Onda Dispersiva

Juan Miguel Gutiérrez Vidal

20 de noviembre de 2020

1. Punto 1

1.1. Punto a

$$\begin{aligned} a^{-2}u_tt + \gamma^2 u = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vamos asumir que la solución es de la forma

$$u = X(x)T(t)$$

Tambien vamos asumir que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Por lo tanto lo primero que debemos hacer es resolver la ecuación diferencial.

$$X'' - \lambda X = 0$$

Para el caso donde $\lambda \geq 0$, no se obtienen soluciones diferentes de cero. Para $\lambda < 0$ la solución es de la forma

$$X = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Por la condición de frontera $u(0,t) = 0$ tenemos que

$$X(0)T(t) = 0 \rightarrow AT(t) = 0 \rightarrow A = 0$$

Ahora al utilizar la otra condición de frontera $u(L,t) = 0$ tenemos que

$$X(L)T(t) = 0 \rightarrow B\sin(\sqrt{-\lambda}L)T(t) = 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda}L = n\pi$$

Al despejar λ obtenemos que

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

, donde finalmente obtenemos el comportamiento de X, el cual es

$$X = B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

La solución particular s puede expandir como una serie de Fourier, donde la solución particular tiene la forma de

$$u(x,t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)T_n(t)$$

Procedemos a calcular sus segundas derivadas donde obtenemos que :

$$u_{tt}(x,t) = \frac{T_0(t)''}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) T_n(t)'' = 0 \tag{1.2}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{i=1}^{\infty} B_n \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) T_n(t) \tag{1.3}$$

Al remplazar en la ecuación de onda 1.1 no homogénea, obtenemos que

$$\frac{T_c'' + a^2\gamma^2 T_0}{2} + \sum^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(T_n'' + \frac{a^2n^2\pi^2}{2^2}T_n + a^2\gamma^2 T_r\right) = 0 \tag{1.4}$$

De acá tenemos que resolver dos ecuaciones:

- $T_0'' + a^2\gamma^2 T_0 = 0$, al solucionar la ecuación diferencial de segundo orden obtenemos
$$T_0 = A_0 \sin(a\gamma t) + C_0\cos(a\gamma t)$$
- $T_n'' + T_n\left(\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2\right) = 0$, al solucionar la ecuación, obtenemos que
$$T_n = A_n \sin\left(\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2 t}\right) + C_n\cos\left(\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2 t}\right)$$

A final remplazando las dos ecuaciones solucionadas anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0\sin(a\gamma t) + C_0\cos(a\gamma t)}{2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[= A_n \sin\left(\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2 t}\right) + C_n\cos\left(\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2 t}\right)\right] \end{aligned}$$

Luego evaluando en las condiciones inicial $u(0,t) = 0$ obtenemos

$$u(x,0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.5}$$

De acá hallamos que

$$B_n C_n = a_n \Rightarrow a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}x\right)dx \tag{1.6}$$

Evaluando en la condición inicial $u(L,t) = 0$

$$u_t(x,t) = \frac{a\gamma A_0}{L} + \sum_1^\infty B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) An\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} + a^2\gamma^2} = 0 \tag{1.7}$$

Podemos notar que el valor de los coeficientes es entonces

$$A_0 = 0, A_n = 0$$

Por lo tanto la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty c_n \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2 at}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}x\right) \tag{1.8}$$

con

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}x\right) \tag{1.9}$$

1.2. Punto b

Tomemos $w = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2 at}$ y $k = \frac{n\pi x}{L}x$, utilizando la identidad trigonométrica producto suma

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

,

podemos llegar a

$$\operatorname{sen} k \cos w = \frac{\operatorname{sen}(w+k) + \operatorname{sen}(k-w)}{2} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} k = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2 at} = \frac{n\pi/L}{n\pi/L}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2 at} &= \frac{n\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2\right]at} \\ &= \frac{n\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2\right]at} \\ &= \frac{n\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{\gamma L}{n\pi}\right)^2 + 1at} \end{aligned} \tag{1.11}$$

acá nos damos cuenta que ,

$$a_n = \sqrt{\left(\frac{\gamma L}{n\pi}\right)^2 + 1a} \tag{1.12}$$

ya que en la suma de $k+w$ tanto como $k-w$, vamos a poder sacar el factor común $\frac{n\pi}{L}$. Finalmente la solución en términos de senos es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi\,(x + a_n t)}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi\,(x - a_n t)}{L}\right] \tag{1.13}$$

1.3. Punto c

Recordemos que

$$a_n = \sqrt{\left(\frac{\gamma L}{n\pi}\right)^2 + 1a} \tag{1.14}$$

Es posible notar que cuando $\gamma = 0$, la solución es

$$a_n = \sqrt{\left(\frac{0L}{n\pi}\right)^2 + 1a} = a \tag{1.15}$$

Si $L = 0$, la onda no se movería.

2. Punto 2

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x-4 & , \quad 4 \le x \le 5 \\ 6-x & , \quad 5 < x \le 6 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.1}$$

Debemos determinar con $L = 0$ los coeficientes C_n que se encuentran determinados por

$$C_n = \frac{2}{10}\int_4^5 (x-4)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) + \frac{2}{10}\int_5^6 (6-x)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \tag{2.2}$$

Se procedió hacer las evaluaciones de integrales con software de integración y el resultad obtenido fue

$$C_n = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{100\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 10\pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 100\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{100\sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right) - 100\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 10\pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{5\cdot\pi^2 n^2}\cdot\left[100\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 100\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 100\sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + 100\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$$

$$C_n = \frac{1}{5\cdot\pi^2 n^2}\cdot\left[200\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 100\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 100\sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right)\right]$$

$$C_n = \frac{10^2}{5\cdot\pi^2 n^2}\cdot\left[2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right)\right]$$

Referencias