第一章　向量

1.1　线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0\ (km \neq 0)$，则

   (a) (A) α, β 与 α, γ 等价

   (b) (B) α, β 与 β, γ 等价

   (c) (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (d) (D) α 与 γ 等价

   Solution. 【详解】 □

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$，$\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$，$\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$，$\beta = (1, 3, -3)^T$。当 a, b 为何值时，

   (a) (II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

   (b) (III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

   Solution. 【详解】 □

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a^2+3)^T$；向量组 (II) $\beta_1 = (1, 1, a+3)^T$, $\beta_2 = (0, 2, 1-a)^T$, $\beta_3 = (1, 3, a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价，求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

   Solution. 【详解】 □

1.2 线性相关与线性无关的判定

3. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量, 则对任意常数 k,l, $\alpha_1+k\alpha_3$, $\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的
   (a) (A) 必要非充分条件
   (b) (B) 充分非必要条件
   (c) (C) 充分必要条件
   (d) (D) 既非充分又非必要条件

   Solution. 【详解】 □

4. 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 n 维列向量, 满足 $A^2\alpha_1=A\alpha_1\neq 0$, $A^2\alpha_2=\alpha_1+A\alpha_2$, $A^2\alpha_3=\alpha_2+A\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

   Solution. 【详解】 □

5. 设 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1,β_2 两两正交，证明 β_1,β_2 线性相关。

   Solution. 【详解】 □

1.3 极大线性无关组的判定与计算

6. 设 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$, $\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3=(3,2,-1,a+2)^T$, $\alpha_4=(-2,-6,10,a)^T$。
   (a) (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组;
   (b) (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

   Solution. 【详解】 □

7. 证明:
   (a) (I) 设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;
   (b) (II) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$。

   Solution. 【详解】 □

1.4 向量空间 (数一专题)

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$，$\beta_2 = 2\alpha_2$，$\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$。

   (a) (I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基:

   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

   Solution. 【详解】 □