第一章　概率论部分

1.1　事件与概率论

1.1.1　事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的**集合**
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

Remark. (事件的运算律)

(1)　交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2)　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup A, A(BC) = (AB)C$

(3)　分配律　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

(4)　摩根律　$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \bar{(}AB) = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5)　吸收律　$A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,$P(A \cup B) = 1$, 则

$$(A)\ A \cup B = \Omega \quad (B)\ AB = \varnothing \quad (C)\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 \quad (D)\ P(A - B) = 0$$

Solution. 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$

注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确

对于 (C) 选项 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{AB}) = 1$ 正确

对于 (D) 选项, 由减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$ □

总结

(1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件

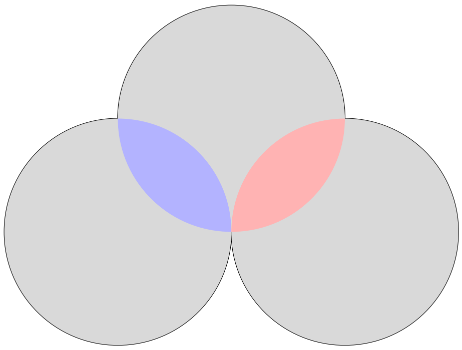
(2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件

这两个结论考虑**连续型随机变量**即可

2. (2020, 数一、三) 设 A, B, C 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 只有一个事件发生的概率为

$$(A)\ \frac{3}{4} \quad (B)\ \frac{2}{3} \quad (C)\ \frac{1}{2} \quad (D)\ \frac{5}{12}$$

Solution. 这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ □

3. 设随机事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$ ________

Solution. 根据结论, 有 A, B 互斥, 则 $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$ □

Corollary 1.1.1. 若 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 A, B 必然对立

Proof.

$$\begin{aligned} & AB = \bar{A}\bar{B} \\ \iff & AB \cup \bar{A}B = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \\ \iff & (A \cup \bar{A})B = \bar{A}(\bar{B} \cup B) \\ \iff & B = \bar{A} \end{aligned}$$

□

4. 设随机事件 A, B, C 两两独立, 满足 $ABC = \varnothing$, 且 $P(A) = P(B) = P(C)$,A, B, C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$

Solution. 由题意有 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 由加法公式与独立性有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) \\ - P(A)P(C) - P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

由 $P(A) = P(B) = P(C)$, 上式化为 $3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \implies P(A) = \frac{1}{4}$或$P(A) = \frac{3}{4}$, 显然 $P(A) \neq \frac{3}{4} > P(A \cup B \cup C)$, 故 $P(A) = \frac{1}{4}$ □

5. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{2}{3}$,$P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A|B) + P(B|A)$ 的最大值为 ______, 最小值为 ______.

Solution. 关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于 $[0, 1]$ 之间, 事件 AB 的和事件不可能小于单独 A,B 发生概率之和, 事件 AB 的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A) + P(B) - 1 <= P(AB) \leq \min\left(P(A), P(B)\right) \leq P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)$$

□

1.1.2 三大概型的计算

Remark. 三大概率模型

经典概型 – 有限个等可能的样本点, **排列组合问题**

几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等

伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为 p, 不成功的概率为 $(1-p)$

6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中**有放回地**取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

Solution. (古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{3}}{3^4} = \frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序. □

7. 在区间 $(0,a)$ 中随机地取两个数, 则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为

Solution. (几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4}\cdot a+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\frac{a^2}{4x}dx}{a^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

□

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为 p, 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

Solution. 失败零次–p^5, 失败一次–$\binom{1}{5}p^4(1-p)p$, 失败两次–$\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$

故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5+\binom{1}{5}p^4(1-p)p+\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

□

1.1.3 三大概率公式的计算

Remark. 三大概率公式

条件概率公式 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

推论 $P(AB)=P(B)P(A\mid B),P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid P(A_1))P(A_3|P(A_1A_2))\dots$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

贝叶斯公式 $P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

9. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A\cup B)=0.6$,$P(B|\bar{A})=0.2$, 则 $P(A)=$ ______

Solution.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6,P(B\mid\bar{A})=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.2$$

联立有

$$\frac{0.6-P(A)}{1-P(A)}=0.2$$

, 则 $P(A)=0.5$ □

10. (2018, 数一) 设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立, 满足 $BC=\varnothing$, 且

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$______.

Solution.

$$\begin{aligned} P(AC|AB\cup C) &= \frac{P(AC)}{P(AB\cup C)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(AB)+P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

则 $P(C)=\frac{1}{4}$ □

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

(1) 求乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

Solution. (作为小题来考还可以)

方法一

(1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_{3-k}^k}{C_6^3}$

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

则所求数学期望 $EX=\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+\frac{3}{20}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(A\mid x=k) \\ &= \frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

方法二: 超几何分布

(1) $X\sim H(N,M,n), N=6, M=3, n=3$, 则 $EX=\frac{nM}{N}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)P(A \mid x=k) \\
&= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)\frac{k}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3} P(X=k)k \\
&= \frac{1}{6}EX \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

1.1.4 事件独立的判定

Remark. (事件独立的充要条件)

$$\begin{aligned}
&P(AB) = P(A)P(B) \\
&\iff P(A \mid B) = P(A) \\
&\iff P(A \mid \bar{B}) = P(A) \iff P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1) \\
&\iff A \text{ 与}\bar{B}\text{, 或}\bar{A} \text{ 与}B\text{, 或}\bar{A} \text{ 与}\bar{B} \text{ 相互独立} \\
&\iff P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1
\end{aligned}$$

12. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 则

(A) 若 $A \supset B$, 则 A, B 一定不相互独立

(B) 若 $B \supset A$, 则 A, B 一定不相互独立

(C) 若 $AB = \varnothing$, 则 A, B 一定不相互独立

(D) 若 $A = \bar{B}$, 则 A, B 一定不相互独立

Solution. (A)(B)(C) 考虑 $\varnothing$ 则都不对

(D) 由于 A 不是必然事件, 则 B 不是不可能事件, 则 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 根据下面的总结 A, B 一定不独立

□

总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

A, B 互不相容, 则 A, B 一定不独立

A, B 独立, 则 A, B 一定不互不相容

13. 设 A, B, C 为随机事件,A 与 B 相互独立, 且 $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

(A)相互独立 (B)两两独立, 但不一定相互独立

(C)不一定两两独立 (D)一定不两两独立

Solution. 由 $P(C) = 0$ 知 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立. □

两两独立与相互独立

$$\text{相互独立}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{array}\right\} \text{两两独立} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array}\right.$$

1.2 一维随机变量

1.2.1 分布函数的判定与计算

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,a,b 为任意常数, 则下列一定不是分布函数的是

$$(A)\ F(ax+b)\quad (B)\ F(x^2+b)\quad (C)\ F(x^3+b)\quad (D)\ 1-F(-x)$$

Solution. 【详解】 □

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 X 的分布函数 $F(x)=?$,$P\{-2<X<\frac{1}{4}\}=?$.

Solution. 【详解】 □

1.2.2 概率密度的判定与计算

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则下列必为概率密度的是

$$(A)\ f(-x+1)\quad (B)\ f(2x-1)\quad (C)\ f(-2x+1)\quad (D)\ f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

Solution. 【详解】 □

4. (2011, 数一、三) 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为分布函数, 对应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 为连续函数, 则下列必为概率密度的是

$$(A)\ f_1(x)f_2(x)\quad (B)\ 2f_2(x)F_1(x)\quad (C)\ f_1(x)F_2(x)\quad (D)\ f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$$

Solution. 【详解】 □

5. (2000, 三) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1]\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若 $P\{X\geq k\}=\frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是?.

Solution. 【详解】 □

1.2.3 关于八大分布

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C\frac{\lambda^k}{k!}$,$k=1,2,\cdots$, 则 $C=$?.

Solution. 【详解】 □

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}$, 且 $EX=DX$, 则 $A=$?,$B=$?.

Solution. 【详解】 □

8. (2004, 数一、三) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$。若 $P\{|X|<x\}=\alpha$, 则 x 等于

$$(A)\ u_{\frac{\alpha}{2}}\quad (B)\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}\quad (C)\ u_{\frac{1-\alpha}{2}}\quad (D)\ u_{1-\alpha}$$

Solution. 【详解】 □

9. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$, 且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$?.

Solution. 【详解】 □

10. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu<0)$,$F(x)$ 为其分布函数,a 为任意常数, 则

$$(A)\ F(a)+F(-a)>1\quad (B)\ F(a)+F(-a)=1$$
$$(C)\ F(a)+F(-a)<1\quad (D)\ F(\mu+a)+F(\mu-a)=\frac{1}{2}$$

Solution. 【详解】 □

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 1 的指数分布, 则 $P\{1<\max\{X,Y\}<2\}=$?.

Solution. 【详解】 □

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{1<\min\{X,Y\}<2\}=$?.

Solution. 【详解】 □

13. (2013, 数一) 设随机变量 $Y\sim E(1)$,$a>0$, 则 $P\{Y\leq a+1|Y>a\}=$?.

Solution. 【详解】 □

14. 设随机变量 $X \sim G(p)$,m, n 为正整数, 则 $P\{X > m+n|X > m\}$

(A) m , n , n

(B) m , n , n

(C) n , m , m

(D) n , m , m

Solution. 【详解】 □

1.2.4 求一维连续型随机变量函数的分布

15. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

(A) (B)

(C) (D)

Solution. 【详解】 □

16. (2013, 数一) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2}, & 0 < x < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{3}X, & X \le 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \ge 2 \end{cases}$$

(a) 求 Y 的分布函数;

(b) 求 $P\{X \le Y\}$.

Solution. 【详解】 □

17. (2021, 数一、三) 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X, 较长一段的长度记为 Y。

(a) 求 X 的概率密度;

(b) 求 $Z = \frac{Y}{X}$ 的概率密度;

(c) 求 $E\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Solution. 【详解】 □

1.3 二维随机变量

1.3.1 联合分布函数的计算

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim B(1,p)$,$Y \sim E(\lambda)$, 则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =?$.

Solution. 【详解】 □

1.3.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。

(a) 求在 $X+Y=n(n \geq 2)$ 的条件下,X 的条件概率分布;

(b) 求 $P\{X+Y \geq n\}(n \geq 2)$.

Solution. 【详解】 □

1.3.3 二维连续型随机变量分布的计算

4. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution. 【详解】 □

5. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(x,1)$。

(a) 求 (X,Y) 的联合概率密度;

(b) 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(c) 求 $P\{X+Y>1\}$.

Solution. 【详解】 $\square$

6. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,2;1,4;-\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX+bY\leq 1\}=\frac{1}{2}$, 则 (a,b) 可以为

$$(A)\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\quad (B)\ \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$$
$$(C)\ \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\quad (D)\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Solution. 【详解】 $\square$

7. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

$$(A)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\quad (B)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$$
$$(C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\quad (D)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$$

Solution. 【详解】 $\square$

8. (2022, 数一) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下, 随机变量 $Y\sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ \frac{1}{4}\quad (B)\ \frac{1}{2}\quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}\quad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution. 【详解】 $\square$

1.3.4 求二维离散型随机变量函数的分布

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$, 求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

Solution. 【详解】 $\square$

1.3.5 求二维连续型随机变量函数的分布

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:

(a) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(b) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(d) $P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X \le \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X = \frac{1}{2}\right\}$;

(e) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

Solution. 【详解】 □

1.3.6 求一离散一连续随机变量函数的分布

14. (2020, 数一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,X_1 与 X_2 均服从标准正态分布,X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$,$Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$。

(a) 求 (X_1, Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);

(b) 证明 Y 服从标准正态分布.

Solution. 【详解】 □

1.4 数字特征

1.4.1 期望与方差的计算

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$,$-\infty < x < \infty$, 则 $E[\min\{|X|, 1\}]$ =?.

Solution. 【详解】 □

2. (2016, 数三) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim N(1,2)$,$Y \sim N(1,4)$, 则 $D(XY) =$

$$(A)\ 6 \quad (B)\ 8 \quad (C)\ 14 \quad (D)\ 15$$

Solution. 【详解】 □

3. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 则 $E\left(\frac{X+Y}{2}\right)$ =?.

Solution. 【详解】 □

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim P(\lambda_1)$,$Y \sim P(\lambda_2)$, 且 $P\{X+Y>0\} = 1-e^{-1}$, 则 $E(X+Y)^2$ =?.

Solution. 【详解】 □

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim E(\lambda)$,$Y \sim E\left(\frac{1}{6}\right)$, 若 $U = \max\{X,Y\}$,$V = \min\{X,Y\}$, 则 EU =?,EV =?.

Solution. 【详解】 □

6. (2017, 数一) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 EX =?.

Solution. 【详解】 □

7. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $E|X|$ =?,$D|X|$ =?.

Solution. 【详解】 □

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E[\max\{X,Y\}]$,$E[\min\{X,Y\}]$.

Solution. 【详解】 □

9. 设独立重复的射击每次命中的概率为 p,X 表示第 n 次命中时的射击次数, 求 EX,DX.

Solution. 【详解】 □

10. (2015, 数一、三) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, 对 X 进行独立的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数。

    (a) 求 Y 的概率分布;

    (b) 求 EY.

Solution. 【详解】 □

1.4.2 协方差的计算

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。若 $DX=4$, 正整数 $s \leq n$,$t \leq n$, 则

$$\operatorname{Cov}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=$$

$$(A)\ 4\max\{s,t\} \quad (B)\ 4\min\{s,t\} \quad (C)\ \frac{4}{\max\{s,t\}} \quad (D)\ \frac{4}{\min\{s,t\}}$$

Solution. 【详解】 □

12. (2005, 数三) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$。记 $Y_i = X_i - \bar{X}$,$i=1,2,\cdots,n$。

    (a) 求 Y_i 的方差 DY_i,$i=1,2,\cdots,n$;

    (b) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c.

Solution. 【详解】 □

1.4.3 相关系数的计算

13. (2016, 数一) 设试验有三个两两互不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三个结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$。将试验独立重复地做两次,X 表示两次试验中 A_1 发生的次数,Y 表示两次试验中 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ -\frac{1}{2} \quad (B)\ -\frac{1}{3} \quad (C)\ \frac{1}{3} \quad (D)\ \frac{1}{2}$$

Solution. 【详解】 □

14. 设随机变量 $X \sim B\left(1, \frac{3}{4}\right)$,$Y \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

    (a) 求 (X, Y) 的联合概率分布;

    (b) 求 $P\{Y=1|X=1\}$.

Solution. 【详解】 □

1.4.4 相关与独立的判定

15. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le a^2\}$ 上的均匀分布, 则

$$(A)\ X\ Y\quad ,$$

$$(B)\ X\ Y$$

$$(C)\ X\ Y$$

$$(D)\ X\ Y\quad U(-a,a)$$

Solution. 【详解】 □

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty < x < +\infty$。

    (a) 求 X 的期望与方差;

    (b) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

    (c) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 并说明理由.

Solution. 【详解】 □

1.5 第五章大数定律与中心极限定理

1. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,$\mu_k = E(X_i^k)(k=1,2,3,4)$。由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu_2\right| \ge \varepsilon\right\} \le$$

$$(A)\ \frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}\quad (B)\ \frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}\quad (C)\ \frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}\quad (D)\ \frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

Solution. 【详解】 □

2. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,X_i 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于?.

Solution. 【详解】 □

3. (2020, 数一) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数。利用中心极限定理得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为

$$(A)\ 1-\Phi(1) \quad (B)\ \Phi(1) \quad (C)\ 1-\Phi(0.2) \quad (D)\ \Phi(0.2)$$

Solution. 【详解】 □

1.6 第六章统计初步

1.6.1 求统计量的抽样分布

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n)$,$Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$, 则 $P\{Y>c^2\}=$

$$(A)\ \alpha \quad (B)\ 1-\alpha \quad (C)\ 2\alpha \quad (D)\ 1-2\alpha$$

Solution. 【详解】 □

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

Solution. 【详解】 □

1.6.2 求统计量的数字特征

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\left(\bar{X}-S^2\right)^2\right]=$$

Solution. 【详解】 □

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (a) 求 $E[(\bar{X}S^2)^2]$;

   (b) 求 $D(S^2)$.

Solution. 【详解】 □

1.7 参数估计

1.7.1 求矩估计与最大似然估计

1. (2002, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

Solution. 【详解】 □

2. (2011, 数一) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (a) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

   (b) 求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}^2)$。

Solution. 【详解】 □

3. (2022, 数一、三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$,

   (a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

   (b) 求 $D(\hat{\theta})$。

Solution. 【详解】 □

1.7.2 估计量的评价标准

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(b) 问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 并说明理由。

Solution. 【详解】 $\square$