第一章　事件与概率

重点题型一　事件的关系、运算与概率的性质

【事件的运算律】

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$；

（3）分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$，$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；

（4）摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

（5）吸收律　$A\cup(AB)=A$，$A(A\cup B)=A$.

【例 1.1】 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(A\cup B)=1$，则【　】

（A）$A\cup B=\Omega$　（B）$AB=\varnothing$　（C）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$　（D）$P(A-B)=0$

【详解】

【例 1.2】（2020，数一、三）设 A,B,C 为随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 A,B,C 只有一个事件发生的概率为【　】

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{5}{12}$

【详解】

【例 1.3】 设随机事件 A,B 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|\overline{B})+P(B|\overline{A})=$ __________.

【详解】

【例 1.4】设随机事件 A,B,C 两两独立，满足 $ABC=\varnothing$，且 $P(A)=P(B)=P(C)$，A,B,C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$__________.

【详解】

【例 1.5】设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{2}{5}$，则 $P(A|B)+P(B|A)$ 的最大值为__________，最小值为__________.

【详解】

重点题型二　三大概型的计算

【方法】

【例 1.6】（2016，数三）设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到为止，则取球次数恰好为 4 的概率为__________.

【详解】

【例 1.7】在区间 $(0,a)$ 中随机地取两个数，则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为__________.

【详解】

【例 1.8】设独立重复的试验每次成功的概率为 p，则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为__________.

【详解】

重点题型三　三大概率公式的计算

【三大概率公式】

条件概率公式　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

推论　$P(AB)=P(B)P(A|B)$，$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

全概率公式　$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式　$P(B_j|A)=\dfrac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

【例 1.9】 设 A,B 为随机事件，且 $P(A\cup B)=0.6$，$P(B|\overline{A})=0.2$，则 $P(A)=$_________.

【详解】

【例 1.10】（2018，数一）设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，满足 $BC=\varnothing$，且 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$_________.

【详解】

【例 1.11】（2003，数一）设甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱，

（I）求乙箱中次品件数 X 的数学期望；

（II）求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【详解】

重点题型四　事件独立的判定

【事件独立的充要条件】

事件 A 与 B 相互独立

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(A|\overline{B})=P(A)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B})(0<P(B)<1)$

$\Leftrightarrow$ A 与 $\overline{B}$ 或 $\overline{A}$ 与 B 或 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立

$\Leftrightarrow P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1(0<P(B)<1)$

【例 1.12】 设 A,B 为随机事件，且 $0<P(A)<1$，则【　　】

（A）若 $A\supset B$，则 A,B 一定不相互独立　　（B）若 $B\supset A$，则 A,B 一定不相互独立

（C）若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定不相互独立　　（D）若 $A=\overline{B}$，则 A,B 一定不相互独立

【详解】

【例 1.13】 设 A,B,C 为随机事件，A 与 B 相互独立，且 $P(C)=0$，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$【　　】

（A）相互独立　　（B）两两独立，但不一定相互独立

（C）不一定两两独立　　（D）一定不两两独立

【详解】

第二章　一维随机变量

重点题型一　分布函数的判定与计算

【分布函数的性质】

（1）$0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < +\infty$；$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；

（2）（单调不减）当 $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1) \le F(x_2)$；

（3）（右连续）$F(x+0)=F(x)$；

（4）$P\{a < X \le b\} = F(b)-F(a)$；

（5）$P\{X < x\} = F(x-0)$，$P\{X = x\} = F(x)-F(x-0)$.

【例 2.1】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，a,b 为任意常数，则下列一定不是分布函数的是【　　】

（A）$F(ax+b)$　　（B）$F(ax^2+b)$　　（C）$F(ax^3+b)$　　（D）$1-F(-x)$

【详解】

【例 2.2】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 X 的分布函数 $F(x)=$________，

$P\left\{-2 < X < \dfrac{1}{4}\right\} =$________.

【详解】

重点题型二　概率密度的判定与计算

【概率密度的性质】

（1）$f(x)\ge 0,-\infty<x<+\infty$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$；

（3）$P\{a<X\le b\}=\int_a^b f(x)dx$；

推广　$P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a\le X\le b\}=P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$；

（4）在 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x)=f(x)$.

【例 2.3】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则下列必为概率密度的是【　】

（A）$f(-x+1)$　（B）$f(2x-1)$　（C）$f(-2x+1)$　（D）$f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

【详解】

【例 2.4】（2011，数一、三）设 $F_1(x),F_2(x)$ 为分布函数，对应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 为连续函数，则下列必为概率密度的是【　】

（A）$f_1(x)f_2(x)$　（B）$2f_2(x)F_1(x)$　（C）$f_1(x)F_2(x)$　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【详解】

【例 2.5】（2000，三）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3},x\in[0,1]\\ \frac{2}{9},x\in[3,6]\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

若 $P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是__________.

【详解】

重点题型三　关于八大分布

【八大分布】

（1）0－1 分布　$X \sim B(1,p)$　$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$

（2）二项分布　$X \sim B(n,p)$　$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots n$

（3）泊松分布　$X \sim P(\lambda)$　$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(\lambda>0), k=0,1,\cdots$

（4）几何分布　$X \sim G(p)$　$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots$

（5）超几何分布　$X \sim H(N,M,n)$　$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,\cdots,\min(n,M)$

（6）均匀分布　$X \sim U(a,b)$　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b \\ 1, & x\ge b\end{cases}$

（7）指数分布　$X \sim E(\lambda)$　$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}(\lambda>0)$，$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$

（8）一般正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$F(u)=\dfrac{1}{2}$，$F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

标准正态分布　$X \sim N(0,1)$　$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

正态分布的标准化　若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

【例 2.6】 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C\dfrac{\lambda^k}{k!}, k=1,2,\cdots$，则 $C=$__________.

【详解】

【例 2.7】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}$，且 $EX=DX$，则 $A=$__________，$B=$ __________.

【详解】

【例 2.8】（2004，数一、三）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$.若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于【　】

（A）$u_{\frac{\alpha}{2}}$　（B）$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　（C）$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　（D）$u_{1-\alpha}$

【详解】

【例 2.9】 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$__________.

【详解】

【例 2.10】 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu<0)$，$F(x)$ 为其分布函数，a 为任意常数，则【　】

（A）$F(a)+F(-a)>1$　（B）$F(a)+F(-a)=1$

（C）$F(a)+F(-a)<1$　（D）$F(\mu+a)+F(\mu-a)=\frac{1}{2}$

【详解】

【例 2.11】设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从参数为 1 的指数分布，则 $P\left\{1<\max\left\{X,Y\right\}<2\right\}=$ ________.

【详解】

【例 2.12】设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从区间 $\left[0,3\right]$ 上的均匀分布，则 $P\left\{1<\min\left\{X,Y\right\}<2\right\}=$ ________.

【详解】

【例 2.13】（2013，数一）设随机变量 $Y\sim E(1)$， $a>0$，则 $P\left\{Y\le a+1\mid Y>a\right\}=$ ________.

【详解】

【例 2.14】设随机变量 $X\sim G(p)$， m,n 为正整数，则 $P\left\{X>m+n\mid X>m\right\}$【　】

（A）与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而减少

（B）与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而增大

（C）与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而减少

（D）与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而增大

【详解】

重点题型四　求一维连续型随机变量函数的分布

【方法】设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，求 $Y=g(X)$ 的分布.

分布函数法

（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$.

（2）求 $Y=g(X)$ 在 X 的正概率密度区间的值域 (α,β)，讨论 y.

当 $y<\alpha$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $\alpha\le y<\beta$ 时，$F_Y(y)=\int\limits_{g(x)\le y} f_X(x)dx$；

当 $y\ge\beta$ 时，$F_Y(y)=1$.

（3）若 Y 为连续型随机变量，则 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

公式法　设 $y=g(x)$ 在 X 的正概率密度区间单调，值域为 (α,β)，反函数为 $x=h(y)$，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, \alpha<y<\beta \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$$

若 $y=g(x)$ 在 X 的正概率密度区间 $[a,b]$ 分段严格单调，则分段运用公式法，然后将概率密度相加.

【例 2.15】设随机变量 $X\sim E(\lambda)$，则 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数【　　】

（A）为连续函数　　（B）为阶梯函数

（B）至少有两个间断点　　（D）恰好有一个间断点

【详解】

【例 2.16】（2013，数一）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}x^2,0<x<3\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，$Y=\begin{cases}2,X\le 1\\ X,1<X<2\\ 1,X\ge 2\end{cases}$.

（I）求 Y 的分布函数；

（II）求 $P\{X\le Y\}$.

【详解】

【例 2.17】（2021，数一、三）在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y.若 $Z=\frac{Y}{X}$，

（I）求 X 的概率密度；

（II）求 Z 的概率密度；

（III）求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【详解】

第三章　二维随机变量

重点题型一　联合分布函数的计算

【联合分布函数的性质】

（1）$0 \le F(x,y) \le 1, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$，$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$，

$F(+\infty,+\infty) = 1$；

（2）$F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减；

（3）$F(x,y)$ 关于 x 和 y 均右连续；

（4）$P\left\{a < X \le b, c < Y \le d\right\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

【例 3.1】设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim B(1,p)$，$Y \sim E(\lambda)$，则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =$ __________.

【详解】

重点题型二　二维离散型随机变量分布的计算

【方法】

【例 3.2】设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从参数为 p 的几何分布.

（I）求在 $X+Y=n(n \ge 2)$ 的条件下，X 的条件概率分布；

（II）求 $P\left\{X+Y \ge n\right\}(n \ge 2)$.

【详解】

重点题型三　二维连续型随机变量分布的计算

【方法】

联合概率密度的性质

（1）$f(x,y)\geq 0,-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$；

（3）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$；

（4）在 $f(x,y)$ 的连续点处有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

边缘概率密度

(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

条件概率密度

在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度　$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度　$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

【例 3.3】（2010，数一、三）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

【详解】

【例 3.4】设随机变量 $X\sim U(0,1)$，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 $Y\sim U(x,1)$.

（I）求 (X,Y) 的联合概率密度；

（II）求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

（III）求 $P\{X+Y>1\}$.

【详解】

重点题型四　关于二维正态分布

二维正态分布的性质　设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则

（1）$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，反之不成立；

（2）X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关 $(\rho=0)$；

（3）$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$；

特别地，若 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则

$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$；

（4）若 $U=aX+bY$，$V=cX+dY$，即 $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，则 (U,V) 服从二维正态分布

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq 0$.

【例 3.5】设二维随机变量 $(X,Y)\sim N\left(1,2;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，且 $P\{aX+bY\le 1\}=\frac{1}{2}$，则 (a,b) 可以为【　】

（A）$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$　　（B）$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$　　（C）$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　（D）$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

【详解】

【例 3.6】（2020，数三）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是【　】

（A）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

【详解】

【例 3.7】（2022，数一）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，在 $X=x$ 的条件下，随机变量 $Y\sim N(x,1)$，则 X 与 Y 的相关系数为【　】

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【详解】

重点题型五　求二维离散型随机变量函数的分布

【例 3.8】设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

【详解】

重点题型六　求二维连续型随机变量函数的分布

【方法】设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，求$Z=g(X,Y)$的概率密度$f_Z(z)$.

分布函数法

（1）设Z的分布函数为$F_Z(z)$，则$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$.

（2）求$Z=g(X,Y)$在(X,Y)的正概率密度区域的值域(α,β)，讨论z.

当$z<\alpha$时，$F_Z(z)=0$；

当$\alpha\le z<\beta$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$；

当$z\ge\beta$时，$F_Z(z)=1$.

（3）Z的概率密度为$f_Z(z)=F_Z'(z)$.

卷积公式

（1）设$Z=aX+bY$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|b|}f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$；

（2）设$Z=XY$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$；

（3）设$Z=\frac{Y}{X}$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$；设$Z=\frac{X}{Y}$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy$.

【例 3.9】设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x\\0,其他\end{cases}$，求：

（I）(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$；

（II）(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；

（III）条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y),f_{Y|X}(y\mid x)$；

（IV）$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}$，$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$；

（V）$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

【详解】

重点题型七　求一离散一连续随机变量函数的分布

【方法】

【例 3.10】（2020，数一）设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\left\{X_3=0\right\}=P\left\{X_3=1\right\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（I）求 (X_1,Y) 的联合分布函数（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）；

（II）证明 Y 服从标准正态分布.

【详解】

第四章　数字特征

重点题型一　期望与方差的计算

【方法】

期望的定义

（1）设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$，则 $EX=\sum_i x_i p_i$；

推广　若 $Y=g(X)$，则 $EY=\sum_i g(x_i)p_i$；

（2）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$；

推广　若 $Y=g(X)$，则 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$；

（3）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$，$Z=g(X,Y)$，则 $EZ=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$；

（4）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，$Z=g(X,Y)$，则

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

特别地，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$.

期望的性质

（1）$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$；

（2）$E(XY)=EX\cdot EY \Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关；

特别地，若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=EX\cdot EY$.

方差的定义

$$DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$$

方差的性质

（1） $D(aX+c)=a^2DX$；

（2） $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$；

推论 $D(X\pm Y)=DX+DY \Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关；

特别地，若 X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$；

（3）若 X 与 Y 相互独立，则 $D(XY)=DX\cdot DY+(EX)^2DY+(EY)^2DX$.

【例 4.1】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty$，则 $E\left[\min\left\{\left|X\right|,1\right\}\right]=$ __________.

【详解】

【例 4.2】（2016，数三）设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$【 】

（A）6 （B）8 （C）14 （D）15

【详解】

【例 4.3】设随机变量 X 与 Y 同分布，则 $E\left(\dfrac{X^2}{X^2+Y^2}\right)=$ __________.

【详解】

【例 4.4】设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，且 $P\left\{X+Y>0\right\}=1-e^{-1}$，则 $E(X+Y)^2=$ __________.

【详解】

【例 4.5】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim E\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$Y\sim E\left(\dfrac{1}{6}\right)$.若 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $EU=$__________，$EV=$__________.

【详解】

【例 4.6】（2017，数一）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$__________.

【详解】

【例 4.7】 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $E|X|=$__________，$D|X|=$__________.

【详解】

【例 4.8】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $E\left[\max\{X,Y\}\right]$，$E\left[\min\{X,Y\}\right]$.

【详解】

【例 4.9】设独立重复的射击每次命中的概率为 p， X 表示第 n 次命中时的射击次数，求 EX,DX .

【详解】

【例 4.10】（2015，数一、三）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（I）求 Y 的概率分布；

（II）求 EY .

【详解】

重点题型二　协方差的计算

【方法】

协方差的定义　$Cov(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]=E(XY)-EX\cdot EY$

协方差的性质

（1）$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$，$Cov(X,X)=DX$;

（2）$Cov(aX+bY+c,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$.

【例 4.11】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $DX=4$，正整数 $s\le n$，$t\le n$，则

$$Cov\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i,\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=【\quad】$$

（A）$4\max\{s,t\}$　　（B）$4\min\{s,t\}$　　（C）$\dfrac{4}{\max\{s,t\}}$　　（D）$\dfrac{4}{\min\{s,t\}}$

【详解】

【例 4.12】（2005，数三）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$.记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$.

（I）求 Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$；

（II）求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$；

（III）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

【详解】

重点题型三　相关系数的计算

【方法】

相关系数的定义　$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

相关系数的性质

（1）$|\rho_{XY}|\le 1$；

（2）$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY \Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$；

（3）$\rho_{XY}=1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$；$\rho_{XY}=-1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$.

【例 4.13】（2016，数一）设试验有三个两两互不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三个结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$.将试验独立重复地做两次，X 表示两次试验中 A_1 发生的次数，Y 表示两次试验中 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为【　　】

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{2}$

【详解】

【例 4.14】设随机变量 $X\sim B\left(1,\frac{3}{4}\right)$，$Y\sim B\left(1,\frac{1}{2}\right)$，且 $\rho_{XY}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（I）求 (X,Y) 的联合概率分布；

（II）求 $P\{Y=1|X=1\}$.

【详解】

重点题型四　相关与独立的判定

【方法】

【例 4.15】 设二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\right\}$上的均匀分布，则【　】

（A）X与Y不相关，也不相互独立　　（B）X与Y相互独立

（C）X与Y相关　　（D）X与Y均服从$U(-a,a)$

【详解】

【例 4.16】 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$.

（I）求X的期望与方差；

（II）求X与$|X|$的协方差，问X与$|X|$是否不相关？

（III）问X与$|X|$是否相互独立？并说明理由.

【详解】

第五章　大数定律与中心极限定理

【方法】

【例 5.1】（2022，数一）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，$\mu_k=EX_i^{\,k}(k=1,2,3,4)$.由切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon>0$，有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-\mu_2\right|\ge\varepsilon\right\}\le$【　　】

（A）$\frac{\mu_4-\mu_2^{\,2}}{n\varepsilon^2}$　　（B）$\frac{\mu_4-\mu_2^{\,2}}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$　　（C）$\frac{\mu_2-\mu_1^{\,2}}{n\varepsilon^2}$　　（D）$\frac{\mu_2-\mu_1^{\,2}}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$

【详解】

【例 5.2】（2022，数三）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，X_i 的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}1-|x|,|x|<1\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}$ 依概率收敛于【　　】

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{1}{6}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{2}$

【详解】

【例 5.3】（2020，数一）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数.利用中心极限定理得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$ 的近似值为【　　】

（A）$1-\Phi(1)$　　（B）$\Phi(1)$　　（C）$1-\Phi(0.2)$　　（D）$\Phi(0.2)$

【详解】

第六章　统计初步

重点题型一　求统计量的抽样分布

【方法】

χ^2分布的定义　设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，均服从$N(0,1)$，称$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记作$\chi^2\sim\chi^2(n)$.特别地，若$X\sim N(0,1)$，则$X^2\sim\chi^2(1)$.

χ^2分布的性质

（1）设χ_1^2与χ_2^2相互独立，$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，则$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$；

（2）设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则$E\chi^2=n$，$D\chi^2=2n$.

F分布的定义　设随机变量X与Y相互独立，$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，称$F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为n_1,n_2的F分布，记作$F\sim F(n_1,n_2)$.

F分布的性质

（1）设$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$；

（2）$F_{1-\alpha}(n_2,n_1)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$.

t分布的定义　设随机变量X与Y相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，称$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为n的t分布，记作$T\sim t(n)$.

t分布的性质

（1）设$T\sim t(n)$，则$T^2\sim F(1,n)$，$\dfrac{1}{T^2}\sim F(n,1)$；

（2）$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$.

单正态总体　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则

（1）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$；

（2）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，即 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

（3）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

双正态总体　设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本且相互独立，样本均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$，样本方差分别为 S_1^2,S_2^2，则

（4）$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$；

（5）$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$；

（6）当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中 $S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

【例 6.1】（2013，数一）设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$.给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$【　】

（A）α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

【详解】

【例 6.2】设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\dfrac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，求 $\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

【详解】

重点题型二　求统计量的数字特征

【方法】

【例 6.3】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]=\underline{\qquad\qquad}.$$

【详解】

【例 6.4】设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2.

（I）求 $\dfrac{9\overline{X}^2}{S^2}$ 的分布；

（II）求 $E\left[(\overline{X}^2S^2)^2\right]$.

【详解】

第七章　参数估计

重点题型一　求矩估计与最大似然估计

【方法】

矩估计　令 $EX^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 或 $E(X-EX)^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,k=1,2,\cdots$，得 $\theta_1,\theta_2,\cdots$ 的矩估计量.

最大似然估计

（1）对样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)\\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\end{cases}$；

（2）似然函数两端取对数求导数；

（3）令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 θ 的最大似然估计量.

【例 7.1】（2002，数一）设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

【详解】

【例 7.2】（2011，数一）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2.

（I）求 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma^2}$；

（II）求 $E\widehat{\sigma^2}$ 与 $D\widehat{\sigma^2}$.

【详解】

【例 7.3】（2022，数一、三）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，两个样本相互独立.利用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，

（I）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（II）求 $D\hat{\theta}$.

【详解】

重点题型二　估计量的评价标准

【估计量的评价标准】

（1）（无偏性）设$\hat{\theta}$为θ的估计量，若$E\hat{\theta}=\theta$，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量；

（2）（有效性）设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$为$\theta$的无偏估计量，若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效；

（3）设$\hat{\theta}$为θ的估计量，若$\hat{\theta}$依概率收敛于θ，则称$\hat{\theta}$为θ的一致（相合）估计量.

【例 7.4】设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.

（I）求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$；

（II）问$\hat{\theta}$是否为θ的无偏估计量？并说明理由.

【详解】