

# 第一章 真题与模拟题

备注

▲ 表示难度, 越多越难 ◆ 表示计算量, 越多计算量越大

## 1.1 数学真题一网打尽

1. ▲▲ 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$

**Solution**

显然是一道夹逼定理的题目, 但有几点需要注意.

$$\text{原式} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin \pi x dx$$

放大这一方向是比较好想, 重点在于缩小.

$$\text{原式} > \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$\int_0^1 \sin \pi x = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{原式} = \frac{2}{\pi}$$

2. ▲▲ 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  连续, 则  $\int_0^1 f(x) dx = ()$

A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{2n}$

B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

$$\text{C. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{D. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

## 解法一 正面突破

这道题显然是考察定积分的定义, 但考察的比较细节.

i 其中 (A)(B) 选项是将区间进行  $n$  等分的划分, 且取的是区间重点, 如何得知呢?

考虑端点  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$  而

$$\frac{k-1}{n} = \frac{2k-2}{2n} < \frac{2k-1}{2n} < \frac{2k}{2n} = \frac{k}{n}$$

故由定积分的定义, 此时有

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

ii 其中 (C)(D) 是将区间进行  $2n$  等分的划分, 取的分别是左/右端点, 这并不影响定积分形式, 应该为

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{1}{2n}$$

## 解法二 选择题不客气!

取  $f(x) = 1$  则  $\int_0^1 1 dx = 1$ , 对应的选项可以直接计算, 结果为

$$\text{(A) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\text{(B) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{(C) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n} = 2 \neq 1$$

$$\text{(D) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{2}{n} = 4 \neq 1$$

## 定积分的定义

定积分的定义有如下几个要点

- (1) 将区间  $[a, b]$  划分为  $n$  个区域, 其中记

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

记自区间长度即模为

$$\lambda = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n\}$$

- (2) 在每个子区间上取任意一点  $\xi_i$  取其函数值  $f(\xi_i)$ , 则 Riemann 和为

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 若  $S$  极限存在, 且 分割方式与  $\xi_i$  无关, 则称该极限为  $f$  在  $[a, b]$  上的定积分, 如下

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

3. ▲(1999.2)  $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上单调递减且非负连续函数证明数列  $\{a_n\}$  极限存在

## Solution

先证明单调性, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx$$

积分中值定理  $f(n+1) - f(\xi), \xi \in (n, n+1)$

由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减故  $a_{n+1} - a_n < 0 \implies$  原数列单调递减.

再证明有界性由于

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx$$

原式化为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n)$$

由于  $f(x)$  非负且单调递减, 容易直到  $f(k) > \int_k^{k+1} f(x)dx$  故原式一定有

$$\text{原式} \geq 0$$

即原数列单调递减有下界, 故原数列收敛.

#### 4. (2011-12) ▲▲

(1) 证明: 对于任意的正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(2) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  证明数列  $\{a_n\}$  收敛

拉氏中值 + 单调有界证明

(1) 令  $f(x) = \ln(1+x)$  则

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1 = f'(\xi) \cdot \frac{1}{n}, \xi \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

即

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{1+\xi} < 1$$

综上有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

(2) 首先证明其单调, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

即原数列单调递减, 只需证明其有下界即可. 考虑

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0 \end{aligned}$$

故原数列单调递减有下界, 即其极限值存在.

## 积分放缩法

由积分保号性, 若需证明  $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$  只需证明  $f(x) > g(x)$

(1) 考虑如下操作

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &< \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} &< \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n} \\ \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx &< \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx\end{aligned}$$

显然在  $(n, n+1)$  上有  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$ , 故原不等式得证

(2) 证明单调性, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx < 0$$

证明有下界有

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx > 0$$

有没有很眼熟, 没错, 正是上一题 (1999.2) 的所考察的证明!

故原数列单调递减有下界, 其极限存在.

## 收敛级数

(1) 不等式最基本的方法应该想到构造函数, 证明单调性. 不妨令  $x = \frac{1}{n}$ , 原不等式等价于证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0, 1)$$

令  $f(x) = x - \ln(1+x)$  则  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ , 故  $f(x)$  单调递增, 即  $f(x) > f(0) = 0$ , 同理可证明左边不等式.

(2) 基于如下结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \text{ 收敛}$$

由于

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1})$$

故数列  $\{a_n\}$  与级数  $\sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1})$  同敛散.

由于  $|a_n - a_{n-1}| = \left| \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right|$  做 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| &= \left| \frac{1}{n} \left[ -\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right| \\ &= \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由比较判别法可知原级数绝对收敛, 故而原级数收敛. 从而数列极限存在

### 5. (2012-2) ▲

- (1) 证明方程  $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1 (n > 1, n \in \mathbf{N})$  在区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内仅有一个实根  
 (2) 记  $(I)$  中的实根为  $x_n$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求出此极限

#### Solution

(1) 令  $f(x) = x^n + \dots + x - 1$ ,  $f'(x) = nx^{n-1} + \dots + 2x + 1 > 0$  故  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递增, 又有

$$\begin{cases} f(1) = n - 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^n} < 0 \end{cases}$$

由零点存在定理可知, 在区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上仅有唯一零点

(2) 考虑  $f(x)_{n+1} = x^{n+1} + x^n + \dots + x - 1$  由 (1) 可知

$$\begin{cases} f(x_n)_{n+1} = x_n^{n+1} > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \end{cases}$$

故在区间  $\left(\frac{1}{2}, x_n\right)$  中有唯一零点  $x_{n+1}$  因此有

$$\frac{1}{2} < x_{n+1} < x_n$$

即数列  $\{x_n\}$  单调递减有下界故极限存在.

不妨令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  代入  $f(x)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{1 - x_n} = 1$$

即

$$\frac{a - 0}{1 - a} = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

6. ▲(2013.2) 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

(1) 求  $f(x)$  的最小值

(2) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限

#### Solution

(1)  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} (x > 0)$  有  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上递减, 在  $(1, +\infty)$  上递增, 故  $f(1) = 1$  为  $f(x)$  的最小值

(2) 由题设有

$$\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 = \ln e$$

有  $\ln x$  单调, 故  $0 < x_n < e$  又由于 (1) 可知  $1 = f(1) < f(x_n) \implies x_{n+1} < x_n$  故原数列单调递减有下界故其极限存在, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 有题设有

$$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$$

又因为

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$$

故  $a = 1$  即

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1}$$

7. ▲ 设对任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)(\quad)$

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

## Solution

对于 A,B 选项, 不妨取  $f(x) = g(x) = \varphi(x) = x$  但是  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  不存在

对于 C 选项, 不妨取  $f(x) = g(x) = \varphi(x) = 1$ , 此时  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

## 夹逼定理

原式形式

$$n \text{ 充分大时, } \begin{cases} \varphi(n) \leq f(n) \leq g(n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = A \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

考虑题设的  $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$  则有

$$0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq g(x) - \varphi(x) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$$

也可以看出  $f(x)$  的极限与  $\varphi(x)$  有关, 若  $\varphi(x)$  存在则  $f(x)$  极限也存在否则不存在.

8. ▲(2007-12) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $f''(x) > 0$ , 令  $u_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$  则下列结论正确的是 ( )

- A. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      B. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散  
C. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛      D. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散

## 拉格朗日中值定理

存在  $\xi_n \in (n, n+1)$ ,  $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)$  进而有  $u_{n+1} = u_n + f'(\xi_n)$ , 由于  $f''(x) > 0 \implies f'(x)$  单调递增, 此时有

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + f'(\xi_n) \\ &= u_{n-1} + f'(\xi_{n-1}) + f'(\xi_n) \\ &\dots \\ &= u_1 + \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \\ &> u_1 + n f'(\xi_1) = u_1 + n(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

显然当  $u_2 > u_1$  当  $n \rightarrow \infty$ ,  $u_n > +\infty$  显然极限不存在.



## 选择题不客气

对于选项 A,  $f(x) = \frac{1}{x} - x$

对于选项 B,  $f(x) = \frac{1}{x}$

对于选项 C,  $f(x) = x^2$

## 级数

由于  $u_{n+1} - u_n = f'(\xi_n) > f'(\xi_i) = u_2 - u_1 > 0$  此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} - u_n \neq 0$  从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  极限不存在, 由定义有其部分和不存在, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} - u_1$$

进而可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  不存在.

9. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  且  $a \neq 0$  则当  $n$  充分大的时候, 有 ( )

A.  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$       B.  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$       C.  $a_n > a - \frac{1}{n}$       D.  $a_n < a + \frac{1}{n}$

10. 设有数列  $\{x_n\}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$  则 ( )

A. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

B. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

C. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$  存在, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$  存在, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

11. 已知  $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 则  $\{a_n\}$  ( )

A. 有最大值与最小值

B. 有最大值无最小值

C. 有最小值无最大值

D. 无最大值与最小值

12. ◆◆ 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$  所确定的函数, 其中  $\varphi$  具有 2 阶导数且  $\varphi' \neq -1$

(1) 求  $dz$

(2) 记  $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$

13.

## 1.2 超越 (11-25 年)

**1.3 共创 (22,23,24) 年**

## 1.4 25 年模拟卷 (百来套)