姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章 多元函数微分学 **1**

1.1 多元函数的概念 1

1.2 多元复合函数求偏导数与全微分 2

1.3 多元隐函数求偏导数与全微分 2

1.4 变量代换化简偏微分方程 3

1.5 求无条件极值 3

1.6 求条件极值 (边界最值) 4

第一章　多元函数微分学

1.1　多元函数的概念

1. 例 1 求下列重极限:

$$(1)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}\quad(\alpha\geq0,\beta\geq0);$$

$$(2)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2};$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

$$(A)\ 若极限\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}存在,\ 则f(x,y)在点(0,0)处可微$$

$$(B)\ 若极限\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}存在,\ 则f(x,y)在点(0,0)处可微$$

$$(C)\ 若f(x,y)在点(0,0)处可微,\ 则极限\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}存在$$

$$(D)\ 若f(x,y)在点(0,0)处可微,\ 则极限\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}存在$$

Solution. 【详解】 □

3. 例 3 (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

则 $dz|_{(0,1)}=$

Solution. 【详解】 □

1.2 多元复合函数求偏导数与全微分

4. 例 4 (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且

$$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,$$
$$f(x,x^2)=2x^2\ln x$$

则 $df(1,1)=$

$$(A)\ dx+dy \quad (B)\ dx-dy \quad (C)\ dy$$

Solution. 【详解】 □

5. 例 5 (2011, 数一、数二) 设 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution. 【详解】 □

1.3 多元隐函数求偏导数与全微分

6. 例 6 (2005, 数一) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

$$(A)\ 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 z=z(x,y)$$
$$(B)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 x=x(y,z) 和 z=z(x,y)$$
$$(C)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 y=y(x,z) 和 z=z(x,y)$$
$$(D)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 x=x(y,z) 和 y=y(x,z)$$

Solution. 【详解】 □

7. 例 7 (1999, 数一) 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution. 【详解】 □

1.4 变量代换化简偏微分方程

8. 例 8 (2010, 数二) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

Solution.【详解】 □

1.5 求无条件极值

9. 例 9 (2003, 数一) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution.【详解】 □

10. 例 10 (2004, 数一) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

Solution.【详解】 □

1.6 求条件极值 (边界最值)

11. 例 11 (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

$$(A)\ 若 f'_x(x_0,y_0)=0,\ 则 f'_y(x_0,y_0)=0$$
$$(B)\ 若 f'_x(x_0,y_0)=0,\ 则 f'_y(x_0,y_0)\neq 0$$
$$(C)\ 若 f'_x(x_0,y_0)\neq 0,\ 则 f'_y(x_0,y_0)=0$$
$$(D)\ 若 f'_x(x_0,y_0)\neq 0,\ 则 f'_y(x_0,y_0)\neq 0$$

Solution. 【详解】 □

12. 例 12 (2013, 数二) 求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

Solution. 【详解】 □

13. 例 13 (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则

$$(A)\ u(x,y)的最大值和最小值都在D的边界上取得$$
$$(B)\ u(x,y)的最大值和最小值都在D的内部取得$$
$$(C)\ u(x,y)的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得$$
$$(D)\ u(x,y)的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得$$

Solution. 【详解】 □

14. 例 14 (2005, 数二) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$, 且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution. 【详解】 □