# Matemáticas 4

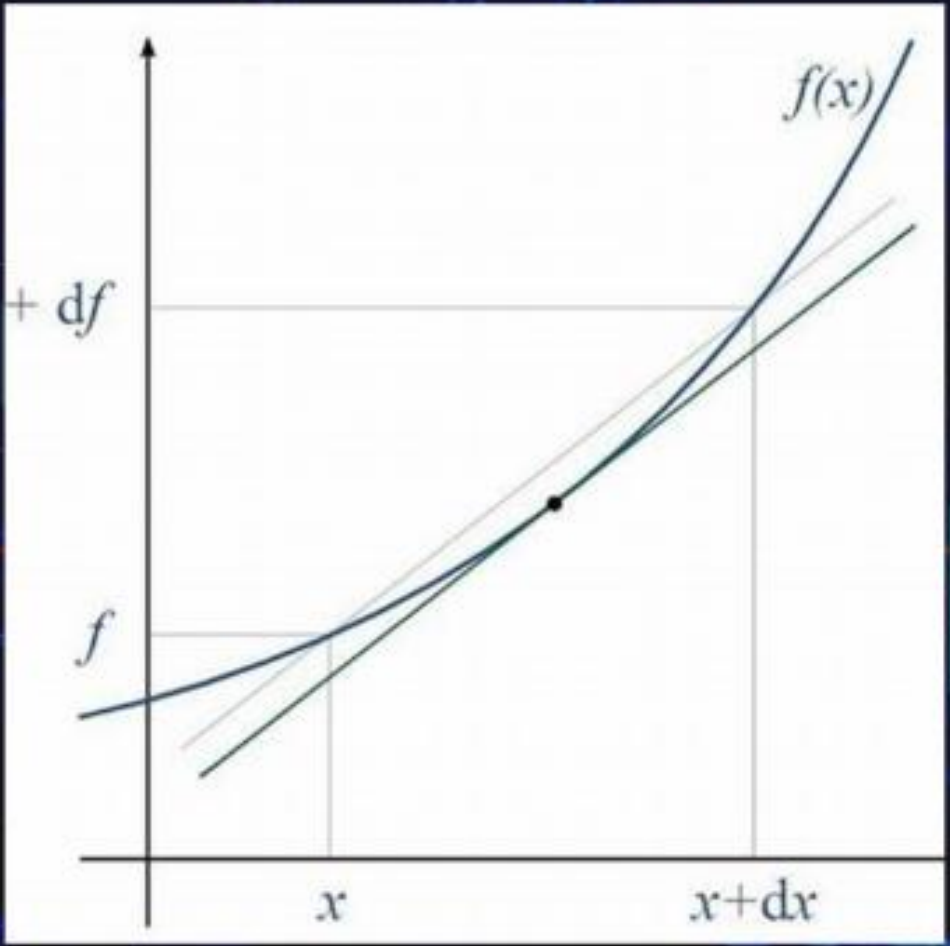
dmtipanr@uce.edu.ec

# Ecuaciones Diferenciales

## Sección 1

## Introducción a las Derivadas

# Definición de Derivada




### Concepto de Tasa de Cambio

La derivada no solo mide la pendiente de una función, sino que también representa la tasa de cambio instantánea, permitiendo analizar cómo varía una cantidad en relación a otra en contextos matemáticos y físicos.

# Reglas de Derivación



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$$

## Fundamentos del Cálculo

Las reglas de derivación son esenciales en el cálculo, permitiendo calcular derivadas de funciones y facilitando la resolución de problemas en matemáticas y ciencias aplicadas.

## Aplicaciones Prácticas

Estas reglas son utilizadas en diversas disciplinas, como la física y la economía, para modelar fenómenos y optimizar procesos mediante el análisis de tasas de cambio.

## Interconexión de Reglas

Cada regla de derivación, como la del producto y la de la cadena, se complementa entre sí, permitiendo abordar funciones complejas y mejorar la comprensión del comportamiento de las funciones.

# Interpretación Geométrica de la Derivada

### Pendiente de la Tangente

La derivada en un punto indica la inclinación de la línea tangente a la curva, reflejando el comportamiento local de la función en ese punto.

### Comportamiento de la Función

La derivada positiva o negativa en un intervalo determina si la función es creciente o decreciente, proporcionando información sobre su tendencia general.

### Visualización Gráfica

Graficar la función y su derivada permite observar cómo las variaciones en la función se relacionan con su tasa de cambio, facilitando la comprensión de su comportamiento.

# Aplicaciones de la Derivada en la Vida Real

### Modelado de Movimiento

La derivada permite calcular velocidad y aceleración, fundamentales en la física del movimiento.

### Optimización Económica

Se utiliza para determinar costos marginales y maximizar beneficios en análisis de mercado.

### Crecimiento Poblacional

En biología, ayuda a modelar tasas de crecimiento y distribución de medicamentos en organismos.

## Ejercicios Resueltos de Derivadas y sus aplicaciones:

**1.- Sea la curva paramétrica definida por** $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^2 + 1 \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$, **con** $t \in \mathbb{R}$.

a) Halle $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2t}{3t^2 + 2t}$$

b) ¿Para qué valor(es) de $t \in \mathbb{R}$, la curva tiene recta tangente vertical?

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 0 => t(3t + 2) = 0 => t = -\frac{2}{3} \vee t = 0$$

**2.- Halle para** $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$:

a) $f'(x)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

b) La ecuación de la recta tangente a $f$, en el punto $(1, f(1))$

Solución:

$$f'(1) = \frac{-3 \cdot 1^2 + 3}{(1^2 + 1)^2} = 0; y - f(1) = 0(x - 1) => y = \frac{3}{2}$$

**3.- Si** $y = e^x \sin(x)$, **verifique que es solución de la ecuación** $2y' - y'' - 2y = 0$.

Solución:

$$y = e^x \sin(x);\ 2y' - y'' - 2y = 0$$

$$y' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$y'' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) + e^x \cdot -\sin(x) = 2e^x \cos(x)$$

$$=> 2(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) - 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) = 0 => 0 = 0 => \textit{Es solución}$$

## Sección 2

# Ecuaciones Diferenciales

# Definición de Ecuación Diferencial

## Relación entre funciones

Las ecuaciones diferenciales establecen conexiones entre funciones y sus derivadas, permitiendo modelar fenómenos donde las tasas de cambio son cruciales, como en la física y la ingeniería.

## Clasificación y técnicas

Estas ecuaciones se dividen en ordinarias y parciales, y su estudio implica diversas técnicas matemáticas que facilitan la resolución y comprensión de sistemas complejos.

# Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

## Importancia de la Clasificación

La clasificación de ecuaciones diferenciales es esencial para seleccionar métodos de resolución adecuados, facilitando el análisis de sistemas dinámicos y la aplicación de teorías matemáticas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

### Clasificación de las ecuaciones diferenciales

| | | |
|---|---|---|
| Tipo | Ordinarias | La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a *una sola variable* independiente. |
| | Parciales | La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto *a dos o más variables* independientes. |
| Orden | Primer orden | $F(x, y, y') = 0$ |
| | Segundo orden | $F(x, y', y'') = 0$ |
| | Tercer orden | $F(x, y, y', y'', y''') = 0$ |
| | ⋮ | ⋮ |
| | Orden $n$ | $F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$ |
| Grado | Lineales | *a*) La variable dependiente $y$ y todas sus derivadas son de primer grado. *b*) Cada coeficiente de $y$ y sus derivadas depende solamente de la variable independiente $x$. |
| | No lineales | Las que no cumplen las propiedades anteriores. |

# Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

### Importancia en Modelado

Las soluciones de ecuaciones diferenciales son cruciales para modelar fenómenos en física, biología y economía, reflejando dinámicas complejas en sistemas reales.

### Métodos de Resolución

Existen diversos métodos para encontrar soluciones, como separación de variables y transformadas de Laplace, cada uno adecuado para diferentes tipos de ecuaciones.

### Clasificación de Soluciones

Las soluciones se clasifican en explícitas, implícitas, triviales y particulares, cada una con características y aplicaciones específicas en el análisis matemático.

Beltrako.com

**APLICACIONES**

**DE LAS**

**ECUACIONES**

**DIFERENCIALES**

- 1 -

# Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Comunes

### Ecuaciones de Primer Orden

Modelan fenómenos como el crecimiento poblacional y la descomposición radiactiva.

### Ecuaciones de Segundo Orden

Describen oscilaciones en sistemas físicos, como péndulos y resortes.

### Ecuaciones Parciales

Utilizadas en la modelación de la distribución de calor y propagación de ondas.

Sección 3

# Aplicaciones de las Derivadas y Ecuaciones Diferenciales

# Modelado de Fenómenos Naturales

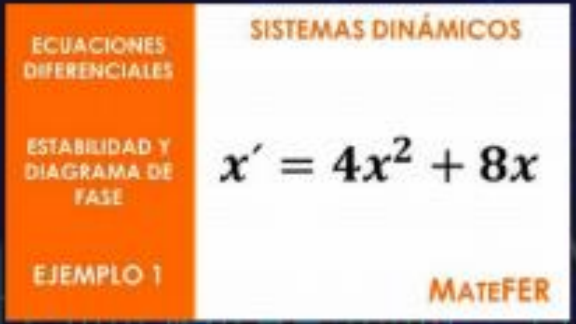
## Importancia del Modelado

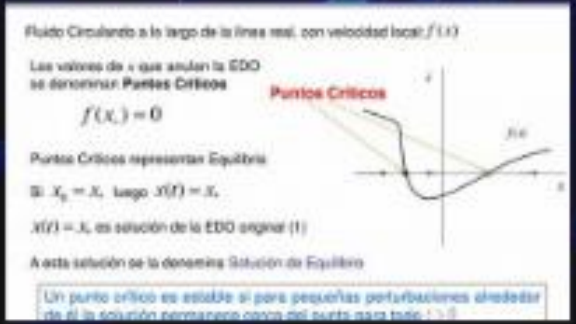
El modelado de fenómenos naturales permite predecir comportamientos complejos en sistemas dinámicos, facilitando la comprensión de interacciones entre variables en diversas disciplinas científicas.

## Ejemplos Aplicados

Aplicaciones prácticas incluyen la predicción de cambios climáticos, el análisis de poblaciones en ecología y la simulación de procesos físicos, utilizando derivadas y ecuaciones diferenciales para obtener resultados precisos.

# Análisis de Sistemas Dinámicos




## Modelos Matemáticos Fundamentales

Los sistemas dinámicos se describen mediante ecuaciones diferenciales que representan la evolución temporal de variables, permitiendo analizar su comportamiento y predecir resultados futuros.

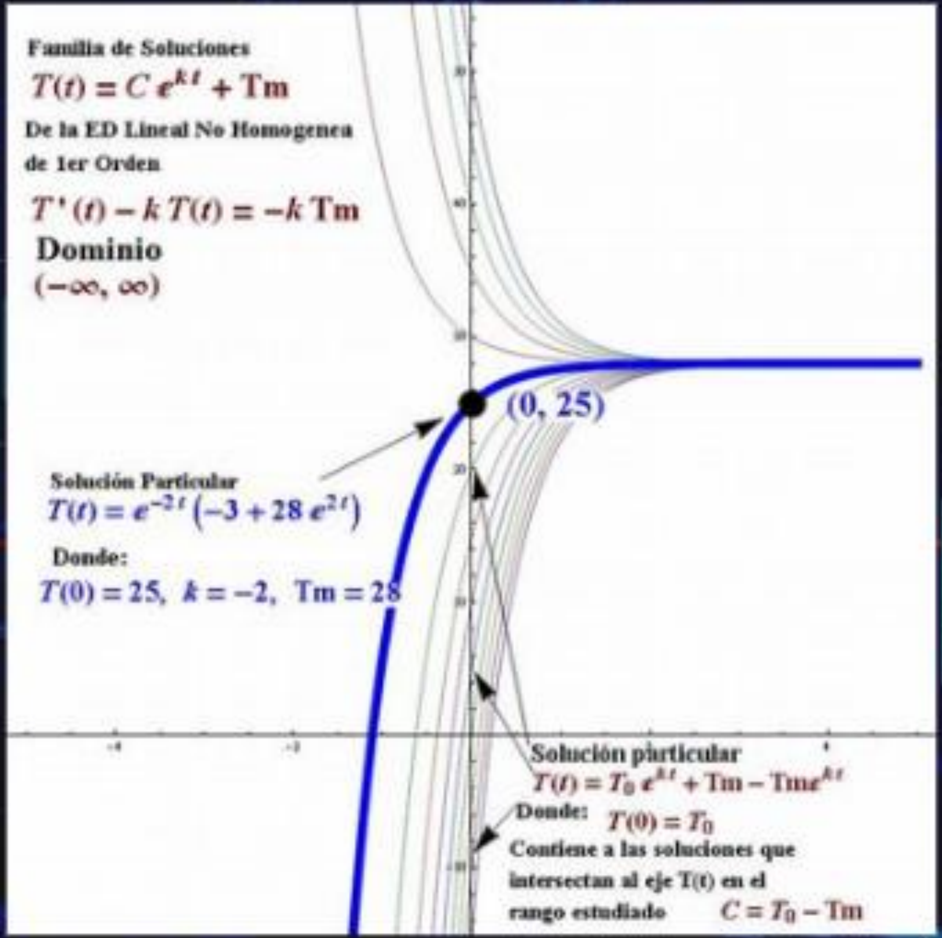
## Clasificación y Tipos

Los sistemas se clasifican en lineales y no lineales, autónomos y no autónomos, así como en EDO y EDP, lo que influye en los métodos de análisis y resolución aplicables.

## Estabilidad y Comportamiento

El estudio de la estabilidad de las soluciones es crucial, ya que determina cómo responden los sistemas a perturbaciones, afectando su comportamiento a largo plazo y su aplicabilidad en diversas áreas.

# Resolución de Problemas de Valor Inicial




## Importancia en Modelización

La resolución de problemas de valor inicial es crucial para modelar fenómenos en diversas disciplinas, permitiendo predecir comportamientos y dinámicas en sistemas físicos, biológicos y económicos a partir de condiciones iniciales específicas.

# Gracias

dmtipanr@uce.edu.ec

**DEFINICIÓN 1.1.1 Ecuación diferencial**

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial** (ED).

**CLASIFICACIÓN POR TIPO** Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

Una ED puede contener
más de una variable dependiente,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \tag{2}$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP)**. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.*

función incógnita
o variable dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

variable independiente

**CLASIFICACIÓN POR ORDEN** El **orden de una ecuación diferencial** (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo,

$$\overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{\text{segundo orden}} + 5\left(\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\text{primer orden}}\right)^3 - 4y = e^x$$

Simbólicamente podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de $n$-ésimo orden con una variable dependiente por la forma general

$$F(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

La ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

**CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD** Una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden (4) se dice que es **lineal** si $F$ es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de $n$-ésimo orden es lineal cuando la ecuación (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \qquad (6)$$

Las ecuaciones

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

término no lineal: coeficiente depende de $y$

término no lineal: función no lineal de $y$

término no lineal: el exponente es diferente de 1

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente.

### DEFINICIÓN 1.1.2 **Solución de una EDO**

Cualquier función $\phi$, definida en un intervalo $I$ y que tiene al menos $n$ derivadas continuas en $I$, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de $n$-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

## EJEMPLO 1 **Verificación de una solución**

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

**a)** $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}; \quad y = \frac{1}{16}x^4$ **b)** $y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$

**SOLUCIÓN** Una forma de verificar que la función dada es una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda $x$ en el intervalo.

**a)** De

$$\textit{lado izquierdo:} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4 \cdot x^3) = \frac{1}{4}x^3,$$

$$\textit{lado derecho:} \qquad xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3,$$

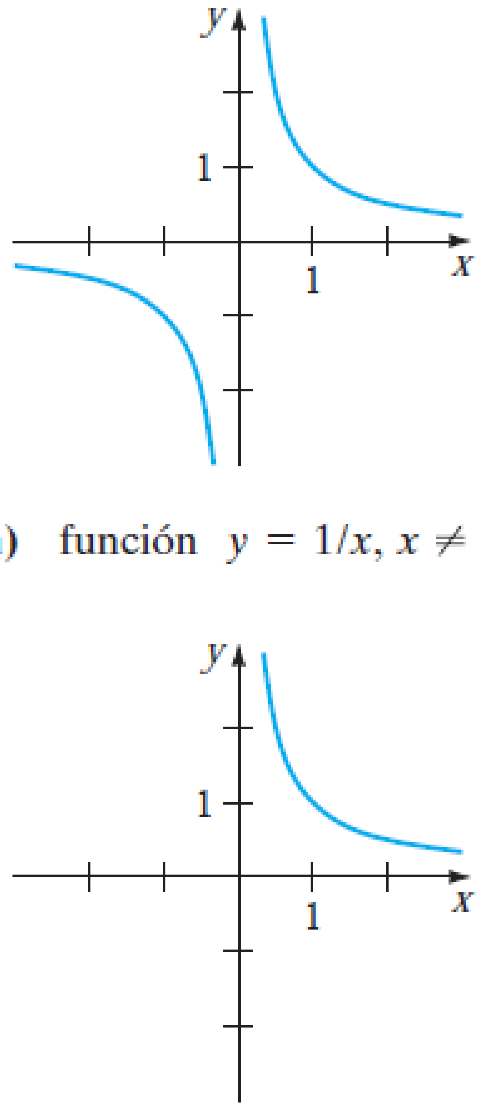
vemos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real $x$. Observe que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{1}{16}x^4$.

**b)** De las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos que para todo número real $x$,

*lado izquierdo:* $\quad y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0,$

*lado derecho:* $\quad 0.$ ■

En el ejemplo 1, observe también, que cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Una solución de una ecuación diferencial que es igual a cero en un intervalo $I$ se dice que es la **solución trivial**.




**a)** función $y = 1/x, x \neq 0$

**b)** solución $y = 1/x, (0, \infty)$

FIGURA 1.1.1 La función $y = 1/x$ no es la misma que la solución $y = 1/x$

### DEFINICIÓN 1.1.3 Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo $I$, suponiendo que existe al menos una función $\phi$ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en $I$.

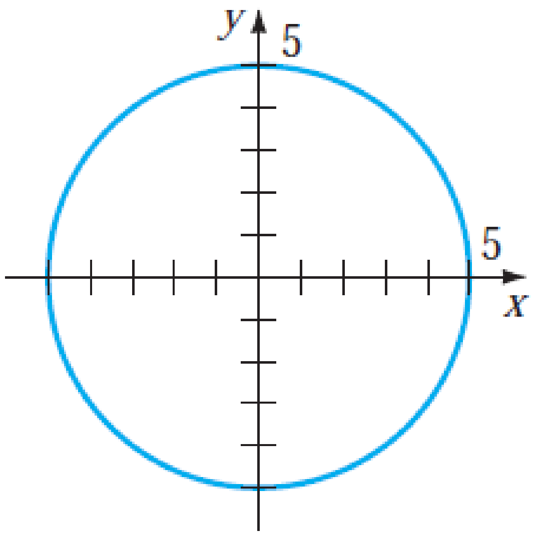
## EJEMPLO 3 Comprobación de una solución implícita

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

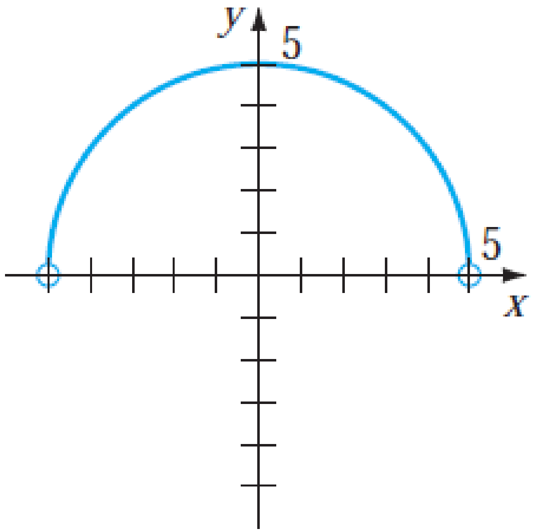
en el intervalo abierto $(-5, 5)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \qquad \text{o} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$



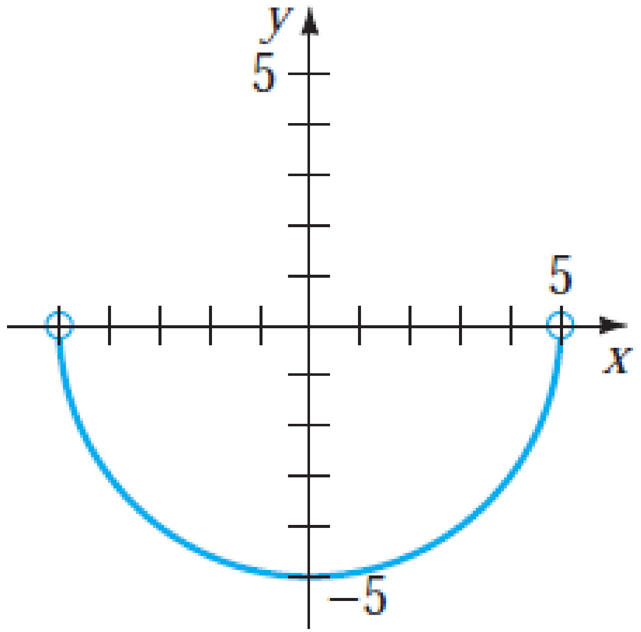

**a)** solución implícita

$x^2 + y^2 = 25$



**b)** solución explícita

$$y_1 = \sqrt{25 - x^2},\ -5 < x < 5$$




**c)** solución explícita

$$y_2 = -\sqrt{25 - x^2},\ -5 < x < 5$$

**FIGURA 1.1.2** Una solución implícita de dos soluciones explícitas de $y' = -x/y$.

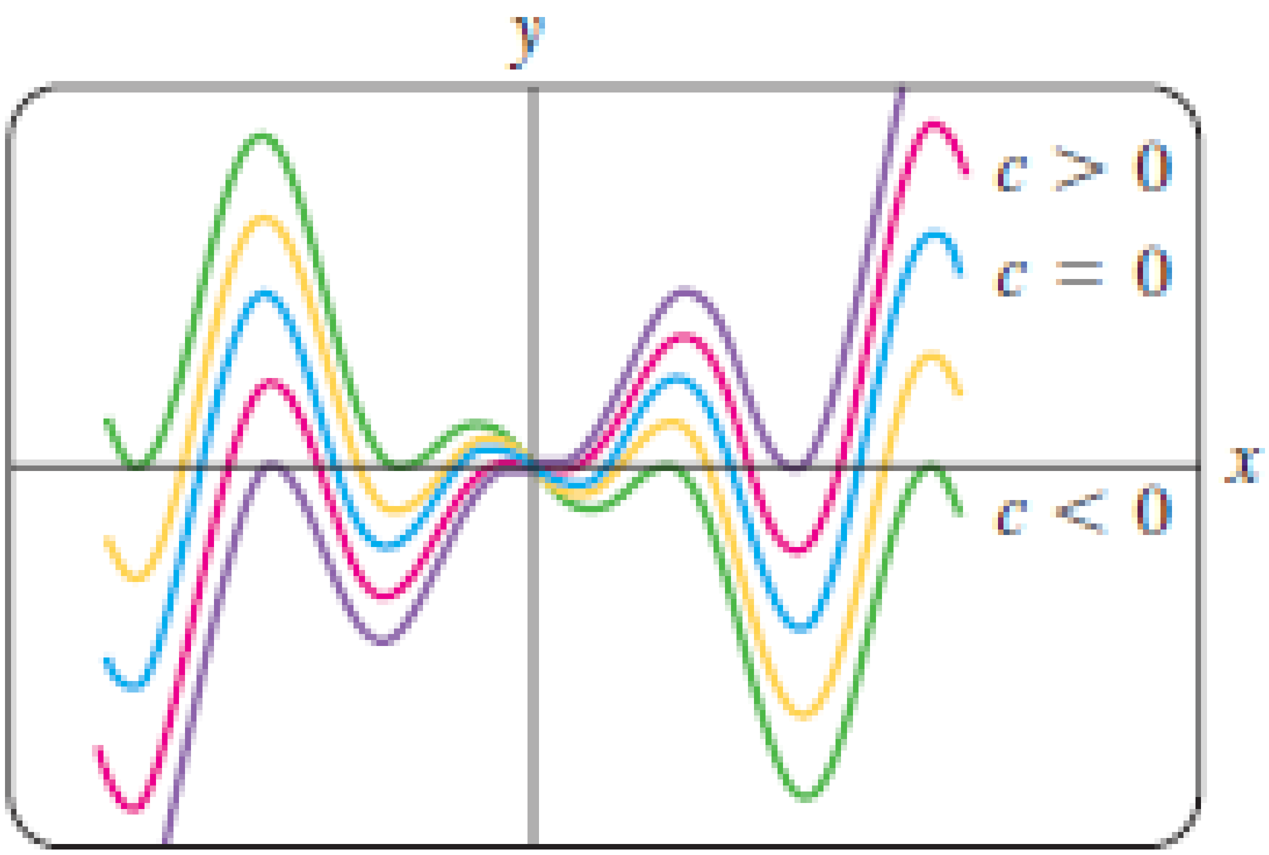



**FIGURA 1.1.3** Algunas soluciones de $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

FIN