ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

✅ ¿Qué son las ecuaciones diferenciales exactas?

Una **ecuación diferencial exacta** es una ecuación de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

que cumple con una **condición de exactitud**:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esta condición nos dice que existe una función $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

Entonces la solución de la ecuación es:

$$F(x, y) = C$$

donde C es una constante arbitraria.

🔍 ¿Cómo resolver una ecuación exacta?

Paso 1: Verificar si la ecuación es exacta

Dado:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Calcula:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si son iguales → la ecuación es exacta.

Paso 2: Encontrar la función potencial $F(x, y)$

1. Integra $M(x, y)$ respecto a x para obtener $F(x, y)$

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx + h(y)$$

   donde $h(y)$ es una función "desconocida" de y.

2. Deriva $F(x, y)$ respecto a y y equívala a $N(x, y)$ para encontrar $h'(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow h'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right)$$

3. Integra $h'(y)$ para encontrar $h(y)$ y, por tanto, obtener $F(x, y)$

4. La solución general será:

$$F(x, y) = C$$

✍️ Ejemplo resuelto

Resolvamos:

$$(2xy + y^2)\, dx + (x^2 + 2xy)\, dy = 0$$

1. Identificamos:
   - $M(x, y) = 2xy + y^2$
   - $N(x, y) = x^2 + 2xy$

2. Verificamos la condición de exactitud:

- $$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y$$
- $$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$$

✅ Son iguales → Es una ecuación exacta.

3. Integramos M respecto a x:

$$\int (2xy + y^2)\, dx = x^2y + xy^2 + h(y)$$

4. Derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy + h'(y)$$

Igualamos con $N(x, y)$:

$$x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + 2xy \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = \text{constante}$$

5. La función $F(x, y)$ es:

$$F(x, y) = x^2y + xy^2$$

Entonces, la **solución general** es:

$$x^2y + xy^2 = C$$

󠀠 Notas adicionales

- Si **no es exacta**, puede volverse exacta con un **factor integrante.**
- Las ecuaciones exactas son típicas en problemas de física y economía cuando hay relaciones de potencial o conservación.

2 EJEMPLO

✍ Ejemplo 2:

Resuelve la ecuación:

$$(3x^2 + 2y)\,dx + (2x + \cos y)\,dy = 0$$

🔎 Paso 1: Identificamos $M(x, y)$ y $N(x, y)$

- $M(x, y) = 3x^2 + 2y$
- $N(x, y) = 2x + \cos y$

🔍 Paso 2: Verificamos la condición de exactitud

Calculamos las derivadas parciales cruzadas:

- $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2y) = 2$
- $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + \cos y) = 2$

✅ Son iguales → La ecuación es exacta.

□ Paso 3: Integramos $M(x, y)$ respecto a x

$$\int (3x^2 + 2y)\, dx = x^3 + 2yx + h(y)$$

> Nota: Consideramos y como constante al integrar con respecto a x, y por eso aparece una función arbitraria $h(y)$.

□ Paso 4: Derivamos $F(x,y) = x^3 + 2yx + h(y)$ respecto a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + h'(y)$$

Igualamos con $N(x,y) = 2x + \cos y$:

$$2x + h'(y) = 2x + \cos y \Rightarrow h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \sin y$$

□ Paso 5: Escribimos la función $F(x, y)$

$$F(x, y) = x^3 + 2yx + \sin y$$

✅ Solución general:

$$\boxed{x^3 + 2yx + \sin y = C}$$

FIN