Cuerda semi-infinita con un final fijo

Juan Miguel Gutiérrez Vidal

3 de noviembre de 2020

1. Cuerda Semi finita

Consideremos una cuerda semi-infinita cuerda con un final fijo, esto es,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad 0 \leq x < \infty, \\ u(0,t) &= 0, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Primero para solucionar este problema de manera más simple haremos el cambio de variable de $\sigma = x + ct$ y $\eta = x - ct$, al realizar el remplazo tenemos $u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = w(\eta, n)$. Al realizar el remplazo primero miramos sus derivadas, es decir

$$\begin{gathered} u_t = c(w_\xi, w_\eta), \quad u_x = c(w_\xi + w_\eta), \\ u_{tt} = c^2(w_{\xi\xi} - 2w_{\eta\xi} + w_{\eta\eta}, \quad u_{xx} = (w_{\xi\xi} + 2w_{\eta\xi} + w_{\eta\eta}) \end{gathered}$$

La ecuación 1.1 se simplifica a:

$$u_t t - c^2 u_x x = -4c^2 w\eta\xi = 0$$

Esta ecuación de forma canónica implica que

$$(w_\xi)_\eta = 0 \Rightarrow w = \int f(\xi) d\xi + G(\eta)$$

La cual tiene por solución general

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

donde F y G son dos veces continuamente diferenciales, y al hacer el remplazo original obtenemos que

$$u(x,y) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{1.2}$$

Notemos que en la condición de frontera en $x = 0$, se produce una onda moviéndose a la derecha con velocidad c. Esto dado para dada la altura $x = 0$ la onda $f(x - ct)$ y $f(x + ct)$ es movida ct unidades a la derecha en el tiempo t, por esto se dice que viaja con velocidad c en dirección positiva.[1].

Por otro lado como estamos buscando una solución para $x > 0$ y $t > 0$, debemos encontrar una solución $-\infty < x - ct < \infty$. Note que para la función $G(x - ct)$ puede que suceda el caso que $x-ct \leq 0$, donde $x > 0$ y $t > 0$, pero $x-ct \leq 0$ Por ahora solo conocemos sus valores para $x-ct \geq 0$, pues para las funciones $f(x), g(x)$ solo conocemos sus imágenes para argumentos positivos, para esto nos sera útil la condición de frontera, que nos será útil después.[2]

Ahora debemos determinar las funciones F y G, para esto utilizamos el llamado problema de Cauchy donde podremos integrar la tercera ecuación de 1.1 en $[0, x]$, como resultado obtenemos

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + K \tag{1.3}$$

Por otro lado de la primera ecuación de de 1.1 también tenemos que

$$F(x) - G(x) = f(x) \tag{1.4}$$

Al sumar (1.4) con (1.3), podemos obtener el valor de $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + \frac{K}{2}$$

Al restar ambas ecuaciones obtenemos

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - \frac{K}{2}$$

Además tenemos de la tercera ecuación de 1.1 (Condición frontera) que al evaluar $x = 0$ $u(0, t)$ ya podemos estimar su valor, tenemos

$$u(0, t) = F(ct) + G(-ct) = 0 \Rightarrow G(-ct) = -F(ct)$$

Remplazando $\alpha = -ct$ entonces es cierto que:

$$G(-ct) = -F(ct)$$

Pero si volvemos a remplazar α por $x - ct$, obtenemos que para $x < ct$

$$G(x - ct) = -F(ct)$$

y por lo tanto

$$G(x - ct) = -\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} g(s)ds - \frac{K}{2}$$

Por lo tanto la solución del problema al remplazar lo que hallamos en la ecuación general 1.2, tenemos para el caso de $x > ct$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)dss + \frac{K}{2} + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - \frac{K}{2} \\
&= \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

de manera similar pasa cuando $x < ct$, donde obtenemos la solución

$$
u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds & \text{si } x > ct \\ \frac{1}{2}[f(x+ct)-f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds & \text{si } x < ct \end{cases}
$$

Para obtener soluciones continuas, requerimos de la condición de consistencia que nos plantea que $f(0) = g(0) = 0$ y $f''(x) = 0$, donde f es dos veces diferenciable y g es diferenciable.

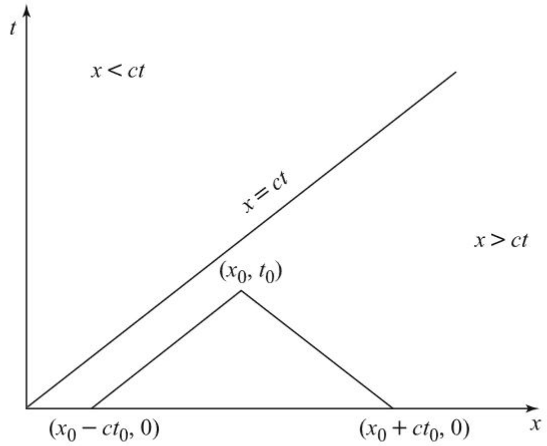


Figura 1: Caption

La solución tiene una interpretación física interesante. Al dibujar las ecuaciones características, a través del punto (x_0, t_0), en la región $x > ct$, podemos ver que el desplazamiento en (x_0, t_0) es determinado por los valores iniciales en $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Si el punto (x_0, t_0) se encuentra en la región $x > ct$ como se muestra en la figura 1, podemos notar que la ecuación característica $x + ct = x_0 + ct_0$ se intersectan en el eje x en $(x_0 + ct_0, 0)(t = 0)$. Sin embargo, la características $x_ct = x_0 - ct_0$ se intersecta en el eje t en $(0, t_0 - x_0/c)(x = 0)$, y la linea características $x + ct = ct_0 - x_0$ se intersecta con el eje x en $(ct_0 - x_0, 0)(t = 0)$. Por lo tanto, la perturbación en $(ct_0 - x_0, 0)$ viaja a través la linea característica $x + ct_ct_0 - x0$,y es reflejada en $(0, t_0 - x_0/c)(x = 0)$ a medida que se mueve adelanta por la onda representada por $-G(ct_0 - x_0)$.

Ejemplo 1. Determine la solución del problema con problema de frontera inicial

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\
u(x,0) &= |\sin x|, \quad 0 \leq x < \infty, \\
u_t(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x < \infty, \\
u(0,t) &= 0, \quad 0 \leq x < \infty.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Veamos entonces que en este caso $c = 2$, por lo tanto, utilizando el resultado obtenido anteriormente donde $g(s) = 0$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds & \text{si } x>ct\\ \frac{1}{2}[f(x+ct)-f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds & \text{si } x<ct\end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[|\sin(x+2t)+\sin(x-2t)|] & \text{si } x>ct\\ \frac{1}{2}[|\sin(x+2t)|-|\sin(x-2t)|] & \text{si } x<ct\end{cases}$$

Ejercicio 1. Determine la solución del problema con problema de frontera inicial

$$\begin{aligned} u_{tt}&=16u_xx, \quad 0<x<\infty, \quad t>0,\\ u(x,0)&=\sin x, \quad 0\le x<\infty,\\ u_t(x,0)&=x^2, \quad 0\le x<\infty,\\ u(0,t)&=0, \quad 0\le x<\infty. \end{aligned} \tag{1.7}$$

primero solucionemos $g(s)=s^2$, esto es , solucionemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds=\frac{1}{2\cdot 4}\int_{x-ct}^{x+ct}s^2ds=\frac{s^3}{3\cdot 8}|_{x-ct}^{x+ct}&=\frac{1}{24}[x^3+3cx^2t+3c^2xt^2+c^3t^3-x^3+3cx^2t-3c^2xt^2+c^3t^3]\\ &=\frac{1}{24}[6cx^2t+2c^3t^3]_{c=4}=\frac{1}{24}[24x^2t+128t^3]=x^2t+\frac{16}{3}t^3\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)ds=\frac{1}{2\cdot 4}\int_{ct-x}^{x+ct}s^2ds&=\frac{s^3}{3\cdot 8}[x^3+3cx^2t+3c^2xt^2+c^3t^3-c^3t^3+3c^2t^2x-3ctx^2+x^3]\\ &=\frac{1}{24}[2x^3+6c^2xt^2]_{c=4}=\frac{x^3}{12}+4xt^2\end{aligned}$$

Finalmente la solución al ejercicio es

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\sin(x+4t)+\sin(x-4t)]+x^2t+\frac{16}{3}t^3 & \text{si } x>4t\\ \frac{1}{2}[\sin(x+4t)-\sin(x-4t)]+\frac{x^3}{12}+4xt^2 & \text{si } x<4t\end{cases}$$

2. Ondas Dispersas

Para solucionar el problema de ondas dispersas tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} u_{tt}+\gamma^2a^2u-a^2u_{xx}&=0, \quad 0<x<L, \quad t>0,\\ u(0,t)=u(L,x)&=0, \quad t>0\\ u(x,0)=f(x)\ u_t(x,0)&=0, \quad 0<x<L, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Al hacer la aproximación de segundo grado de cada derivada obtenemos que

$$\frac{w_i^{j+1}-2w_i^j+w_i^{j-1}}{k^2}-a^2\frac{w_{i+1}^j-2w_i^j+w_{i-1}^j}{h^2}+\gamma^2a^2w_i^j=0$$

Despejamos w_i^{j+1}, donde obtenemos

$$w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1} - a^2k^2\frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h^2} + k^2\gamma^2a^2w_i^j = 0$$

$$w_i^{j+1} = 2w_i^j - w_i^{j-1} + a^2k^2\frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h^2} - k^2\gamma^2a^2w_i^j$$

Sea $\lambda = \frac{a^2k^2}{h^2}$, tenemos

$$w_i^{j+1} = 2w_i^j - w_i^{j-1} + \lambda^2(w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) - \lambda^2\gamma^2h^2w_i^j$$

$$w_i^{j+1} = 2(1-\lambda^2)w_i^j + \lambda^2(w_{i+1}^j + w_{i-1}^j) - w_i^{j-1} - \lambda^2\gamma^2h^2w_i^j$$

3. Problema Asignado

El problema que me fue asignado es de la onda con las condiciones $L = 40$ con $\alpha, \gamma = 1$ y

$$f(x) = \begin{cases} 3\exp(-\frac{(x-2)^2}{0.1}) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } 4 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

La solución numérica obtenida es

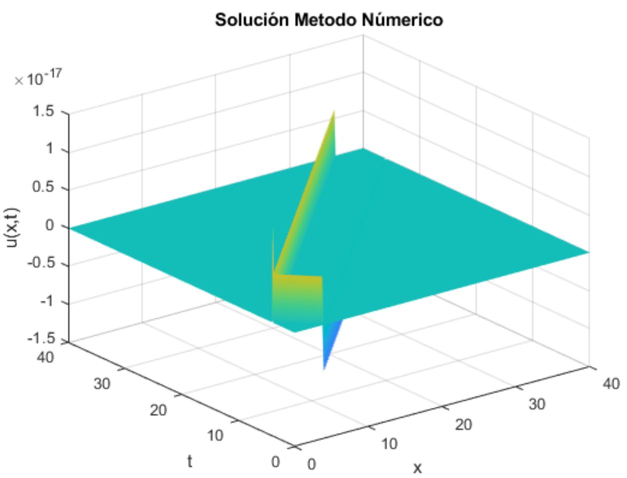
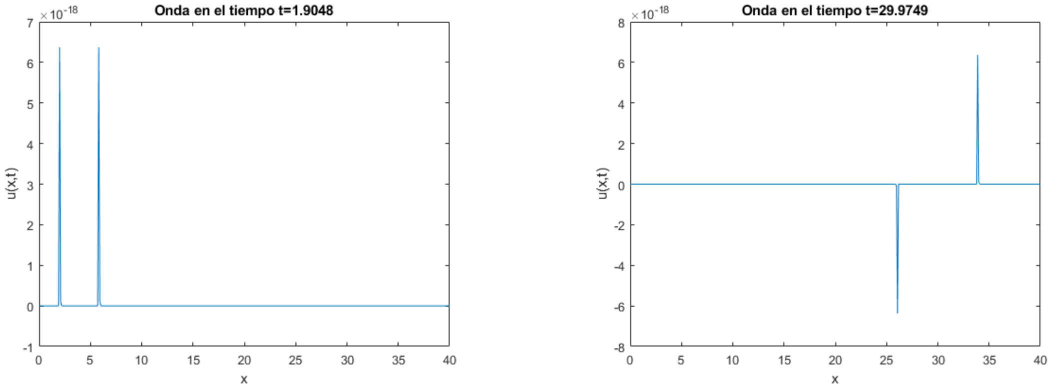


Figura 2: Solución $U(x,t)$

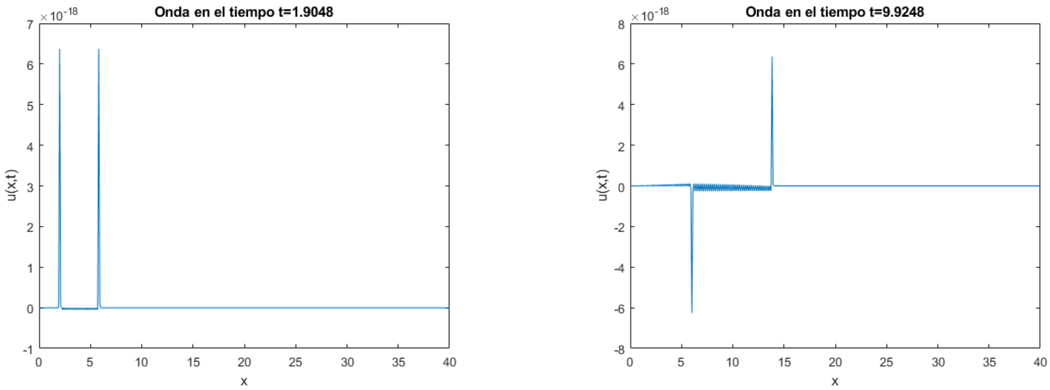
y la solución de la onda a través del tiempo se puede ver como:



(a) $t = 1.98$ (b) $t = 29.97$

Figura 3: En este caso es posible notar que se mantienen las ondas, ya que no existe un medio disperso, lo que pasa con la curva debajo de la curva, es que al rebotar se translada abajo.

La solución de la onda con dispersión $\gamma = 0.2$, obtenemos la siguientes gráficas



(a) $t = 1.98$ (b) $t = 9.92$

Figura 4: En este caso es posible notar que las ondas dejan un rastro, pues se encuentran en un medio disperso. El rastro aumenta considerablemente, probablemente por que estamos trabajando con una función exponencial, y su dispersión aumenta exponencialmente a medida que pasa el tiempo.

Referencias

[1] Dave Gilliam's. The Wave Equation. Texas Tech University. Accesed : http://www.math.ttu.edu/ gilliam/ttu/f08/m4354_f08/m4354_ch2_dalembert.pdf

[2] Daria Apushkinskaya.(2015). Lecture 13: PDE and Boundary-Value Problems. Saarland University.

[3] Tyn M. & Lokenath D. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.