Taller Mandelbrot y Julia

Juan Miguel Gutierrez Vidal

22 de febrero de 2020

1. Conjuntos

1.1. Set de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot y Julia son ciertos fractales que se presentan en el plano complejo que nacen de las dinámicas que existen entre sus polinomios. Es necesario entonces que se considere la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_w = z^2 + w$ donde $z, w \in \mathbb{C}$ .Aquellos elementos que no divergen cuando se iteran, representan el conjunto de Mandelbrot. Para obtener una representación gráfica del conjunto, generalmente se evalúa su convergencia para diferentes números complejos w, si la función converge el numero complejo w se incluye en el conjunto, si no converge no se incluye.

Conjunto Mandelbrot 1.1.1

Formalmente un $c \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto de mandelbrot si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1} = z_n^2 + c| \nrightarrow \infty$ donde $z_0 = w$.

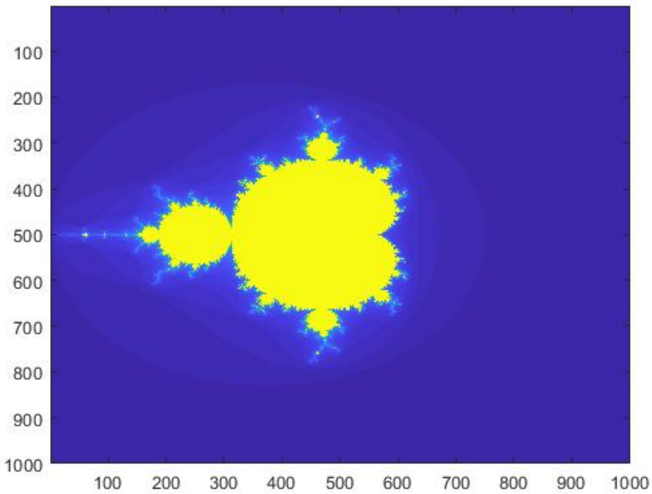

Figura 1: Conjunto de Mandelbrot

1.2. Set de Julia

De manera más general el conjunto de Julia son aquellas funciones de la forma $f_w = z^n + w$ donde $n \in R_+$. De manera análoga el conjunto de Julia se crea utilizando una constante w como semilla y diferentes valores de z .Para determinar si un punto z determina al conjunto de Julia con semilla w, se itera la formula $z_{k+1} = z_k^n + w$. Al igual que en el conjunto de Mandelbrot, para obtener una representación gráfica del conjunto de Julia, se evalúa la convergencia de la función para diferentes números complejos, dado una constante c, si la función converge el numero complejo se incluye, si no converge no se incluye.

Conjunto de Julia 1.2.1

Formalmente un $z \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto de Julia si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1} = z_n^k + c| \nrightarrow \infty$ donde $c \in \mathbb{C}$ y $k \in R_+$.

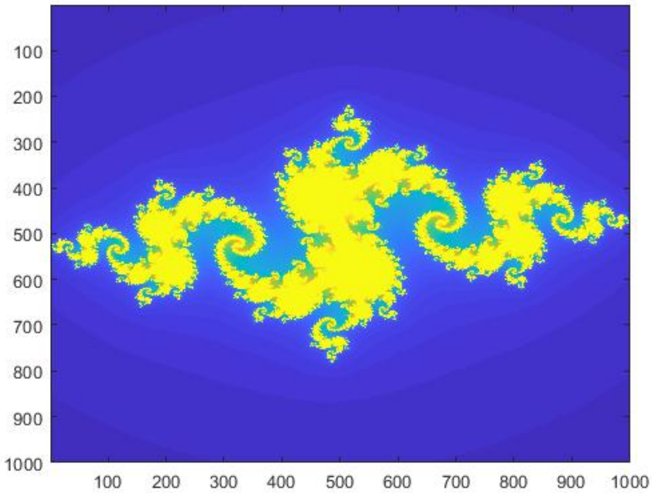

Figura 2: Conjunto de Julia con c = -0.8 + 0.156i

1.3. Convergencia - Tipos de orbitas

En términos del conjunto de Julia y Mandelbrot es necesario definir tipos de orbitas o lo mismo, su convergencia.

Tipos de orbitas 1.3.1

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un mapa polinómicos, y sea $\{z_1, z_2, z_3, .., z_n\}$ la orbita bajo la función f .

- Una orbita es acotada/converge si todos los puntos estan contenidos en un disco de radio infinito centrados en el origen. Esto es, la orbita esta acotadas si existe una constante $R > 0$ si para $|z_n| \leq$R
- Se dice que una orbita se escapa al infinito/no converge si $|z_n| \longrightarrow \infty$ si $n \longrightarrow \infty$

2. Pseudo-codigos

Algorithm 1: Set de Mandelbrot

Result: IT (Matriz con valores de convergencia de mandelbrot)

$it = 255;$
$b, a \in R;$
$x \in R_n;$
$y \in R_m;$
$Z_{nxm}, IT_{nxm} \in \mathbb{C};$
$X_{mxm} \quad , Y_{nxn}, \quad Z_{nxm} \quad (matrices),$

for *i=1 to n* **do**
  for *j=1 to m* **do**
    $valor[a, b] = Z[i, j]$
    $IT(i, j) = iteracion(a, b, it)$
  end
end

r=iteracion(a,b,it):

$x, x_0 = a;$
$x, y_0 = a;$
$iteracion = 0;$

while $x^2 + y^2 < 2$ *and* $iteracion < it$ **do**
  xtemp = $\mathrm{x}^2 - y^2 + x_0$;
  y = 2xy+y_0;
  x = xtemp;
  iteration = iteration +1;
end
return iteracion

Algorithm 2: Set de Julia

Result: IT (Matriz con valores de convergencia de mandelbrot)

$b, a, n \in R;$

IT=Julia(a,b,n):

$it = 255;$
$x \in R_n;$
$y \in R_m;$
$Z_{nxm}, IT_{nxm} \in \mathbb{C};$
$X_{mxm} \quad , Y_{nxn}, \quad Z_{nxm} \quad (matrices),$

for *i=1 to n* **do**
  for *j=1 to m* **do**
    $valor[a, b] = Z[i, j]$
    $IT(i, j) = iteracion(a, b, it)$
  end
end
return IT

r=iteracion(a,b,it):

$x, x_0 = a;$
$x, y_0 = a;$
$iteracion = 0;$

while $x^2 + y^2 < 2$ *and* $iteracion < it$ **do**
  xtemp = $\mathrm{x}^2 - y^2 + x_0$;
  y = 2xy+y_0;
  x = xtemp;
  iteration = iteration +1;
end
return iteration

Algorithm 3: Generación Imágenes y vídeo

Result:
$a, b, n \in R$;
v = VideoWriter('Julia_n.avi');
v.FrameRate=20;
v.Quality = 100;
open(v);
for *n =2:0.01:5* **do**
  IT = Julia1(a,b,n);
  imagesc(IT);
  F = getframe(gcf);
  writeVideo(v,F);
end
close(v);
"listo"

3. Demostración Convergencia Julia y Mandelbrot

3.1. Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot consiste en las constantes $c \in \mathbb{C}$ tales que la secuencia es acotada. De tal manera si $z_n \nrightarrow \infty$ significa el numero c utilizado para la secuencia pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Se clama que $|z_n| > 2$ para algún R, entonces por definición de orbitas $|z_{n|}$ tiende a infinito o converge, por lo tanto c no pertenece en el conjunto. Este 2 se llama el radio de escape". Luego la prueba consiste en dos casos:

- $|c| \leq 2$. Entonces $|z_{n+1}| \geq |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c|$ por desigualdad triangular.Luego $|z_n|^2 - |c| > 2|z_n| - 2$. Reescribiendo el termino $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| > 2|z_n| - 2$. Note que $|z_n| - 2$ tiende a infinito.
- $|c| > 2$, luego como $|z_0| = |c|$ entonces $|z_1| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| > |c|$. De manera iterativa $|z^2 + c||z^2| - |c| > 2|z| - |c|$. Si $|z| > |c|$ entonces $2|z| - |c| > |z|$. Luego cumplidas estas condiciones entonces $|z^2 + c| > |z|$. Luego la secuencia se esta incrementando y tiende a infinito.

En cualquier caso z_n tiende a infinito, por lo tanto si $|z_n| > 2$ no converge, luego es necesario $|z_n| \leq 2$ para que la serie/orbita convergencia.

3.2. Julia

Sea $Z_{n+1} = Z_n^p + c$, luego es necesario ir más allá de convergencia e utilizar iteración de punto fijo. de tal manera que uno elige un punto fijo z_0 Por criterio de punto fijo si se satisface que $'|g(z)| < 1$ donde $g(z) = z^p + c$. Entonces z_n es un punto linear atractivo. y si $'|g(z)| > 1$ es un punto de expansión fijo. Note que $'|g(z)| = p|z|^{p-1} < 1$ luego $|z| < (\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}}$ las potencias p que cumplen tal propiedad son convergentes.

Referencias

[1] The Mandelbrot Set AndIts Associated Julia Sets,Hermann Karcher

[2] http://www.alunw.freeuk.com/mandelbrotroom.html

[3] https://math.stackexchange.com/questions/890190/mandelbrot-sets-and-radius-of-convergence2—zn—2.

[4] Alexander Caicedo, Universidad del Rosario (2019)

[5] Julia Sets and the Mandelbrot Set http://faculty.bard.edu/ belk/math323s11/JuliaSets.pdf