Cadenas de Markov

Ejercicio 1

Dada una cadena de Markov con estados "A" y "B" o, equivalentemente 0 y 1. Si las probabilidades condicionales son $P[A|B] = 0.1$ y $P[B|A] = 0,4$, dibuje el diagrama de estados y encuentre la matriz de transiciones de probabilidad.

Ejercicio 2

En algunos sistemas de comunicaciones es importante determinar el porcentaje de tiempo en el que una persona está hablando. A partir de mediciones se encuentra que, si una persona está hablando en un dado intervalo de tiempo, entonces estará hablando en el siguiente intervalo de tiempo con probabilidad 0.75. Si no está hablando en un intervalo, entonces estará hablando en el intervalo siguiente con probabilidad 0.5. Dibuje el diagrama de estados usando los estados "hablando" y "no hablando".

Ejercicio 3

Para la siguiente matriz de transición de probabilidades dibuje el correspondiente diagrama de estados:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4

Una máquina de una línea de producción se puede encontrar en alguno de los siguientes estados:

$$S_1 = Trabajando \quad \text{o} \quad S_2 = Rota$$

La empresa cuenta con un sistema de control que verifica el funcionamiento de la máquina cada 1 minuto.
Si en un control la máquina se encuentra en estado "Trabajando" la probabilidad que en el siguiente control esté en estado "Rota" es P_{12}=0.05
Si la máquina se encuentra operativa la probabilidad que continúe en el mismo estado en la siguiente verificación es P_{11}: 0.95
Si se verifica que la máquina está en estado "Rota" la probabilidad que en la siguiente verificación este en estado "Trabajando" es: P_{21}= 0.1
Y si la máquina se encuentra en estado "Rota" la probabilidad que continúe en el mismo estado en la próxima verificación es: P_{22}=0.6

a) Determine la matriz de cambio de estado.
b) Determine la cantidad de tiempo que la máquina no se encuentra trabajando.
c) Determine la probabilidad que la máquina se encuentre operativa luego de 2 verificaciones.
d) Encuentre la cantidad media de verificaciones que existen entre dos roturas consecutivas.
e) Utilizando Matlab, Octave o Python simule 20 verificaciones realizadas por el sistema de control, mostrando en un gráfico el estado en el que se encuentra la máquina en cada verificación.

Ejercicio 5

Una partícula se mueve sobre un círculo por puntos marcados 0, 1, 2, 3, 4 (en sentido horario). La partícula empieza en el punto 0. En cada paso tiene una probabilidad de 0,5 de moverse un punto en el sentido de las agujas del reloj y la misma de moverse un punto en sentido contrario (de estar en el 0, y elegir retroceder sigue al 4, y de estar en el número 4 y desear avanzar va al 0).

a) Determine la matriz de transición.
b) Calcule la matriz de transición para 5 , 10, 20, 40, 80
c) Calcule las probabilidades del estado estable., y compare con las matrices calculadas en el punto anterior.
d) Que sucede si las probabilidades de avanzar un punto es 0,8 y de retroceder es 0,2. Recalcule los valores anteriores.
e) Encontrar las probabilidades del estado estable considerando que α es la probabilidad de avance y 1-α la de retroceso
f) Utilizando Matlab, Octave o Python simule el recorrido de la partícula durante 10 cambios de lugar suponiendo que comienza en el punto 0.

Ejercicio 6

Hay dos urnas con bolas rojas y negras. La urna 1 tiene 60% bolas rojas y 40% bolas negras mientras que la urna 2 tiene 20% bolas rojas y 80% negras. Una bola es extraída de la urna 1, su color es anotado y devuelta a la urna. Si la bola es roja entonces la próxima bola se extrae de la urna 1, su color es anotado y devuelto a la urna. Si la bola es negra, entonces la próxima bola se saca de la urna 2, su color es anotado y devuelto a la urna. Este proceso continúa indefinidamente. Cada vez que se saca una bola, si es roja la próxima bola se saca de la urna 1 y si es negra de la urna 2. Después de varias repeticiones del experimento, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola roja?

Ejercicio 7

Para la siguiente matriz de transiciones de probabilidades

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determine si P^n converge para $n \to \infty$.

Ejercicio 8

Utilizando Matlab, Octave o Python, determine si la siguiente matriz de transición de probabilidades determina una cadena de Markov que alcanza un estado de equilibrio.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Si lo hace, cuáles son las probabilidades de los estados en el equilibrio.

Ejercicio 9

Utilizando Matlab, Octave o Python resuelva el siguiente problema. Hay 3 lámparas que están siempre encendidas en una habitación. Al comienzo de cada día, una persona chequea si al menos una de las lámparas está funcionando. Si las 3 lámparas fallan, entonces se reemplazan las 3. Durante el día, cada lámpara falla con una probabilidad de 0.5 y la falla es independiente de las fallas de las otras lámparas. Definiendo los estados como el número de lámparas funcionando, dibuje el diagrama de estados y determine la matriz de transiciones de probabilidades. Muestre que eventualmente las 3 lámparas fallarán y deberán reemplazarse.

Ejercicio 10

Una persona llega tarde al trabajo el primer día con probabilidad 0.1. En los días siguientes llega tarde con probabilidad 0.2 si llegó tarde el día anterior, y con probabilidad 0.4 si fue puntual el día anterior. ¿Cuál es el porcentaje de llegar tarde en el largo plazo?
Utilizando Matlab, Octave o Python simule el comportamiento de 10 empleados a lo largo de 20 días de trabajo.

Ejercicio 11

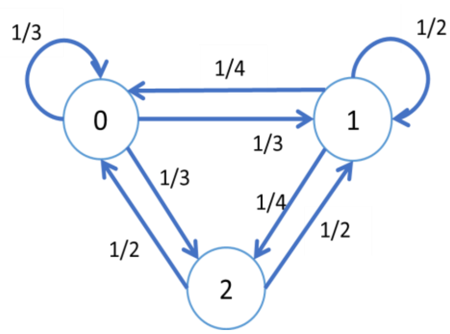
Utilizando Matlab, Octave o Python resuelva el siguiente problema. Tres máquinas operan juntas en una fábrica. Cada día hay una posibilidad de que cualquiera de las máquinas falle. La probabilidad de que fallen depende de cuantas otras máquinas están en operación. El número de máquinas en operación al comienzo del día se representa por los estados 0, 1, 2 y 3 y la matriz de transición de probabilidades es

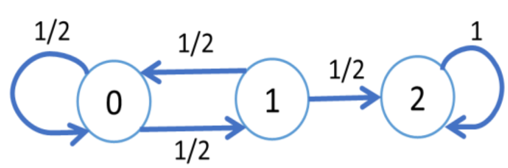
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

a) Explique por qué la matriz contiene ceros.
b) Determine cuantos días deberán pasar antes de que la probabilidad de que fallen las 3 máquinas sea mayor a 0.8. Asuma que inicialmente las 3 máquinas funcionan.

Ejercicio 12

Dados los siguientes diagramas de transición de estados determine cuales estados son transitorios, recurrentes y absorbentes.





Ejercicio 13

Dadas las siguientes matrices de transición de estados determine cuales estados son transitorios, recurrentes, y absorbentes.

$$P_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 14

Dadas las siguientes matrices de transición de estados determine si son o no irreducibles:

$$P_a = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_c = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 15

Se desea estudiar el comportamiento de los usuarios de una red social.
Las acciones que los usuarios pueden realizar en el sitio son:

- Acción 0: Log in
- Acción 1: Leer un post
- Acción 2: Realizar un post
- Acción 3: Ver contactos
- Acción 4: Buscar nuevo contacto
- Acción 5: Log out

La matriz de transición entre acciones que los usuarios realizan son:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0,25 & 0,1 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule P^n para $n \to \infty$ e interprete el resultado.
2. Simule utilizando Matlab, Octave o Python el recorrido por el sitio web:
   a) De 10 usuarios graficando, en el mismo gráfico, el recorrido realizado por cada uno.
   b) De 10.000 usuarios, graficando en un histograma la cantidad de veces que los usuarios realizan cada acción (desde que realizan login hasta que dejan el sitio, sin incluir estos estados).