第一章　矩阵

- 矩阵
  - 基本运算：$A+B$　kA　AB　A^T
  - 逆
    - 定义
    - 性质
    - 求法
      - 定义法
      - 初等变换法
      - 伴随矩阵法
      - 分块矩阵法
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$
      - $\Longleftrightarrow r(A)=n$
      - $\Longleftrightarrow$ A的列 (行) 向量组线性无关
      - $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$只有零解
      - $\Longleftrightarrow$ 非齐次方程组$Ax=b$有唯一解
      - $\Longleftrightarrow$ A的特征值均不为零
  - 秩
    - 定义
    - 性质
    - 求法

- 矩阵
  - 伴随矩阵
    - 定义
    - 性质
  - 初等变换与初等矩阵
    - 定义
    - 性质
    - 应用
      - 求矩阵的逆
      - 求矩阵的秩
      - 线性表示
      - 求极大线性无关组
      - 解线性方程组
      - 求二次型的标准型
  - 分块矩阵

1.1 求高次幂

Remark. 基本方法

(1) 若 $r(A) = 1$, 则 $A^n = tr(A)^{n-1}A$, 关键点在于 $r(A) = 1 \implies A = \alpha\beta^T$

(2) 若 A 可以分解为 $E + B$, 且 B 是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{则} B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \mathbf{0}$$

$A^n = C_n^n E + C_n^1 B + C_n^2 B^2$

(3) 分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$P^{-1}AP = \Lambda$ 则 $A = P\Lambda P^{-1}$,

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = Pdiag(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n)P^{-1}$$

1. 设 A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA = O$, 且 $r(B) > 1$, 则 $A^n =$ ____.

Solution. 由 $BA = 0$ 知 $r(A) + r(B) \leq n$, 又 $r(B) > 1, r(A) \geq 1$ 所以 $1 \leq r(A) \leq 1$, $\Longrightarrow$ $r(A) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = tr(A)^{n-1}\alpha\beta^T = 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

□

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 则 $A^n =$ ______________.

Solution. $A = 2E + B$,$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \mathbf{0}$, 则

$$A^n = 2^nE + 2^{n-1}nB + 2^{n-3}n(n-1)B^2$$

□

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵,$B = P^{-1}AP$, 则 $(B + E)^{100} =$ ____

Solution. $r(A) = 1, A^2 = tr(A) \cdot A = -2A$ 即 $A^2 + 2A = \mathbf{0}$, $(A + E)^2 = E$, 由题 $(B + E)^{100} = (P^{-1}AP + E)^{100} = (P^{-1}AP + P^{-1}EP)^{100} = (P^{-1}(A + E)P)^{100} = E$ □

1.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

   (A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C)$A + E$ 可逆 (D)$A - 3E$ 可逆

   ***Solution*.**

□

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,a, b 为非零常数. 证明:

    (a) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

    (b) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

***Solution*.**

□

总结

$$(1)A_{n\times n}B_{n\times n}=E \implies \begin{cases} \text{可逆} \\ \text{求逆}, B=A^{-1}, A=B^{-1} \\ \text{满足交换律}, AB=BA \end{cases}$$

$$(2)AB\ \text{可交换的充分条件} \begin{cases} B=f(A), A^{-1}, A^* \\ AB=aA+bB(a,b\neq 0) \\ A^2+aAB=E,(a\neq 0) \end{cases}$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3=O$.

(a) 求 a 的值;

(b) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$, 求 X.

Solution.

□

1.3 秩的计算与证明

Remark. 秩

秩的定义:$\exists r$ 阶子式非零且 $\forall r+1$ 阶子式均为零

秩的性质

(1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $r(A) < \min\{m,n\}$

(2) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

(3) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

(4) $\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A\mid B)\leq r(A)+r(B)$

(5) $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$

(6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,P 为 m 阶可逆矩阵,Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$, 若 $r(A)=m$ 则 $r(CA)=r(C)$

左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times s$ 阶矩阵,$AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A,B 为 n 阶矩阵,(XY) 表示分块矩阵, 则:

   (a) $r(A\ AB)=r(A)$

   (b) $r(A\ BA)=r(A)$

   (c) $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$

   (d) $r(A\ B)=r(A^TB^T)$

Solution.

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

Solution.

□

1.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

(1) $AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(5) $(A^T)^* = (A^*)^T$

(6) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(8) $r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D)6

Solution.

□

10. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

    (a) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;

    (b) $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

    Solution.

□

1.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

(1) $|E(i,j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$

(2) $E(i,j)^T = E(i,j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$

(3) $E(i,j)^{-1} = E(i,j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k)^{-1}) = E(ij(-k))$

(4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵

(5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 则:

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 的 B^*

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$

(D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

Solution.

□

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} =$ ______________.

Solution.

□