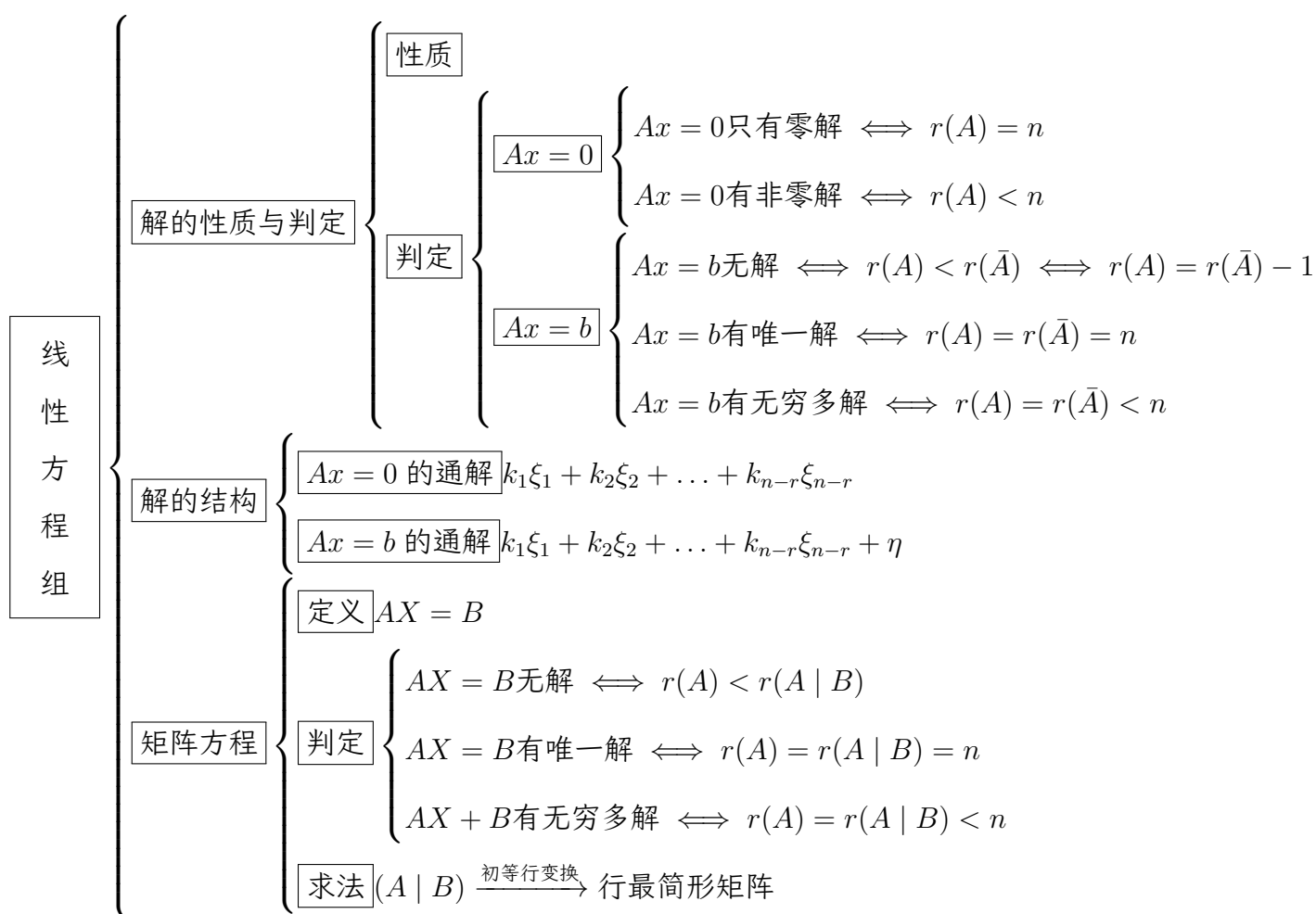
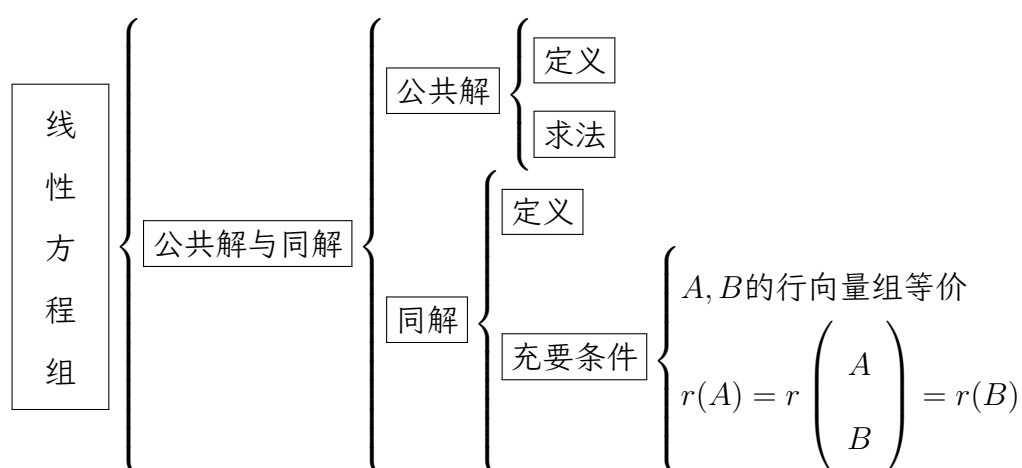


# 第一章 线性方程组

## 1.1 知识体系





## 1.2 解的判定

1. (2001, 数三) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha$  为  $n$  维列向量, 且  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ , 则线性方程组

(A)  $Ax = \alpha$  有无穷多解

(B)  $Ax = \alpha$  有唯一解

(C)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  只有零解

(D)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  有非零解

**Solution.**



2. 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 且  $r(A) = m < n$ , 则下列结论不正确的是

- (A) 线性方程组  $A^T x = 0$  只有零解
- (B) 线性方程组  $A^T A x = 0$  有非零解
- (C)  $\forall b$ , 线性方程组  $A^T x = b$  有唯一解
- (D)  $\forall b$ , 线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解

*Solution.*



### 1.3 求齐次线性方程组的基础解系与通解

3. (2011, 数一, 二) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  为 4 阶矩阵,  $(1, 0, 1, 0)^T$  为线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则  $A^*x = 0$  的基础解系可为

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2$
- (B)  $\alpha_1, \alpha_3$
- (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

*Solution.*



4. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵  $A$  的第 1 行为  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为零,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$  满足  $AB = O$ , 求线性方程组  $Ax = 0$  的通解。

*Solution.*



5. (2002, 数三) 设线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + \cdots + bx_n = 0 \\ \vdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$

其中  $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$ 。当  $a, b$  为何值时, 方程组只有零解、有非零解, 当方程组有非零解时, 求其通解。

*Solution.*



## 1.4 求非齐次线性方程组的通解

6. 设  $A$  为 4 阶矩阵,  $k$  为任意常数,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的三个解, 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

若  $r(A) = 3$  则  $Ax = b$  的通解为 ()

$$(A) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Solution.**



7. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有三个不同的特征值, 其中  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

(I) 证明  $r(A) = 2$ ;

(II) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求线性方程组  $Ax = \beta$  的通解。

*Solution.*





8. 设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 线性方程组  $Ax = b$  有两个不同的解.

(I) 求  $\lambda, a$  的值;

(II) 求方程组  $Ax = b$  的通解。

*Solution.*

□

9. 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 且  $r(A) = r$ , 若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系,  $\eta$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的特解, 证明:

(I)  $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关

(II)  $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$  线性无关;

(III)  $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$  为  $Ax = b$  所有解的极大线性无关组。

*Solution.*



## 1.5 解矩阵方程

10. 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  矩阵  $X$  满足  $AX + E = A^{2022} + 2X$ , 求矩阵  $X$ 。

*Solution.*



11. (例 4.11) (2014, 数一、二、三) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(a) (I) 求线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系;

(b) (II) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ 。

*Solution.*



## 1.6 公共解的判定与计算

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$(II) x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解。

**Solution.**



13. 设齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为  $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当  $a$  为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解, 并求所有非零公共解。

**Solution.**



14. (2005, 数三) 设线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求  $a, b, c$  的值。

**Solution.**

