Universidad del Rosario

Ecuación de Burguers

Juan Miguel Gutiérrez Vidal

28 de agosto del 2020

1. Introducción

La ecuación de Burguers-Bateman es una ecuación diferencial parcial fundamental que sucede sorprendentemente en diversas áreas como la mecánica de fluidos, acústica no lineal, dinámica de gases y el flujo de tráfico. La ecuación fue introducida por primera vez por Harry Bateman en 1925 y más tarde estudiada por Martinus Burguers en 1948. La ecuación de Burgues es una forma simplificada de la ecuación de Navier Strokes que explica de manera muy precisa la mecánica de los fluidos. En este trabajo consideraremos la ecuación de Burgers que trabajo como se comportan los fluidos en 1-dimensión la cual es

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{1.1}$$

Donde si $\varepsilon > 0$ se conoce como la ecuación viscosa de Burguers. Cuando $\varepsilon = 0$ se conoces como ecuación inviscible (sin viscosidad), donde con seguridad cuando $u_x = 0$, es el caso cuando la masa se conserva.

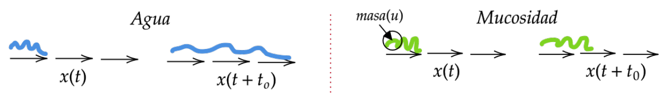


Figura 1: El agua mueve mas rápido su masa que la mucosidad. Donde la ecuación de Burguers nos permite encontrar de manera precisa donde se encuentra la masa u distribuida en cada momento del tiempo t

.

Primero trabajaremos entonces viendo como funciona esta ecuación sin viscosidad en las leyes de conservación de energía y ondas de choques. Dos ejemplos en general de usos de esta ecuación son el choque generado por un avión supersónico o el péndulo de newton.

2. Conservación de energía y ondas de choques

La existencia del teorema de las ecuaciones lineares solo garantiza, bajo ciertas condiciones la existencia de una solución local. La ecuación de burguers sin viscosidad, juega un papel importante en hidrodinámica, donde u es el coeficiente de difusión, u_x es el cambio de flujo de masa con cierta concentración u de cierta masa x, la variable t es el tiempo. Consideremos la ecuación de burguers sin viscosidad, esto es

$$u_t + uu_{xx} = 0$$

La condición inicial que propondremos sera entonces $u(x,0) = h(x)$. Esto es en el tiempo 0, el coeficiente de difusión toma un valor de $h(x)$, en otras palabras, nos dice en el flujo de masa con concentración u, en el tiempo inicial es de $h(x)$, una función que depende de la masa en ese momento. Tomando s como parámetro en la ecuación general sin viscosidad de burguers (Ecuación 1.1)(Utilice y en vez de t, ya que las ecuaciones como la formule depende de t) obtenemos

$$x_y = u, \quad t_y = 1, \quad u_y = 0$$
$$x(y,s) = uy + f_1(s), \quad t(y,s) = y + f_2(s), \quad u(y,s) = f_3(s)$$

Entonces cuando pasa por la curva $\Gamma(s) = \langle s, 0, h(s)\rangle = \langle x_0(s), y_0(s), u_0(s)\rangle$, sabemos que

$$x(y,s) = uy + s, \quad t(y,s) = y, \quad u(y,s) = h(s)$$

De esta manera

$$\langle x(y,s), t(y,s), u(y,s)\rangle = \langle uy + s, y, h(s)\rangle \tag{2.1}$$

Ahora buscando la forma cartesiana de la superficie despejando de arriba, obtenemos que las ecuaciones características son $t = y$, $s = x - ut$ y $u = h(s)$. De esta forma nuestra solución es entonces

$$u(x,t) = h(x - ut)$$

Excepto que esta vez la solución es actualmente implícita ! Note que de la ecuación 2.1 podemos obtener $x = s + h(s)t$. Esta última ecuación implica que para cada s fijo con las otras característica, u preserva su valor $u = h(s)$ (Es fijo). Las otras ecuaciones características implican entonces que , las características son lineas rectas (Dependen linealmente de sus variables y, s).

Note que si dejamos que $s = x_0$ y $h(x) = u_0(x_0)t$, donde $t > 0$. Podemos obtener que

$$x = x_0 + u_0(x_0)t, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

Nos permite calcular y construir una solución discreta de $u_0(x_0)$ sobre la linea característica 2.2. Donde podremos ya después obtener gráficas de $x_0(x,t)$ *vs* t. **a)** notemos que las ecuaciones características depende linealmente de t, por lo tanto son rectas.

El problema de esta solución ocurre cuando las curvas características se interactúan. Consideremos $u_x = h'(1 - yu_x)$, lo que implica que

$$u_x = \frac{h'}{1 + th'}$$

b) Note que cuando $1 + t_\infty h' = 0$, la solución no se encuentra definida. Más especificamente

$$t_\infty = -\frac{1}{h'(s)} \tag{2.3}$$

Como el tiempo es positivo, cualquier solución mayor a este $t > t_\infty$, tampoco es solución, dado que si no es solución para t_∞, es imposible calcular también su valor para el tiempo t. Esta es concluyente con interpretaciones físicas. De echo es necesario que $h'(s) < 0$. Esto es la velocidad de los puntos s esta íntimamente relacionada con la posición en que se encuentra. No vamos a encontrar puntos $s_1 < s_2$, tal que s_1 se mueva mas rápido que s_2. Cuando el tiempo es t_∞ el problema del valor inicial inicial no tiene una solución única en algún punto de la solución. Sin embargo eso no implica que en la física el fluido no se siga moviendo (De echo los fluidos siguen moviéndose), por lo que es necesario extender la solución para evitar este inconveniente. Para solucionar este problema, es necesario permitir discontinuidades en u, tales discontinuidades se llaman *Choques*. Para este la ecuación se reescribe

$$\frac{1}{dt}u(x,t) + \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{dx} = \frac{1}{dt}u(x,t) + [f(u)]_x = 0 \ , \quad f(u) = \frac{u(x,t)^2}{2}$$

Si integramos respecto a x para un fijo t sobre un intervalo arbitrario $[a,b]$ y construimos una solución débil para una función continuamente diferencialmente excepto a lo largo de la curva $x = \gamma(t)$, como la solución es suave a ambos lados de γ, nos queda encontrarlo y computarlo.

$$\begin{aligned} d_t \int_a^b u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}[u^2(b,t) - u(a,t)] = 0 \\ dt\left[\int_a^{\gamma(t)} u(\xi,t)d\xi + \int_{\gamma(t)}^b u(\xi,t)d\xi\right] + \frac{1}{2}[u^2(b,t) - u(a,t)] = 0 \end{aligned}$$

Diferenciando la integral con respecto a t y utilizando la integral de Leibniz[1] obtenemos :

$$\begin{aligned} dt\int_a^{\gamma(t)} u(\xi,t)d\xi &= -\int_a^{\gamma(t)} \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{d\xi}d\xi + u(\gamma(t),t)\cdot\gamma_t(t) - u(\gamma(t),t)\cdot 0 \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^{\gamma(t)} (u^2(\xi,t))_\xi d\xi + \gamma_t(t)u^- \\ &= -\frac{1}{2}[u^2(\gamma(t),t) - u^2(a,t)] + \gamma_t(t)u^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt\int_{\gamma(t)}^b u(\xi,t)d\xi &= -\int_{\gamma(t)}^b \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{d\xi}d\xi + u(b,t)\cdot 0 - u(\gamma(t),t)\cdot\gamma_t(t) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\gamma(t)}^b (u^2(\xi,t))_\xi d\xi + \gamma_t(t)u^+ \\ &= -\frac{1}{2}[u^2(b,t) - u^2(\gamma(t),t)] + \gamma_t(t)u^- \end{aligned}$$

Con esto podemos llegar a

$$\begin{gathered} \gamma_t(t)u^- - \gamma_t(t)u^- - \frac{1}{2}[u^2(\gamma(t),t) - u^2(a,t)] - \frac{1}{2}[u^2(b,t) - u^2(\gamma(t),t)] + \frac{1}{2}[u^2(b,t) - u(a,t)] = 0 \\ \gamma_t(t)u^- - \gamma_t(t)u^- - \frac{1}{2}[u^2(\gamma(t),t) - u^2(\gamma(t),t)] = 0 \\ \gamma_t(t)(u^+ - u^-) - \frac{1}{2}[(u^+ - u^-)(u^+ + u^-)] = 0 \\ (u^+ - u^-)(\gamma_t(t) - \frac{1}{2}(u^+ + u^-)) = 0 \end{gathered}$$

[1] La integral de Leibniz es

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{df}{dx}dt + f(h(x),x)\cdot h'(x) - f(g(x),x)\cdot g'(x)$$

Luego

$$\gamma_t(t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Esta condición nos dice que la tasa de cambio de la cantidad total de u en cualquier sección $x_2 < x < x_1$, debe estar balanceado por el flujo neto de entrada x_1 y x_2. Este $\gamma(t)$ nos dice a cuanto se mueve la velocidad en la cerca a la discontinuidad. Generalmente esta solución débil no nos permite explicar todas las situaciones y tampoco nos garantiza unicidad. Para ello existe la condición de entropía que para dado una discontinuidad de la forma $\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$, esta satisface la condición de entropía si $f'(u_2) > \gamma > f'(u_1)$. Para la ecuación de burguers se reduce que si sucede una discontinuidad que se propaga con velocidad $\dot{s}$, entonces $u_2 > u_1$ (Recordemos u_1, u_2 son los valores cuando tienden a $\gamma(t)$).

3. Método Numérico

En este punto, debemos estar convencidos de la complejidad de la no-linealidad que se esconde desde el puto de vista de análisis matemático. Esta complejidad también surge cuando queremos solucionar la ecuación de burguers utilizando métodos numéricos. Problemas mayores surgen cuando tratamos de aproximar las soluciones en la que admitimos discontinuidades, tales que no cumplan alguna condición para que poder encontrar una solución débil del problema. En este parcial trabajaremos con el método Viento Arriba (Wind up).

3.1. Viento Arriba (Up-wind)

Si consideramos la ecuación de burguers

$$\frac{1}{dt}u(x,t) + [f(u)]_x = 0$$

Donde utilizamos las diferencias finitas estándares discretas, de esto obtenemos el método de conservación llamado Viento Arriba conservativo

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[f(U_j) - f(U_{j-1}^n)\right]$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[\frac{1}{2}(U_j^{n+1})^2 - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n)^2\right]$$

4. Ensayos Numéricos

Para nuestro ensayo numérico, vamos a tener en cuenta un problema que tendremos que después ajustar ya que posee una onda de choque.

(Ejemplo 2.14). En este problema trabajaremos con un ejercicio el cual posee una discontinuidad y tenemos que solucionarlo ya que posee una onda de choque en el cual la condición inicial es de la forma

$$u_0(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x/\alpha & \text{si } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \tag{4.1}$$

Puesto que $u_0(x)$ no es monótona creciente, la solución va desarrollar una singularidad positiva. Utilizando la formula (2.3), podemos hallar su punto de choque, esto nos implica que para $0 < x < \alpha$, $h'(x) = -1/\alpha$ y por lo tanto $t_\infty = \alpha$. Para todo $t < \alpha$. Recordemos que la solución que hallamos es de la forma $u(x,t) = h(x - ut)$, donde para el caso $x < 0$, y $x > \alpha$, se mantiene igual, pero note que para $t < x < \alpha$

$$\begin{aligned} u = 1 - \frac{1 - ut}{\alpha} &= 1 - \frac{x}{\alpha} - \frac{ut}{\alpha} \\ u(\frac{\alpha - t}{\alpha}) &= \frac{\alpha - x}{\alpha} \\ u &= \frac{x - \alpha}{t - \alpha} \quad \text{(Factorizando el negativo)} \end{aligned}$$

Luego la solución para $t < \alpha$

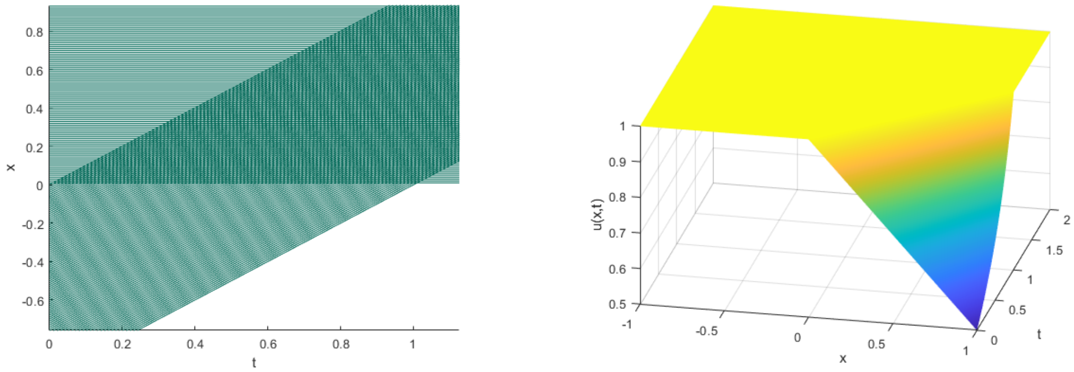
$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t \\ \frac{x-\alpha}{t-\alpha} & \text{si } t < x < \alpha \\ 0 & \text{si } t \geq \alpha \end{cases}$$

Sin embargo como vimos que en el tiempo t_∞, se genera una solución y debemos solucionarlo, Notemos que cuando la condición inicial $x < t$, queremos que $u = 1$ y cuando $t > \alpha$, la condición sea $u = 0$. En otras palabras $u^- = 1$ y $u^+ = 0$, luego nuestra curva definida por la condición de Rankine-Hugonoit, la formula (2.3), nos plantea que que

$$\begin{aligned} \gamma_t(t) &= \frac{1}{2}(1 + 0) \\ x = \gamma(t) &= \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Adicionalmente queremos que nuestra curva $x = \gamma(t)$ contenga el punto $(x,t) = (\alpha, \alpha)$[4], por lo tanto, nuestra curva debe estar dada por $(x - \alpha) = \frac{1}{2}(t - \alpha)$, o $x = \alpha + \frac{1}{2}(t - \alpha)$, por lo tanto para $t > \alpha$, tenemos que :

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \alpha + \frac{1}{2}(t - \alpha) \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha + \frac{1}{2}(t - \alpha) \end{cases} \tag{4.2}$$



(a) Lineas características (b) Solución característica

Figura 2: Las figuras nos muestran en la primera las lineas características. Donde se intersectan de forma concurrente se conoce como choque para la condición inicial del choque para $dt = 0.01$ y $\alpha = 2$, para el ejemplo 2.14

(Ejemplo 2.15). En este problema consideraremos el caso opuesto, donde la condición inicial esta aumentando

$$u_0(x) = h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x/\alpha & \text{si } 0 < x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

8Puesto que esta vez $h'(x) = 1/\alpha > 0$, no existe tiempo critica donde las características intersectan. De echo, divergen. Esta situación es llamado la *onda de expansión*, en contraste la onda en el ejemplo previo el cual es llamado *onda de compresión*, utilizamos la solución clásica para obtener cuando $0 < x < \alpha$, y para los otros note que se mantiene la solución

$$\begin{aligned} u = \frac{x - ut}{\alpha} &= \frac{x}{\alpha} - \frac{ut}{\alpha} \\ u(\frac{\alpha + t}{\alpha}) &= \frac{\alpha}{x} \\ u &= \frac{x}{\alpha + y} \end{aligned}$$

$$u_0(x) = h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha+y} & \text{si } 0 < x < \alpha + y \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha + y \end{cases}$$

Es útil considerar el caso cuando $\alpha \to 0$. En este ejemplo las características se expanden, una vez la singularidad se suaviza una vez, y la solución es

$$u_0(x) = h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{y} & \text{si } 0 < x < \alpha + y \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha + y \end{cases}$$

Notemos que la solución débil es igual a la del ejemplo 2.14, dado que $\gamma(t) = \frac{1}{2}t$, $u^- = 0$ y $u^+ = 1$. Luego la solución es de la forma

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \alpha + \frac{1}{2}(t-\alpha) \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha + \frac{1}{2}(t-\alpha) \end{cases}$$

(Asignación Propuesta, punto d)).(Me di cuenta el que presente en clase fue el c) no el d)). Consideremos la función asignada

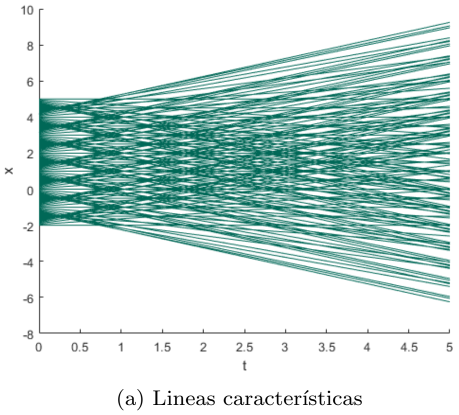
$$u_0(x) = h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases} \tag{4.3}$$

Esta función aplicada a la solución de burguers obtenemos 1) que no posee discontinuidades ya que $h'(t) = 1/2$, luego $t_\infty = -2$, por que $t > 0$, 2) Para Notemos que la solución diferente a la condición $0 < x < 1/2$ se mantienen iguales, luego

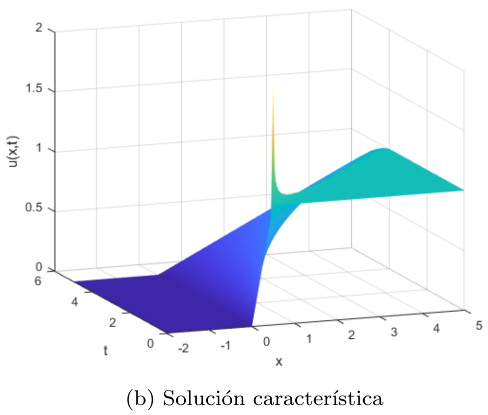
$$\begin{aligned} u &= 2(x - ut) \\ u(1+2t) &= 2x \\ u &= \frac{2x}{1+2t} \end{aligned}$$

No tenemos que recurrir a solución débil ya que no se presenta un caso con solución débil, entonces la solución es

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t \\ \frac{2x}{1+2t} & \text{si } t < x < 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases} \tag{4.4}$$

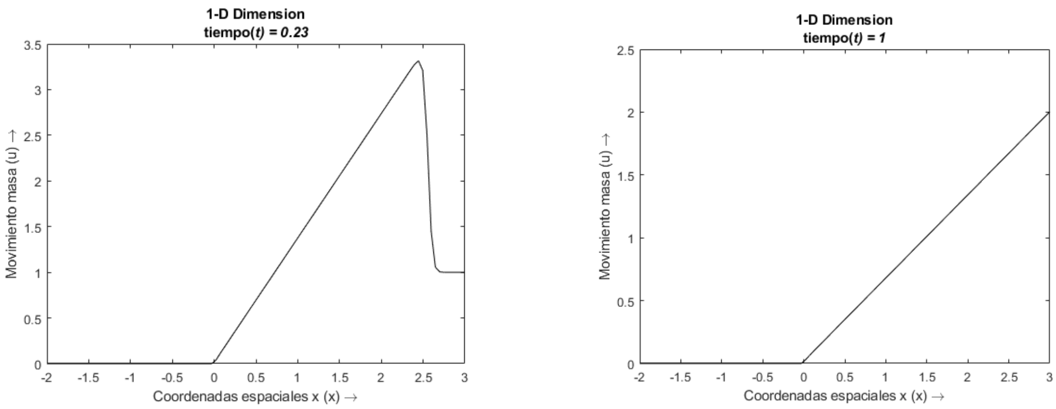


(a) Lineas características



(b) Solución característica

Figura 3: Las figuras nos muestran en la primera las lineas características, y en la segunda la solución numérica encontrara, que se comporta de manera muy similar a la hallada analíticamente, primero comienza en 0, luego aumenta de manera proporcional a $\frac{2x}{1+2t}$ y al final toma el valor de 1.



(a) $t = 0.23$ (b) $t = 1$

Figura 4: Podemos ver que a medida que pasa el tiempo, no esperamos que la función se rompa en algún tiempo, confirmando nuestra solución analítica está bien.

5. Conclusiones

- A pesar de que la ecuación de Burguers sea una simplificación del problema de Navier Strokes (3D), termina siendo muy útil para entender que estamos tratando de solucionar y como podemos ver sus soluciones.
- Algunos problemas no posee únicas soluciones, y es aquí donde es necesario entrar a suponer algunas condiciones para poder encontrar una solución única.
- Las lineas características, nos permiten inferir de manera fácil, desde que momento comienza a surgir una onda de choque.
- La ecuación de Burguers nos permite con precisión saber donde se encontrara un fluido con cierta masa en un cierto tiempo t.

Referencias

[1] Pinchover, Y., & Rubinstein, J. (2005). An Introduction to Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511801228

[2] Mikel Landajuela. (2011). Burguers Equation. BCAM Internship - Summer 2011.

[3] Suraj Shankar (2020). Advection in 1D and 2D , MATLAB Central File Exchange. Retrieved August 30, 2020. (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38085-advection-in-1d-and-2d)

[4] Julie Levandosky, Yanping Pan & Kumar Muthuraman. Conservation Laws. Stanford University.