] = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{2} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 . Estos son soluciones independient en particular elegimos $A=0$ $B=1$, para el Primero y $B=1$ para el segundo

$$X[K] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol 1: $A=0, B=1$

Sol 2: $A=1, B=0$

$\Rightarrow$ sol 1: $\begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

sol 2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. luego.

$$\Phi[K,l] = \begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l(l+1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Phi[K,l] = \begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{l^2+l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{K(K+1)}{l(l+1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En este caso las condiciones iniciales son

$x_1[0] = 1 \to A$

$x_2[0] = 0 = B$

Pero notemos que de antes

$$x[5] = \begin{pmatrix} A+15B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

$$x[k+1] = A\,x[k]$$

Sabemos que $\Phi[k,0]$ es una matriz fundamental luego

$$x[k] = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k^2+k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos la propiedad $\Phi[k+1,0] = A\,x[k,0]$

$$\Phi[k+1,0]\,\Phi^{-1}[k,0]^{-1}$$

Como $\Phi[k,0]$ son L.I es una matriz invertible

Calculamos $\Phi[k;0]^{-1}$ computacionalmente:

$$k\Phi[k\,0]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k^2-k}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Ahora ... tenemos

$$\Phi[K+1,0] \cdot \Phi[K,0] = \begin{pmatrix} 1 & K+1 & \frac{K^2+3K+2}{2} \\ 0 & 1 & K+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -K & \frac{K^2-K}{2} \\ 0 & -1 & -K \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$