第一章　函数 极限 连续

重点题型一　函数的性态

【类型一与方法】有界性的判定

例 1 下列函数无界的是

（A）$f(x)=\frac{1}{x}\sin x, x\in(0,+\infty)$　　（B）$f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$

（C）$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$　　（D）$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt, x\in(0,2022)$

【详解】

【类型二与方法】导函数与原函数的奇偶性与周期性

例 2【2002，数二】设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是

（A）$\int_0^x f(t^2)dt$　　（B）$\int_0^x f^2(t)dt$

（C）$\int_0^x t\left[f(t)-f(-t)\right]dt$　　（D）$\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$

【详解】

重点题型二　极限的概念

例 3【2014，数三】设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有

（A）$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

（C）$a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　（D）$a_n < a + \dfrac{1}{n}$

【详解】

重点题型三　函数极限的计算

【类型一与方法】 $\dfrac{0}{0}$

例 4【2000，数二】若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

（A）0　（B）6　（C）36　（D）∞

【详解】

例 5【2002，数二】设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解，则当 $x \to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

（A）不存在　　（B）等于 1

（C）等于 2　　（D）等于 3

【详解】

【类型二与方法】$\dfrac{\infty}{\infty}$

例 6【2014，数一、数二、数三】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

【详解】

【类型三与方法】$0\cdot\infty$

例 7 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\ln(1+e^{\frac{1}{x}})=$______.

【详解】

【类型四与方法】$\infty-\infty$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

【详解】

【类型五与方法】0^0 与 ∞^0

例 9【2010，数三】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【详解】

【类型六与方法】 1^{∞}

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,n\in N)$.

【详解】

重点题型四　已知极限反求参数

【方法】

例 11【1998，数二】确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_{b}^{x}\dfrac{\ln(1+t^{3})}{t}dt}=c(c\neq 0)$.

【详解】

重点题型五　无穷小阶的比较

【方法】

例 12【2002，数二】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$， $f'(0)\neq 0$， $f''(0)\neq 0$.证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，

$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

【详解】

例 13【2006，数二】试确定 A， B， C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

【详解】

例 14【2013，数二、数三】当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

【详解】

重点题型六　数列极限的计算

【方法】

例 15【2011，数一、数二】（I）证明：对任意正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$；

（II）设 $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【详解】

例 16【2018，数一、数二、数三】设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0$，$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1,2,\cdots)$.证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【详解】

例 17【2019，数一、数三】设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（I）证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

（II）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

【详解】

例 18【2017，数一、数二、数三】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

【详解】

重点题型七　间断点的判定

例 19【2000，数二】设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足

（A）$a<0$，$b<0$　　（B）$a>0$，$b>0$

（C）$a\le 0$，$b>0$　　（D）$a\ge 0$，$b<0$

【详解】

第二章　一元函数微分学

重点题型一　导数与微分的概念

例 1【2000，数三】设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

（A）$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　（B）$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

（C）$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　（D）$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

【详解】

例 2【2001，数一】设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

【详解】

例 3【2016，数一】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$，则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

【详解】

重点题型二　导数与微分的计算

【类型一与方法】分段函数

例 4【1997，数一、数二】设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【详解】

【类型二与方法】复合函数

例 5【2012，数三】设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\ge 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$________.

【详解】

【类型三与方法】隐函数

例 6【2007，数二】已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

【详解】

【类型四与方法】反函数

例 7【2003，数一、数二】设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（I）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（II）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

【详解】

【类型五与方法】参数方程

例 8【2008，数二】设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【详解】

【类型六与方法】高阶导数

例 9【2015，数二】函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$__________.

【详解】

重点题型三　导数应用求切线与法线

【类型一与方法】直角坐标 $y=f(x)$ 表示的曲线

例 10【2000，数二】已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个领域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

【详解】

【类型二与方法】参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 表示的曲线

例 11 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

【详解】

【类型三与方法】极坐标$r=r(\theta)$表示的曲线

例 12【1997，数一】对数螺线$r=e^{\theta}$在点$\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程为__________.

【详解】

重点题型四　导数应用求渐近线

【方法】

例 13【2014，数一、数二、数三】下列曲线中有渐近线的是

（A）$y=x+\sin x$　（B）$y=x^2+\sin x$

（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　（D）$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

【详解】

例 14【2007，数一、数二、数三】曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

【详解】

重点题型五　导数应用求曲率

【方法】（数一、数二掌握，数三大纲不要求）

例 15【2014，数二】曲线$\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　　（C）$10\sqrt{10}$　　（D）$5\sqrt{10}$

【详解】

重点题型六　导数经济应用

【方法】（数三掌握，数一、数二大纲不要求）

例 16【2015，数三】为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型.设Q为该商品的需求量，p为价格，MC为边际成本，η为需求弹性（$\eta>0$）.

（I）证明定价模型为$p=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

（II）若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为$Q=40-p$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格.

【详解】

重点题型七 导数应用求极值与最值

【方法】

例 17【2000，数二】设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【详解】

例 18【2010，数一、数二】求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

【详解】

例 19【2014，数二】已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

【详解】

重点题型八 导数应用求凹凸性与拐点

【方法】

例 20【2011，数一】曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

（A）（1，0） （B）（2，0） （C）（3，0） （D）（4，0）

【详解】

重点题型九 导数应用证明不等式

【方法】

例 21【2017，数一、数三】设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则

（A）$f(1)>f(-1)$ （B）$f(1)<f(-1)$

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$ （D）$|f(1)|<|f(-1)|$

【详解】

例 22【2015，数二】已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上具有二阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$．设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$．

【详解】

重点题型十　导数应用求方程的根

【方法】

例 23【2003，数二】讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

【详解】

例 24【2015，数二】已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 零点的个数.

【详解】

重点题型十一　微分中值定理证明题

【类型一与方法】证明含有ξ一个点的等式

例 25【2013，数一、数二**】**设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$.证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

（II）存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【详解】

例 26 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(1)=0$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

【详解】

【类型二与方法】证明含有ξ,η两个点的等式

例 27 设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.证明：

（I）存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$；

（II）存在$\xi,\eta\in(0,1)$，使得$\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$.

【详解】

【类型三与方法】证明含有高阶导数的等式或不等式

例 28【2019，数二】已知函数$f(x)$在$\left[0,1\right]$上具有2阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$.

证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$；

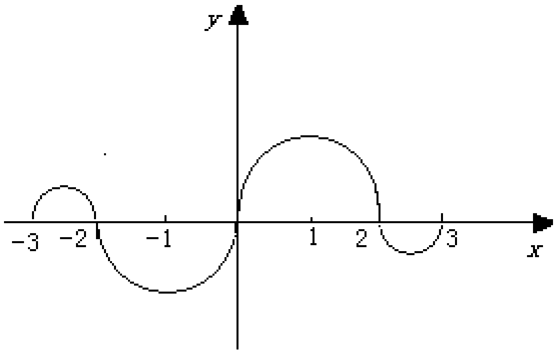
（II）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

【详解】

第三章　一元函数积分学

重点题型一　定积分的概念

例 1【2007，数一、数二、数三】如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周.



设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是

（A）$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　（B）$F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

（C）$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　（D）$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

【详解】

例 2【2009，数三】使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt>\ln x$ 成立的 x 的范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　（C）$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　（D）$(\pi,+\infty)$

【详解】

例 3【2003，数二】设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$，则

（A）$I_1>I_2>1$　　　　（B）$1>I_1>I_2$

（C）$I_2>I_1>1$　　　　（D）$1>I_2>I_1$

【详解】

重点题型二　不定积分的计算

【方法】

例 4 计算下列积分：（1）$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；（2）$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

【详解】

例 5【2009，数二、数三】计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx(x>0)$.

【详解】

例 6 求$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.

【详解】

重点题型三　定积分的计算

【与方法】

例 7【2013，数一】计算$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中$f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

【详解】

例 8 求下列积分（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx$；（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx$.

【详解】

例 9 求$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$.

【详解】

重点题型四　反常积分的计算

【方法】

例 10【1998，数二】计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

【详解】

重点题型五　反常积分敛散性的判定

【方法】

例 11【2016，数一】若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛，则

（A）$a<1$ 且 $b>1$　　（B）$a>1$ 且 $b>1$

（C）$a<1$ 且 $a+b>1$　　（D）$a>1$ 且 $a+b>1$

【详解】

例 12【2010，数一、数二】设 m,n 均为正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

（A）仅与 m 的取值有关　　（B）仅与 n 的取值有关

（C）与 m,n 的取值都有关　　（D）与 m,n 的取值都无关

【详解】

重点题型六　变限积分函数

例 13【2013，数二】设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x<\pi \\ 2, \quad \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

【详解】

例 14【2016，数二】已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$.

（I）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；

（II）证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

【详解】

重点题型七　定积分应用求面积

【方法】

例 15【2019，数一、数二、数三】求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【详解】

重点题型八　定积分应用求体积

【方法】

例 16【2003，数一】过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（I）求 D 的面积 A；

（II）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

【详解】

例 17【2014，数二】 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

【详解】

重点题型九　定积分应用求弧长

【方法】（数一、数二掌握，数三大纲不要求）

例 18 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的全长.

【详解】

重点题型十　定积分应用求侧面积

【方法】（数一、数二掌握，数三大纲不要求）

例 19【2016，数二】设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

【详解】

重点题型十一　定积分物理应用

【方法】（数一、数二掌握，数三大纲不要求）

例 20【2020，数二】设边长为$2a$等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为g，水密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为__________.

【详解】

重点题型十二　证明含有积分的等式或不等式

【方法】

例 21【2000，数二】设函数$S(x)=\int_0^x |\cos t| dt$.

（I）当n为正整数，且$n\pi \le x<(n+1)\pi$时，证明$2n\le S(x)<2(n+1)$；

（II）求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【详解】

例 22【2014，数二、数三】设函数$f(x)$，$g(x)$在区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f(x)$单调增加，$0\le g(x)\le 1$.

证明：

（I）$0\le \int_a^x g(t)dt \le x-a, x\in\left[a,b\right]$；

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

【详解】

第四章　常微分方程

重点题型一　一阶微分方程

【类型一与方法】可分离变量

例 1【1998，数一、数二**】**已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于

（A）2π　　（B）π　　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$　　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

【详解】

例 2【2002，数二**】**已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

【详解】

【类型二与方法】一阶齐次

例 3【1999，数二**】**求初值问题 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0(x>0)\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

【详解】

【类型三与方法】一阶线性

例 4【2010，数二、数三】设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解.若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

（A）$\lambda = \frac{1}{2}$，$\mu = \frac{1}{2}$　　（B）$\lambda = -\frac{1}{2}$，$\mu = -\frac{1}{2}$

（C）$\lambda = \frac{2}{3}$，$\mu = \frac{1}{3}$　　（D）$\lambda = \frac{2}{3}$，$\mu = \frac{2}{3}$

【详解】

例 5【2018，数一】已知微分方程 $y' + y = f(x)$，其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

（I）若 $f(x) = x$，求方程的通解；

（II）若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

【类型四与方法】伯努利方程（数一掌握，数二、数三大纲不要求）

例 6 求解微分方程 $y' - \frac{4}{x} y = x^2 \sqrt{y}$.

【详解】 令 $z = \sqrt{y}$ ，则 $z' - \frac{2}{x} z = \frac{1}{2} x^2$ ，得

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \frac{1}{2} x^2 e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x^2 \left(\frac{1}{2} x + C \right)$$

方程的通解为 $\sqrt{y} = \frac{1}{2} x^3 + C x^2$ ，其中 C 为任意常数.

【类型五与方法】全微分方程（数一掌握，数二、数三大纲不要求）

例 7 求解下列微分方程：

（1）$(2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2 e^y - 2y)dy = 0$ ；

（2）$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$.

【详解】（1）法一：设 $P(x,y) = 2xe^y + 3x^2 - 1$ ，$Q(x,y) = x^2 e^y - 2y$ ，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，方程为全微分方程.

设存在 $u(x,y)$ ，使得 $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ，得

$$u(x,y) = \int (2xe^y + 3x^2 - 1)dx = x^2 e^y + x^3 - x + \varphi(y)$$

由 $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 e^y + \varphi'(y)$ ，得 $\varphi'(y) = -2y$ ， $\varphi(y) = -y^2$ ，方程的通解为

$x^2 e^y + x^3 - x - y^2 = C$.

法二：由

$$\begin{aligned}
&(2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2 e^y - 2y)dy = (2xe^y dx + x^2 e^y dy) + (3x^2 - 1)dx + (-2y)dy \\
&= d(x^2 e^y) + d(x^3 - x) + d(-y^2) = d(x^2 e^y + x^3 - x - y^2) = 0
\end{aligned}$$

得 $x^2 e^y + x^3 - x - y^2 = C$.

（2）设 $P(x,y)=\dfrac{2x}{y^3}$，$Q(x,y)=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

当 $y\neq 0$ 时，方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x 2xdx+\int_1^y \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=x^2-\frac{1}{y}+1+\frac{x^2}{y^3}-x^2=C$$

方程的通解为 $x^2-y^2+y^3=Cy^3$.

重点题型二　二阶常系数线性微分方程

【方法】

例 8【2017，数二】 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

（A）$Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　（B）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（C）$Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　（D）$Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

【详解】

例 9【2015，数一】 设 $y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解，则

（A）$a=-3$，$b=2$，$c=-1$　（B）$a=3$，$b=2$，$c=-1$

（C）$a=-3$，$b=2$，$c=1$　（D）$a=3$，$b=2$，$c=1$

【详解】

例 10【2016，数二】已知 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解.若 $u(-1)=e$，$u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解.

【详解】

例 11【2016，数一】设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（I）证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛；

（II）若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

【详解】

重点题型三　高阶常系数线性齐次微分方程

【方法】

例 12 求解微分方程 $y^{(4)}-3y''-4y=0$.

【详解】

重点题型四　二阶可降阶微分方程

【方法】（数一、数二掌握，数三大纲不要求）

例 13 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

【详解】 本题不含 y，令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化简为 $p'(x+p^2)=p$，转化为反函数

$\dfrac{dx}{dp}-\dfrac{1}{p}x=p$，得 $x=e^{\int\frac{dp}{p}}\left(\int e^{-\int\frac{dp}{p}}pdp+C\right)=p(p+C)$.

由 $p(1)=y'(1)=1$，得 $C=0$，从而 $x=p^2$，于是 $y'=\sqrt{x}$，得 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$.

由 $y(1)=1$，得 $C_1=\dfrac{1}{3}$，故 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

重点题型五　欧拉方程

【方法】（数一掌握，数二、数三大纲不要求）

例 14 求解微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$.

【详解】 令 $x=e^t$，原方程转化为 $D(D-1)y+Dy+y=2\sin t$，即 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$.

特征方程为 $r^2+1=0$，得 $\lambda=\pm i$，齐次方程的通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$.

令 $y^*=t(A\cos t+B\sin t)$，代入方程，得 $A=-1$，$B=0$，故 $y^*=-t\cos t$.

因此原方程的通解为 $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x-\ln x\cdot\cos\ln x$.

重点题型六　差分方程

【方法】（数三掌握，数一、数二大纲不要求）

例 15【1997，数三】差分方程 $y_{t+1}-y_t=t\cdot 2^t$ 的通解为__________.

【详解】齐次方程的通解为 $y_t=C$.

令 $y_t^*=(At+B)2^t$，代入方程，得 $A=1$，$B=-2$，故 $y_t^*=(t-2)2^t$.

因此原方程的通解为 $y_t=C+(t-2)2^t$.

例 16【2018，数三】差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的通解为__________.

【详解】

$$\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=\Delta(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-y_{x+1}-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$$

原方程化简为 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$，转化为 $y_{x+1}-2y_x=5$.齐次方程的通解为 $y_x=C2^x$.

令 $y_x^*=A$，代入方程，得 $A=-5$，故 $y_x^*=-5$.因此原方程的通解为 $y_x=C2^x-5$.

重点题型七　变量代换求解二阶变系数线性微分方程

例 17【2005，数二】用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解.

【详解】

重点题型八　微分方程综合题

【类型一】综合导数应用

例 18【2001，数二】设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，求曲线 L 的方程.

【详解】

【类型二】综合定积分应用

例 19【2009，数三】设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

【详解】

【类型三】综合变限积分

例 20【2016，数三】设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$，求 $f(x)$.

【详解】

【类型四】综合多元复合函数

例 21【2014，数一、数二、数三】设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【详解】

【类型五】综合重积分

例 22【2011，数三】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint_{D_t} f(t)dxdy$$

其中 $D_t=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le t-x,0\le x\le t\right\}(0<t\le1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

【详解】

第五章　多元函数微分学

重点题型一　多元函数的概念

【方法】

例 1 求下列重极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2}$ $(\alpha\geq 0,\beta\geq 0)$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【详解】

例 2【2012，数一】如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【详解】

例 3【2012，数三】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$__________.

【详解】

重点题型二　多元复合函数求偏导数与全微分

【方法】

例 4【2021，数一、数二、数三】设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$　　（B）$dx-dy$　　（C）dy　　（D）$-dy$

【详解】

例 5【2011，数一、数二】设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\ y=1}}$.

【详解】

重点题型三　多元隐函数求偏导数与全微分

【方法】

例 6【2005，数一】设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程

（A）只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$

（B）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$

（C）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$

（D）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

【详解】

例 7【1999，数一】设 $y = y(x)$，$z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

【详解】

重点题型四　变量代换化简偏微分方程

【方法】

例 8【2010，数二】设函数 $u = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi = x + ay$，$\eta = x + by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

【详解】

重点题型五　求无条件极值

【方法】

例 9【2003，数一】已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

（D）根据所给条件无法判别点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

【详解】

例 10【2004，数一】设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

【详解】

重点题型六　求条件极值(边界最值)

【方法】

例 11【2006，数一、数二、数三】设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

【详解】

例 12【2013，数二】求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

【详解】

重点题型七　求闭区域最值

【方法】

例 13【2014，数二】设函数$u(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D的内部具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则

（A）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

（B）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

（C）$u(x,y)$的最大值在D的内部取得，最小值在D的边界上取得

（D）$u(x,y)$的最小值在D的内部取得，最大值在D的边界上取得

【详解】

例 14【2005，数二】已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$，且$f(1,1)=2$，求$f(x,y)$在椭圆域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$上的最大值和最小值.

【详解】

第六章　二重积分

重点题型一　二重积分的概念

例 1【2010，数一、数二】$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　（D）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

【详解】

例 2【2016，数三】设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$，则

（A）$J_1<J_2<J_3$　　（B）$J_3<J_1<J_2$

（C）$J_2<J_3<J_1$　　（D）$J_2<J_1<J_3$

【详解】

重点题型二　交换积分次序

【方法】

例 3【2001，数一】交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)dx =$__________.

【详解】

例 4【2014，数三】二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$__________.

【详解】

例 5 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr$ 的积分次序__________.

【详解】

重点题型三　二重积分的计算

【方法】

例 6【2011，数一、数二】已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

【详解】

例 7 计算 $\iint\limits_{D}\sqrt{\left|y-x^{2}\right|}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,0\le y\le 2\}$.

【详解】

例 8【2018，数二】设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy$.

【详解】

例 9【2007，数二、数三】设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^{2}, & |x|+|y|\le 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}, & 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 2\}$.

【详解】

例 10【2014，数二、数三】设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

【详解】

例 11【2019，数二】已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\big||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\right\}$，计算二重积 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

【详解】

例 12【2010，数二】计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

【详解】

例 13【2009，数二、数三】计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

【详解】

第七章　无穷级数

重点题型一　数项级数敛散性的判定

【类型一与方法】正项级数

例 1【2015，数三】下列级数中发散的是

（A）$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

【详解】

例 2【2017，数三】若级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$收敛，则$k=$

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

【详解】

【类型二与方法】交错级数

例 3 判定下列级数的剑散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$　　（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n}}$.

【详解】

【类型三与方法】任意项级数

例 4【2002，数一】 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

（A）发散　　（B）绝对收敛

（C）条件收敛　　（D）敛散性根据所给条件不能判定

【详解】

例 5【2019，数三】 若 $\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 条件收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散

【详解】

重点题型二　幂级数求收敛半径与收敛域

【方法】

例 6【2015，数一】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

（A）收敛点，收敛点　　（B）收敛点，发散点

（C）发散点，收敛点　　（D）发散点，发散点

【详解】

例 7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$ 的收敛域.

【详解】

重点题型三　幂级数求和

【方法】

例 8【2005，数一】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数$f(x)$.

【详解】

例 9【2012，数一】求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

【详解】

例 10【2004，数三】设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为$S(x)$.求：

（I）$S(x)$所满足的一阶微分方程；

（II）$S(x)$的表达式.

【详解】

重点题型四　幂级数展开

【方法】

例 11【2007，数三】将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

【详解】

例 12 将函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

【详解】

重点题型五　无穷级数证明题

例 13【2016，数一】已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$.设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$.证明：

（I）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

【详解】

例 14【2014，数一】设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

（I）证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；

（II）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

【详解】

重点题型六　傅里叶级数

【方法】（数一掌握，数三大纲不要求）

（1）设$f(x)$在$[-l,l]$可积，则傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx(n=0,1,2,\cdots)，\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

（2）狄利克雷收敛定理

设$f(x)$在$[-l,l]$上满足条件：

①除有限个第一类间断点外都连续；②只有有限个极值点

则$f(x)$的傅里叶级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，其和函数$S(x)$是以$2l$为周期的周期函数，在$[-l,l]$的表达式为

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{是}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{是}f(x)\text{的第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l \end{cases}$$

例 15 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, -\pi\le x<0 \\ 1,\ 0\le x<\pi \end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于__________，在 $x=2\pi$ 收敛于__________.

【详解】

由狄利克雷收敛定理知 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于

$$S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

在 $x=2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

例 16 将 $f(x)=1-x^{2},0\le x\le\pi$，展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}}$ 的和.

【详解】

对 $f(x)=1-x^{2}$ 进行偶延拓，由 $f(x)=1-x^{2}$ 为偶函数，知 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx dx=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$，代入上式，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

第八章　多元函数积分学

重点题型一　三重积分的计算

【方法】

例 1【2013，数一】设直线L过$A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$两点，将L绕z轴旋转一周得到曲面Σ，Σ与平面$z=0$，$z=2$所围成的立体为Ω.

（I）求曲面Σ的方程；

（II）求Ω的形心坐标.

【详解】

例 2【2019，数一】设Ω是由锥面在$x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$与平面$z=0$围成的锥体，求$\Omega$的形心坐标.

【详解】

重点题型二　第一类曲线积分的计算

【方法】

例 3【2018，数一】设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds=$__________.

【详解】

例 4 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

【详解】

重点题型三　第二类曲线积分的计算

【类型一与方法】平面第二类曲线积分

例 5【2021，数一】设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

（I）求 $I(D_1)$ 的值；

（II）计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【详解】

【类型二与方法】空间第二类曲线积分

例 6【2011，数一】 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$__________.

【详解】

重点题型四　第一类曲面积分的计算

【方法】

例 7【2010，数一】 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点.若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【详解】

重点题型五　第二类曲面积分的计算

【方法】

例 8【2009，数一】计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

【详解】

例 9 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

【详解】

例 10【2020，数一】设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy$$

【详解】