Ecuaciones Diferenciales Homogeneas

Definición

Una función $f(x,y)$ es homogenea de grado n si al multiplicar sus variables por un parametro t se cumple

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

Ejemplo

$f(x,y) = x^2 + y^2$ es homogenea de grado 2

porque: $(tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2+y^2)$

Como Identificar

Forma

$M(x,y)dx + N(x,y)dx = 0$

Donde M y N son funciones homogeneas del mismo grado

Forma de derivada

Se puede reescribir la ecuación como función que depende exclusivamente de la razón y/x:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Formulas de Sustitución

El objetivo es transformar la ecuación diferencial homogenea en una de variables separables

Caso A

Solo cuando $N(x,y)$ es mas sencilla

Sustitución:

$y = ux$

Diferencial:

$dy = udx + xdu$

Caso B

Util cuando $M(x,y)$ es mas sencilla

Sustitución

$x = vy$

Diferencial

$dx = vdy + ydv$

Solución Paso a Paso

1. **Verificar** Comprobar si M y N son homogeneas
2. **Sustituir** Reemplazar (y) y (dy) en la ecuación original
3. **Simplificar** Algebraicamente, eliminar terminos comunes.
4. **Separar** Agrupar los terminos dx con x y u con du
5. **Integrar** Resolver la integral de ambos lados
6. **Retornar**: Reemplazar u por y/x

Ejemplo

$(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$

$M = x^2+y^2$ (Grado 2) $N = x^2$ (Grado 2)

$y = ux$, $dy = udx + xdu$:

$(x^2 + (ux)^2)dx + (x^2 - x(ux))(udx + xdu) = 0$

$x^2(1+u^2)dx + x^2(1-u)(udx + xdu) = 0$

$dx + u^2dx + udx + xdu - u^2dx - uxdu = 0$

$(1+u)dx + x(1-u)du = 0$

$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u}du = 0$

$\frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u+1}du$

Al final se integra, y se devuelve $u = y/x$ para obtener la solución general

Juan Valle PCEI4-002