姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章 多元函数积分学

1.1 三重积分的计算

1. 例 1 (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

   (I) 求曲面 Σ 的方程;

   (II) 求 Ω 的形心坐标.

   Solution.【详解】 □

2. 例 2 (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

   Solution.【详解】 □

1.2 第一类曲线积分的计算

3. 例 3 (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xyds=$

   Solution.【详解】 □

4. 例 4 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

   Solution.【详解】 □

1.3 第二类曲线积分的计算

Remark (类型一平面第二类曲线积分).

5. 例 5 (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

   (I) 求 $I(D_1)$ 的值;

   (II) 计算 $\oint_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

   Solution.【详解】 □

Remark (类型二空间第二类曲线积分).

6. 例 6 (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx + xdy + \frac{y^2}{2}dz =$

   Solution.【详解】 □

1.4 第一类曲面积分的计算

Remark (方法).

7. 例 7 (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点，若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

   $$I = \iint_\Sigma \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS,$$

   其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

   Solution.【详解】 □

1.5 第二类曲面积分的计算

Remark (方法)**.**

8. 例 8 (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I=\oint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

Solution. 【详解】 □

9. 例 9 计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

Solution. 【详解】 □

10. 例 10 (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy.$$

Solution. 【详解】 □