姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章　常微分方程

1. 例 1 (1998, 数一、数二) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于

$$(A)\ 2\pi \quad (B)\ \pi \quad (C)\ e^{\frac{\pi}{4}} \quad (D)\ \pi e^{\frac{\pi}{4}}$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导,$f(x) > 0$,$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$$

求 $f(x)$。

Solution. 【详解】 □

1.0.1　一阶微分方程的解法

Remark (类型一可分离变量).

3. 例 3 (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \quad (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二一阶齐次).

4. 例 4 (2010, 数二、数三) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解。若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则

$$(A)\ \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = \frac{1}{2} \quad (C)\ \lambda = \frac{2}{3},\ \mu = \frac{1}{3}$$

Solution.【详解】 □

Remark (类型三一阶线性).

5. 例 5 (2018, 数一) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。
   (i) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;
   (ii) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution.【详解】 □

Remark (类型四伯努利方程 (数一掌握)).

6. 例 6 求解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$。

Solution.【详解】 □

Remark (类型五全微分方程 (数一掌握)).

7. 例 7 求解下列微分方程：

$$(1)\ (2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2e^y - 2y)dy = 0;$$

$$(2)\ \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Solution.【详解】 □

1.0.2 二阶常系数线性微分方程

8. 例 8 (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

$$(A)\ Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

$$(B)\ Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

$$(C)\ Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

$$(D)\ Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

Solution.【详解】 □

9. 例 9 (2015, 数一) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解, 则

$$(A)\ a=-3,b=2,c=-1$$

$$(B)\ a=3,b=2,c=-1$$

$$(C)\ a=-3,b=2,c=1$$

$$(D)\ a=3,b=2,c=1$$

Solution.【详解】 □

10. 例 10 (2016, 数二) 已知 $y_1(x)=e^x$,$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解。若 $u(-1)=e$,$u(0)=-1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution.【详解】 □

11. 例 11 (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$。
    (i) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛;
    (ii) 若 $y(0)=1$,$y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值。

Solution.【详解】 □

1.0.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 例 12 求解微分方程 $y^{(4)}-3y''-4y=0$。

Solution.【详解】 □

1.0.4 二阶可降阶微分方程

Remark (方法数一、数二掌握数三大纲不要求).

13. 例 13 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

Solution.【详解】 □

1.0.5 欧拉方程

Remark (方法数一掌握数二、数三大纲不要求).

14. 例 14 求解微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$。

Solution.【详解】 □

1.0.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. 例 17 (2005, 数二) 用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, 并求其满足 $y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=2$ 的特解。

Solution.【详解】 □

1.0.7 微分方程综合题

Remark (类型一综合导数应用).

18. 例 18 (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。求曲线 L 的方程。

Solution.【详解】 □

Remark (类型二综合定积分应用).

19. 例 19 (2009, 数三) 设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$。已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$,$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

Solution.【详解】 □

Remark (类型三综合变限积分).

20. 例 20 (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$。

Solution.【详解】 □

Remark (类型四综合多元复合函数).

21. 例 21 (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型五综合重积分).

22. 例 22 (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0) = 1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)dxdy = \iint_{D_t} f(t)dxdy$$

其中 $D_t = \{(x,y)|0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\}(0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution. 【详解】 □