姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章　函数极限连续

1.1　函数的性态

Remark. (有界性的判定)

连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界

连续函数在开区间 (a,b) 上只需要判断端点处的左右极限, 若 $\lim_{x\to a^+}\neq\infty$ 且 $\lim_{x\to b^-}\neq\infty$, 则连续函数在该区间内有界.

1. 下列函数无界的是

$$
\begin{aligned}
&(A)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sin x, x\in(0,+\infty)\\
&(B)\quad f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)\\
&(C)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)\\
&(D)\quad f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt, x\in(0,2022)
\end{aligned}
$$

Solution.

(A) $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 均为有限值, 故 A 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(B) $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}=1$ 均为有限值, 故 B 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(C) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间 $(0,+\infty)$ 无界

(D) $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\int_0^x 1dt=0$, $\lim_{x\to2022^-}f(x)=\int_0^{2022}\frac{\sin t}{t}dt=$ 有限值 故 D 在区间 $(0,2022)$ 有界 □

Remark. (导函数与原函数的奇偶性与周期性)

连续奇函数的所有原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 都是偶函数

连续偶函数仅有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数

2. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

$$\begin{aligned}
&(A) \quad \int_0^x f(t^2)dt \\
&(B) \quad \int_0^x f^2(t)dt \\
&(C) \quad \int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt \\
&(D) \quad \int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt
\end{aligned}$$

Solution. 这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令 $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt = -\int_0^x f(t^2)dt = -F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t)dt = -\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C) $t[f(t)-f(-t)]$ 是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D) $t[f(t)+f(-t)]$ 是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数 □

1.2 极限的概念

Definition 1.2.1 (函数极限的定义)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时，必有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

3. (2014, 数三) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

$$(A)|a_n| > \frac{|a|}{2} \qquad (B)|a_n| < \frac{|a|}{2} \qquad (C)a_n > a - \frac{1}{n} \qquad (D)a_n < a + \frac{1}{n}$$

Solution. 由数列极限的定义可知当 n 充分大的时候有 $|a_n - a| < \epsilon$

考虑选项 C,D, 令 $\epsilon = \frac{1}{n}$ 则 $|a_n - a| < \frac{1}{n} \implies a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$ □

1.3 函数极限的计算

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分的那么明显, 目标都是往最简单 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\cdot}{\infty}$ 模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

Remark. (类型一 $\frac{0}{0}$ 型)

4. (2000, 数二) 若 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

$$(A)\ 0 \qquad (B)\ 6 \qquad (C)\ 36 \qquad (D)\ \infty$$

Solution. 这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了.

$\sin 6x = 6x - 36x^2 + o(x^3)$, 带入题目极限有

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = 36$$

□

5. (2002, 数二) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \to 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不等于 (B)等于 1 (C)等于 2 (D)等于 3

Solution. 由微分方程和 $y(0)=y'(0)=0$ 可知 $y''(0)=1$, 则 $y(x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

□

Remark. (类型二 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}&=\lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\\&=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-x}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Remark. (类型三 $0\cdot\infty$ 型)

7. 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)\ln\left(1+e^{1/x}\right)$

Solution. □

Remark. (类型四 $\infty-\infty$ 型)

8. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$

Solution. 【详解】 □

Remark. (类型五 0^0 与 ∞^0 型)

9. (2010, 数三) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/x}-1\right)^{1/\ln x}$

Solution. 【详解】 □

Remark. (类型六 1^∞ 型)

10. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{1/x}$ $(a>0, n\in\mathbb{N})$

Solution. □

1.4 已知极限反求参数

Remark. (方法)

11. (1998, 数二) 确定常数 a,b,c 的值, 使 $\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c$ $(c\neq 0)$

Solution. 【详解】 □

1.5 无穷小阶的比较

Remark. (方法)

12. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$。证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

Solution. 【详解】 □

13. (2006, 数二) 试确定 A,B,C 的值, 使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

Solution. 【详解】 □

14. (2013, 数二、数三) 当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值。

Solution. 【详解】 □

1.6 数列极限的计算

Remark. (方法)

15. (2011, 数一、数二)

    (i) 证明：对任意正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

    (ii) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

Solution. 【详解】 □

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0$,$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

Solution. 【详解】 □

17. (2019, 数一、数三) 设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$。

    (i) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} \ (n = 2, 3, \cdots)$

    (ii) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Solution. 【详解】 □

18. (2017, 数一、数二、数三) 求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Solution. 【详解】 □

1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足

    (A) $a < 0, b < 0$　(B) $a > 0, b > 0$

    (C) $a \le 0, b > 0$　(D) $a \ge 0, b < 0$

Solution. 【详解】 □