第一章　矩阵

1.1　求高次幂

1. 设 $A = \sqrt{a}$，B 为 3 阶矩阵，满足 $BA = O$，且 $r(B) > 1$，则 $A^n = 0$。

Solution.【详解】 $\square$

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $A^n =$ ______________。

Solution.【详解】 $\square$

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

P 为 3 阶可逆矩阵，$B = P^{-1}AP$，则 $(B+E)^{100} =$ ______________。

Solution.【详解】 $\square$

1.2　逆的判定与计算

3. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$，则下列结论不正确的是：

Solution. 【详解】 □

4. 设 A, B 为 n 阶矩阵，a, b 为非零常数。证明：

   (a) 若 $AB = aA + bB$，则 $AB = BA$；

   (b) 若 $A^2 + aAB = E$，则 $AB = BA$。

Solution. 【详解】 □

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

满足 $A^3 = O$。

   (a) 求 a 的值；

   (b) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$，求 X。

Solution. 【详解】 □

1.3 秩的计算与证明

6. (2018, 数一、二、三) 设 A, B 为 n 阶矩阵，(XY) 表示分块矩阵，则：

   (a) $r(AAB) = r(A)$

   (b) $r(ABA) = r(A)$

   (c) $r(AB) = \max\{r(A), r(B)\}$

   (d) $r(AB) = r(A^T B^T)$

Solution. 【详解】 □

7. (1) 若 $A^2 = A$，则 $r(A) + r(A - E) = n$。

8. (II) 若 $A^2 = E$，则 $r(A + E) + r(A - E) = n$。

Solution. 【详解】 □

1.4 关于伴随矩阵

8. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2，且 $|A|=6$，则 A^* 的各列元素之和均为:

   (a) (A) 2

   (b) (B) 1

   (c) (C) 3

   (d) (D) 6

   Solution. 【详解】 □

9. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，证明:

   (a) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;

   (b) $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$。

   Solution. 【详解】 □

1.5 初等变换与初等矩阵

10. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B，则:

    (a) (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列，得 B^*

    (b) (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列，得 $-B^*$

    (c) (D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行，得 $-B^*$

    Solution. 【详解】 □

11. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&3&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022}=$ ________。

Solution. 【详解】 □

1.6 向量

1.7 线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ $(km \neq 0)$，则

   (a) (A) α, β 与 α, γ 等价

   (b) (B) α, β 与 β, γ 等价

   (c) (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (d) (D) α 与 γ 等价

   Solution.【详解】 □

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$, $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$, $\beta = (1, 3, -3)^T$。当 a, b 为何值时，

   (a) (II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

   (b) (III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

   Solution.【详解】 □

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a^2+3)^T$；向量组 (II) $\beta_1 = (1, 1, a+3)^T$, $\beta_2 = (0, 2, 1-a)^T$, $\beta_3 = (1, 3, a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价，求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

   Solution.【详解】 □

1.8 线性相关与线性无关的判定

3. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，则对任意常数 k, l，$\alpha_1 + k\alpha_3$, $\alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

   (a) (A) 必要非充分条件

   (b) (B) 充分非必要条件

   (c) (C) 充分必要条件

(d) (D) 既非充分又非必要条件

Solution.【详解】 □

4. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0$, $A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

Solution.【详解】 □

5. 设 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1,β_2 两两正交，证明 β_1,β_2 线性相关。

Solution.【详解】 □

1.9 极大线性无关组的判定与计算

6. 设 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (3,2,-1,a+2)^T$, $\alpha_4 = (-2,-6,10,a)^T$。
   (a) (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；
   (b) (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha = (4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

Solution.【详解】 □

7. 证明:
   (a) (I) 设 A,B 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A+B) \le r(A) + r(B)$；
   (b) (II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则 $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$。

Solution.【详解】 □

1.10 向量空间 (数一专题)

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$。
   (a) (I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基:
   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

Solution.【详解】 □

1.11 线性方程组

1.12 解的判定

1. (2001，数三) 设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量, 且 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$，则线性方程组

   (a) (A) $Ax = \alpha$ 有无穷多解

   (b) (B) $Ax = \alpha$ 有唯一解

   (c) (C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

   (d) (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

   Solution. 【详解】 □

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = m < n$，则下列结论不正确的是

   (a) (A) 线性方程组 $A^T x = 0$ 只有零解

   (b) (B) 线性方程组 $A^T Ax = 0$ 有非零解

   (c) (C) $\forall b$，线性方程组 $A^T x = b$ 有唯一解

   (d) (D) $\forall b$，线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

   Solution. 【详解】 □

1.13 求齐次线性方程组的基础解系与通解

2. (2011, 数一, 二) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶矩阵, $(1, 0, 1, 0)^T$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $A^* x = 0$ 的基础解系可为

   (a) (A) α_1, α_2

   (b) (B) α_1, α_3

   (c) (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

   (d) (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

Solution.【详解】 □

3. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a,b,c), a,b,c 不全为零, $B=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ 满足 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解。

Solution.【详解】 □

4. (2002, 数三) 设线性方程组

$$\begin{aligned}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n&=0\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n&=0\\&\vdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n&=0\end{aligned}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2$。当 a,b 为何值时，方程组只有零解、有非零解，当方程组有非零解时，求其通解。

Solution.【详解】 □

1.14 求非齐次线性方程组的通解

5. 设 A 为 4 阶矩阵, k 为任意常数, η_1,η_2,η_3 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解, 满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \eta_2+2\eta_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

Solution.【详解】 □

6. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ 有三个不同的特征值, 其中 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

   (a) (I) 证明 $r(A)=2$;

   (b) (II) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

Solution.【详解】 □

7. (I) 求 λ, a 的值；

8. (II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解。

Solution. 【详解】 □

9. (I) η 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的特解, 证明:

   (a) (II) $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \cdots, \eta + \xi_{n-r}$ 线性无关；

   (b) (III) $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \cdots, \eta + \xi_{n-r}$ 为 $Ax = b$ 所有解的极大线性无关组。

Solution. 【详解】 □

1.15 解矩阵方程

9. 矩阵方程解的判定

$$AX = B \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A) < r(A|B)$$

$$AX = B \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow r(A) = r(A|B) = n$$

$$AX = B \text{ 有无穷多解} \Leftrightarrow r(A) = r(A|B) < n$$

10. 矩阵方程的求法对 $(A|B)$ 作初等行变换，化为行最简形矩阵，得矩阵 X。

11. (例 4.10) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

矩阵 X 满足 $AX + E = A^{2022} + 2X$，求矩阵 X。

Solution. 【详解】 □

12. (例 4.11) (2014, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) (I) 求线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系；

   (b) (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B。

Solution. 【详解】 □

1.16 公共解的判定与计算

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$(II)x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

Solution. 【详解】 □

13. 设齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$

(a) (1) 求方程组 (I) 的一个基础解系；

(b) (2) 当 a 为何值时，方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解，并求所有非零公共解。

Solution. 【详解】 □

14. (2005，数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解，求 a, b, c 的值。

Solution. 【详解】 □

1.17 第特征值与特征向量

1.18 特征值与特征向量的计算

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

2. (2003, 数一) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}A^*P$$

求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2 = O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是
   (a) (A) 0
   (b) (B) 1
   (c) (C) 2

(d) (D) 3

Solution. 【详解】 □

5. 设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\frac{1}{3}$，证明：

(a) (I) 0 为 A 的特征值；

(b) (II) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量；

(c) (III) A 可相似对角化。

Solution. 【详解】 □

1.19 相似的判定与计算

6. (2019, 数一、二、三) 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

(I) 求 x,y 的值；(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。

Solution. 【详解】 □

7. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，满足 $A^2=2E$，则 $|AB+A-B-E|=$ ______________。

Solution. 【详解】 □

1.20 相似对角化的判定与计算

8. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 3, -2，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。若

$$P=(\alpha_1,2\alpha_2,-\alpha_3)$$

则 $P^{-1}AP=$ ______________。

Solution. 【详解】 □

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明 A 可相似对角化。

Solution. 【详解】 □

10. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

   (a) (I) 证明 P 为可逆矩阵;

   (b) (II) 若 $A^2\alpha+6A\alpha-10\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution. 【详解】 □

1.21 实对称矩阵的计算

11. (2010, 数二、三) 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&4&1\\1&3&a&1\\4&a&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)^T$，求 a,Q。

Solution. 【详解】 □

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=O$，A 的各行元素之和均为零，且 $r(A)=2$。

   (a) (I) 求 A 的特征值与特征向量;

   (b) (II) 求矩阵 A。

Solution. 【详解】 □

1.22 二次型

1.23 求二次型的标准形

1. (2016，数二、三) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

(a) $a > 1$

(b) $a < -1$

(c) $-1 < a < 1$

(d) $a = 1$ 或 $a = -1$

Solution.【详解】 □

2. (2022，数一) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$。

(a) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵；

(b) 求正交变换 $x = Qy$，将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形；

(c) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

Solution.【详解】 □

3. (2020，数一、三) 设二次型 $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = y_1^2 + by_2^2$，其中 $b \geq 0$。

(a) 求 a, b 的值；

(b) 求正交矩阵 Q。

Solution.【详解】 □

1.24 合同的判定

4. (2008，数二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，与 A 合同的矩阵是

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution. 【详解】 □

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

(a) $PAP = B$;

(b) $P^{-1}ABP = BA$;

(c) $P^{-1}AP = B$;

(d) $P^T AP = B$。

成立的个数是

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Solution. 【详解】 □

1.25 二次型正定与正定矩阵的判定

6. (2017，数一、二、三) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，且 $r(A) = n$，则下列结论

(a) $A^T A$ 与单位矩阵等价;

(b) $A^T A$ 与对角矩阵相似;

(c) $A^T A$ 与单位矩阵合同;

(d) $A^T A$ 正定。

正确的个数是

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Solution.【详解】 □

7. 证明:

   (a) 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则 $A-B^2$ 为正定矩阵;

   (b) 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $r(A+B)=n$，则 A^TA+B^TB 为正定矩阵。

Solution.【详解】 □