第一章　事件与概率论

1.1　事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的**集合**
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

Remark. (事件的运算律)

(1)　交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2)　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup A, A(BC) = (AB)C$

(3)　分配律　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

(4)　摩根律　$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \bar{(}AB) = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5)　吸收律　$A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,$P(A \cup B) = 1$, 则

$$(A)\ A \cup B = \Omega \quad (B)\ AB = \varnothing \quad (C)\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 \quad (D)\ P(A - B) = 0$$

Solution. 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$

注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确

对于 (C) 选项 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{AB}) = 1$ 正确

对于 (D) 选项, 由减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$ □

总结

(1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件

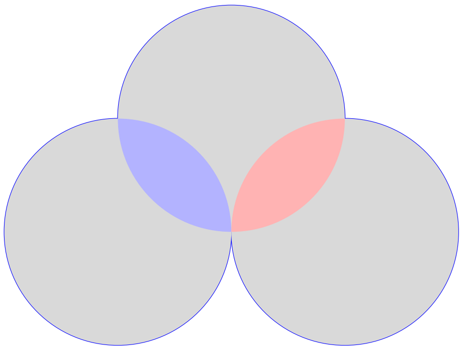
(2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件

这两个结论考虑**连续型随机变量**即可

2. (2020, 数一、三) 设 A, B, C 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 只有一个事件发生的概率为

$$(A)\ \frac{3}{4} \quad (B)\ \frac{2}{3} \quad (C)\ \frac{1}{2} \quad (D)\ \frac{5}{12}$$

Solution. 这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ □

3. 设随机事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$ ______

Solution. 根据结论, 有 A, B 互斥, 则 $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$ □

Corollary 1.1.1. 若 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 A, B 必然对立

Proof.

$$\begin{aligned} & AB = \bar{A}\bar{B} \\ \Longleftrightarrow\ & AB \cup \bar{A}B = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \\ \Longleftrightarrow\ & (A \cup \bar{A})B = \bar{A}(\bar{B} \cup B) \\ \Longleftrightarrow\ & B = \bar{A} \end{aligned}$$

□

4. 设随机事件 A,B,C 两两独立, 满足 $ABC=\varnothing$, 且 $P(A)=P(B)=P(C)$,A,B,C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$, 则 $P(A)=$

Solution. 由题意有 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 由加法公式与独立性有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)\\&\quad-P(A)P(C)-P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\end{aligned}$$

由 $P(A)=P(B)=P(C)$, 上式化为 $3P(A)-3P(A)^2=\frac{9}{16}\implies P(A)=\frac{1}{4}$或$P(A)=\frac{3}{4}$, 显然 $P(A)\neq\frac{3}{4}>P(A\cup B\cup C)$, 故 $P(A)=\frac{1}{4}$ □

5. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A)=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{1}{2}$, 则 $P(A|B)+P(B|A)$ 的最大值为 ______, 最小值为 ______.

Solution. 关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于 $[0,1]$ 之间, 事件 AB 的和事件不可能小于单独 A,B 发生概率之和, 事件 AB 的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A)+P(B)-1<=P(AB)\leq\min\left(P(A),P(B)\right)\leq P(A)+P(B)\leq P(A\cup B)$$

□

1.2 三大概型的计算

Remark. 三大概率模型

经典概型 – 有限个等可能的样本点, **排列组合问题**

几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等

伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为 p, 不成功的概率为 $(1-p)$

6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中**有放回地**取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

Solution. (古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{3}}{3^4}=\frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序. □

7. 在区间 $(0,a)$ 中随机地取两个数, 则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为

Solution. (几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4}\cdot a+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\frac{a^2}{4x}dx}{a^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

□

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为 p, 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

Solution. 失败零次–p^5, 失败一次–$\binom{1}{5}p^4(1-p)p$, 失败两次–$\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$
故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5+\binom{1}{5}p^4(1-p)p+\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

□

1.3 三大概率公式的计算

Remark. 三大概率公式

条件概率公式 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

推论 $P(AB)=P(B)P(A\mid B), P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid P(A_1))P(A_3|P(A_1A_2))\dots$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

贝叶斯公式 $P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

若称 $P(B_j)$ 为 B_j 的先验概率, 称 $P(B_j\mid A)$ 为 B_j 的后验概念. 则贝叶斯公式专门用于计算后验概率的公式.

9. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A\cup B)=0.6$,$P(B|\bar{A})=0.2$, 则 $P(A)=$ ______

Solution.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6, P(B\mid \bar{A})=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.2$$

联立有

$$\frac{0.6-P(A)}{1-P(A)}=0.2$$

, 则 $P(A)=0.5$

□

10. (2018, 数一) 设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立, 满足 $BC=\varnothing$, 且

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$______.

Solution.

$$\begin{aligned}P(AC|AB\cup C)&=\frac{P(AC)}{P(AB\cup C)}\\&=\frac{P(A)P(C)}{P(AB)+P(C)}\\&=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

则 $P(C)=\frac{1}{4}$ □

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

(1) 求乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

Solution. (作为小题来考还可以)

方法一: 用概率

(1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_{3-k}^k}{C_6^3}$

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

则所求数学期望 $EX=\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+\frac{3}{20}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(A\mid x=k)\\&=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

方法二: 超几何分布

(1) $X \sim H(N, M, n), N=6, M=3, n=3$, 则 $EX = \frac{nM}{N} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k) P(A \mid x=k) \\ &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k) \frac{k}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{3} P(X=k) k \\ &= \frac{1}{6} EX \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

1.4 事件独立的判定

Remark. (事件独立的充要条件)

$$\begin{aligned} & P(AB) = P(A)P(B) \\ & \iff P(A \mid B) = P(A) \\ & \iff P(A \mid \bar{B}) = P(A) \iff P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1) \\ & \iff A \text{ 与} \bar{B}, \text{ 或} \bar{A} \text{ 与} B, \text{ 或} \bar{A} \text{ 与} \bar{B} \text{ 相互独立} \\ & \iff P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1 \end{aligned}$$

12. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 则

(A) 若 $A \supset B$, 则 A, B 一定不相互独立

(B) 若 $B \supset A$, 则 A, B 一定不相互独立

(C) 若 $AB = \varnothing$, 则 A, B 一定不相互独立

(D) 若 $A = \bar{B}$, 则 A, B 一定不相互独立

Solution. (A)(B)(C) 考虑 $\varnothing$ 则都不对

(D) 由于 A 不是必然事件, 则 B 不是不可能事件, 则 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 根据下面的总结 A, B 一定不独立 $\square$

总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

A, B 互不相容, 则 A, B 一定不独立

A, B 独立, 则 A, B 一定不互不相容

13. 设 A, B, C 为随机事件,A 与 B 相互独立, 且 $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

(A)相互独立 (B)两两独立, 但不一定相互独立

(C)不一定两两独立 (D)一定不两两独立

Solution. 由 $P(C) = 0$ 知 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立. $\square$

两两独立与相互独立

$$
\text{相互独立}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
P(AB) = P(A)P(B) \\
P(AC) = P(A)P(C) \\
P(BC) = P(B)P(C)
\end{array}\right\} \quad \text{两两独立} \\
P(ABC) = P(A)P(B)P(C)
\end{array}\right.
$$