第一章　行列式

行列式的主要内容

- 行列式的概念
  - 定义　$n!$项不同行不同列元素乘积的代数和
  - 性质
- 重要行列式
  - 上 (或下) 三角, 主对角矩阵
  - 副对角行列式
  - ab 型行列式
  - 拉普拉斯展开式
  - 范德蒙行列式
- 展开定理
  - $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
  - $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
- 行列式的公式
  - $|KA|=K^n|A|$
  - $|AB|=|A||B|$
  - $\left|A^T\right|=|A|$
  - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
  - $|A^*|=|A|^{n-1}$
  - 设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,　则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
  - 若 A 与 B 相似,　则 $|A|=|B|$
- Cramer 法则　$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n\frac{D_n}{D}$

拉普拉斯展开式 (上, 下三角分块行列式的结论)

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D)$$

对于一般分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

若 B 可逆, 则有如下结论

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

1.1 数字行列式的计算

Remark. 基本方法

(1) 利用行列式的性质 (5 条) 来化简

(2) 要么出现重要行列式 (5 组)

(3) 要么展开定理 (0 比较多的时候)

1. 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x) = 0$ 根的个数为 ______

Solution. 第一列乘 -1 加到其他列

$$f(x)\xlongequal{\text{第一列乘-1 加到其他列上面去}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二列加到第四列}}\left|\begin{array}{rr|rr} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{array}\right|$$

$$\xlongequal{\text{拉普拉斯型}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=[(x-2)-(2x-2)][-6(x-2)+(x-7)]=15x(x-1)$$

则 $x=0$ 或 $x=1$ □

2. 利用范德蒙行列式计算

$$\text{范德蒙行列式}V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}$$

Solution.

$$
\text{原式} \xlongequal{\text{第一列乘以 (a+b+c) 加到第三列}} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ac+ab+bc \\ b & b^2 & a^2+ac+ab+bc \\ c & c^2 & a^2+ac+ab+bc \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}} (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (ac+bc+ab)(b-a)(c-a)(c-b)
$$

□

3. 设 $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_.$

Solution. 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$
\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 \\ a_2 & a_2 a_1 & x_2 + a_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 \\ a_3 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & x_3 + a_3^2 & a_3 a_4 \\ a_4 & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & x_4 + a_4^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{将第一行分别乘以}-a_1,-a_2\ldots,\text{分别加到第}2,3,\ldots\text{列}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{从下往上消, 分别乘以}\frac{a_i}{x_i},\text{加到第一行}} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_1 x_2 x_3 x_4)(1 + \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i^2}{x_i})
$$

□

爪型行列式

关键点在于**化简掉一条爪子**

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Solution.

(方法一) 递推法

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha+\beta \\ D_2 &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \\ &\dots \\ D_n &= (\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \\ D_n-\alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \\ &= \beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}) \\ &\dots \\ &= \beta^{n-1}(D_2-D_1)=\beta^n \\ D_n &= \beta^n+\alpha D_{n-1}=\beta^n+\alpha(\beta^{n-1}+\alpha D_{n-2}) \\ &\dots \\ &= \beta^n+\alpha\beta^{n-1}+\ldots+\alpha^n \end{aligned}$$

(方法二) 数学归纳法

$$if\ \alpha=\beta, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2, assume, D_{n-1}=n\alpha^{n-1}$$

$$then D_n=D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(n+1)\alpha^n$$

$$when\ \alpha\neq\beta, D_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}, D_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},$$

$$Assume, D_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, then,$$

$$D_n=\ldots=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

(方法三) 二阶差分方程

$$
\begin{aligned}
&D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0\\
&D_{n+2}-(\alpha+\beta)D_{n+1}+\alpha\beta D_n=0
\end{aligned}
$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$
\begin{aligned}
&r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta=0\\
&r_1=\alpha \qquad r_2=\beta
\end{aligned}
$$

差分方程的关键r^n代换e^{rx}

如果 $\alpha=\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=(C_1+C_2n)\alpha^n, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&\text{得到}C_1=C_2=1,\ D_n=(n+1)\alpha^n
\end{aligned}
$$

如果 $\alpha\neq\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n, \text{由}D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&C_1=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, C_2=\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\\
&D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

□

Corollary 1.1.1. 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$
D_n=\begin{vmatrix}
\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\
1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
D_n=\begin{cases}(n+1)\,\alpha^n, & \alpha=\beta\\ \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta\end{cases}.
$$

1.2 代数余子式求和

Remark. 代数余子式求和的基本办法

(1) 代数余子式的定义 (求一个的时候使用)

(2) 展开定理 (求一行或者一列的时候使用)

(3) 利用伴随矩阵的定义 (求全部代数余子式的时候使用)

5. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} =$ ____________, $A_{44} + A_{45} =$ ____________

Solution.

(方法一) 利用展开定理构建新的矩阵来计算

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{44} + A_{45} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

但这样 $|A| = 27$ 的条件就没用到

(方法二)

直接对第四行使用展开定理, 则

$$|A| = A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2A_{44} + 2A_{45} = 27$$

直接对第二行使用展开定理, 则

$$|A| = 2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + A_{44} + A_{45} = 0$$

相当于解 $A + 2B = 27, 2A + B = 0$, 容易计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} = -9, A_{44} + A_{45} = 18$ □

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|A|$ 的所有代数余子式的和为______________

Solution. 对于求所有代数余子, 基本都是考察 A^* 的定义, 即

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

又由于 $A^* = |A| A^{-1}$, 对于这道题

$$|A| = (-1)^{(n+1)} n!$$

A^{-1} 可以通过分块矩阵来求

$$|A|A^{-1} = |A| \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ \hline n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)^{-1}$$

$$= |A| \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n} \\ \hline diag(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}) & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n}|A| \\ \hline diag(|A|, \frac{|A|}{2}, \ldots, \frac{|A|}{n-1}) & 0 \end{array}\right)$$

则所有代数余子式之和为

$$(-1)^{(n+1)} n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

□

1.3 抽象行列式的计算

Remark. 抽象行列式的计算方法

(1) 通过行列式的性质

(2) 行列式的公式 (7 个)

7. (2005, 数一、二) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ ______

Solution.

(方法一利用性质)

$$\begin{aligned} B &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3) \\ &= 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3) \\ &= 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ |B| &= 2\,|A| = 2 \end{aligned}$$

(方法二分块矩阵)

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&9\end{pmatrix}$$

$$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&9\end{vmatrix}=|A|(2-1)(3-1)(3-2)=2$$

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, α,β 为 n 维列向量. 若 $|A|=a$, $\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&b\end{vmatrix}=0$, 则 $\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&c\end{vmatrix}=$ ________

Solution. 这道题的关键在于巧妙构建行列式的和

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&c\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}A&\alpha+0\\\beta^T&b+c-b\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A&0\\\beta^T&c-b\end{vmatrix}\\&=|A|\,(c-b)=a(c-b)\end{aligned}$$

□

9. 设 A 为 2 阶矩阵, $B=2\begin{pmatrix}(2A)^{-1}-(2A)^*&0\\0&A\end{pmatrix}$ 若 $|A|=-1$, 则 $|B|=$ ________

Solution. 这道题比较纯粹就是行列式公式的应用

$$\begin{aligned}|B|&=2^4\,|A|\cdot\left|(2A)^{-1}-(2A)^*\right|\\&=2^4\,|A|\cdot\left|\frac{1}{2}A^{-1}-2A^*\right|\\&=2^4\left|\frac{1}{2}E-2|A|\right|=100\end{aligned}$$

□

10. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, $A\neq E$, 证明 $|A|=0$

Solution. 这道题还是比较综合的 (或许更应该说可以从不同的角度思考问题, 这也是线代的核心思想) 但有几个易错点需要注意.

> **易错点**
>
> 由 $|A|^2 = |A| \implies |A| = 1$或 $= 0$, 又 $A \neq E \implies |A| \neq 1$, 故 $|A| = 0$ 注意矩阵不等关系是无法推出行列式的不等关系的, 矩阵式数表只要顺序不同就不一样, 但不一样的矩阵其行列式完全有可能相等.
>
> 等于 1 的矩阵并非只能是 E

(方法一, 反证法) 若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 对于等式 $A^2 = A$ 两边同乘 A^{-1}, 则 $A = E$ 与题设矛盾, 故 $|A| \neq 0$

(方法二, 秩) 由于 $A(A-E) = 0 \implies r(A) + r(A-E) \leq n$, 又 $A \neq E, r(A-E) \geq 1$, 故 $r(A) \leq n$, 故 $|A| = 0$

(方法三, 方程组) 由于 $A(A-E) = 0$, 且 $A \neq E$ 可知方程 $AX = 0$ 有非零解即 $(A-E)$,故 $r(A) < n, |A| = 0$

(方法四, 特征值与特征向量) 由于 $A(A-E) = 0, A \neq E$, 取 $A-E$ 的非零列向量 $\beta \neq 0, A\beta = 0$ 故由特征值与特征值向量的定义,A 由特征值 0, 而 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ □