Sistemas Dinámicos

Espacio de fases

Ejercicio 1

Considere el sistema de la Figura abajo donde se modela el comportamiento de un sistema compuesto por una pelota con movimiento vertical con variables de estado $x(t)$ (posición) y $v(t) = \dot{x}(t)$ (velocidad). Suponga que en el instante $t = 0$ la pelota se encuentra a una altura $x(t) = x_0$ y con una velocidad $v(t) = v_0$.

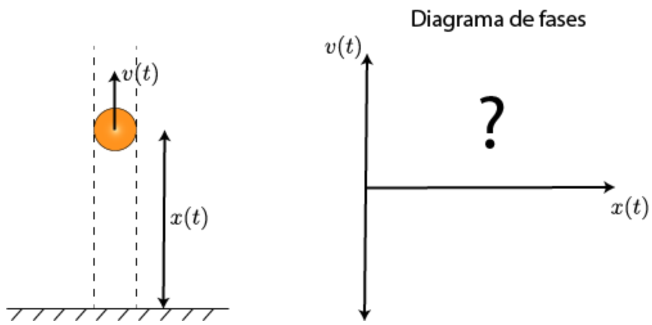

Figura: Una pelota es lanzada hacia arriba dentro de un tubo vertical. Ilustración del sistema (izquierda) y su diagrama de fases a determinar (derecha).

Cuando la pelota toca el suelo, su energía cinética se convierte rápidamente en energía elástica (deformación de la pelota), y convertida luego en energía cinética con un movimiento hacia arriba.

1. Dibuje la trayectoria en el diagrama de fases para este proceso teniendo en cuenta que con cada golpe en el suelo se pierde energía.
2. Identifique el o los atractores en el diagrama de fases.
3. Determine la o las cuencas de atracción correspondientes al punto anterior.

Ejercicio 2

Para cada uno de los diagramas de fases en la Figura abajo, identifique:

- Los atractores.
- Las cuencas de atracción para cada atractor.
- El tipo de estabilidad del sistema para las distintas regiones del espacio de fases.

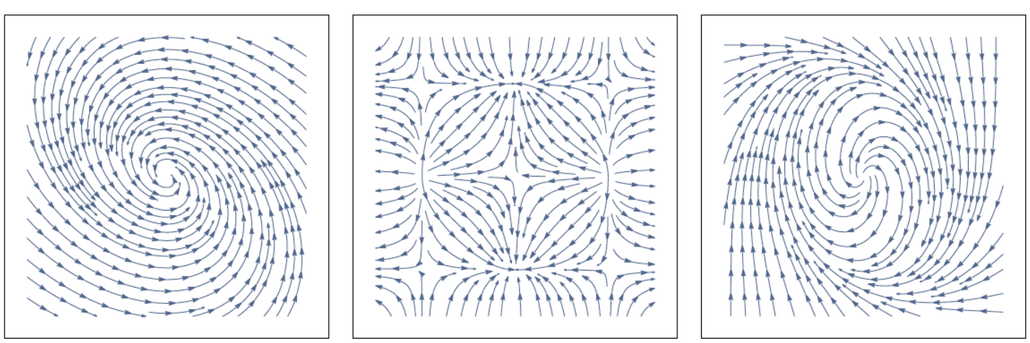

Figura: Tres ejemplos de diagramas de fases.

Ejercicio 3

Considere el siguiente sistema dinámico con tiempo discreto donde existen dos componentes que interactúan, A y B. Cada componente asume uno de dos posibles estados: azul o rojo. En cada instante de tiempo, los componentes se comportan de la siguiente manera:

- A copia el color de B
- B elige el color opuesto al de A

a. Escriba las funciones de transición $F_A(s_A, s_B)$ y $F_B(s_A, s_B)$ donde s_A y s_B son los colores de A y B, respectivamente.
b. Produzca las series de tiempo resultantes para este sistema partiendo de la condición inicial con ambas componentes en estado azul. ¿Qué tipo de comportamiento se observa?
c. Repita el punto anterior para una condición inicial con las componentes teniendo colores distintos. Describa el comportamiento y compárelo con el del punto anterior.

Tipos de sistemas en tiempo discreto

Ejercicio 4

Decida para cada uno de los siguientes ejemplos si son sistemas: (1) lineales o nolineales, (2) de primer orden o orden mayor a uno, y (3) autónomo o no-autónomo:

a. $x_t = ax_{t-1} + b$
b. $x_t = ax_{t-1} + bx_{t-2} + cx_{t-3}$
c. $x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1})$
d. $x_t = ax_{t-1} + bxt - 2^2 + c\sqrt{x_{t-1}x_{t-3}}$
e. $x_t = ax_{t-1}x_{t-2} + bx_{t-3} + \sin t$
f. $x_t = ax_{t-1} + by_{t-1}$,
   $y_t = cx_{t-1} + dy_{t-1}$

Ejercicio 5

Convierta las siguientes ecuaciones de diferencias en sistemas autónomos de primer orden:

a. $\mathrm{x}_{\mathrm{t}} = \mathrm{x}_{\mathrm{t}-1}(1 - \mathrm{x}_{\mathrm{t}-1}) \sin t$
b. $x_t = x_{t-1} + x_{t-2} - x_{t-3}$

Simulación de sistemas dinámicos en tiempo discreto

Ejercicio 6

Dado el sistema de crecimiento exponencial definido por

$$x_t = ax_{t-1}$$

realice simulaciones en Octave/Matlab o Python generando series temporales para distintos valores del parámetro a y con condición inicial $x_0 = 1$. Describa el comportamiento y cómo influye el valor del parámetro en el resultado.

Ejercicio 7

Dado el sistema de dos variables definido por

$$\begin{aligned} x_t &= ax_{t-1} + by_{t-1}, \\ y_t &= cx_{t-1} + dy_{t-1}, \end{aligned}$$

realice simulaciones en Octave/Matlab o Python generando series temporales para distintos valores de los parámetros a, b, c, d y con condición inicial $(x_0, y_0) = (1,1)$. Muestre los resultados en forma de trayectorias en el espacio de fases (x, y). Describa los distintos comportamientos que pueden ser obtenidos y justifique teóricamente.

Ejercicio 8

Simule en Octave/Matlab o Python el comportamiento de la siguiente serie de Fibonacci:

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-2}, \text{ con } x_0 = 1, x_1 = 1.$$

Nota: Convertir primero a un sistema de ecuaciones de diferencias de primer orden con dos variables.

Ejercicio 9

Simule en Octave/Matlab o Python el comportamiento del modelo logístico definido por la siguiente ecuación:

$$x_t = \left(-\frac{a-1}{K} x_{t-1} + a\right) x_{t-1},$$

Utilice diferentes valores de los parámetros (a, K) y condiciones iniciales x_0. Discuta los resultados en el contexto crecimiento de poblaciones. ¿Hay alguna limitación al crecimiento máximo de la población?

Ejercicio 10

Simule en Octave/Matlab o Python el comportamiento del modelo predador-presa de Lotka-Volterra modificado introducido en el campo de las ciencias biológicas y definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + rx_{t-1}\left(1 - \frac{x_{t-1}}{K}\right) - d\left(1 - \frac{1}{by_{t-1}+1}\right) x_{t-1}, \\ y_t &= y_{t-1} - dy_{t-1} + cx_{t-1}y_{t-1} \end{aligned}$$

Utilice diferentes valores de los parámetros condiciones iniciales. En particular, obtenga la trayectoria en el espacio de fases con las siguientes condiciones: $r = b = d = c = 1, K = 5$ y $x_0 = y_0 = 1$. ¿Qué tipo de comportamiento se observa? Descríbalo.

Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad (sistemas discretos)

Ejercicio 11

Encuentre el o los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

a. $x_t = 2x_{t-1} - x_{t-1}^2$
b. $x_t = 2x_{t-1}y_{t-1}, \;\; y_t = y_{t-1}(x_{t-1} - 1)$
c. $x_t = x_{t-1} - x_{t-2}^2 + 1$

Ejercicio 12

Estudie el comportamiento asintótico teórico del siguiente modelo lineal de tres variables dado por las ecuaciones de diferencia:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} - y_{t-1}, \\ y_t &= -x_{t-1} - 3y_{t-1} + z_{t-1}, \\ z_t &= y_{t-1} + z_{t-1}. \end{aligned}$$

Verifique a través de una simulación con Octave/Matlab o Python los resultados.

Ejercicio 13

Dado el siguiente mapa iterativo:

$$x_t = x_{t-1} + a\sin(bx_{t-1}).$$

Analice la estabilidad en el punto de equilibrio $x_{eq} = 0$.

Ejercicio 14

Dado el siguiente modelo de dos variables:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + 2x_{t-1}(1 - x_{t-1}) - x_{t-1}y_{t-1}, \\ y_t &= y_{t-1} + 2y_{t-1}(1 - y_{t-1}) - x_{t-1}y_{t-1}. \end{aligned}$$

Se pide lo siguiente:

a. Encuentre todos los puntos de equilibrio.
b. Calcule la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio donde $x > 0$ e $y > 0$.
c. Calcule los autovalores de la matriz del punto anterior.
d. Basado en el resultado anterior, clasifique el punto de equilibrio en una de las siguientes clases: estable, inestable, “saddle”, espiral estable, espiral inestable o neutral.

Ejercicio 15

Dado el siguiente modelo de dos variables:

$$x_t = x_{t-1}y_{t-1},$$
$$y_t = y_{t-1}(x_{t-1} - 1).$$

Se pide lo siguiente:

a. Encuentre todos los puntos de equilibrio.
b. Calcule la matriz Jacobiana en todos los puntos de equilibrio.
c. Calcule los autovalores de las matrices del punto anterior.
d. Basado en el resultado anterior, clasifique los puntos de equilibrio en una de las siguientes clases: estable, inestable, “saddle”, espiral estable, espiral inestable o neutral.

Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad (sistemas continuos)

Ejercicio 16

Encuentre el o los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

a. $\frac{dx}{dt} = x^2 - rx + 1$
b. Ecuación del péndulo (Nota: convertir a un sistema de primer orden):
   $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$
c. Modelo SIR de epidemias (Susceptible-Infected-Recovered):
   $\frac{dS}{dt} = -\alpha SI,$
   $\frac{dI}{dt} = \alpha SI - bI,$
   $\frac{dR}{dt} = bI.$

Ejercicio 17

Para cada uno de los siguientes sistemas, realice un diagrama del espacio de fases usando Octave/Matlab o Python (por ej. En Python puede utilizar la función streamplot() de pylab). Analice el comportamiento en relación con los puntos de equilibrio de los sistemas.

a. Modelo predador presa Lotka Volterra:
   $\frac{dx}{dt} = x - xy,$
   $\frac{dy}{dt} = -y + xy.$
b. Ecuación del péndulo (Nota: convertir a un sistema de primer orden):
   $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}\sin\theta$

Ejercicio 18

Dado el siguiente modelo de crecimiento logístico ($r > 0$, $K > 0$):

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Analice la estabilidad en cada uno de los puntos de equilibrio $x_{eq} = 0, K$.

Ejercicio 19

Dado el siguiente modelo que describe las interacciones entre dos especies:

$$\frac{dx}{dt} = -x + rxy - x^2,$$
$$\frac{dx}{dt} = y(1-y).$$
$$x \geq 0, y \geq 0, r > 1.$$

Se pide lo siguiente:

a. Encuentre todos los puntos de equilibrio.
b. Calcule la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio donde $x > 0$ e $y > 0$.
c. Calcule los autovalores de la matriz del punto anterior.
d. Basado en el resultado anterior, clasifique el punto de equilibrio en una de las siguientes clases: estable, inestable, "saddle", espiral estable, espiral inestable o neutral.

Bifurcaciones

Ejercicio 20

Haga un análisis de bifurcación para el siguiente sistema dinámico con parámetro r:

$$\frac{dx}{dt} = rx(x+1) - x.$$

Encuentre el valor crítico del parámetro para el cual aparece la bifurcación. Haga un diagrama de bifurcación y establezca de que tipo es. Realice simulaciones con Octave/Matlab o Python para distintos valores del parámetro para verificar la bifurcación.

Ejercicio 21

Asuma dos compañías, A y B, compitiendo entre ellas. Si definimos x e y como las porciones del mercado de A y B, respectivamente y asumiendo que no hay otra competencia ($x + y = 1$), entonces el sistema puede ser modelado con una ecuación con una única variable:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x)(x-y),$$

donde x es la porción de mercado de A, $(1-x)$ representan los clientes potenciales y $(x-y)$ es la diferencia de clientes de A y B que puede ser reescrito como $x - (1-x) = 2x - 1$. Obtenga los puntos de equilibrio del sistema y determina la estabilidad de cada uno.

Luego, considere que este mercado local está influenciado por un mercado global mas grande donde A mantiene una porción de mercado considerada constante, determinando el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x)(x-y) + \text{r(p-x)}.$$

En este nuevo modelo, r representa la influencia del Mercado global en el local. Determine la condición crítica sobre r y p para la cual aparece una bifurcación en el sistema y clasifique el tipo de bifurcación.

Ejercicio 22

El modelo de FitzHugh-Nagumo es un modelo nolineal que permite explicar el comportamiento de las neuronas con estados de "excitación" y "reposo". En estado normal, el sistema converge y permanece en un punto de equilibrio ("reposo"), pero cuando es perturbado, el sistema produce una trayectoria cíclica ("excitación") en el espacio de fases para retornar al estado de reposo. Además, bajo ciertas condiciones, el sistema puede presentar un comportamiento oscilatorio continuo produciendo una secuencia de pulsos (spikes). Esta transición entre el estado de reposo y generación de pulsos se produce como una bifurcación de tipo Hopf donde hay una corriente externa que actúa como parámetro de control. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = c\left(x - \frac{x^3}{3} + y + z\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x - a + by}{c},$$

donde z es el parámetro que representa la corriente externa aplicada a la neurona. El resto de los parámetros cumplen las siguientes condiciones:

$$1 - \frac{2}{3}b < a < 1,$$
$$0 < b < 1,$$
$$b < c^2.$$

Considere $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 3$ y haga lo siguiente:

a. Numéricamente obtenga el punto de equilibro de este sistema para varios valores de z entre -2 y 0. Existe sólo un punto de equilibrio real en este sistema.
b. Evaluando la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio, la estabilidad para cada valor de z.
c. Estime los valores críticos de z para los cuales aparece la bifurcación de Hopf. Hay dos valores críticos.