

ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCIÓN

□ ¿De dónde sale la Regla de Simpson?

La Regla de Simpson es un método de integración numérica que se basa en aproximar una función curva mediante una parábola que pase por tres puntos conocidos de la función. Luego, se calcula el área bajo esa parábola, lo cual es mucho más fácil que calcular el área exacta bajo la curva original.

□ Idea clave: aproximar con una parábola

Dado un intervalo $[a, b]$, dividimos ese intervalo en dos partes iguales:

- a : punto inicial
- $m = \frac{a+b}{2}$: punto medio
- b : punto final

A partir de esos tres puntos:

- $(a, f(a))$
- $(m, f(m))$
- $(b, f(b))$

se construye un polinomio cuadrático que interpola esos tres valores:

$$P(x) = \text{par\'abola que pasa por } f(a), f(m), f(b)$$

En resumen:

Regla de Simpson

La Regla de Simpson es un método de integración numérica que permite aproximar el valor de una integral definida. Se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales cuando la solución requiere calcular una integral que no se puede evaluar de forma analítica.

□ Fórmula (Simpson 1/3):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

■ Esta forma es válida cuando el intervalo $[a, b]$ se divide en dos subintervalos iguales.

□ Fórmula general (Simpson compuesta):

Para n par subintervalos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)]$$

- $h = \frac{b-a}{n}$
- $x_0 = a, x_n = b$
- Se alternan coeficientes 4 y 2.

★ Aplicación en ecuaciones diferenciales

Cuando se tiene una EDO del tipo:

$$y'(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Se puede expresar la solución como:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Como la integral puede no tener solución exacta, se aplica la regla de Simpson para aproximarla numéricamente.

Ejemplo aplicado: Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y(0) = 1$$

Queremos aproximar el valor de $y(1)$, es decir:

$$y(1) = y(0) + \int_0^1 2x \, dx$$

Sabemos que:

- $y(0) = 1$
- $f(x) = 2x$
- Vamos a aplicar la regla de Simpson 1/3 compuesta con $n = 2$ subintervalos

Paso 1: Dividir el intervalo

$$a = 0, \quad b = 1, \quad n = 2, \quad h = \frac{1 - 0}{2} = 0.5$$

Puntos:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$$

Paso 2: Evaluar la función en esos puntos

$$f(x_0) = f(0) = 2(0) = 0$$

$$f(x_1) = f(0.5) = 2(0.5) = 1$$

$$f(x_2) = f(1) = 2(1) = 2$$

Paso 3: Aplicar la fórmula de Simpson 1/3

$$\int_0^1 2x \, dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$
$$= \frac{0.5}{3} [0 + 4(1) + 2] = \frac{0.5}{3}(6) = 1$$

Paso 4: Calcular $y(1)$

$$y(1) = y(0) + \int_0^1 2x \, dx = 1 + 1 = 2$$

 Resultado aproximado: $y(1) \approx 2$

□ Problema

Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y(0) = 1$$

Aproxima $y(1)$ usando la Regla de Simpson con $n = 2$ subintervalos.

□ Tabla de valores

x_i	$f(x_i) = 2x_i$	Coeficiente	Coef $\times f(x_i)$
0.0	0.0	1	0.0
0.5	1.0	4	4.0
1.0	2.0	1	2.0
Total			6.0

$$\int_0^1 2x \, dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{0.5}{3} \cdot 6 = 1$$

$$y(1) \approx y(0) + \int_0^1 2x \, dx = 1 + 1 = \boxed{2}$$



Gráfico conceptual (descripción para presentación)

- Eje horizontal: x de 0 a 1
- Curva: $f(x) = 2x$ (línea recta ascendente)
- Punto medio: $x = 0.5$, donde $f(x) = 1$
- Tramo aproximado con parábola (Simpson) que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(0.5, 1)$, $(1, 2)$

(Puedes dibujarlo en GeoGebra, Desmos o incluir una imagen de una parábola que aproxima una recta)

□ Comparación con el valor exacto

La integral exacta es:

$$\int_0^1 2x \, dx = [x^2]_0^1 = 1 \Rightarrow y(1) = 1 + 1 = 2$$

- ✓ Resultado exacto y resultado por Simpson coinciden perfectamente.

□ Problema

Resuelve aproximadamente:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2), \quad y(0) = 0$$

Calcula una aproximación de $y(1)$ usando la Regla de Simpson 1/3 con $n = 2$ subintervalos.

□ Paso 1: Datos

- $a = 0, b = 1, n = 2$
- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0.5$
- Puntos:
 - $x_0 = 0,$
 - $x_1 = 0.5,$
 - $x_2 = 1.0$

□ Paso 2: Evaluar la función

$$f(x) = \cos(x^2)$$

x_i	$f(x_i) = \cos(x_i^2)$	Coef.	Valor ponderado
0.0	$\cos(0) = 1.0000$	1	1.0000
0.5	$\cos(0.25) \approx 0.9689$	4	3.8756
1.0	$\cos(1) \approx 0.5403$	1	0.5403

Total ponderado:

$$1.0000 + 4(0.9689) + 0.5403 = 5.4159$$

□ Paso 3: Aplicar fórmula de Simpson

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$= \frac{0.5}{3} \cdot 5.4159 \approx 0.9027$$



Resultado

$$y(1) \approx y(0) + \int_0^1 \cos(x^2) dx \approx 0 + 0.9027 = \boxed{0.9027}$$

Aproximar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2x) + \cos(2x)] dx$$

usando la Regla de Simpson 1/3 con $n = 2$ subintervalos.

□ Paso 1: Datos iniciales

- $a = 0, b = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$
- $n = 2$, entonces:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

Puntos:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$
- $x_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$

□ Paso 2: Evaluar la función en los puntos

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(2x)$$

x_i	$f(x_i)$	Valor aproximado
$x_0 = 0$	$\sin(0) + \cos(0) = 0 + 1$	1.0000
$x_1 = \frac{\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0$	1.0000
$x_2 = \frac{\pi}{2}$	$\sin(\pi) + \cos(\pi) = 0 + (-1)$	-1.0000

□ Paso 3: Aplicar la fórmula de Simpson

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{\pi/4}{3} \cdot [1 + 4(1) + (-1)] = \frac{\pi}{12} \cdot (1 + 4 - 1) = \frac{\pi}{12} \cdot 4 = \frac{\pi}{3}$$



Resultado final:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x) + \cos(2x)) dx \approx \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$$

Ejercicios

Método de Trapecios

$$\int_0^2 (x+1)^{1/3} \cdot e^{-x^2} dx$$

usando $n = 4$ subintervalos.

□ Paso 1: Datos del problema

- $f(x) = (x + 1)^{1/3} \cdot e^{-x^2}$
- Intervalo: $a = 0, b = 2$
- Subintervalos: $n = 4$
- Paso:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = 0.5$$

□ Paso 2: Evaluación de la función

x_i	$f(x_i) = (x_i + 1)^{1/3} \cdot e^{-x_i^2}$	Valor aproximado
0.0	$(1)^{1/3} \cdot e^0 = 1 \cdot 1$	1.0000
0.5	$(1.5)^{1/3} \cdot e^{-0.25}$	≈ 0.9768
1.0	$(2)^{1/3} \cdot e^{-1}$	≈ 0.5825
1.5	$(2.5)^{1/3} \cdot e^{-2.25}$	≈ 0.2706
2.0	$(3)^{1/3} \cdot e^{-4}$	≈ 0.0966

□ Paso 3: Aplicar la Regla del Trapecio

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} &= \frac{0.5}{2} [1.0000 + 2(0.9768 + 0.5825 + 0.2706) + 0.0966] \\ &= 0.25 \cdot [1.0000 + 2(1.8299) + 0.0966] = 0.25 \cdot (1.0000 + 3.6598 + 0.0966) \\ &= 0.25 \cdot 4.7564 = \boxed{1.1891} \end{aligned}$$



Resultado final (Trapecios, $n = 4$):

$$\int_0^2 (x + 1)^{1/3} \cdot e^{-x^2} dx \approx 1.1891$$

Simpson

□ Paso 1: Datos iniciales

- $f(x) = (x + 1)^{1/3} \cdot e^{-x^2}$
- Intervalo: $a = 0, b = 2$
- Subintervalos: $n = 4$ (debe ser par)
- Paso:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Puntos:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = 0.5$
- $x_2 = 1.0$
- $x_3 = 1.5$
- $x_4 = 2.0$

□ Paso 2: Evaluar la función

x_i	$f(x_i)$	Valor aproximado
0.0	$(1)^{1/3} \cdot e^0 = 1 \cdot 1$	1.0000
0.5	$(1.5)^{1/3} \cdot e^{-0.25}$	≈ 0.9768
1.0	$(2)^{1/3} \cdot e^{-1}$	≈ 0.5825
1.5	$(2.5)^{1/3} \cdot e^{-2.25}$	≈ 0.2706
2.0	$(3)^{1/3} \cdot e^{-4}$	≈ 0.0966

□ Paso 3: Aplicar la fórmula de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\text{impares}} f(x_i) + 2 \sum_{\text{pares}} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Identificamos:

- $f(x_0) = 1.0000$
- $f(x_1) = 0.9768$
- $f(x_2) = 0.5825$
- $f(x_3) = 0.2706$
- $f(x_4) = 0.0966$

Sustituimos:

$$\frac{0.5}{3} [1.0000 + 4(0.9768 + 0.2706) + 2(0.5825) + 0.0966]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.5}{3} \cdot [1.0000 + 4(1.2474) + 1.1650 + 0.0966] = \frac{0.5}{3} \cdot (1.0000 + 4.9896 + 1.1650 + 0.0966) = \frac{0.5}{3} \cdot 7.2512 \\ &\quad = 0.1667 \cdot 7.2512 \approx 1.2085 \end{aligned}$$

□ Paso 2: Evaluar la función

x_i	$f(x_i)$	Valor aproximado
0.0	$(1)^{1/3} \cdot e^0 = 1 \cdot 1$	1.0000
0.5	$(1.5)^{1/3} \cdot e^{-0.25}$	≈ 0.9768
1.0	$(2)^{1/3} \cdot e^{-1}$	≈ 0.5825
1.5	$(2.5)^{1/3} \cdot e^{-2.25}$	≈ 0.2706
2.0	$(3)^{1/3} \cdot e^{-4}$	≈ 0.0966

□ Paso 3: Aplicar la fórmula de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\text{impares}} f(x_i) + 2 \sum_{\text{pares}} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Identificamos:

- $f(x_0) = 1.0000$
- $f(x_1) = 0.9768$
- $f(x_2) = 0.5825$
- $f(x_3) = 0.2706$
- $f(x_4) = 0.0966$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} & \frac{0.5}{3} [1.0000 + 4(0.9768 + 0.2706) + 2(0.5825) + 0.0966] \\ = & \frac{0.5}{3} \cdot [1.0000 + 4(1.2474) + 1.1650 + 0.0966] = \frac{0.5}{3} \cdot (1.0000 + 4.9896 + 1.1650 + 0.0966) = \frac{0.5}{3} \cdot 7.2512 \\ & = 0.1667 \cdot 7.2512 \approx \boxed{1.2085} \end{aligned}$$



Resultado con Simpson ($n = 4$):

$$\int_0^2 (x + 1)^{1/3} \cdot e^{-x^2} dx \approx 1.2085$$



Comparación:

Método

Resultado aproximado

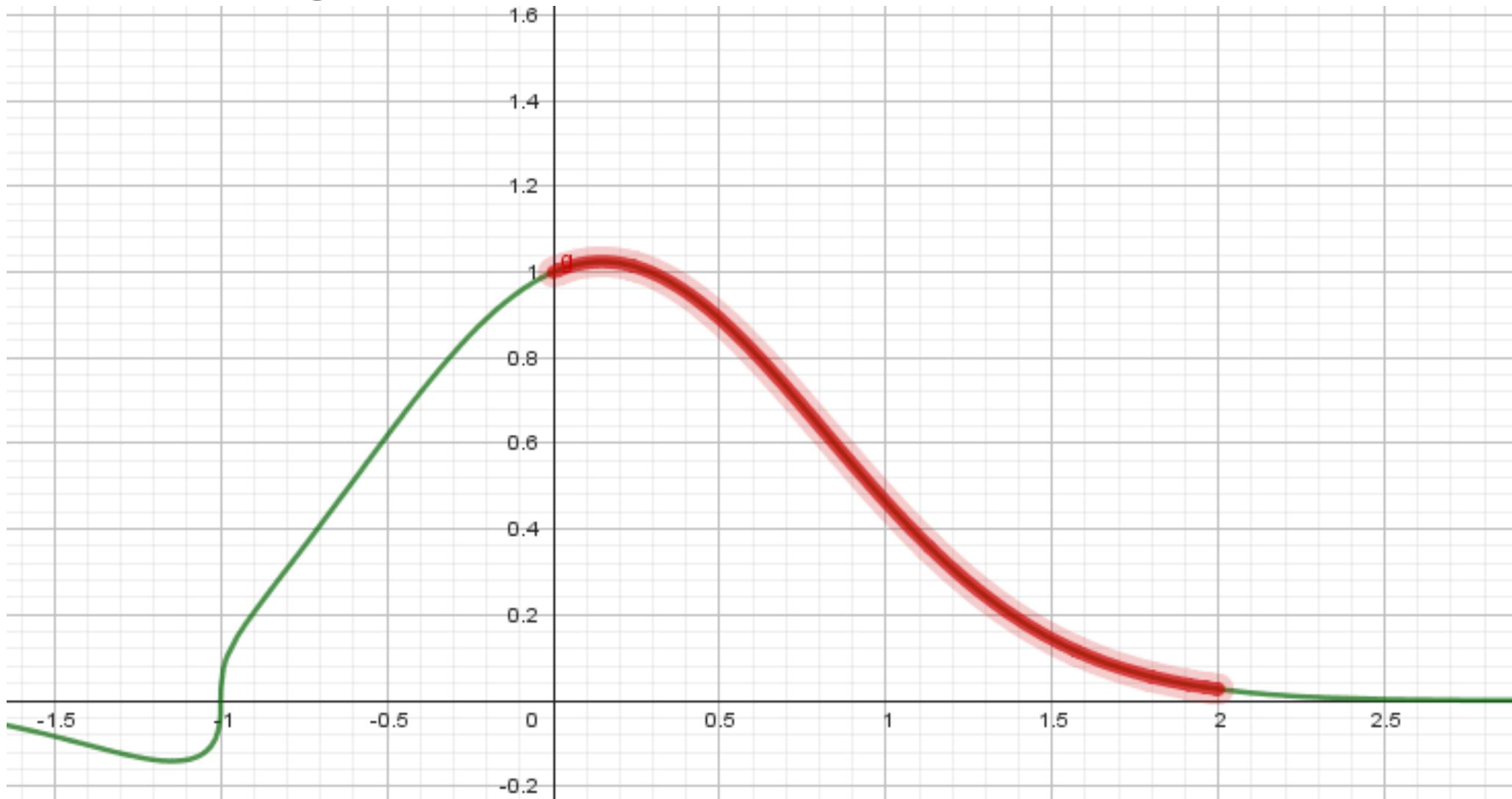
Trapezios ($n=4$)

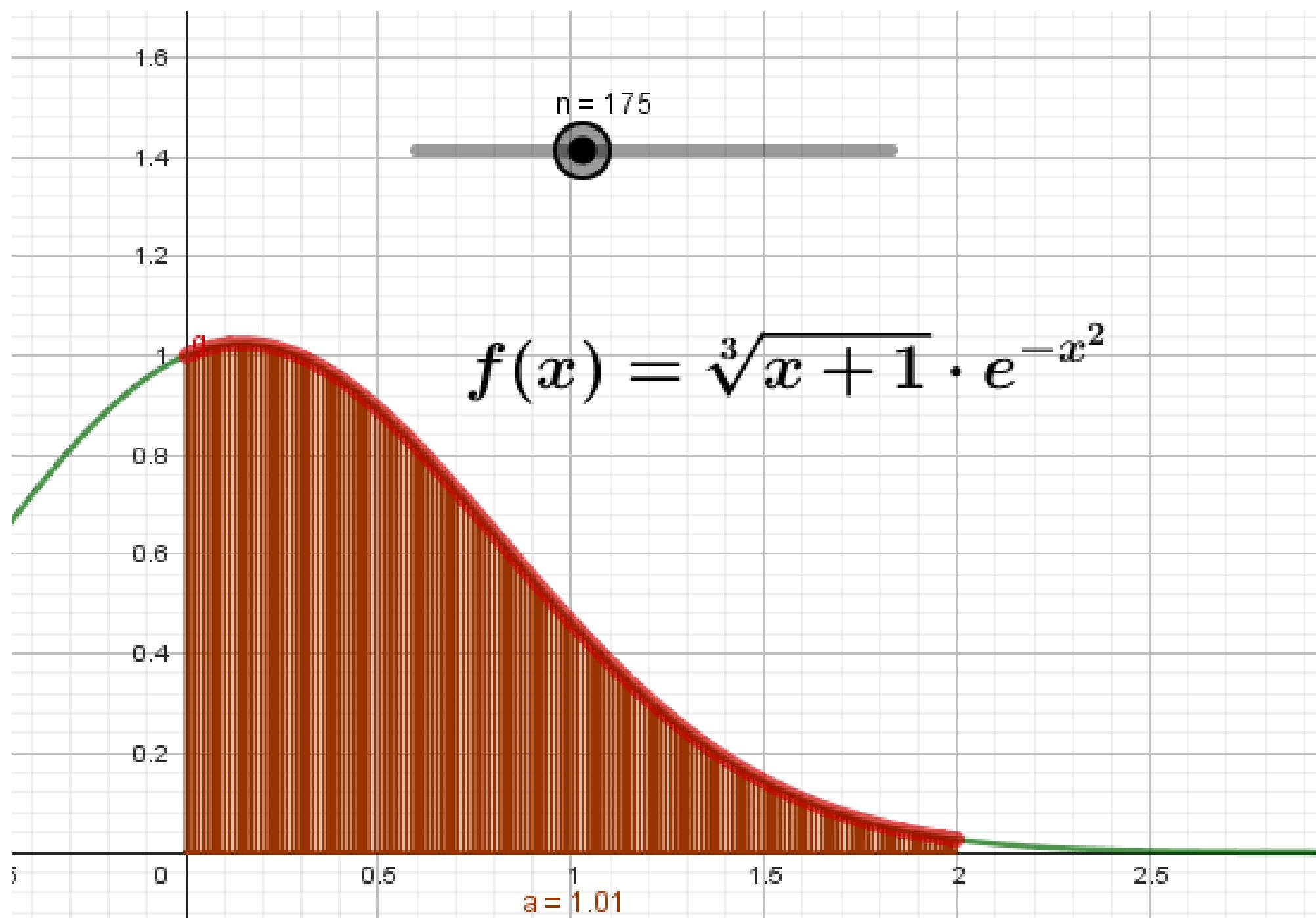
1.1891

Simpson ($n=4$)

1.2085 (más preciso)

Con Geogebra





Discusión

- Utilizaremos Simpson con n= 100 Intervalos

```
import numpy as np
from scipy.integrate import simpson

# Definir La función
def f(x):
    return np.cbrt(x + 1) * np.exp(-x**2)

# Intervalo y subintervalos
a = 0
b = 2
n = 100 # número de subintervalos (debe ser par)
x = np.linspace(a, b, n + 1)
y = f(x)

# Aplicar La regla de Simpson
resultado_simpson = simpson(y, x)
resultado_simpson
```

Resultado

1.014784112930325

Aplicando la Regla de Simpson compuesta con $n = 100$ subintervalos, obtenemos:

$$\int_0^2 \sqrt[3]{x+1} \cdot e^{-x^2} dx \approx 1.0148$$

Este valor está mucho más cercano al valor real (≈ 1.010), aunque todavía ligeramente sobreestimado, lo cual es normal con funciones que decrecen rápidamente, como ocurre aquí con el término e^{-x^2} .

FIN