

Clase No. 18 (Segunda parte):

## Cuadratura Gaussiana

---

**MAT-251**

# Introducción

---

Sea una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Dada una partición  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , las fórmulas vistas de integración numérica son de la forma

$$\int_a^b f(x) dx \approx W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + \dots + W_n f(x_n).$$

Para usar una fórmula sólo hay que especificar los nodos  $x_i$  y los pesos  $W_i$ .

# Introducción

Sea una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Dada una partición  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , las fórmulas vistas de integración numérica son de la forma

$$\int_a^b f(x) dx \approx W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + \dots + W_n f(x_n).$$

Para usar una fórmula sólo hay que especificar los nodos  $x_i$  y los pesos  $W_i$ . Una forma de determinar los pesos es usando interpolación. Por ejemplo, usando los polinomios de Lagrange, se tiene

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad \text{donde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Si ocurre que  $p$  es una buena aproximación de  $f$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$$

¿Para qué tipo de funciones  $f$  la fórmula es exacta?

# Ejemplo

---

Para obtener la fórmula de cuadratura en el intervalo  $[-2, 2]$  usando los nodos  $-1, 0, 1$ , calculamos

$$L_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \implies w_1 = \frac{8}{3}$$

$$L_2(x) = -(x+1)(x-1) \implies w_2 = -\frac{4}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}x(x+1) \implies w_3 = \frac{8}{3}$$

Así,

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx \frac{4}{3}[2f(-1) - f(0) + 2f(1)]$$

# Cambio de intervalo

---

Supongamos que tenemos la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$$

Para calcular la integral de  $f$  en el intervalo  $[c, d]$  podemos aplicar la transformación

# Cambio de intervalo

---

Supongamos que tenemos la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$$

Para calcular la integral de  $f$  en el intervalo  $[c, d]$  podemos aplicar la transformación

$$x(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$$

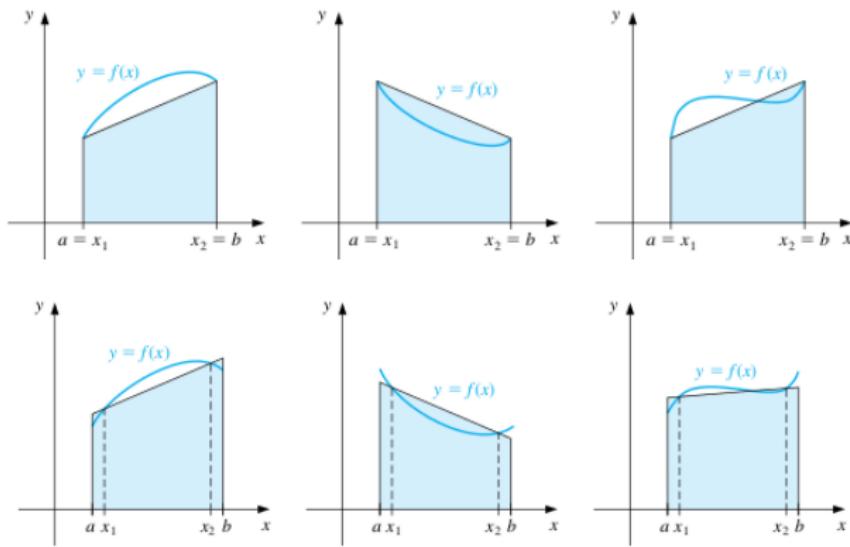
Entonces

$$\int_c^d f(x) dx = \frac{d-c}{b-a} \int_a^b f(x(t)) dt \approx \frac{d-c}{b-a} \sum_{i=0}^n W_i f(x(t_i))$$

# Distribución de los nodos

- Usar nodos equiespaciados ayuda a obtener fórmulas de integración compuestas o recursivas.
- Esta tipo de discretización en general no ayuda a reducir el error de la aproximación de la integral.

Por ejemplo, para regla de trapezo:



# Nodos y pesos Gaussianos (I)

Gauss demostró que escogiendo los nodos de una manera especial era posible mejorar la exactitud del cálculo de la integral numérica.

## Teorema de cuadratura Gaussiana

Sea  $q$  un polinomio de grado  $n + 1$  tal que

$$\int_a^b x^k q(x) dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$  los ceros de  $q$ . Entonces la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i), \quad \text{con} \quad W_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad (1)$$

es exacta para polinomios de grado a lo más  $2n + 1$ . Además,  $x_i \in (a, b)$ .

# Nodos y pesos Gaussianos (II)

Para la demostración, hay que aplicar el algoritmo de la división

$$f = pq + r,$$

y puesto que  $x_i$  es raíz de  $q$ , tenemos que

$$f(x_i) = p(x_i)q(x_i) + r(x_i) = r(x_i),$$

y como el grado de  $p$  es a lo más  $n$ , debemos tener que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x)q(x) dx + \int_a^b r(x) dx = \int_a^b r(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i r(x_i) = \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$$

En resumen, si usamos nodos arbitrarios, la fórmula (1) es exacta para polinomios de grado a lo más  $n$ . Si se usan los nodos Gaussianos, (1) es exacta para polinomios de grado a lo más  $2n + 1$ .

# Ejemplo (I)

Para calcular la fórmula de la cuadratura Gaussiana con tres nodos para estimar la integral  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , necesitamos determinar un polinomio  $q$  de la forma

$$q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3,$$

tal que

$$\int_{-1}^1 q(x) dx = \int_{-1}^1 xq(x) dx = \int_{-1}^1 x^2q(x) dx = 0.$$

Si hacemos  $c_0 = c_2 = 0$ , entonces  $q(x) = c_1x + c_3x^3$ , y por ser una función impar,

$$\int_{-1}^1 xq(x) dx = \int_{-1}^1 x^2q(x) dx = 0.$$

Queremos que

$$0 = \int_{-1}^1 xq(x) dx = \int_{-1}^1 (c_1x^2 + c_3x^4) dx = \left[ \frac{c_1}{3}x^3 + \frac{c_3}{5}x^5 \right]_{-1}^1$$

Podemos elegir  $c_1 = -3$  y  $c_3 = 5$ .

## Ejemplo (II)

Así,  $q(x) = 5x^3 - 3x$ , y sus raíces son  $-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$ .

Tenemos que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx W_1 f(-\sqrt{3/5}) + W_2 f(0) + W_3 f(\sqrt{3/5})$$

es exacta para polinomios de grado a lo más 2. Para determinar  $W_i$  podemos proponer algunos de éstos polinomios y obtener un sistema de ecuaciones:

$f$	$\int_{-1}^1 f(x) dx$	Cuadratura
1	2	$W_1 + W_2 + W_3$
$x$	0	$-\sqrt{3/5}W_1 + \sqrt{3/5}W_3$
$x^2$	2/3	$(3/5)(W_1 + W_3)$

De aquí que  $W_1 = W_3 = 5/9$  y  $W_2 = 8/9$ . Así, la fórmula de la cuadratura Gaussiana para tres nodos en  $[-1, 1]$  es

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})]$$

# Ejemplo (III)

Esta fórmula es exacta para polinomios de grado a lo más 5.

**Ejemplo:** Para calcular numéricamente  $\int_{-1}^1 3x^4 + 2x^2 dx = \frac{38}{15}$ , tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 3x^4 + 2x^2 dx &\approx \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})] \\ &= \frac{1}{9}\left[5\frac{57}{25} + 8(0) + 5\frac{57}{25}\right] = \frac{38}{15}\end{aligned}$$

Otro ejemplo, tenemos que

$$\int_{-1}^1 (2x^{10} - 6x^6 - x^4 + 3x^2) dx = \frac{96}{385} \approx 0.24935$$

Aplicando la cuadratura Gaussiana, tenemos

$$\int_{-1}^1 (2x^{10} - 6x^6 - x^4 + 3x^2) dx \approx \frac{208}{625} \approx 0.3328$$