第一章　行列式

Remark. 主要内容

- 行列式的概念
  - 定义　$n!$项不同行不同列元素乘积的代数和
  - 性质
- 重要行列式
  - 上 (或下) 三角, 主对角矩阵
  - 副对角行列式
  - ab 型行列式
  - 拉普拉斯展开式
  - 范德蒙行列式
- 展开定理
  - $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
  - $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
- 行列式的公式
  - $|KA|=K^n|A|$
  - $|AB|=|A||B|$
  - $\left|A^T\right|=|A|$
  - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
  - $|A^*|=|A|^{n-1}$
  - 设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,　则 $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i$
  - 若 A 与 B 相似,　则 $|A|=|B|$
- Cramer 法则　$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n\frac{D_n}{D}$

1.1 数字行列式的计算

Remark. 利用行列式的性质 (5 条) 来化简

1. 出现充要行列式 (5 组)
2. 展开定理 (0 比较多的时候)

1. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 根的个数为 ______

Solution. 第一列乘 -1 加到其他列

$$f(x)\overset{\text{第一列乘-1 加到其他列上面去}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{第二列加到第四列}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{拉普拉斯型}}{=\!=\!=}=-x(-5x+5)=0$$

则 $x=0$ 或 $x=1$ □

2. 利用范德蒙行列式计算

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}= \_\_\_\_\_\_$$

Solution.

$$\text{原式} \xlongequal{\text{第一列乘以 (a+b+c) 加到第三列}} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ac+ab+bc \\ b & b^2 & a^2+ac+ab+bc \\ c & c^2 & a^2+ac+ab+bc \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}} (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (ac+bc+ab)(b-a)(c-a)(c-b)$$

□

3. 设 $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix} =$ ______.

Solution. 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$
\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3 & a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4 & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{将第一行分别乘以}-a_1,-a_2...,\text{分别加到第}2,3,...\text{列}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{从下往上消, 分别乘以}\frac{a_i}{x_i},\text{加到第一行}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_1x_2x_3x_4)(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^2}{x_i})
$$

□

爪型行列式

关键点在于**化简掉一条爪子**

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Solution.

(方法一) 递推法

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha+\beta \\ D_2 &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \\ &\ldots \\ D_n &= (\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \\ D_n-\alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \\ &= \beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}) \\ &\ldots \\ &= \beta^{n-1}(D_2-D_1) = \beta^n \\ D_n &= \beta^n+\alpha D_{n-1} = \beta^n+\alpha(\beta^{n-1}+\alpha D_{n-2}) \\ &\ldots \\ &= \beta^n+\alpha\beta^{n-1}+\ldots+\alpha^n \end{aligned}$$

(方法二) 数学归纳法

$$\begin{aligned} &if\ \alpha=\beta, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2, assume, D_{n-1}=n\alpha^{n-1} \\ &then D_n = D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} = (n+1)\alpha^n \\ &when\ \alpha\neq\beta, D_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}, D_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}, \\ &Assume, D_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, then, \\ &D_n=\ldots=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

(方法三) 二阶差分方程

$$D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0$$

$$D_{n+2}-(\alpha+\beta)D_{n+1}+\alpha\beta D_n=0$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta=0$$

$$r_1=\alpha r_2=\beta$$

如果 $\alpha=\beta$,差分方程的关键r^n代换e^{rx}

$$D_n=(C_1+C_2n)\alpha^n, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2$$

得到$C_1=C_2=1,\ D_n=(n+1)\alpha^n$

如果$\alpha\neq\beta$

$D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$, 由$D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2$

$$C_1=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, C_2=\frac{-\beta}{\alpha-\beta}$$

□

Corollary 1.1.1. 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{cases} (n+1)\,\alpha^n, & \alpha=\beta \\ \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \end{cases}.$$

1.2 代数余子式求和

4. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} =$ ____________, $A_{44} + A_{45} =$ ____________

Solution. 【详解】 □

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|A|$ 的所有代数余子式的和为____________

Solution. 【详解】 □

1.3 抽象行列式的计算

6. (2005, 数一、二) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ ____________

Solution. 【详解】 □

7. 设 A 为 n 阶矩阵, α, β 为 n 维列向量. 若 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$, 则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} =$ ____________

Solution. 【详解】 □

8. 设 A 为 2 阶矩阵, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A^2$. 若 $|A| = -1$, 则 $|B| =$ ______________

   Solution. 【详解】 □

9. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, $A \neq E$, 证明 $|A| = 0$

   Solution. 【详解】 □