第一章　矩阵

1.1　求高次幂

Remark. 基本方法

(1) 若 $r(A)=1$, 则 $A^n=tr(A)^{n-1}A$, 关键点在于 $r(A)=1 \implies A=\alpha\beta^T$

(2) 若 A 可以分解为 $E+B$, 且 B 是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}, 则 B^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B^3=\mathbf{0}$$

$A^n=C_n^nE+C_n^1B+C_n^2B^2$

(3) 分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}\end{pmatrix}, A^n=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^n&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{C}^n\end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$ 则 $A=P\Lambda P^{-1}$,

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=Pdiag(\lambda_1^n,\dots,\lambda_n^n)P^{-1}$$

1. 设 A=$\begin{pmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA=O$, 且 $r(B)>1$, 则 $A^n=$______.

Solution. 由 $BA=0$ 知 $r(A)+r(B)\le n$, 又 $r(B)>1, r(A)\ge 1$ 所以 $1\le r(A)\le$

$1, \implies r(A) = 1,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = tr(A)^{n-1}\alpha\beta^T = 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

□

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 则 $A^n =$ ______________.

Solution. $A = 2E + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \mathbf{0}$, 则

$$A^n = 2^n E + 2^{n-1} nB + 2^{n-3} n(n-1)B^2$$

□

,

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵,$B = P^{-1}AP$, 则 $(B+E)^{100} =$ ______

Solution. $r(A) = 1, A^2 = tr(A) \cdot A = -2A$ 即 $A^2 + 2A = \mathbf{0}, (A+E)^2 = E$, 由题

$(B+E)^{100} = (P^{-1}AP + E)^{100} = (P^{-1}AP + P^{-1}EP)^{100} = (P^{-1}(A+E)P)^{100} = E$ □

1.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

(A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C)$A + E$ 可逆 (D)$A - 3E$ 可逆

Solution.

□

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,a, b 为非零常数. 证明:

   (a) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

   (b) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

   Solution.

□

总结

$$(1)A_{n\times n}B_{n\times n}=E \implies \begin{cases}\text{可逆}\\ \text{求逆}, B=A^{-1}, A=B^{-1}\\ \text{满足交换律}, AB=BA\end{cases}$$

$$(2)AB\ \text{可交换的充分条件} \begin{cases}B=f(A), A^{-1}, A^{*}\\ AB=aA+bB(a,b\neq 0)\\ A^2+aAB=E,(a\neq 0)\end{cases}$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ 满足 $A^3=O$.

(a) 求 a 的值;

(b) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$, 求 X.

Solution.

□

1.3 秩的计算与证明

Remark. 秩

秩的定义:$\exists r$ 阶子式非零且 $\forall r+1$ 阶子式均为零

秩的性质

(1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $r(A)<\min\{m,n\}$

(2) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

(3) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

(4) $\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A\mid B)\leq r(A)+r(B)$

(5) $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$

(6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,P 为 m 阶可逆矩阵,Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$, 若 $r(A)=m$ 则 $r(CA)=r(C)$ 左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times s$ 阶矩阵,$AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A,B 为 n 阶矩阵,(XY) 表示分块矩阵, 则:

(a) $r(A\ AB)=r(A)$

(b) $r(A\ BA)=r(A)$

(c) $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$

(d) $r(A\ B)=r(A^TB^T)$

Solution.

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

Solution.

□

1.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

(1) $AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(5) $(A^T)^* = (A^*)^T$

(6) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}\,A$

(8) $r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

(A) 2　(B) $\frac{1}{3}$　(C) 3　(D)6

Solution.

$\square$

10. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

   (a) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;

   (b) $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

   Solution.

□

1.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

(1) $|E(i,j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$

(2) $E(i,j)^T = E(i,j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$

(3) $E(i,j)^{-1} = E(i,j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k)^{-1}) = E(ij(-k))$

(4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵

(5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 则:

    (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*

    (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 的 B^*

    (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$

    (D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

    Solution.

□

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} =$ _______________.

Solution.

□