第一章　行列式

一、知识体系

$\boxed{\text{行列式}}$

- $\boxed{\text{行列式的概念}}$
  - $\boxed{\text{定义}}$　$n!$ 项不同行不同列元素乘积的代数和
  - $\boxed{\text{性质}}$
- $\boxed{\text{重要行列式}}$
  - 上(或下)三角、主对角行列式
  - 副对角行列式
  - ab型行列式
  - 拉普拉斯展开式
  - 范德蒙行列式
- $\boxed{\text{展开定理}}$
  - $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$
  - $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$
- $\boxed{\text{行列式的公式}}$
  - $|kA|=k^n|A|$
  - $|AB|=|A||B|$
  - $|A^T|=|A|$
  - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
  - $|A^*|=|A|^{n-1}$
  - 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
  - 若A与B相似,则$|A|=|B|$
- $\boxed{\text{Cramer法则}}$　$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$

二、重点题型

重点题型一　数字行列式的计算

【方法】

【例 1.1】 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 根的个数为【　　】

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【详解】

【例 1.2】 利用范德蒙行列式计算 $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}=$__________.

【详解】

【例 1.3】 设 $x_1x_2x_3x_4\neq 0$，则 $\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix}=$__________.

【详解】

【例 1.4】计算三对角线行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

【详解】

重点题型二　代数余子式求和

【方法】

【例 1.5】已知 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=$__________，$A_{44}+A_{45}=$__________.

【详解】

【例 1.6】设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，则 $|A|$ 的所有代数余子式的和为__________.

【详解】

重点题型三　抽象行列式的计算

【方法】

【例 1.7】（2005，数一、二）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$.若 $|A|=1$，则 $|B|=$__________.

【详解】

【例 1.8】设 A 为 n 阶矩阵，α,β 为 n 维列向量.若 $|A|=a$，$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix}=0$，则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix}=$________.

【详解】

【例 1.9】设 A 为 2 阶矩阵，$B=2\begin{pmatrix} (2A)^{-1}-(2A)^* & O \\ O & A \end{pmatrix}$.若 $|A|=-1$，则 $|B|=$________.

【详解】

【例 1.10】设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，$A\neq E$，证明 $|A|=0$.

【详解】

第二章　矩阵

一、知识体系

- 矩阵
  - 基本运算
    - $A+B$
    - kA
    - AB
    - A^T
  - 逆
    - 定义
    - 性质
    - 求法
      - 定义法
      - 初等变换法
      - 伴随矩阵法
      - 分块矩阵法
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
      - $\Leftrightarrow r(A)=n$
      - $\Leftrightarrow$ A 的列（或行）向量组线性无关
      - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$ 只有零解
      - $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$Ax=b$ 有唯一解
      - $\Leftrightarrow$ A 的特征值均不为零
  - 秩
    - 定义
    - 性质
    - 求法
  - 伴随矩阵
    - 定义
    - 性质
  - 初等变换与初等矩阵
    - 定义
    - 性质
    - 应用
      - 求矩阵的逆
      - 求矩阵的秩
      - 线性表示
      - 求极大线性无关组
      - 解线性方程组
      - 求二次型的标准形
  - 分块矩阵

二、重点题型

重点题型一　求高次幂

【方法】

【例 2.1】设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶矩阵，满足 $BA=O$，且 $r(B)>1$，则 $A^n=$__________.

【详解】

【例 2.2】设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&2&0\\4&1&2\end{pmatrix}$，则 $A^n=$__________.

【详解】

【例 2.3】设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$，$P$ 为 3 阶可逆矩阵，$B=P^{-1}AP$，则 $(B+E)^{100}=$__________.

【详解】

重点题型二　逆的判定与计算

【方法】

【例 2.4】设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=2A$，则下列结论不正确的是【　　】

（A）A 可逆　　（B）$A-E$ 可逆　　（C）$A+E$ 可逆　　（D）$A-3E$ 可逆

【详解】

【例 2.5】设 A,B 为 n 阶矩阵，a,b 为非零常数.证明：

（I）若 $AB=aA+bB$，则 $AB=BA$；

（II）若 $A^2+aAB=E$，则 $AB=BA$.

【详解】

【例 2.6】(2015，数二、三）设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，满足 $A^3=O$.

(I）求 a 的值；

(II）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，求 X.

【详解】

重点题型三　秩的计算与证明

【方法】

秩的性质

(1）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $r(A)\le \min\{m,n\}$；

(2） $r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

(3） $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$；

(4） $\max\{r(A),r(B)\}\le r(A \vdots B)\le r(A)+r(B)$；

(5） $r(A)=r(kA)(k\ne 0)$；

(6）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；

（7）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$；若 $r(A)=m$，则 $r(CA)=r(C)$；

（8）$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$；

（9）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，$AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

【例 2.7】（2018，数一、二、三）设 A,B 为 n 阶矩阵，$(X\ \ Y)$ 表示分块矩阵，则**【　　】**

（A）$r(A\ \ AB)=r(A)$　　（B）$r(A\ \ BA)=r(A)$

（C）$r(A\ \ B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　（D）$r(A\ \ B)=r(A^T\ \ B^T)$

【详解】

【例 2.8】设 A 为 n 阶矩阵.证明：

（I）若 $A^2=A$，则 $r(A)+r(A-E)=n$；

（II）若 $A^2=E$，则 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

【详解】

重点题型四　关于伴随矩阵

【伴随矩阵的性质】

（1）$AA^*=A^*A=|A|E\xrightarrow{|A|\neq 0}A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*,A^*=|A|A^{-1}$；

（2）$(kA)^*=k^{n-1}A^*$；　（3）$(AB)^*=B^*A^*$；　（4）$|A^*|=|A|^{n-1}$；

（5）$(A^T)^*=(A^*)^T$；　（6）$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$；　（7）$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

（8）$r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n\\1,r(A)=n-1\\0,r(A)<n-1\end{cases}$.

【例 2.9】 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2，且 $|A|=6$，则 A^* 的各列元素之和均为【　】

（A）2　（B）$\dfrac{1}{3}$　（C）3　（D）6

【详解】

【例 2.10】 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，证明：

（I）$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$；

（II）$a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

【详解】

重点题型五　初等变换与初等矩阵

【初等变换与初等矩阵的性质】

（1）$|E(i,j)|=-1$，$|E(i(k))|=k$，$|E(ij(k))|=1$；

（2）$E(i,j)^T=E(i,j)$，$E(i(k))^T=E(i(k))$，$E(ij(k))^T=E(ji(k))$；

（3）$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$，$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$；

（4）初等行（或列）变换相当于左（或右）乘相应的初等矩阵；

（5）可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积.

【例 2.11】（2005，数一、二）设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B，则【　】

（A）交换 A^* 的第 1 列与第 2 列，得 B^*

（B）交换 A^* 的第 1 行与第 2 行，得 B^*

（C）交换 A^* 的第 1 列与第 2 列，得 $-B^*$

（D）交换 A^* 的第 1 行与第 2 行，得 $-B^*$

【详解】

【例 2.12】 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022}=$ ________.

【详解】

第三章　向量

一、知识体系

- 向量
  - 基本运算
    - $\alpha+\beta$
    - $k\alpha$
    - $[\alpha,\beta]$
  - 线性表示
    - 定义　$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\beta$ 有解
      - $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\mid\beta)$
    - 充分条件
    - 求法　$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\mid\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵
  - 线性相关
    - 定义
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可由其余向量线性表示
      - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解
      - $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$
    - 充分条件
  - 线性无关
    - 定义
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow$ 任意向量均不能由其余向量线性表示
      - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 只有零解
      - $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$
    - 充分条件
  - 极大线性无关组与向量组的秩
    - 定义
    - 求法　$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵

二、重点题型

重点题型一　线性表示的判定与计算

【方法】

【例 3.1】 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $k\alpha+l\beta+m\gamma=0(km\neq 0)$，则【　　】

（A）α,β 与 α,γ 等价　（B）α,β 与 β,γ 等价　（C）α,γ 与 β,γ 等价　（D）α 与 γ 等价

【详解】

【例 3.2】（2004，数三）设 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，

$\beta=(1,3,-3)^T$.当 a,b 为何值时，

（I）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（II）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

（III）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

【详解】

【例 3.3】（2019，数二、三）设向量组（I）$\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$；向量组（II）$\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$.若向量组（I）与（II）等价，求$a$的值，并将$\beta_3$由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

【详解】

重点题型二　线性相关与线性无关的判定

【方法】

【例 3.4】（2014，数一、二、三）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，则对任意常数$k,l$，$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的【　　】

（A）必要非充分条件　（B）充分非必要条件　（C）充分必要条件　（D）既非充分又非必要条件

【详解】

【例 3.5】设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1=A\alpha_1\neq 0$，$A^2\alpha_2=\alpha_1+A\alpha_2$，$A^2\alpha_3=\alpha_2+A\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

【详解】

【例 3.6】设 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1,β_2 两两正交，证明 β_1,β_2 线性相关.

【详解】

重点题型三 极大线性无关组的判定与计算

【方法】

【例 3.7】设 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,a+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,a)^T$.

（I）当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

（II）当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 由其线性表示.

【详解】

【例 3.8】证明：（I）设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

（II）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.

【详解】

重点题型四　向量空间（数一专题）

【方法】

过渡矩阵　由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$，$C=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

坐标变换公式　设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则坐标变换公式为 $x=Cy$.

【例 3.9】（2015，数一）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$.

（I）证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基；

（II）当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ.

【详解】（I）

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+(k+1)\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

令 $C=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$，则 $|C|=4\neq 0$，从而 β_1,β_2,β_3 线性无关，故 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基.

（II）设 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 x，则

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Cx$$

得 $(C-E)x=0$.

对 $C-E$ 作初等行变换，

$$C-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}$$

当 $k=0$ 时，方程组 $(C-E)x=0$ 有非零解，所有非零解为 $x=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，在两个基下坐标相同的所有非零向量为

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=c(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=c(\alpha_3-\alpha_1)\text{，其中 }c\text{ 为非零常数}$$

第四章　线性方程组

一、知识体系

- 线性方程组
  - 解的性质与判定
    - 性质
    - 判定
      - $Ax=0$
        - $Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$
        - $Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$
      - $Ax=b$
        - $Ax=b$无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(\overline{A}) \Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})-1$
        - $Ax=b$有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$
        - $Ax=b$有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$
  - 解的结构
    - $Ax=0$ 的通解　$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
    - $Ax=b$ 的通解　$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$
  - 矩阵方程
    - 定义　$AX=B$
    - 判定
      - $AX=B$无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A \mid B)$
      - $AX=B$有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A \mid B)=n$
      - $AX=B$有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A \mid B)<n$
    - 求法　$(A \mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$行最简形矩阵
  - 公共解与同解
    - 公共解
      - 定义
      - 求法
    - 同解
      - 定义
      - 充要条件
        - $\Leftrightarrow A,B$的行向量组等价
        - $\Leftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$

二、重点题型

重点题型一　解的判定

【方法】

【例 4.1】（2001，数三）设 A 为 n 阶矩阵，α 为 n 维列向量，且 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)$，则线性方程组

（A）$Ax=\alpha$ 有无穷多解　　（B）$Ax=\alpha$ 有唯一解

（C）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解　　（D）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 有非零解

【详解】

【例 4.2】设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(A)=m<n$，则下列结论不正确的是【　】

（A）线性方程组 $A^T x=0$ 只有零解　　（B）线性方程组 $A^T Ax=0$ 有非零解

（C）$\forall b$，线性方程组 $A^T x=b$ 有唯一解　　（D）$\forall b$，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解

【详解】

重点题型二　求齐次线性方程组的基础解系与通解

【方法】

【例 4.3】（2011，数一、二）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶矩阵，$(1,0,1,0)^T$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $A^* x=0$ 的基础解系可为【　】

（A）α_1,α_2　　（B）α_1,α_3　　（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【详解】

【例 4.4】（2005，数一、二）设 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$，满足 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【详解】

【例 4.5】（2002，数三）设线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\bx_1+bx_2+ax_3+\cdots+bx_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$n\geq 2$. 当 a,b 为何值时，方程组只有零解、有非零解，当方程组有非零解时，求其通解.

【详解】

重点题型三　求非齐次线性方程组的通解

【方法】

【例 4.6】 设 A 为 4 阶矩阵，k 为任意常数，η_1,η_2,η_3 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解，满足

$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\eta_2+2\eta_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.若 $r(A)=3$，则 $Ax=b$ 的通解为【　　】

（A）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$

【详解】

【例 4.7】（2017，数一、二、三）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有三个不同的特征值，其中 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

（I）证明 $r(A)=2$；

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

【详解】

【例 4.8】（2010，数一、二、三）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解.

（I）求 λ,a 的值；

（II）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

【详解】

【例 4.9】设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(A)=r$.若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的特解，证明：

（I）$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（II）$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关；

（III）$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 为 $Ax=b$ 所有解的极大线性无关组.

【详解】

重点题型四　解矩阵方程

【方法】

矩阵方程解的判定

$AX=B$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A\,\vdots\,B)$

$AX=B$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,B)=n$

$AX=B$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,B)<n$

矩阵方程的求法

对 $(A\,\vdots\,B)$ 作初等行变换，化为行最简形矩阵，得矩阵 X .

【例 4.10】 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+E=A^{2022}+2X$，求矩阵 X .

【详解】

【例4.11】（2014，数一、二、三）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

（I）求线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

【详解】

重点题型五　公共解的判定与计算

【方法】

【例 4.12】（2007，数一、二、三）设线性方程组

$$（\mathrm{I}）\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$（\mathrm{II}）\ x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【详解】

【例 4.13】设齐次线性方程组

$$（\text{I}）\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

齐次线性方程组（II）的一个基础解系为$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T,\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$.

（1）求方程组（I）的一个基础解系；

（2）当a为何值时，方程组（I）与（II）有非零公共解，并求所有非零公共解.

【详解】

重点题型六　同解的判定与计算

【方法】

【例 4.14】（2005，数三）设线性方程组

$$（\text{I}）\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \text{ 与（II）} \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求a,b,c的值.

【详解】

第五章　特征值与特征向量

一、知识体系

- 特征值与特征向量
  - 特征值与特征向量
    - 定义　$A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq 0)$
    - 性质
    - 特征方程法
      - $|A-\lambda E|=0$
      - $(A-\lambda E)x=0$
  - 相似矩阵
    - 定义　$B=P^{-1}AP$
    - 性质
  - 相似对角化
    - 定义　$P^{-1}AP=\Lambda$
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow A$ 有n个线性无关的特征向量
      - $\Leftrightarrow k$重特征值有k个线性无关的特征向量
    - 充分条件
      - A有n个不同的特征值
      - A为实对称矩阵
  - 实对称矩阵
    - 特征值均为实数
    - 不同特征值的特征向量正交
    - k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - A可正交相似对角化，即存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda$

二、重点题型

重点题型一　特征值与特征向量的计算

【方法】

特征值与特征向量的性质

（1）不同特征值的特征向量线性无关；

（2）不同特征值的特征向量之和不是特征向量；

（3）k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量；

（4）设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A)$，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$；

（5）若 $r(A)=1$，即 $A=\alpha\beta^T$，其中 α,β 为 n 维非零列向量，则 A 的特征值为

$$\lambda_1 = tr(A) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha，\quad \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

（6）设 α 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则

A	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α		$P^{-1}\alpha$

【例 5.1】 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量.

【详解】

【例 5.2】（2003，数一）设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量.

【详解】

【例 5.3】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&4&-2\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量.

【详解】

【例 5.4】设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2=O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是【　　】

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【详解】

【例 5.5】设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\frac{1}{3}$，证明：

（I）0 为 A 的特征值；

（II）$\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量；

（III）A 可相似对角化.

【详解】

重点题型二　相似的判定与计算

【相似的性质】

（1）若 $A\sim B$，则 A,B 有相同的行列式、秩、特征方程、特征值、迹；

（2）若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$AB\sim BA(|A|\neq 0)$，$A^T\sim B^T$，$A^*\sim B^*$；

（3）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

【例 5.6】设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

矩阵 B 与 A 相似，则 $r(B-E)+r(B-3E)=$__________.

【详解】

【例 5.7】设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，满足 $A^2=2E$，则 $|AB+A-B-E|=$__________.

【详解】

【例 5.8】（2019，数一、二、三）设 $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（I）求 x,y 的值；

（II）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

【详解】

重点题型三　相似对角化的判定与计算

【方法】

【例 5.9】设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，3，-2，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.若 $P=(\alpha_1,2\alpha_3,-\alpha_2)$，则 $P^{-1}A^*P=$【　】

（A）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}-6 & & \\ & -2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}-6 & & \\ & 3 & \\ & & -2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

【详解】

【例 5.10】 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明 A 可相似对角化.

【详解】

【例 5.11】（2020，数一、二、三）设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量.

（I）证明 P 为可逆矩阵；

（II）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【详解】

重点题型四　实对称矩阵的计算

【方法】

【例 5.12】设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=O$，n 阶矩阵 B 满足 $B^2+B=E$，且 $r(AB)=2$，则 $|A+2E|=$__________.

【详解】

【例 5.13】（2010，数二、三）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵.若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q.

【详解】

【例 5.14】设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2=E$，$A+E$ 的各行元素之和均为零，且 $r(A+E)=2$.

（I）求 A 的特征值与特征向量；

（II）求矩阵 A.

【详解】

第六章　二次型

一、知识体系

- 二次型
  - 二次型与标准形
    - 定义　$f = x^T Ax$
    - 标准形的求法
      - 拉格朗日配方法
      - 合同变换法
      - 正交变换法
  - 合同矩阵
    - 定义　$B = C^T AC$
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow x^T Ax$与$x^T Bx$有相同的正、负惯性指数
      - $\Leftrightarrow A,B$有相同的正、负特征值的个数
    - 充分条件　A与B相似
    - 必要条件　A与B等价
  - 正定矩阵
    - 定义　$\forall x \neq 0$，有$x^T Ax > 0$
    - 性质
    - 充要条件
      - $\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数为n
      - $\Leftrightarrow A$ 与E合同
      - $\Leftrightarrow A$ 的特征值均大于零
      - $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式均大于零
    - 必要条件
      - $a_{ii} > 0 (i = 1, \cdots, n)$
      - $|A| > 0$

二、重点题型

重点题型一　求二次型的标准形

【方法】

【例 6.1】（2016，数二、三）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则**【　　】**

（A）$a>1$　　（B）$a<-2$　　（C）$-2<a<1$　　（D）$a=1$ 或 -2

【详解】

【例 6.2】（2022，数一）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

（II）求正交变换 $x=Qy$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（III）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

【详解】

【例 6.3】（2020，数一、三）设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geq b$.

（I）求 a,b 的值；

（II）求正交矩阵 Q .

【详解】

重点题型二　合同的判定

【方法】

【例 6.4】（2008，数二、三）设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，与 A 合同的矩阵是【　　】

（A）$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

【详解】

【例 6.5】设 A,B 为 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

①$PA=B$；　②$P^{-1}ABP=BA$；　③$P^{-1}AP=B$；　④$P^{T}A^{2}P=B^{2}$.

成立的个数是【　　】

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【详解】

重点题型三　二次型正定与正定矩阵的判定

【方法】

【例 6.6】设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(A)=m$，则下列结论

① AA^T 与单位矩阵等价；　　② AA^T 与对角矩阵相似；

③ AA^T 与单位矩阵合同；　　④ AA^T 正定.

正确的个数是**【　　】**

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【详解】

【例 6.7】证明：（I）设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则 $A-B^2$ 为正定矩阵；

（II）设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $r(A+B)=n$，则 A^TA+B^TB 为正定矩阵.

【详解】