第一章　概率论

1.1　李正元复习全书

1. 每箱产品有 10 件, 其中次品数从 0 到 2 是等可能的, 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差, 一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被误判为正品的概率为 10%. 试求:

(I) 随机检验一箱产品, 它能通过验收的概率 p ;

(II) 检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 q .

Solution. (1) 设 $B=\{$任取一件为正品$\}$,$A=\{$一箱产品能通过验收$\}$ 则由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})$$

而其中

$$P(A\mid B)=1-0.02=0.98, P(A\mid \bar{B})=1-0.1=0.9$$

代入全概率公式有 $p=P(A)=1+0.88P(B)$, 为求 $P(B)$, 记 C_i 为每箱中包含 i 件次品, 且 C_0,C_1,C_2 为完备事件组, 再由全概率公式可以求出

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(C_i)P(B\mid C_i)=0.9$$

故 $P(A)=0.892$

(2)$q=P\{X/10\geq 0.9\}=P\{X\geq 9\}=P\{X=9\}+P\{X=10\}\approx 0.705$ □

2. 一条自动生产线生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, n=0,1,2,\cdots$. 假设产品的优质品率为 $p\,(0<p<1)$. 如果各件产品是否为优质品相互独立.

(I) 计算生产线在两次故障间共生产 k 件 $(k=0,1,2,\cdots)$ 优质品的概率;

(II) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品, 求它共生产 m 件产品的概率.

Solution. (1) 不妨令

$B_k=\{$两次故障公生产了 k 件优质品$\}$,$A_n=\{$两次故障间总共生产了 n 件产品$\}$, 显然 $A_0,A_1,\ldots$ 构成了一个完备事件组, 故利用全概率公式有

$$\begin{aligned}
P(B_k)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)\\
&\xlongequal{\text{前 k-1 次不可能产生 k 件优质品}}\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)\\
&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda p}\\
&\xlongequal{\text{Possion 分布}}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

(2) 当 $m<k$ 的时候,$P(A_m\mid B_k)=0$, 当 $m\geq k$,

$$\begin{aligned}
P(A_m\mid B_k)&=\frac{P(A_m)P(B_k\mid A_m)}{P(B_k)}\\
&=\frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q},m\in(k,k+1,\ldots)
\end{aligned}$$

□

总结

关于全概率公式与贝叶斯公式的总结

这种问题的关键在于寻找一个合适的完备事件组, 当问题涉及" 原因推结果/结果推原因" 大概率要用贝叶斯公式 (条件概率是贝叶斯的特殊情况)

3. 甲、乙二人轮流投篮, 游戏规则规定为甲先开始, 且甲每轮只投一次, 而乙每轮连续投两次, 先投中者为胜. 设甲、乙每次投篮的命中率分别是 p 与 0.5, 则 $p=$____ 时, 甲、乙胜负概率相同.

Solution. 这道题和笔记中的交替射击模型一致, 记 $A=\{$甲获胜$\},B=\{$乙获胜$\}$, 则由题意有

$$P(A)=p+(1-p)(1-0.5)(1-0.5)P(A)\implies P(A)=\frac{p}{1-0.25(1-p)}$$

再由题意可知, 要使得甲乙获胜概率一致, 则 $P(A)=P(B)=0.5\implies p=\frac{3}{7}$ □

1.2 880

1. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A=\{$中间一段为三段中的最长者$\}$, 则 $P(A)=$ ______

Solution. □

2. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 ______

Solution. □

3. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 ______

Solution. □

4. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 ______

Solution.

(方法一) 首先考虑第 n 次试验,A 发生奇数次的情况有两种.(1) 前 n-1 次成功率偶数次, 第 n 次成功;(2) 前 n-1 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 $A_k=\{\ k\quad\}, P(A_k)=p; B_k=\{$k 次实验中成功奇数次$\}$, 记 $P(B_k)=p_k$, 则有

$$B_n=B_{n-1}\bar{A}_n+\overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n=P(B_{n-1}\bar{A}_n+\overline{B_{n-1}}A_n)=P(B_{n-1}\bar{A}_n)+P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned}\text{上式}&=P(B_{n-1})P(\bar{A})+P(\overline{B_{n-1}})P(A_n)\\&=(1-p)p_{n-1}+p(1-p_{n-1})\\&=p+(1-2p)p_{n-1}\end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n-\frac{1}{2}=(1-2p)[p_{n-1}-\frac{1}{2}]\xlongequal{\text{等比数列}}-\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^(n-k), k=0,1,2,\dots$

若 n 为偶数则

$$\begin{aligned} P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+\dots+P(X=n-1) \\ &= C_n^1(1-p)^{n-1}+C_n^3p^3(1-p)^{n-3}+\dots+C_n^{n-1}p^{n-1}(1-p) \\ P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+\dots+P(X=n) \\ &= C_n^0p^0(1-p)^n+\dots+C_n^np^n(1-p)^0 \end{aligned}$$

且 $P(X=odd)+P(X=even)=1$, 有注意到

$$\begin{aligned} P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+\dots+P(X=n-1) \\ &= -C_n^1(p-1)^{n-1}-C_n^3p^3(p-1)^{n-3}-\dots-C_n^{n-1}p^{n-1}(p-1) \\ P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+\dots+P(X=n) \\ &= C_n^0p^0(p-1)^n+\dots+C_n^np^n(p-1)^0 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} P(X=even)-P(X=odd) &= C_n^0p^0(p-1)^n+C_n^1p^1(p-1)^{n-1}+\dots+C_n^np^n(p-1)^0 \\ &\xlongequal{\text{二项式定理}} (2p-1)^n \end{aligned}$$

则 $2P(X=odd)=1-(2p-1)^n \implies P(X=odd)=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X=\text{奇数})=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X \sim B(n,p)$，则 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$,$k=0,1,2,\dots$

令 $Y=\frac{1}{2}[1+(-1)^X]$，当 X 为奇数时，$Y=0$；当 X 为偶数时，$Y=1$

于是原问题转换为求 $P(X\text{为奇数})=P(Y=0)$ 注意到 $E[Y]=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=P(Y=1)=1-P(Y=0)$，故只需要求 $E[Y]$

$$\begin{aligned} EY &= E(\frac{1}{2}[1+(-1)^X])=\frac{1}{2}+E(-1)^X \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kp^k(1-p)^{n-k} \\ &\xlongequal{\text{逆用二项式定理}} =\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n \end{aligned}$$

故 $P(Y=0)=1-P(Y=1)=\frac{1-(1-2p)^n}{2}$ $\square$

5. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

   (I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

   (II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

   Solution. 设 $A_i = \{$第 i 次取得红球$\}(i = 1, 2, 3), B_i = \{$第 j 次投掷银币出现正面$\}(j = 1, 2, 3)$

   (1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = P(A_3) = P(A_1)$$

$$P(A_1) \xlongequal{\text{全概率公式}} P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid \bar{B}_1)P(\bar{B}_1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

   (2) 由于两次试验都是独立重复的所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的

   则 $P(A_1B_1) = P(A_2B_2) = P(B_1)P(A_1 \mid P(B_1)) = \frac{1}{3}$

   则所求概率为

$$P(B_1B_2 \mid A_1A_2) = \frac{B_1B_2A_1A_2}{P(A_1A_2)} = \frac{\frac{1}{3}^2}{\frac{1}{2}^2} = \frac{4}{9}$$

□

6. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

   Solution. 设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X, 其显然满足 $X \sim B(20, 0.15)$, 不妨假设当 $X = k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X = k) \geq P(X = k - 1), P(X = k) \geq P(X = k + 1)$ 即

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^{k}0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)}0.15^{k-1}0.85^{(21-k)}} \geq 1$$

   与

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^{k}0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)}0.15^{k+1}0.85^{(19-k)}} \geq 1$$

   得到如下结果

$$\begin{cases} 300 - 15k + 15 \geq 85k \\ 85k + 85 \geq 300 - 15k \end{cases}$$

即 $2.15 \leq k \leq 3.15$ 故 $k = 3$, 其概率为 $P(X = 3) = C_{20}^{3} 0.15^{3} 0.85^{17}$ $\square$

1.3 李艳芳 900

1.4 张宇题源大全