姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

封面日期：2025 年 6 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

前言页显示日期：2025 年 6 月 26 日

目录

第一章　一元函数积分学 **1**

1.1　定积分的概念 1

1.2　不定积分的计算 1

1.3　定积分的计算 2

1.4　反常积分的计算 2

1.5　反常积分敛散性的判定 2

1.6　变限积分函数 3

1.7　定积分应用求面积 3

1.8　定积分应用求体积 3

1.9　定积分应用求弧长 4

1.10　定积分应用求侧面积 4

1.11 一定积分物理应用 4

1.12 二证明含有积分的等式或不等式 4

第一章　一元函数积分学

1.1　定积分的概念

1. 例 1 (2007, 数一、数二、数三) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 [-3,-2],[2,3] 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 [-2,0],[0,2] 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是:

$$(A)F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

$$(A)\ (0,1) \quad (B)\left(1,\frac{\pi}{2}\right) \quad (C)\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \quad (D)(\pi,+\infty)$$

Solution. 【详解】 □

3. 例 3 (2003, 数二) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x}dx$, 则

$$(A)I_1 > I_2 > 1 \quad (B)1 > I_1 > I_2$$

$$(C)I_2 > I_1 > 1 \quad (D)1 > I_2 > I_1$$

Solution. 【详解】 □

1.2　不定积分的计算

4. 例 5 (2009, 数二、数三) 计算不定积分 $\int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}dx(x > 0)$

Solution. 【详解】 □

5. 例 6 求 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

Solution. 【详解】 □

1.3 定积分的计算

6. 例 7 (2013, 数一) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$

Solution. 【详解】 □

7. 例 8 求下列积分:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx$$

Solution. 【详解】 □

8. 例 9 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

Solution. 【详解】 □

1.4 反常积分的计算

9. 例 10 (1998, 数二) 计算积分 (题目内容缺失)

Solution. 【详解】 □

1.5 反常积分敛散性的判定

10. 例 11 (2016, 数一) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛, 则

$$(A)\ a<1\ \ b>1$$

$$(B)\ a>1\ \ b>1$$

$$(C)\ a<1\ \ a+b>1$$

$$(D)\ a>1\ \ a+b>1$$

Solution. 【详解】 □

11. 例 12 (2010, 数一、数二) 设 m,n 均为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

$$(A)\quad m$$

$$(B)\quad n$$

$$(C)\quad m,n$$

$$(D)\quad m,n$$

Solution. 【详解】 □

1.6 变限积分函数

12. 例 13 (2013, 数二) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则

$$(A)\ x=\pi \quad F(x)$$

$$(B)\ x=\pi \quad F(x)$$

$$(C)\ F(x) \quad x=\pi$$

$$(D)\ F(x) \quad x=\pi$$

Solution. 【详解】 □

13. 例 14 (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,3\pi]$ 上连续, 在 $(0,3\pi)$ 内是函数的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(i) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(ii) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution. 【详解】 □

1.7 定积分应用求面积

14. 例 15 (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution. 【详解】 □

1.8 定积分应用求体积

15. 例 16 (2003, 数一) 过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(i) 求 D 的面积 A;

(ii) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

Solution. 【详解】 □

16. 例 17 (2014, 数二) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$, 且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution. 【详解】 □

1.9 定积分应用求弧长

17. 例 18 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的全长.

Solution. 【详解】 □

1.10 定积分应用求侧面积

18. 例 19 (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(0\le x\le 1)$ 与 $x=\cos^3 t$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution. 【详解】 □

1.11 一定积分物理应用

19. 例 20 (2020, 数二) 设边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 设重力加速度为 g, 水密度为 ρ, 则该平板一侧所受的水压力为

Solution. 【详解】 □

1.12 二证明含有积分的等式或不等式

20. 例 21 (2000, 数二) 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$.

(i) 当 n 为正整数, 且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时, 证明 $2n\le S(x)<2(n+1)$;

(ii) 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$

Solution. 【详解】 □

21. 例 22 (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加,$0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(i) $0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x - a, x \in [a, b]$;

(ii) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Solution. 【详解】 □