冲刺 150

一晌贪欢

Weary Bired

2025 年 6 月 25 日

浪淘沙令·帘外雨潺潺

帘外雨潺潺，春意阑珊。罗衾不耐五更寒。梦里不知身是客，一晌贪欢。独自莫凭栏，无限江山，别时容易见时难。流水落花春去也，天上人间。

2025 年 6 月 25 日

目录

第一章　高等数学第一讲

1.1　函数性态

Example 1.1.1. 设 f(x) 为以 T 为周期的连续函数, 则下列结论中正确的为 ().

① $\int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期

② $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt$ 以 T 为周期

③ 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期

④ $\int_0^x [f(t) - f(-t)]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

⑤ 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期

Solution. ① 不满足充要条件 $\int_0^x f(t)dt$ 为以 T 为周期的函数 $\iff$ $\int_0^T f(x) = 0$

② 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt$, 则

$$\begin{aligned}
F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)dt - \frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)dt \\
&= \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+T} f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt - \int_0^T f(t)dt \\
&= \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

③ 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则对于一个周期 $\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$

④ $f(t) - f(-t)$ 是一个奇函数, 由于④可知该选项正确

⑤

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_0^T f(x)dx \\
&\Longrightarrow \int_0^T f(x) = 0
\end{aligned}$$

□

Remark. 判断连续函数的原函数是否为周期函数要么按照周期函数的定义如②, 要么证明该函数在周期上的积分为 0, 如 ③ ④ ⑤

1.2 函数极限值的计算

Example 1.2.1. 设 $f(x)$ 为 x 的三次多项式, 且 $\lim_{x->2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x->4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1(a \neq 0)$, 则 $\lim_{x->3a} \frac{f(x)}{x-3a} = ?$

Solution. 由题设可知其必然有两个根, 而三次方程只有三个实数根, 故假设 $f(x) = A(x-2a)(x-4a)(x-x_0)$, 带入两个极限式得

$$-2aA(2a-x_0) = 1$$

与

$$2aA(4a-x_0) = 1$$

联立可以解出 $x_0 = 3a, A = \frac{1}{2a^2}$, 带入待求极限式有

$$\lim_{x->3a} \frac{f(x)}{x-3a} = \frac{1}{2a^2} \lim_{x\to 3a} = -\frac{1}{2}$$

□

Example 1.2.2. 设 $y = y(x)$ 为微分方程 $y''+(x+1)y'+x^2y = e^x$ 满足初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 的特解. 若 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-x}{x^k} = c\ (c \neq 0)$, 则 $c =$ __, $k =$ __.

Solution. 代入 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 于微分方程, 则 $y''(0) = 0$, 对微分方程两边求导有

$$y''' + y' + (x+1)y'' + 2xy + x^2y' = e^x$$

在代入 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$ 则可以求出 $y'''(0) = 0$, 同理可以求出 $y^{(4)}(0) = 1$, 则 y 的泰勒展开如下

$$y = y(x) - \frac{f^4(0)}{4!}x^4 + o(x^4) = y(x) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

带入待求的极限式子得 $c = \frac{1}{24}, k = 4$ □

Remark. 形如 $f(x)=\int_a^x f(t)dt+\ldots$(可导函数),$f(x)$ 连续

形如 $f'(x)=f(x)+\ldots$(可导函数)

形如 $f''(x)=f'(x)+\ldots$(可导函数)

则 $f(x)$ 无穷阶可导

Example 1.2.3. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处三阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)\neq 0$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$$

.

Solution. 令 $u=x-t$, 则这个变限积分转换为

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt} &= 1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{2f(x)+xf'(x)}\\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)+3f'(x)}\\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2f'(x)}{x^2}+\frac{f''(x)}{x}}{\frac{3f'(x)}{x^2}+\frac{f''(x)}{x}}\\
&= 1=\frac{4}{5}\\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

□

Remark. **在某一点 n 阶可导**: 只能用 $n-1$ 次洛必达, 而后要用导数定义 **n 阶连续可导**: 可以用 n 次洛必达

Example 1.2.4.

(1) (证明变限积分的等价代换) 设 $f(x)$, $g(x)$ 连续, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$。证明: 当 $x\to x_0$ 时,

$$\int_0^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\sim\int_0^{\varphi(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

(2) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+2\tan t)\,\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x \ln(1+2\tan t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

(3) 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left[\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{(\tan x-\arcsin x)\sin x^2}$$

Solution.

(1) 利用换元法令 $u=\varphi(x)$，展示两个积分比值的极限为 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_0^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\varphi(x)} g(t)\,\mathrm{d}t}\xlongequal[令u=\varphi(x)]{\lim}\frac{\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{g(u)}=1.$$

故当 $x\to x_0$ 时，$\int_0^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\sim\int_0^{\varphi(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$。

(2) 直接计算积分比值的极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+2\tan t)\,\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x \ln(1+2\tan t)\,\mathrm{d}t\right]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}2t\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

(3) 先对 $\tan x-\arcsin x$ 进行等价无穷小替换，再计算复杂积分比值的极限:

$$\tan x-\arcsin x=\tan x-x+x-\arcsin x\sim\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{6},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left[\int_0^x e^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{(\tan x-\arcsin x)\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)e^{2x}\left[\int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{\frac{x^5}{6}}=6\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right)^2}{x^4}=6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^4}=\frac{3}{2}.$$

□

Remark. 变限积分的等价有如下结论:

$$\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt,\varphi(x)\sim x^n,f(t)\sim x^m$$

则该变限积分与 $x^{n(m+1)}$ 等价

Example 1.2.5. 设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^x\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(\theta-t)\,\mathrm{d}t$ 存在，求 θ 的值。

Solution. 这道题还要考虑两角和差公式

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^x\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(\theta-t)\,\mathrm{d}t\\=&\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^x(x-|t|)(\cos\theta\cos t+\sin\theta\sin t)\,\mathrm{d}t}{x^2}\\=&2\cos\theta\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-|t|)\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2},\end{aligned}$$

对于 $x \to 0^+$ 的情况：

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (x-|t|)\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (x-t)\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^+} \frac{x\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

对于 $x \to 0^-$ 的情况：

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^x (x-|t|)\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^x (x+t)\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^-} \frac{x\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

由 $2\cos\theta\cdot\frac{1}{2} = 2\cos\theta\cdot\frac{3}{2}$，得 $\cos\theta = 0$，故

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

□

Remark. 两角和公式：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

两角差公式：

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

和差化积公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

Example 1.2.6. (莫斯科 1976 年竞赛题) 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，求 A，B 的值。

Solution. **嵌套的 Taylor 公式**

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\&=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]}\\&=e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o\left(x^2\right)}\\&=e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o\left(x^2\right)}\end{aligned}$$

$$=e\left\{1+\left[-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x+o(x)\right]^2+o\left(x^2\right)\right\}$$

$$=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o\left(x^2\right).$$

得 $A=-\frac{e}{2},B=\frac{11}{24}e$。

□

Example 1.2.7. 计算如下极限值

(1) (莫斯科 1977 年竞赛题) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\sin x-\sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x}-e^x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sin x-\cos\tan x}{x^3(\sqrt{1+x}-e^x)}$.

Solution. 等价无穷小结论:

$$\tan x-\sin x=\tan x-x+x-\sin x\sim\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{2}$$
$$\sqrt{1+x}-e^x=\sqrt{1+x}-1+1-e^x\sim\frac{x}{2}-x=-\frac{x}{2}$$

(1)
- 方法一 (凑等价代换)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\tan x+\tan x-\sin x+\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{2}}=2\end{aligned}$$

- 方法二(泰勒展开):

$$\begin{aligned}\tan\tan x&=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\\ \sin\sin x&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\\ &\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}}=2\end{aligned}$$

(2)
- 方法一(泰勒展开):

$$\begin{aligned}\sin\sin x&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\\ \sin\tan x&=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\\ &\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin x-\sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x}-e^x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{-\frac{x^3}{2}}=1\end{aligned}$$

- 方法二(拉格朗日中值定理): 存在 ξ 介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，使得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin x-\sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x}-e^x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\cos\xi(\sin x-\tan x)}{-\frac{x^3}{2}}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{2}}=1\end{aligned}$$

(3) • 方法一（泰勒展开）：

$$\cos\sin x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$
$$\cos\tan x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos\sin x - \cos\tan x}{x^3(\sqrt{1+x} - e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{-\frac{x^4}{2}} = -1$$

• 方法二（拉格朗日中值定理）：存在 ξ 介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sin x - \cos\tan x}{x^3(\sqrt{1+x} - e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi(\sin x - \tan x)}{-\frac{x^4}{2}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x(-\frac{x^3}{2})}{-\frac{x^4}{2}} = -1$$

□

Remark. 求极限的基本方法

1. 洛必达法则
2. 等价代换
3. Taylor 公式
4. 拉格朗日中值定理结合夹逼准则

Example 1.2.8. 结合极限存在求未知参数

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e^2}{x^n} = a\ (a \neq 0)$，求 a, n。

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\tan 3x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e^3}{x^n} = a\ (a \neq 0)$，求 a, n。

Solution.

(1)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x^2)}{x^2}}-e^2}{x^n}\\
&=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x^2)-2x^2}{x^2}}-1}{x^n}\\
&=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin 2x^2)-2x^2}{x^{n+2}}\\
&=e^2\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(2x^2)^2+o(x^4)}{x^{n+2}}\\
&=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^{n+2}}\\
&=-2e^2\lim_{x\to0}x^{2-n}
\end{aligned}
$$

结论：

- 当 $n>2$ 时，极限不存在
- 当 $n<2$ 时，极限为 0（与题意不符）
- 当 $n=2$ 时，极限为 $-2e^2$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\tan 3x^2)}{x^2}}-e^3}{x^n}\\
&=e^3\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\tan 3x^2)-3x^2}{x^2}}-1}{x^n}\\
&=e^3\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan 3x^2)-3x^2}{x^{n+2}}\\
&=e^3\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(3x^2)^2+o(x^4)}{x^{n+2}}\\
&=-\frac{9}{2}e^3\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^{n+2}}\\
&=-\frac{9}{2}e^3\lim_{x\to0}x^{2-n}
\end{aligned}
$$

结论：

- 当 $n=2$ 时，极限为 $-\frac{9}{2}e^3$

□

Example 1.2.9. (第十二届全国大学生数学竞赛题,2021 年) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1+kx}{1-kx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}\quad(n\geqslant 1).$$

Solution.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$$

- 方法一：令 $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$，则 $f(0)=1$。

  取对数得：

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}+\cdots+\frac{1}{2n}\ln\frac{1+nx}{1-nx}$$

  求导得：

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}\right)+\cdots+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{1+nx}+\frac{n}{1-nx}\right)$$

  计算极限：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}\\&=\frac{1}{3\pi}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\quad(\text{因为分母}\sim 3\pi x)\\&=\frac{1}{3\pi}f'(0)=\frac{n}{3\pi}\end{aligned}$$

- 方法二：直接使用泰勒展开：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}\\&=\frac{1}{3\pi}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\frac{1}{4}[\ln(1+2x)-\ln(1-2x)]+\cdots}{x}\\&=\frac{1}{3\pi}\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x}=\frac{n}{3\pi}\end{aligned}$$

□

Remark. 一般来说对于连乘积都可以通过 ln 转换为累加和

Example 1.2.10. (1) 求极限 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

(2) 求极限 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

Solution. (1) 计算极限:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$$

首先给出等价无穷小替换:

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\sim x+\frac{x}{2}\sim x$$

- **方法一**:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}\quad(\text{分母替换为等价无穷小})\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}\quad(\text{洛必达法则})\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{x(1+x)\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- **方法二**:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- **方法三（泰勒展开）**:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- **方法四（拉格朗日中值定理）**：存在 $\xi \in (1+x, x+\sqrt{1+x^2})$，使得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\xi}(1-\sqrt{1+x^2})}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(2) 基于 (1) 的结果计算：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\\
=&e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{\ln^2(1+x)}}\\
=&e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=\sqrt{e}
\end{aligned}
$$

□

Remark. 一个特殊的 Taylor 展开 $\ln x+\sqrt{1+x^2}=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ 与 $\sin x$ 在前两项一致

Example 1.2.11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]$.

Solution.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{1}{e}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\frac{e-e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}e}\\
&=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left[e^{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]\\
&=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\
&=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\
&=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{2x^2}\\
&=\frac{1}{2e}
\end{aligned}
$$

□

Example 1.2.12. 设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^n+1}\right]$ 存在，求 n 的值并求该极限。

Solution. 首先由极限存在可得：

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{x^n+1}{x^6}}\right]$$

存在，故 $n=6$。

- **方法一**：令 $x=\frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t\left(1-t+\frac{1}{2}t^2-\mathrm{e}^{-t}\right)}{t^3}-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^6}-1}{t^3}\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{1-t+\frac{1}{2}t^2-\left[1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)\right]}{t^3}-\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^6}{2}}{t^3}\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)}{t^3}\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- **方法二**：直接泰勒展开

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]-\left[1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right]\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

□

Example 1.2.13. (1) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f''(x_0)\neq0$。若 $f(x)=f(x_0)+f'[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)$ $(0<\theta<1)$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta$。

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导，且 $f'''(x_0)\neq0$。若 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''[x_0+\theta(x-x_0)]}{2!}(x-x_0)^2$ $(0<\theta<1)$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta$。

Solution.

(1) 由题意有

$$f'(x_0+\theta(x-x_0))=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

题目还剩下的条件仅有一个 $f''(x_0)\neq 0$ 必然是要凑二阶导数的定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))-f'(x_0)}{x-x_0}$$

为分母乘上一个θ才是导数定义, 故上式变换为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))-f'(x_0)}{(x-x_0\theta)}\theta$$

带入第一个式子有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x+0)-f'(x)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$\begin{aligned}f''(x_0)\lim_{x\to x_0}\theta&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x+0)-f'(x)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\\&\text{在}x_0\text{处的泰勒展开}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}\\&=\frac{1}{2}f''(x_0)\end{aligned}$$

故 $\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{2}$

(2) 由

$$f''\left[x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right]=2\frac{f(x)-f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2}$$

得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''\left[x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right]-f''\left(x_0\right)}{\theta\left(x-x_0\right)}\theta=2\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)-\frac{f''(x_0)}{2}\left(x-x_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^3}$$

$$f'''\left(x_0\right)\lim_{x\to x_0}\theta=2\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f'''(x_0)}{6}\left(x-x_0\right)^3+o\left(x-x_0\right)^3}{\left(x-x_0\right)^3}=\frac{1}{3}f'''\left(x_0\right)$$

由 $f'''\left(x_0\right)\neq 0$，得 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{3}$。 □

Corollary 1.2.1 (中值的极限值)**.** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导, 且 $f^{(n+1)}(0)\neq 0$. 若

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n-1)(0)}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)(\theta x)}}{n!}x^{n},$$

则 $\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$