Matemáticas 4

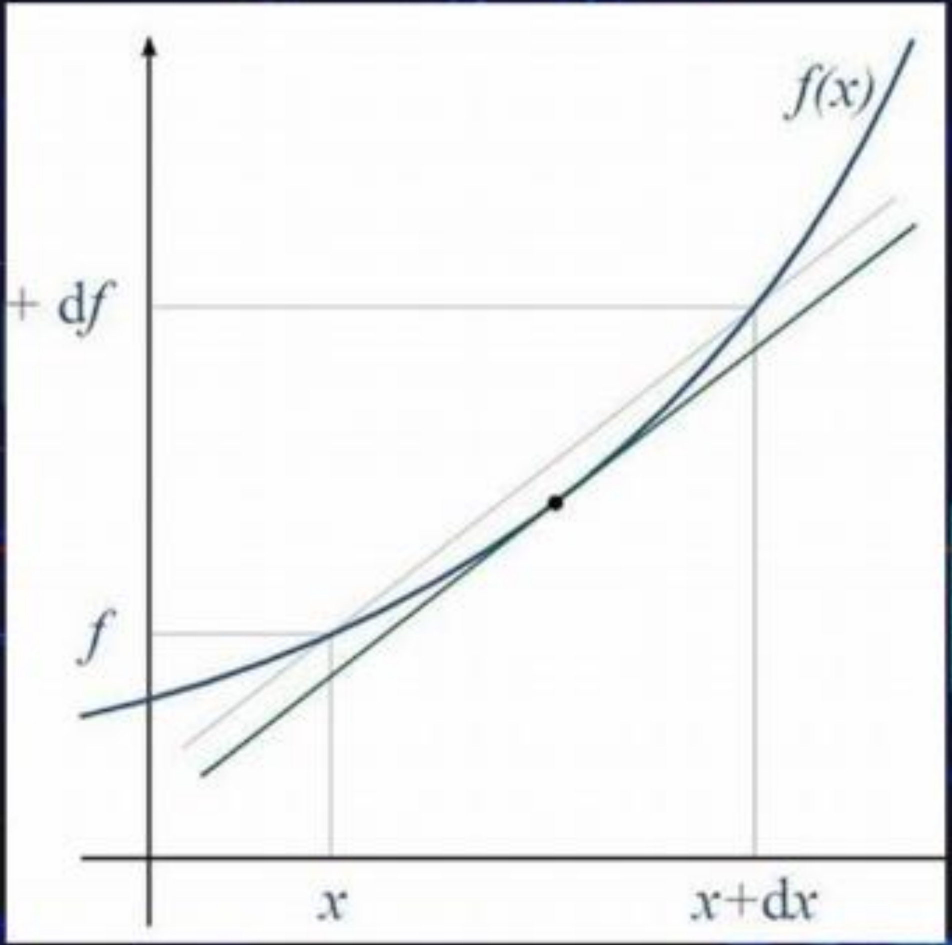
dmtipanr@uce.edu.ec

Ecuaciones Diferenciales

Sección 1

Introducción a las Derivadas

Definición de Derivada



Concepto de Tasa de Cambio

La derivada no solo mide la pendiente de una función, sino que también representa la tasa de cambio instantánea, permitiendo analizar cómo varía una cantidad en relación a otra en contextos matemáticos y físicos.

Reglas de Derivación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$$

Fundamentos del Cálculo

Las reglas de derivación son esenciales en el cálculo, permitiendo calcular derivadas de funciones y facilitando la resolución de problemas en matemáticas y ciencias aplicadas.

Aplicaciones Prácticas

Estas reglas son utilizadas en diversas disciplinas, como la física y la economía, para modelar fenómenos y optimizar procesos mediante el análisis de tasas de cambio.

Interconexión de Reglas

Cada regla de derivación, como la del producto y la de la cadena, se complementa entre sí, permitiendo abordar funciones complejas y mejorar la comprensión del comportamiento de las funciones.

Interpretación Geométrica de la Derivada

Pendiente de la Tangente

La derivada en un punto indica la inclinación de la línea tangente a la curva, reflejando el comportamiento local de la función en ese punto.

Comportamiento de la Función

La derivada positiva o negativa en un intervalo determina si la función es creciente o decreciente, proporcionando información sobre su tendencia general.

Visualización Gráfica

Graficar la función y su derivada permite observar cómo las variaciones en la función se relacionan con su tasa de cambio, facilitando la comprensión de su comportamiento.

Aplicaciones de la Derivada en la Vida Real

Modelado de Movimiento

La derivada permite calcular velocidad y aceleración, fundamentales en la física del movimiento.

Optimización Económica

Se utiliza para determinar costos marginales y maximizar beneficios en análisis de mercado.

Crecimiento Poblacional

En biología, ayuda a modelar tasas de crecimiento y distribución de medicamentos en organismos.

Ejercicios Resueltos de Derivadas y sus aplicaciones:

1.- Sea la curva paramétrica definida por $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^2 + 1 \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$, **con** $t \in \mathbb{R}$.

a) Halle $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2t}{3t^2 + 2t}$$

b) ¿Para qué valor(es) de $t \in \mathbb{R}$, la curva tiene recta tangente vertical?

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t(3t + 2) = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \vee t = 0$$

2.- Halle para $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$:

a) $f'(x)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

b) La ecuación de la recta tangente a f, en el punto $(1, f(1))$

Solución:

$$f'(1) = \frac{-3 \cdot 1^2 + 3}{(1^2 + 1)^2} = 0; y - f(1) = 0(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

3.- Si $y = e^x \sin(x)$, **verifique que es solución de la ecuación** $2y' - y'' - 2y = 0$.

Solución:

$y = e^x \sin(x)$; $2y' - y'' - 2y = 0$

$y' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

$y'' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) + e^x \cdot -\sin(x) = 2e^x \cos(x)$

$\Rightarrow 2(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) - 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ *Es solución*

Sección 2

Ecuaciones Diferenciales

Definición de Ecuación Diferencial

Relación entre funciones

Las ecuaciones diferenciales establecen conexiones entre funciones y sus derivadas, permitiendo modelar fenómenos donde las tasas de cambio son cruciales, como en la física y la ingeniería.

Clasificación y técnicas

Estas ecuaciones se dividen en ordinarias y parciales, y su estudio implica diversas técnicas matemáticas que facilitan la resolución y comprensión de sistemas complejos.

Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

Importancia de la Clasificación

La clasificación de ecuaciones diferenciales es esencial para seleccionar métodos de resolución adecuados, facilitando el análisis de sistemas dinámicos y la aplicación de teorías matemáticas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

- **Tipo**
  - **Ordinarias**: La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a *una sola variable* independiente.
  - **Parciales**: La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto *a dos o más variables* independientes.
- **Orden**
  - Primer orden: $F(x, y, y') = 0$
  - Segundo orden: $F(x, y', y'') = 0$
  - Tercer orden: $F(x, y, y', y'', y''') = 0$
  - .
  - .
  - .
  - Orden n: $F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$
- **Grado**
  - **Lineales**:
    - *a*) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado.
    - *b*) Cada coeficiente de y y sus derivadas depende solamente de la variable independiente x.
  - **No lineales**: Las que no cumplen las propiedades anteriores.

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

Importancia en Modelado

Las soluciones de ecuaciones diferenciales son cruciales para modelar fenómenos en física, biología y economía, reflejando dinámicas complejas en sistemas reales.

Métodos de Resolución

Existen diversos métodos para encontrar soluciones, como separación de variables y transformadas de Laplace, cada uno adecuado para diferentes tipos de ecuaciones.

Clasificación de Soluciones

Las soluciones se clasifican en explícitas, implícitas, triviales y particulares, cada una con características y aplicaciones específicas en el análisis matemático.

Beltrako.com

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

- 1 -

Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Comunes

Ecuaciones de Primer Orden

Modelan fenómenos como el crecimiento poblacional y la descomposición radiactiva.

Ecuaciones de Segundo Orden

Describen oscilaciones en sistemas físicos, como péndulos y resortes.

Ecuaciones Parciales

Utilizadas en la modelación de la distribución de calor y propagación de ondas.

Sección 3

Aplicaciones de las Derivadas y Ecuaciones Diferenciales

Modelado de Fenómenos Naturales

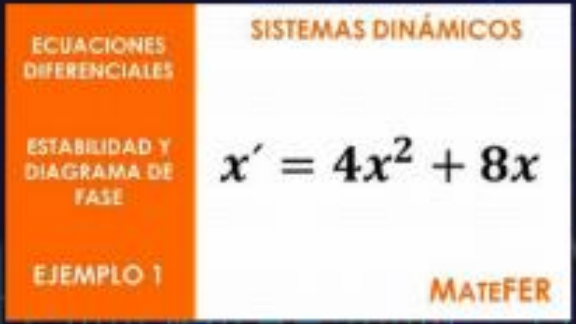
Importancia del Modelado

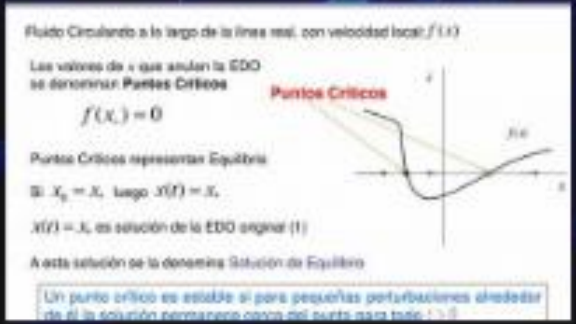
El modelado de fenómenos naturales permite predecir comportamientos complejos en sistemas dinámicos, facilitando la comprensión de interacciones entre variables en diversas disciplinas científicas.

Ejemplos Aplicados

Aplicaciones prácticas incluyen la predicción de cambios climáticos, el análisis de poblaciones en ecología y la simulación de procesos físicos, utilizando derivadas y ecuaciones diferenciales para obtener resultados precisos.

Análisis de Sistemas Dinámicos





Modelos Matemáticos Fundamentales

Los sistemas dinámicos se describen mediante ecuaciones diferenciales que representan la evolución temporal de variables, permitiendo analizar su comportamiento y predecir resultados futuros.

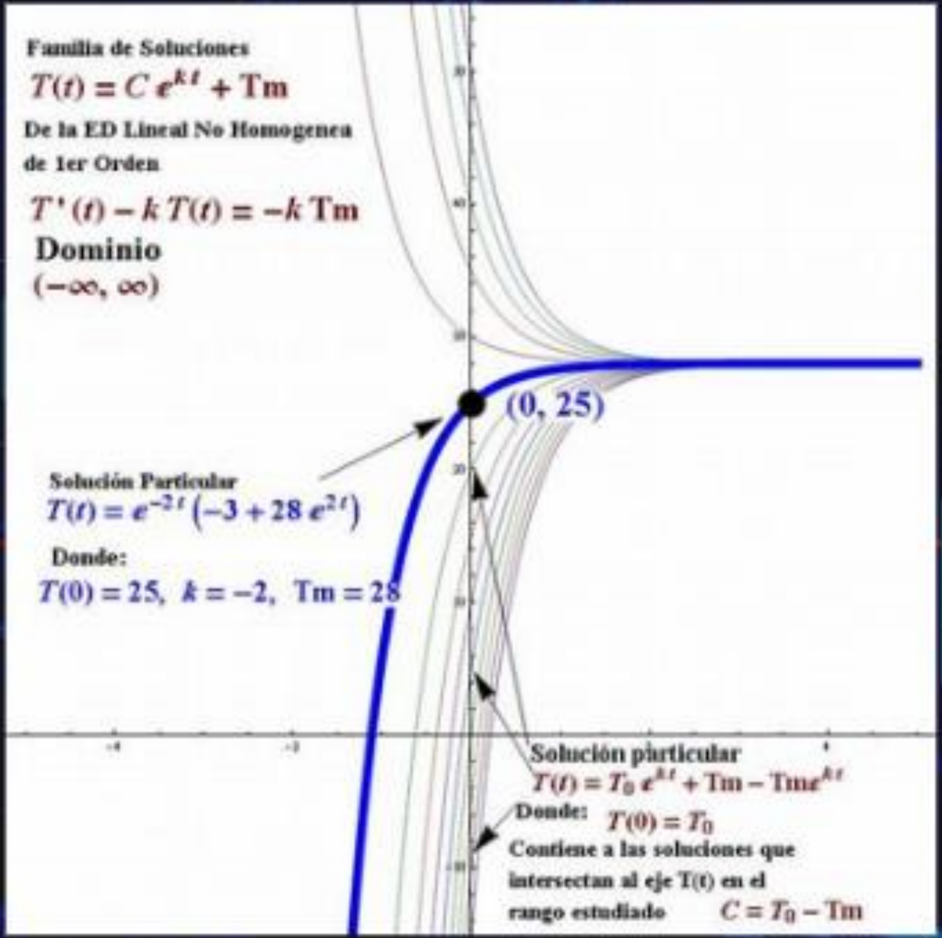
Clasificación y Tipos

Los sistemas se clasifican en lineales y no lineales, autónomos y no autónomos, así como en EDO y EDP, lo que influye en los métodos de análisis y resolución aplicables.

Estabilidad y Comportamiento

El estudio de la estabilidad de las soluciones es crucial, ya que determina cómo responden los sistemas a perturbaciones, afectando su comportamiento a largo plazo y su aplicabilidad en diversas áreas.

Resolución de Problemas de Valor Inicial



Importancia en Modelización

La resolución de problemas de valor inicial es crucial para modelar fenómenos en diversas disciplinas, permitiendo predecir comportamientos y dinámicas en sistemas físicos, biológicos y económicos a partir de condiciones iniciales específicas.

Gracias

dmtipanr@uce.edu.ec