

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章 二重积分	1
1.1 二重积分的概念	1
1.2 交换积分次序	2
1.3 二重积分的计算	2
1.4 其他题型	3

第一章 二重积分

1.1 二重积分的概念

1. 例 1 (2010, 数一、数二)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$$

$$\begin{aligned} (A) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy \quad (B) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy \\ (C) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy \quad (D) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy \end{aligned}$$

Solution. 【详解】

□

2. 例 2 (2016, 数三) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

则

$$(A) J_1 < J_2 < J_3 \quad (B) J_3 < J_1 < J_2$$

$$(C) J_2 < J_3 < J_1 \quad (D) J_2 < J_1 < J_3$$

Solution. 【详解】

□

1.2 交换积分次序

3. 例 3 (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序:

$$\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$$

Solution. 【详解】

□

4. 例 5 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r, \theta) dr$ 的积分次序。

Solution. 【详解】

□

1.3 二重积分的计算

6. 例 6 (2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$

Solution. 【详解】

□

7. 例 7 计算 $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 。

Solution. 【详解】

□

8. 例 8 (2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dx dy$ 。

Solution. 【详解】

□

9. 例 9 (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$ 。

Solution. 【详解】

□

10. 例 10 (2014, 数二、数三) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

Solution. 【详解】

□

11. 例 11 (2019, 数二) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Solution. 【详解】

□

1.4 其他题型

13. 例 12 (2010, 数二) 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 (题目描述不完整)

Solution. 【详解】

□

14. 例 13 (2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x - y) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$$

Solution. 【详解】

□