

Integración Numérica.

Regla de Simpson.

MAT-25 I

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

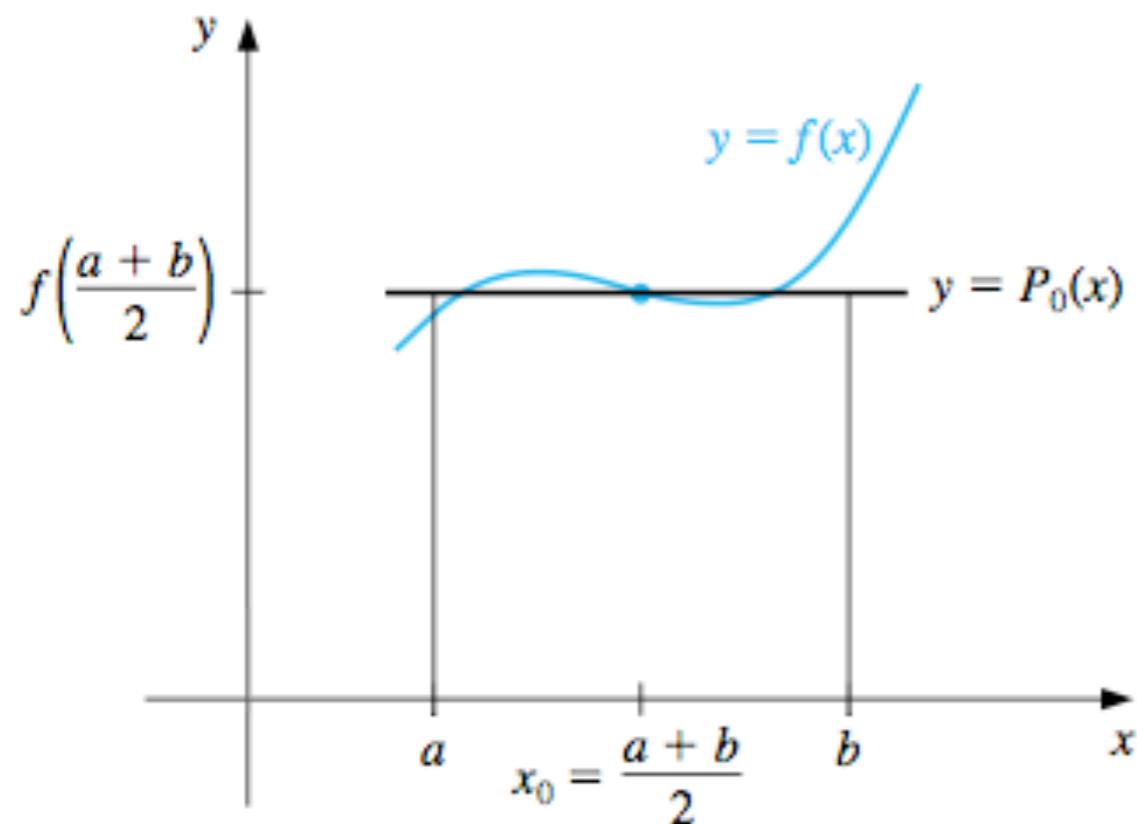
Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Lo que ya se vio

- Vimos que para integrar numéricamente una función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo h . Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que h es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Vimos que si disminuye el valor de h , aumenta la precisión.

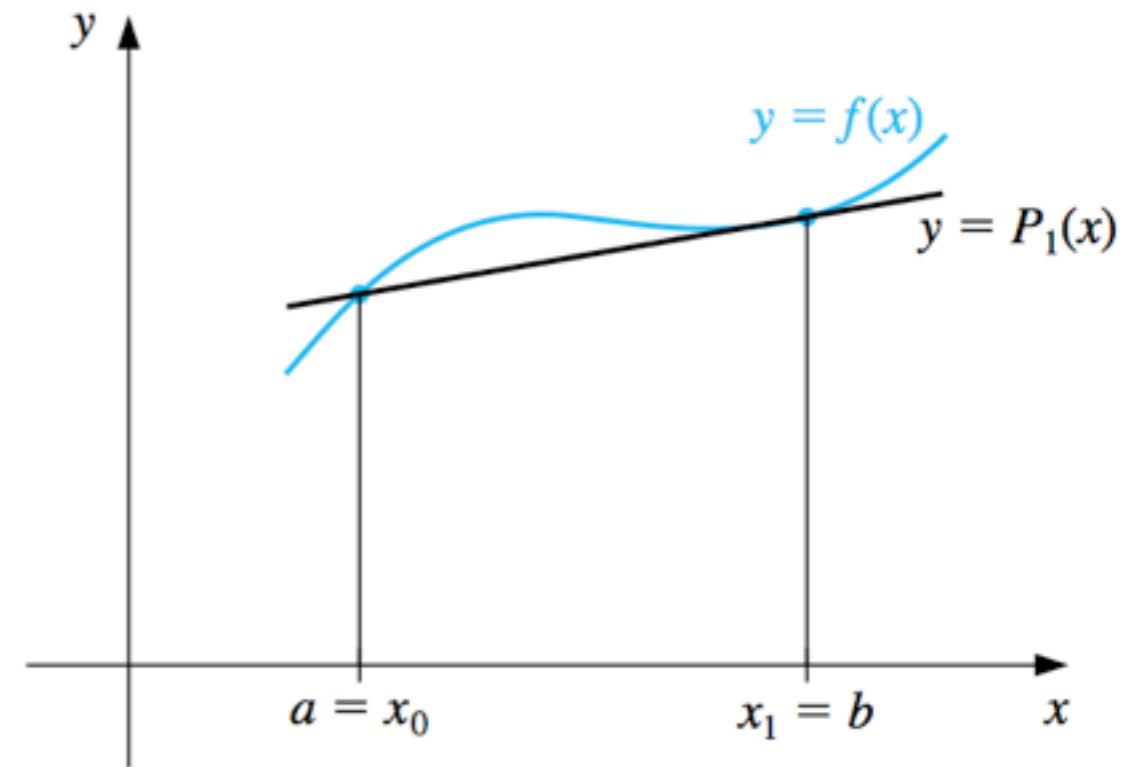
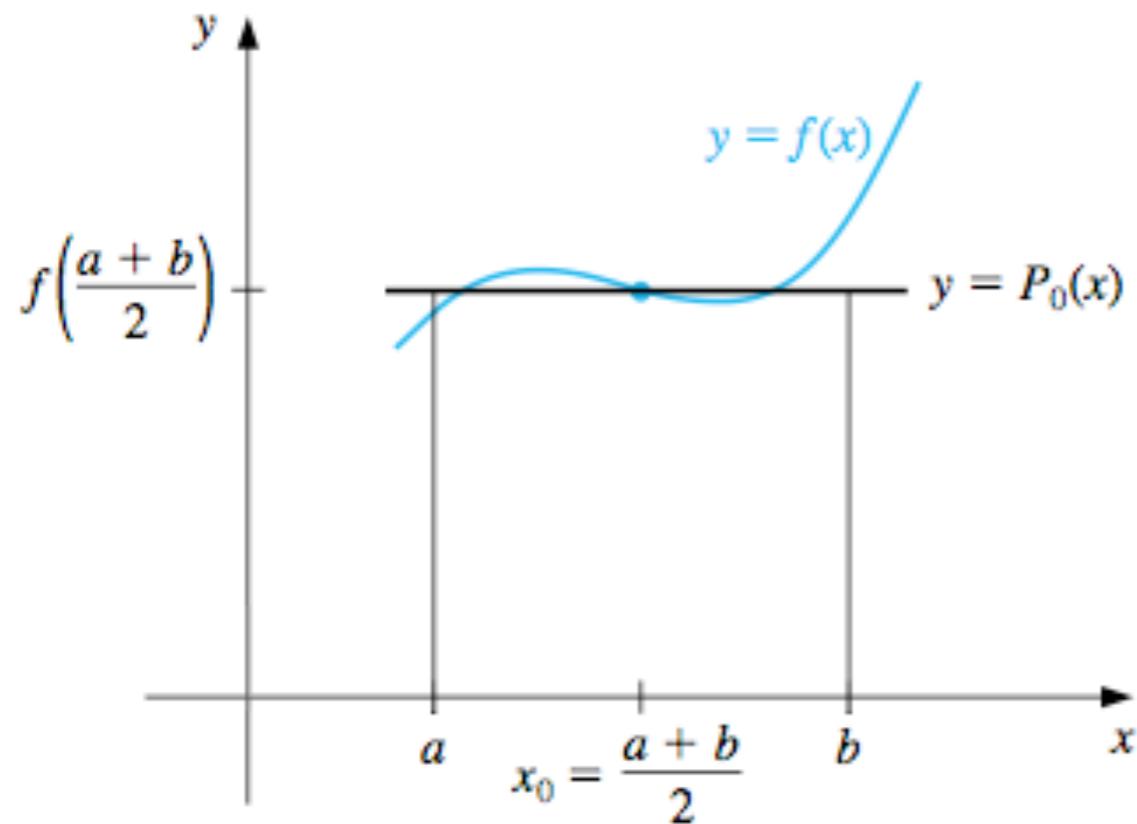
Lo que ya se vio

- Vimos que para integrar numéricamente una función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo h . Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que h es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Vimos que si disminuye el valor de h , aumenta la precisión.



Lo que ya se vio

- Vimos que para integrar numéricamente una función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo h . Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que h es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Vimos que si disminuye el valor de h , aumenta la precisión.



Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo $[a,b]$

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x),$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo $[a,b]$

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo $[a,b]$

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \end{aligned}$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo $[a,b]$

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \end{aligned}$$

- Y sabemos que el error es en general

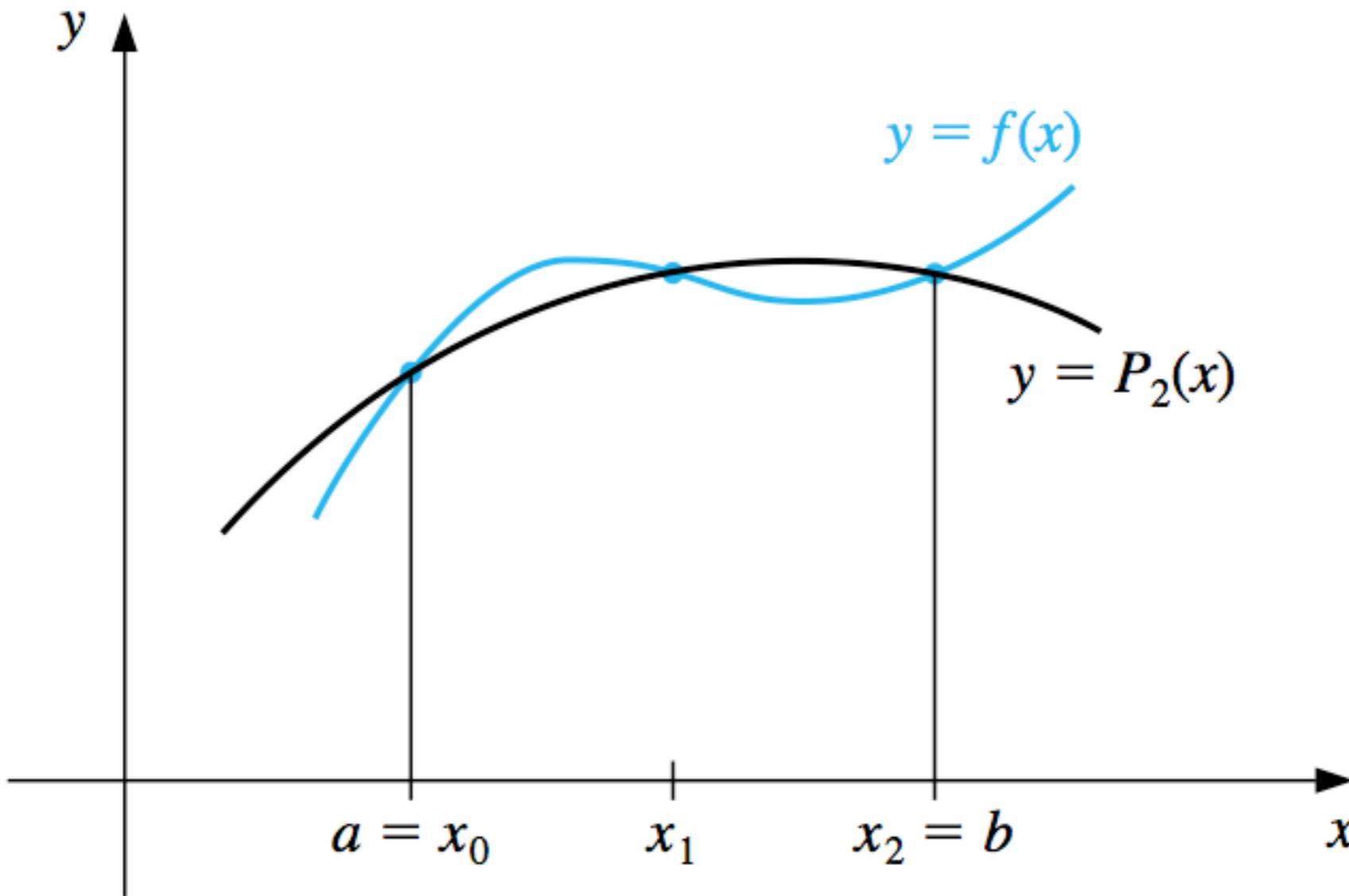
$$f(x) - P_{0,1,\dots,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

Regla de Simpson

- La idea ahora es ajustar un polinomio de grado 2 a las observaciones

Regla de Simpson

- La idea ahora es ajustar un polinomio de grado 2 a las observaciones



Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo $[-h, h]$, usando también el punto intermedio $x = 0$.
 - Interpolamos la función con el polinomio cuadrático
 - Pasando por los puntos
- 

Regla de Simpson

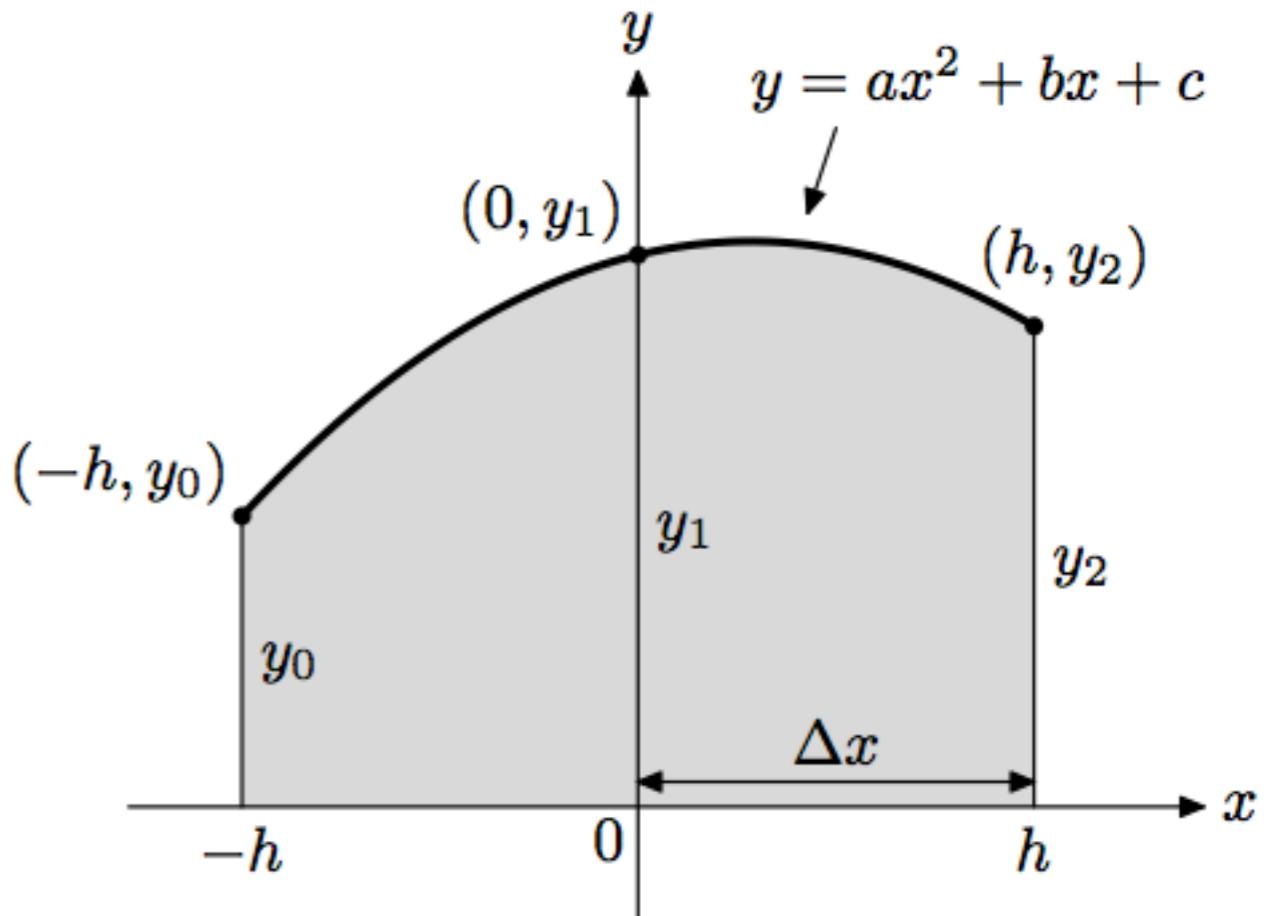
- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo $[-h, h]$, usando también el punto intermedio $x = 0$.
- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático
$$y = ax^2 + bx + c$$
- Pasando por los puntos

Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo $[-h, h]$, usando también el punto intermedio $x = 0$.
- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático
$$y = ax^2 + bx + c$$
- Pasando por los puntos $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$.

Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo $[-h, h]$, usando también el punto intermedio $x = 0$.
- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$
- Pasando por los puntos $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$.



Regla de Simpson

- Una vez que hemos ajustado el polinomio cuadrático, podemos calcular el área de manera mas fácil como:

Esto queda en términos de a y c



Regla de Simpson

- Una vez que hemos ajustado el polinomio cuadrático, podemos calcular el área de manera mas fácil como:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) \, dx \\ &= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \bigg|_{-h}^h \\ &= \frac{2ah^3}{3} + 2ch \\ &= \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) \end{aligned}$$

Esto queda en términos de a y c

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:
- Si de manera conveniente calculamos:

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 =$$

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

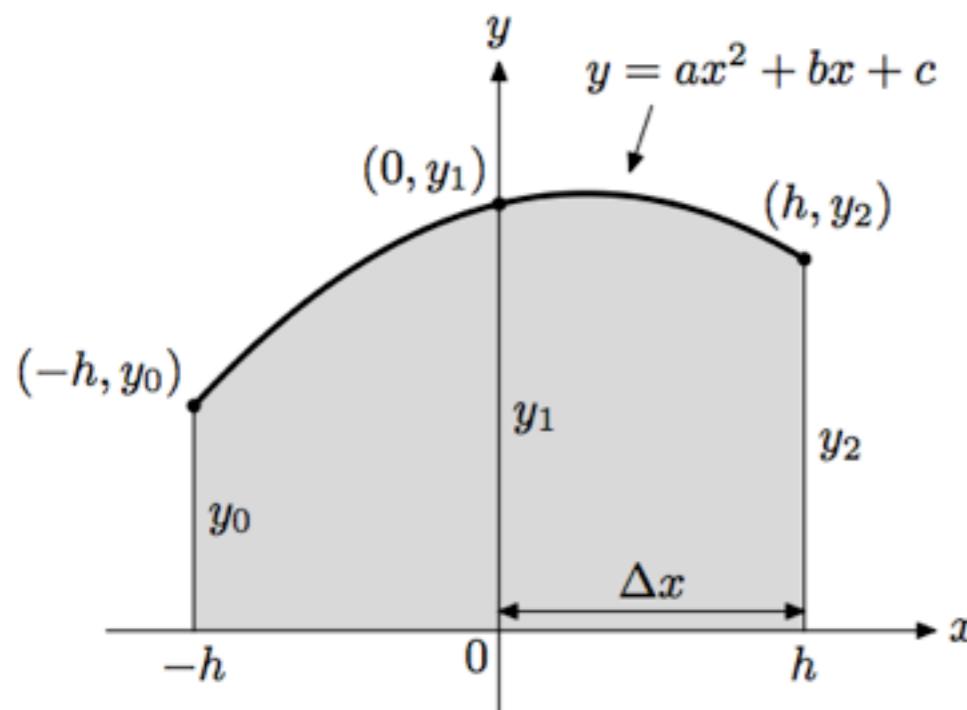
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c) = 2ah^2 + 6c.$$

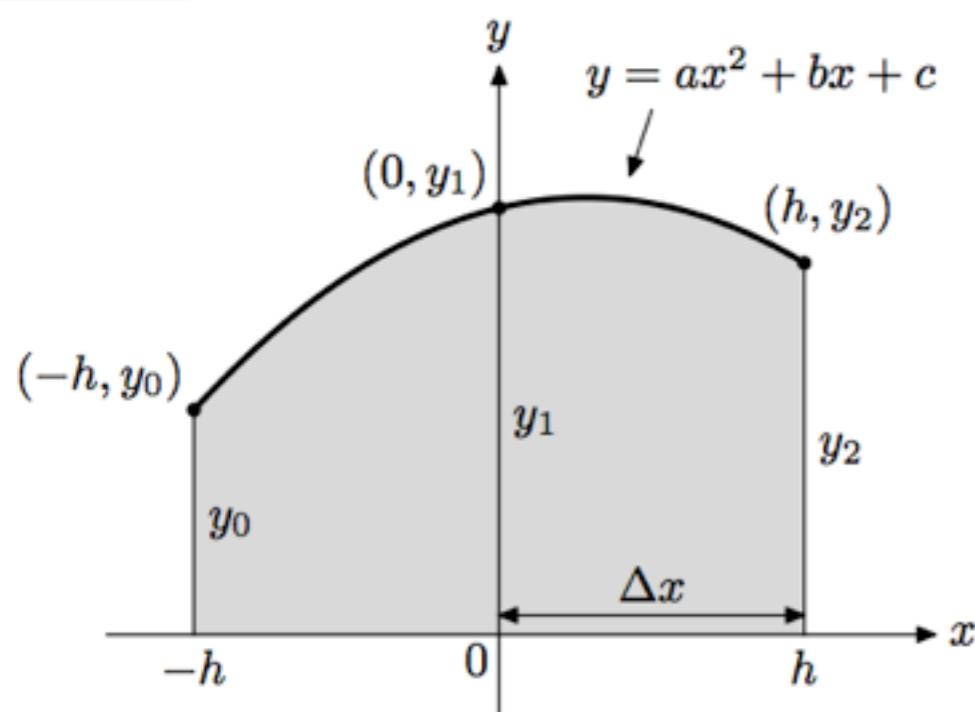
Regla de Simpson

- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



Regla de Simpson

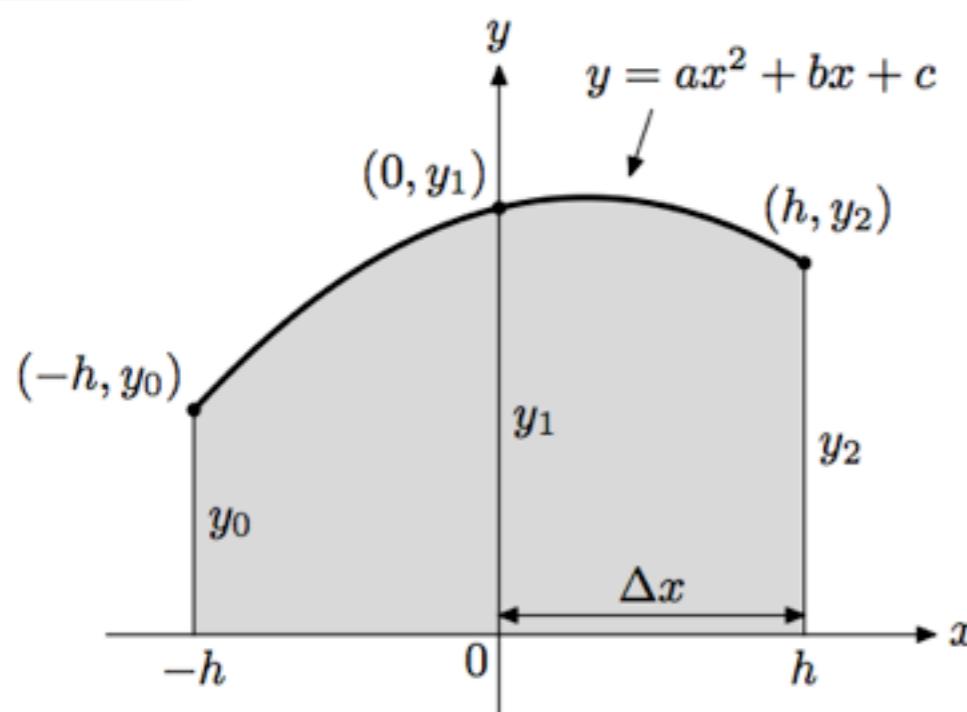
- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) \, dx \\ &= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{2ah^3}{3} + 2ch \\ &= \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) \end{aligned}$$

Regla de Simpson

- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) \, dx \\ &= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{2ah^3}{3} + 2ch \\ &= \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) \end{aligned}$$

$$A = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Regla de Simpson

- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo $[a,b]$, donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

Regla de Simpson

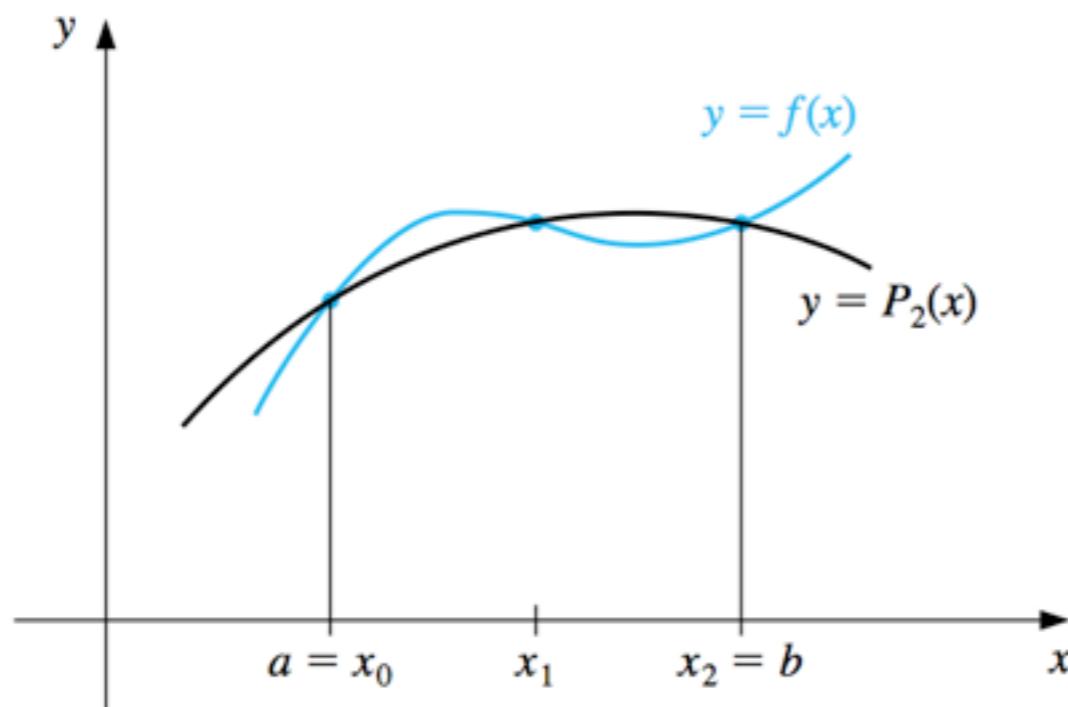
- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo $[a,b]$, donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Regla de Simpson

- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo $[a,b]$, donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$



Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- Dividimos el intervalo en n intervalos equi-distribuidos (con n par)
- Lo cual nos genera los $n+1$ puntos
- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- Dividimos el intervalo en n intervalos equi-distribuidos (con n par) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Lo cual nos genera los $n+1$ puntos
- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- Dividimos el intervalo en n intervalos equi-distribuidos (con n par) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Lo cual nos genera los $n+1$ puntos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x = b.$$

- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

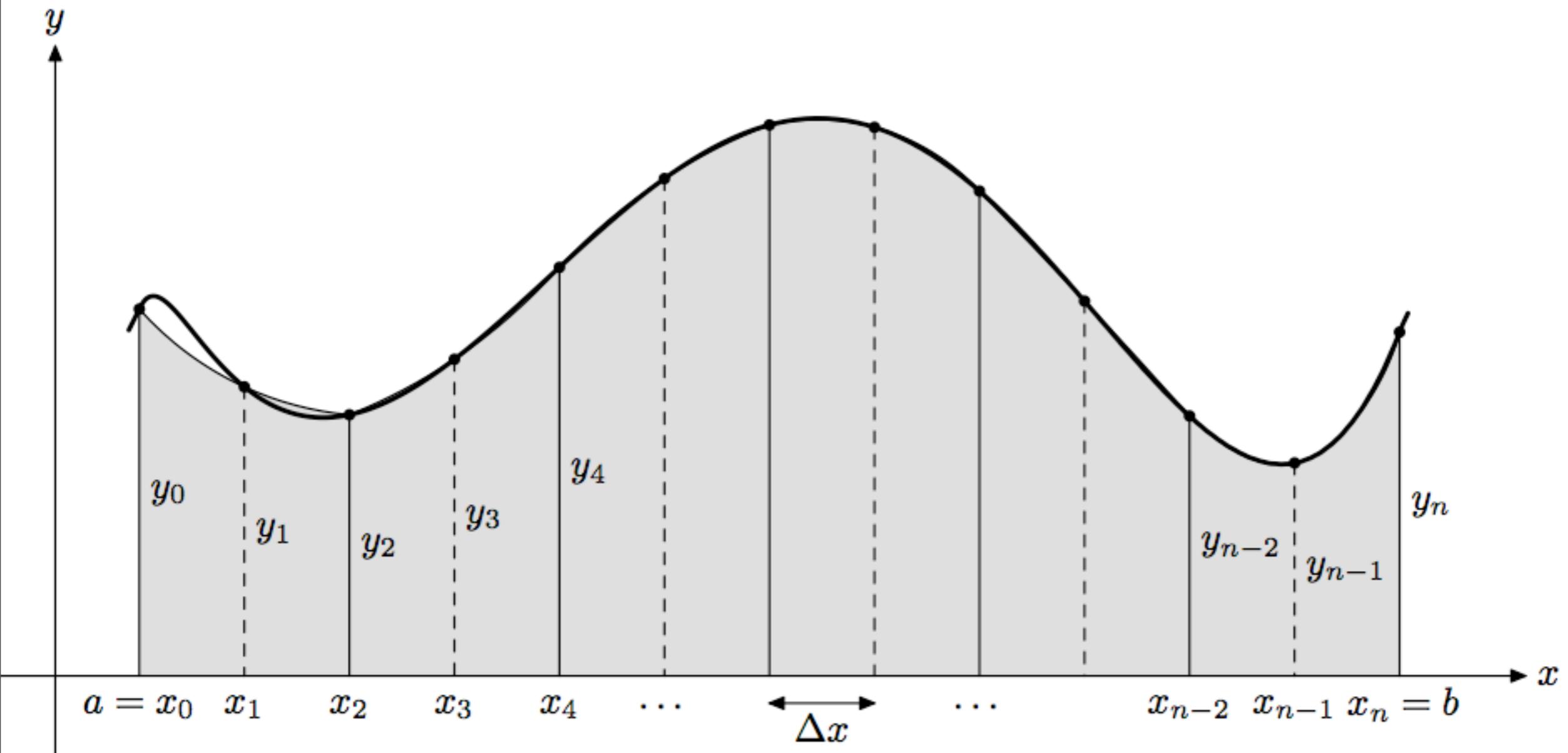
- Dividimos el intervalo en n intervalos equi-distribuidos (con n par) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Lo cual nos genera los $n+1$ puntos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x = b.$$

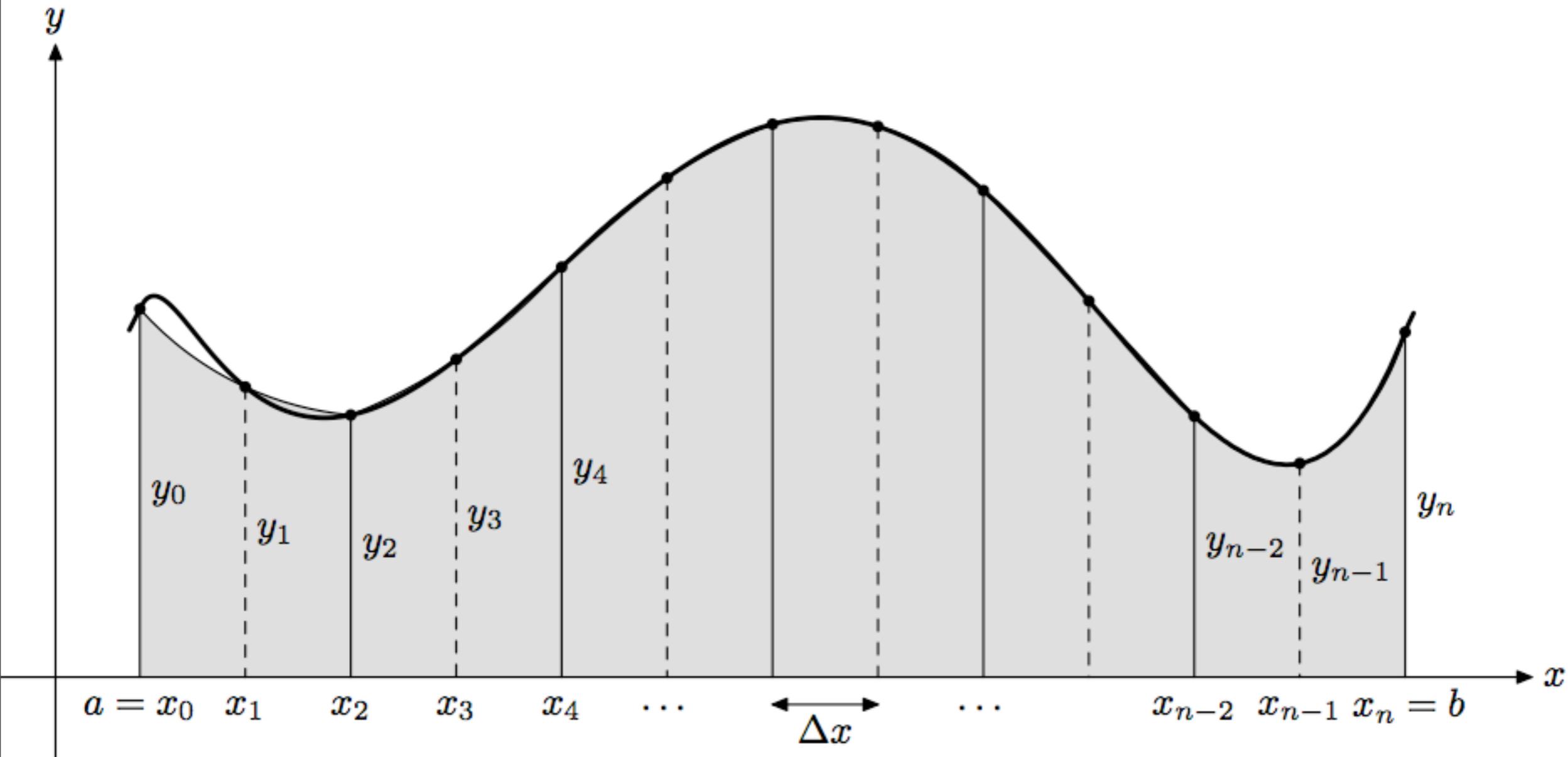
- Con las evaluaciones

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Aplicación de la regla de Simpson



Aplicación de la regla de Simpson



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Aplicación de la regla de Simpson

- Simplificando la fórmula nos queda

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

Aplicación de la regla de Simpson

- Simplificando la fórmula nos queda

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right]$$

Ejemplo

- Evaluar con $n=6$ la siguiente integral
- Tenemos que
- Y calculamos (solo necesitamos evaluar $f(x)$)
- Quedando:

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} \, dx.$$

Ejemplo

- Evaluar con $n=6$ la siguiente integral

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} \, dx.$$

- Tenemos que $\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5$.

- Y calculamos (solo necesitamos evaluar $f(x)$)

- Quedando:

Ejemplo

- Evaluar con $n=6$ la siguiente integral

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx.$$

- Tenemos que $\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5$.

- Y calculamos (solo necesitamos evaluar $f(x)$)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y = \sqrt{1+x^3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

- Quedando:

Ejemplo

- Evaluar con $n=6$ la siguiente integral

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx.$$

- Tenemos que $\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5$.

- Y calculamos (solo necesitamos evaluar $f(x)$)

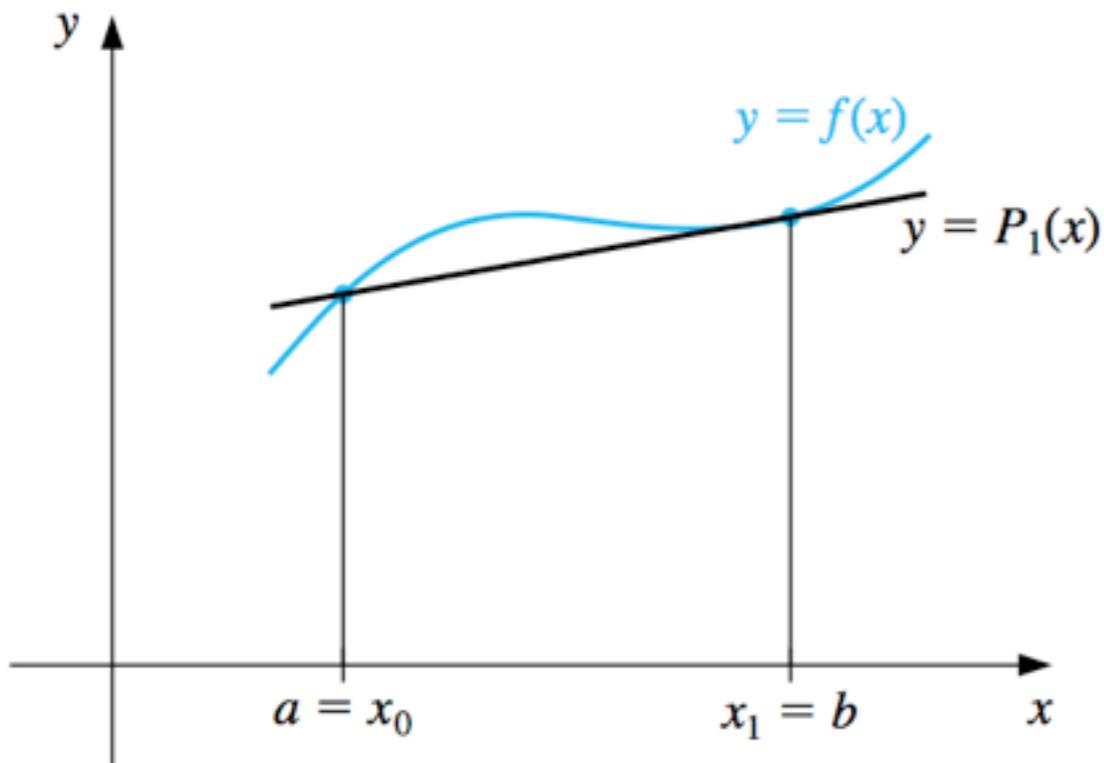
x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y = \sqrt{1+x^3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

- Quedando:

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{0.5}{3} \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{4.375} + 2(3) + 4\sqrt{16.625} + 2\sqrt{28} + 4\sqrt{43.875} + \sqrt{65} \right)$$
$$\approx 12.871$$

Errores de aproximación

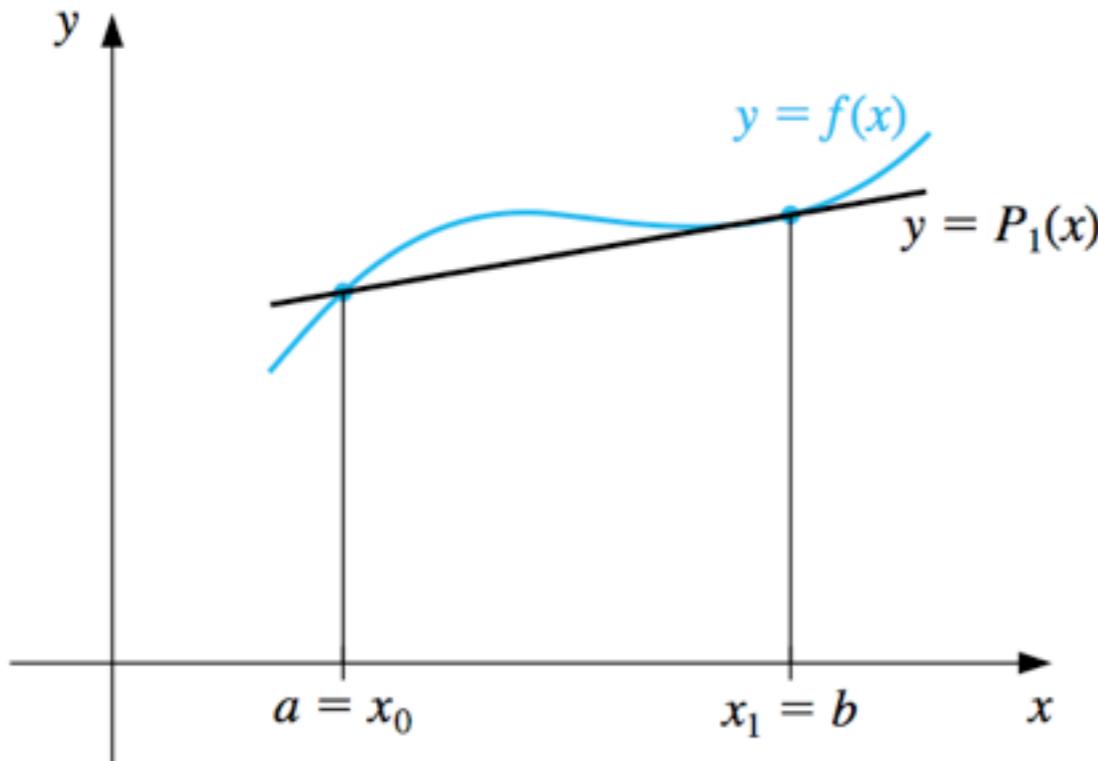
- La clase pasada vimos que:



$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

Errores de aproximación

- La clase pasada vimos que:



$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3.$$

$$-\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Para la integración por el método de Simpson, si $f \in C^4[a,b]$, entonces existe un número ξ en (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5.$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Para la integración por el método de Simpson, si $f \in C^4[a,b]$, entonces existe un número ξ en (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5.$$

$$E(\xi) = \frac{f^4(\xi)}{2590} 2^5 h^5$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para obtener cota aprox. : Usamos la expansión de series de Taylor de la función $f(x)$ alrededor de x_1 .

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para obtener cota aprox. : Usamos la expansión de series de Taylor de la función $f(x)$ alrededor de x_1 .

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2} (x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6} (x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24} (x - x_1)^4$$

y

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \left[f(x_1)(x - x_1) + \frac{f'(x_1)}{2} (x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6} (x - x_1)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'''(x_1)}{24} (x - x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx. \end{aligned}$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para la demostración: Para esto usamos las mismas herramientas de la clase pasada (teorema del valor medio ponderado):

En cálculo, tenemos el siguiente resultado: Si $\alpha(x)$ es continua en $[a, b]$ y $\beta(x)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x) dx = \alpha(c) \int_a^b \beta(x) dx$$

- ya que $(x-x_1)^4$ nunca es negativo en $[x_0, x_2]$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para la demostración: Para esto usamos las mismas herramientas de la clase pasada (teorema del valor medio ponderado):

En cálculo, tenemos el siguiente resultado: Si $\alpha(x)$ es continua en $[a, b]$ y $\beta(x)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x) dx = \alpha(c) \int_a^b \beta(x) dx$$

- ya que $(x-x_1)^4$ nunca es negativo en $[x_0, x_2]$

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120} (x - x_1)^5 \Big|_{x_0}^{x_2}$$

Ejemplos de las ventajas de regla de Simpson

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo $[1, 1.2]$

	$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x + 1)$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	0.24267	0.29766	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184	
Midpoint	0.24200	0.29282	0.09524	0.29732	0.17824	0.60083	
Trapezoidal	0.24400	0.30736	0.09545	0.29626	0.17735	0.60384	
Simpson's	0.24267	0.29767	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184	

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo $[0, 2]$

Ejemplos de las ventajas de regla de Simpson

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [1 ,1.2]

	$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x + 1)$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	0.24267	0.29766	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184	
Midpoint	0.24200	0.29282	0.09524	0.29732	0.17824	0.60083	
Trapezoidal	0.24400	0.30736	0.09545	0.29626	0.17735	0.60384	
Simpson's	0.24267	0.29767	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184	

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [0 ,2]

	$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x + 1)$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389	
Midpoint	2.000	2.000	1.000	2.818	1.682	5.436	
Trapezoidal	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389	
Simpson's	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421	