

# Parcial 3 Ecuaciones Diferenciales

Juan Miguel Gutierrez Vidal

*Universidad del Rosario*

Abril 2019

## 1. Introducción

Al momento de aplicar las matemáticas a situaciones del mundo real surge a menudo el problema de que no pueden ser resueltos mediante una solución analítica o exacta. Mas específicamente no todas las ecuaciones diferenciales poseen un método de descubrir su solución analítica. Entonces pues es necesario recurrir a los métodos numéricos para acercarnos a su solución. En este caso se trabajaran 3 métodos : Euler, Euler Mejorado y Runge Kutta.

### 1.1. Metodo Euler

Este es el método más simple, utilizamos esto para resolver una ecuación diferencial que no sea lineal, tal que encontrar el intervalo de su existencia se vuelve más difícil de determinar. Este método está expresado por la ecuación. Sin embargo se asume que solo existe una única solución al problema de valor inicial. Este método está expresado por la ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + f_n h \quad (1)$$

Donde el cambio de cada paso es un valor uniforme de  $h$  y denotamos  $f_n(t_n, y_n)$  por  $f_n$ . Este método consiste en utilizar repetidamente la ecuación 1. De esta manera se obtienen una secuencia de valores  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  que aproximan los valores de la solución  $\phi(t) = \frac{dy}{dt}$  en los puntos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ .

### 1.2. Metodo Euler Mejorado

A diferencia del método de Euler, este método requiere de pequeños saltos para producir resultados muy precisos. Una manera de aproximar la fórmula más precisa es reemplazando en la ecuación 1, por un promedio de los valores de los dos extremos. De esta manera la ecuación se convierte en:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_n + h)] \quad (2)$$

### 1.3. Runge Kutta

El método de euler y Euler mejorado ahora pertenecen a lo que ahora se llama los métodos de Runge-Kutta. Este método es dos ordenes de magnitud mas preciso que los métodos de euler mejorado y tres al método de euler. El método de runge Kutta involucra un promedio ponderado de los valores de  $f(t, y)$  en diferentes puntos en el intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Entonces la ecuación esta dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_{n1} + 2K_{n2} + 2K_{n3} + K_{n4}] \quad (3)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}) \\ k_{n3} &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}) \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n2}) \end{aligned} \quad (4)$$

En general estos métodos tambien sirven para solucionar problemas de ecuaciones de diferenciales de mayor orden, no necesariamente de primer orden, y las funciones se vuelven entonces vectoriales.

## 2. Comparación de tres métodos

### 2.1. Problema 1

sea la funcion:

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1 \quad (5)$$

Se utilizó los métodos propuestos para los valores  $h = 0,05, 0,02, 0,01, 0,005, 0,001$ . Se hallo su error máximo con cada h, así es mucho mas facil comparar la precisión de los tres metodos. Donde w es la solución exacta  $w(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}$ .

$h$	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
Euler( $E_i$ )	30.4	19.3	4.8	2.5	0.5
Euler Mejorado( $E_i$ )	4.9	1.5	0.06	0.01	0
Runge Kutta( $E_i$ )	0.03	0.002	0	0	0

Tabla 1: Valores maximos obtenidos de los errores  $E_i = |y_i - w_i|$

Es posible notar que el método runge kutta es el más preciso con los valores, esto pues posee los menores errores maximos y son muy cercanos a cero. Esto

pasa dado que la funcion que se trabajo es muy compleja y el runge kutta es muy bueno estimando los valores a comparación con los demás.

## 2.2. Problema 2

Sea la funcion:

$$y' = 6x^2 - 3x^2y, y(0) = 3 \quad (6)$$

Se utilizo los métodos propuestos para los valores  $h = 0,1, 0,01, 0,001$ . Se hallo su error máximo con cada h. Donde  $w$  es la solución exacta  $w(x) = 2 + e^{x^{-3}}$ .

$h$	0.1	0.01	0.001
Euler( $E_i$ )	0.04	0.004	0.0004
Euler Mejorado( $E_i$ )	0.002	0	0
Runge Kutta( $E_i$ )	0	0.0001	0

Tabla 2: Valores maximos obtenidos de los errores  $E_i = |y_i - w_i|$

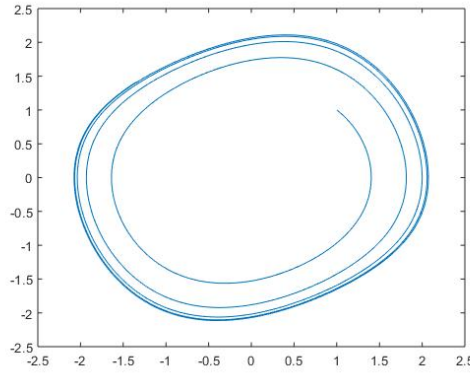
En este problema los tres metodos los errores dan cerca de 0. Runge Kutta sigue siendo el mejor.Sin embargo dado que la función no es tan compleja a la del problema 1. Los dos primero metodos son muy buenos encontrando la funcion original.

## 3. Problema Van der Pol

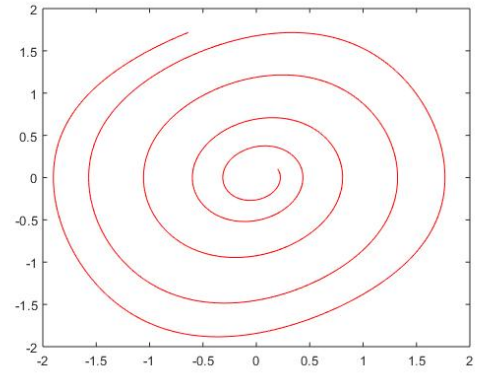
El Oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico que representa un oscilador con amortiguamiento no lineal. En su aplicación original, se comenzo utilizando como precursores de los primeros radios comerciales.Un circuito como este favorece las oscilaciones pequenas y amortigua las grandes.La ecuación van der pol esta definida como:

$$u'' - u(1 - x^2)y + u = 0 \quad (7)$$

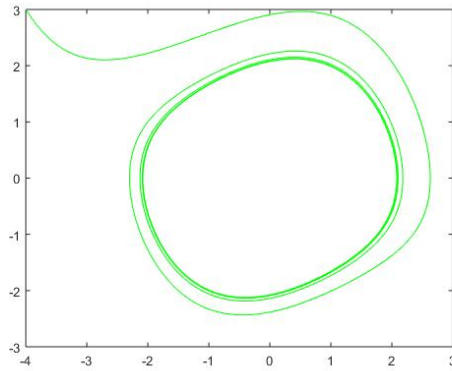
Se graficará con distintos puntos iniciales y fijo  $u = 0,2$  con  $h = 0,03$ .



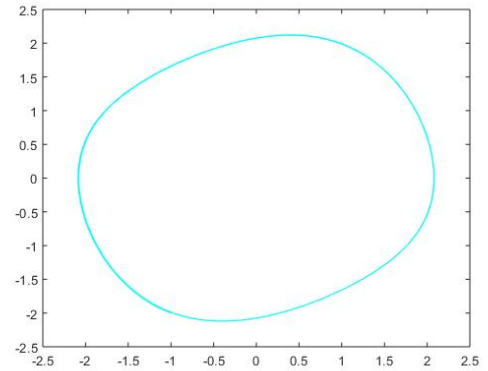
(a)  $(x(t), y(t))$  con  $x(0) = 1$   $y(0) = 0$



(b)  $(x(t), y(t))$  con  $x(0) = 0,2$   $y(0) = 0,1$



(c)  $(x(t), y(t))$  con  $x(0) = -4$   $y(0) = 3$



(d)  $(x(t), y(t))$  con  $x(0) = -1$   $y(0) = -2$

Figura 1: Grafica con diferentes puntos iniciales con  $h = 0,03$

En la primera gráfica, es posible notar como la dirección en la que se mueve la ecuación es orbital hasta que llega a un tope donde vuelve a dar vueltas casi sobre el mismo eje, a medida de cada paso el punto se va mas alejando del centro. En la segunda gráfica es posible notar que un cambio minimo, es decir en el centro la direccion de la funcion se vuelve un espiral que lleva el punto hacia afuera. En estas dos primeras las fuerzas se ven forjadas a sacar el punto inicial(incrementarlo circularmente). En la tercera grafica pasa totalmente lo contrario, la fuerzas ejercen al punto a llegar a una órbita circular de adentro cercano al centro. En la última grafica, parece que ya la condicion inicial se encuentra en una orbita estabilizada, por lo tanto simplemente forma un circulo(la misma orbita).

Las siguientes serán las gráficas  $[t, x(t)]$

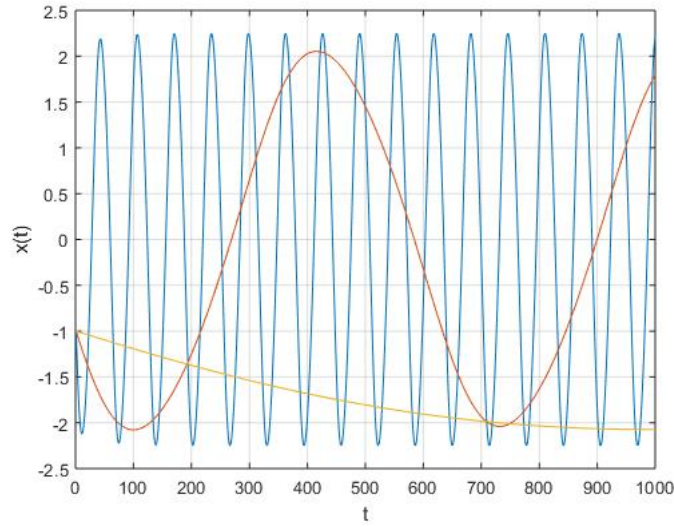


Figura 2: Grafica  $[t, x(t)]$  variando  $h = 0, 1, 0,01, 0,001$

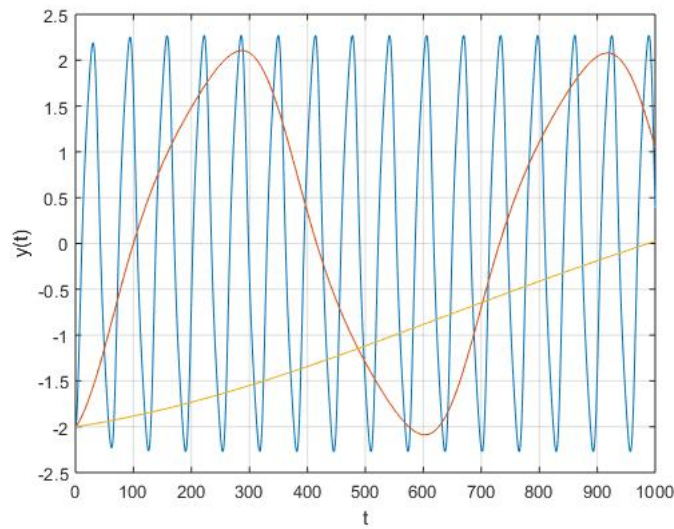
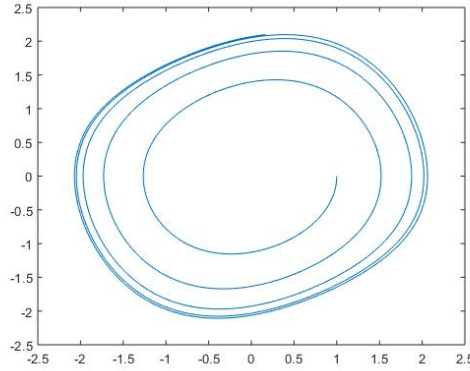


Figura 3: Grafica  $[t, x(t)]$  variando  $h = 0, 1, 0,01, 0,001$

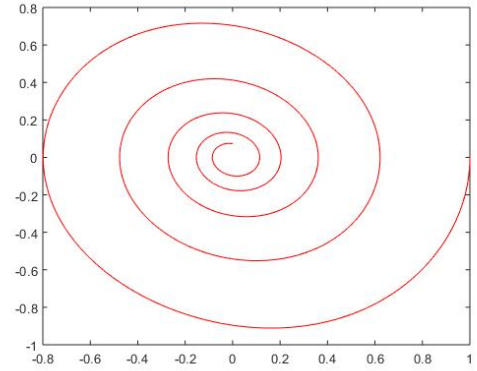
Respecto a las graficas es posible notar que a medida que se aumenta el  $h$ , el  $x(t)$  y  $y(t)$  llega mas lejos, esto debido por que los pasos uniformes son mas agigantados. Esto hace que la gráfica  $[x(t), y(t)]$  dibuje mas puntos.

## 4. Análisis de parámetros

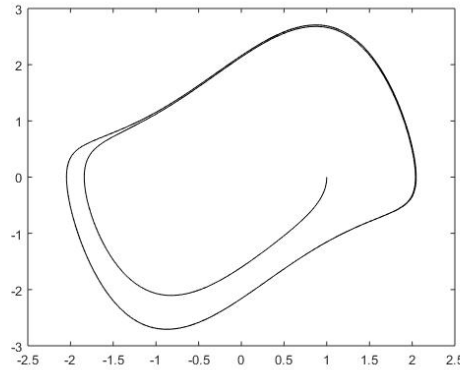
Ahora se va a graficar con diferentes  $u$  para saber como cambia la ecuación diferencial a medida que  $u$  cambia.



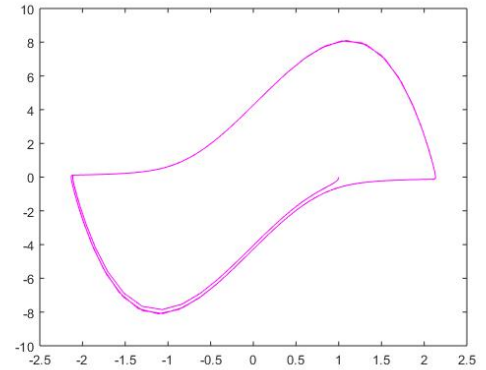
(a)  $u = 0,2$



(b)  $u = -0,2$



(c)  $u = 1$



(d)  $u = 5$

Figura 4: Grafica con  $x(0) = 1$   $y(0) = 0$  y con  $h = 0,03$

Es posible notar que a medida que el  $u$  es cercano a 0 se vuelve una órbita perfecta, esto puesto que el término  $u'$  no existe en la ecuación y la solución es cercano oscilador simple sin amortiguamiento. Cuando  $u$  es cercano 0 es el caso donde no hay amortiguamiento y es entonces un oscilador simple sin casi amortiguamiento, es decir no se pierde casi energía.

En el caso que el  $u$  es positivo la fase obliga al punto a irse afuera, en el caso de ser negativa obliga el punto a llegar a un punto crítico  $(0, 0)$ , posiblemente estable. Ya cuando  $u$  pasa de 1, entonces se deja de convertir en una órbita, y mas

bien se vuelve una biorbita, como en los dos casos es positiva, saca los puntos de su centro y lo estabiliza en la biorbita.

## 5. Conclusiones

- De los tres metodos: Euler,Euler Mejorado y Runge Kutta, el mejor es Runge Kutta, aunque computacionalmente es más costoso.
- Cuando las funciones no son tan complejas, los tres métodos son casi igual de precisos.
- El Oscilador de Van Der Pol sin amortiguación depende altamente de sus puntos iniciales y  $u$  para saber como se ira a comportar la función.
- Si el  $u$  del oscilador de Van der Pol es positivo, su punto critico se vuelve expulsor, mientras que si es negativo se vuelve atractor.
- Hay analisis mas detallados en cada punto.

## Referencias

- [1] A First Course in Ordinary Differential Equations, M. Hermann, M. Saravi, Springer (2014)
- [2] Larraza Hernández, S., y Palencia Gómez, V.J. El oscilador de Van der Pol, Multidisciplina 5 (2010)