姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章　无穷级数

1.1　数项级数敛散性的判定

1. 例 1 (2015, 数三) 下列级数中发散的是

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\quad (C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}\quad (D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2017, 数三) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$

$$(A)\ 1\quad (B)\ 2\quad (C)\ -1\quad (D)\ -2$$

Solution. 【详解】 □

1.2　交错级数

3. 例 3 判定下列级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}\quad (2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Solution. 【详解】 □

1.3　任意项级数

4. 例 4 (2002, 数一) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

$$(A)\qquad (B)\qquad (C)\qquad (D)$$

Solution. 【详解】 □

5. 例 5 (2019, 数三) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{条件收敛} \quad (B)\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{绝对收敛}$$
$$(C)\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)\text{收敛} \quad (D)\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)\text{发散}$$

Solution. 【详解】 □

1.4 幂级数求收敛半径与收敛域

6. 例 6 (2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

$$(A)\ ,\quad (B)\ ,$$
$$(C)\ ,\quad (D)\ ,$$

Solution. 【详解】 □

7. 例 7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1} x^n$ 的收敛域.

Solution. 【详解】 □

1.5 幂级数求和

8. 例 8 (2005, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

Solution. 【详解】 □

9. 例 9 (2012, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

Solution. 【详解】 □

10. 例 10 (2004, 数三) 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$。求:

(i) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(ii) $S(x)$ 的表达式.

Solution. 【详解】 □

1.6 幂级数展开

11. 例 11 (2007, 数三) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

Solution. 【详解】 □

12. 例 12 将函数 $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

Solution. 【详解】 □

1.7 无穷级数证明题

13. 例 13 (2016, 数一) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$,$0<f'(x)<\frac{1}{2}$。设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$。证明:

 (i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

 (ii) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

Solution. 【详解】 □

14. 例 14 (2014, 数一) 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$,$0<b_n<\frac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

 (i) 证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

 (ii) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

Solution. 【详解】 □

1.8 傅里叶级数

15. 例 15 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于?, 在 $x=2\pi$ 收敛于?.

Solution.【详解】由狄利克雷收敛定理知,$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于

$$S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

在 $x=2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

□

16. 例 16 将 $f(x)=1-x^2, 0\le x\le\pi$, 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

Solution.【详解】对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶延拓, 由 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 知 $b_n=0$。

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\quad (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$, 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

□