第一章　高等数学第二讲

Example 1.0.1. (莫斯科 1975 年竞赛题) 证明数列 $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\cdots$ 收敛，并求其极限。

Example 1.0.2. 设 $f(x)=x+\ln(2-x)$.

(I) 求 $f(x)$ 的最大值;

(II) 若 $x_1=\ln 2, x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

Example 1.0.3. (1) 设 $x_1>-6, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

(2) (南京大学 2000 年, 武汉大学 2004 年, 天津大学 2004 年, 浙江大学 2007 年) 设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}(n=1,2,\cdots)$，其中 $c>1$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

Example 1.0.4. 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{(1+1)^n+\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)+\sqrt{n^2+1}+\cdots+\sqrt[n]{n^n+1}}$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$.

Example 1.0.5. 求下列极限:

(1) (莫斯科 1976 年竞赛题) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n^2}\right)$.

(3) (第十一届中国大学生数学竞赛题,2020 年) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$.

Example 1.0.6. (1) 证明：当 $x>0$ 时，$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$.

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$.

Example 1.0.7. (1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\ln n}[e^x]\,dx$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

Example 1.0.8. 【例 1.22】求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{(2i-1)\pi}{4n}\cdot\frac{1}{n}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{(3i-1)\pi}{6n}\cdot\frac{1}{n}$.

(3) (浙江省高等数学竞赛题,2013 年) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-\sin^2 i}{n^2}\left[\ln\left(n+i-\sin^2 i\right)-\ln n\right]$.

Example 1.0.9. (浙江省高等数学竞赛题,2009 年) 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{2n}\frac{n}{i(n+i)}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{n}{i(n+i)}$.