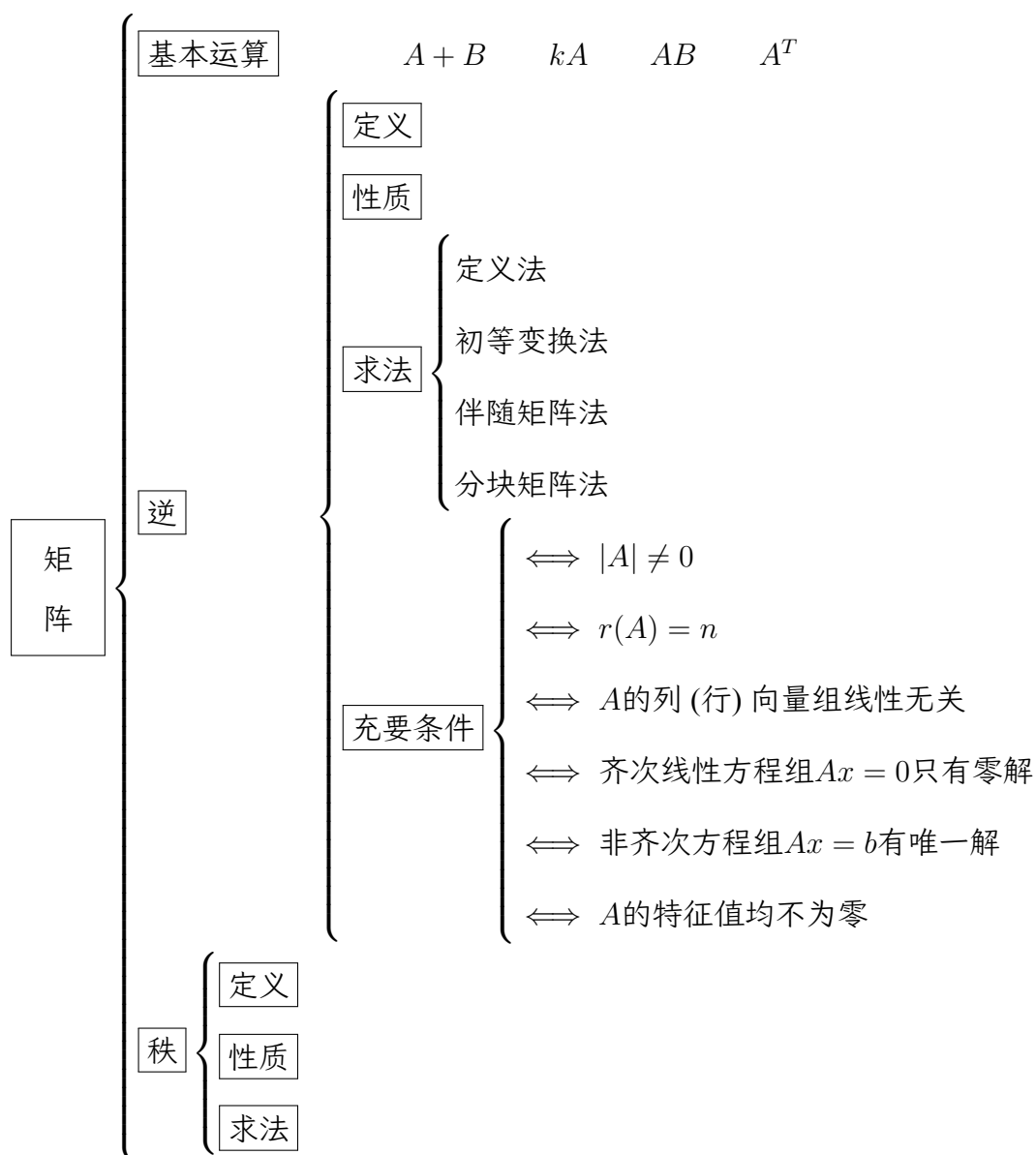
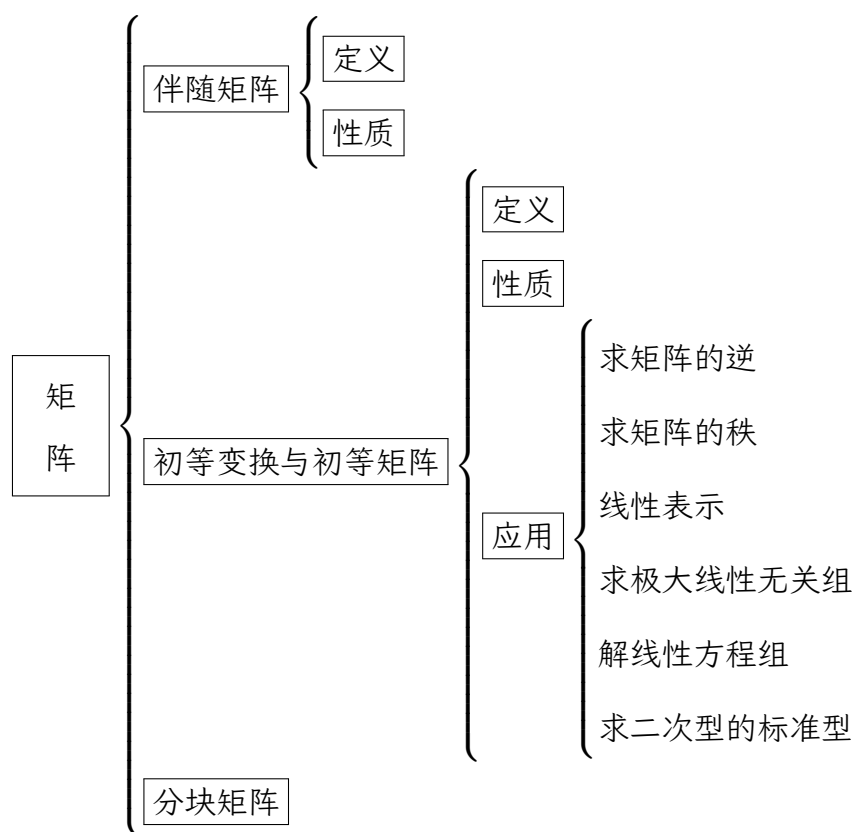


第一章 矩阵





1.1 求高次幂

Remark

基本方法

- (1) 若 $r(A) = 1$, 则 $A^n = tr(A)^{n-1}A$, 关键在于 $r(A) = 1 \implies A = \alpha\beta^T$
- (2) 若 A 可以分解为 $E + B$, 且 B 是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \mathbf{0}$$

$$A^n = C_n^n E + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

(3) 分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$P^{-1}AP = \Lambda$ 则 $A = P\Lambda P^{-1}$,

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) P^{-1}$$

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA = O$, 且 $r(B) > 1$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution

由 $BA = O$ 知 $r(A) + r(B) \leq n$, 又 $r(B) > 1, r(A) \geq 1$ 所以 $1 \leq r(A) \leq 1, \Rightarrow r(A) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, -1, 2)$$

$$A^n = \operatorname{tr}(A)^{n-1} \alpha \beta^T = 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution

$$A = 2E + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \mathbf{0}, \text{ 则}$$

$$A^n = 2^n E + 2^{n-1} n B + 2^{n-3} n(n-1) B^2$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵, $B = P^{-1}AP$, 则 $(B + E)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$

Solution

$r(A) = 1, A^2 = \text{tr}(A) \cdot A = -2A$ 即 $A^2 + 2A = \mathbf{0}, (A + E)^2 = E$, 由题

$$(B + E)^{100} = (P^{-1}AP + E)^{100} = (P^{-1}AP + P^{-1}EP)^{100} = (P^{-1}(A + E)P)^{100} = E$$

1.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

- (A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C) $A + E$ 可逆 (D) $A - 3E$ 可逆

Solution

利用特征值, 由题设可知对于 A 的任意特征值有

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \text{ 或 } \lambda = 2$$

故 B, C, D 的特征值分别是

$$\lambda_B : \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}, \lambda_C : \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}, \lambda_D : \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

由可逆的充分条件可知 BCD 均可逆

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵, a, b 为非零常数. 证明:

(1) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

(2) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

Solution

(1)

$$AB = aA + bB$$

$$A(B - aE) - bB = 0$$

$$(A - bE)(B - aE) = abE \implies (A - bE), (B - aE) \text{ 可逆}$$

$$(B - aE)(A - bE) = abE$$

$$BA = aA + bB = AB$$

(2)

$$A^2 + aAB = E$$

$$A(A + aE) = E \implies (A + aE)A = E \implies AB = BA$$

总结

$$(1) A_{n \times n} B_{n \times n} = E \implies \begin{cases} \text{可逆} \\ \text{求逆, } B = A^{-1}, A = B^{-1} \\ \text{满足交换律, } AB = BA \end{cases}$$

$$(2) AB \text{ 可交换的充分条件 } \begin{cases} B = f(A), A^{-1}, A^* \\ AB = aA + bB (a, b \neq 0) \\ A^2 + aAB = E, (a \neq 0) \end{cases}$$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 求 X .

Solution

(1) 由 $A^3 = 0 \implies \lambda^3 = 0 \implies \lambda_i = 0$ 又 $tr(A) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ 故 $a = 0$

(2)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= X(E - A^2) - AX(E - A^2) \\ &= (E - A)X(E - A^2) = E \end{aligned}$$

有 $E - A, E - A^2$ 均可逆 (用特征值) 故

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1}$$

通过初等行变换化为行最简型有

$$(E - A - A^2 \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid (E - A - A^2)^{-1})$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

1.3 秩的计算与证明

秩

秩的定义: $\exists r$ 阶子式非零且 $\forall r+1$ 阶子式均为零秩的性质

- (1) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $r(A) < \min\{m, n\}$
- (2) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- (3) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (4) $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A \mid B) \leq r(A) + r(B)$
- (5) $r(A) = r(kA) (k \neq 0)$
- (6) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$
- (7) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 若 $r(A) = n$ 则 $r(AB) = r(B)$, 若 $r(A) = m$ 则 $r(CA) = r(C)$
左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变
- (8) $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
- (9) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A, B 为 n 阶矩阵, (XY) 表示分块矩阵, 则:

- A $r(A \mid AB) = r(A)$
- B $r(A \mid BA) = r(A)$
- C $r(A \mid B) = \max\{r(A), r(B)\}$
- D $r(A \mid B) = r(A^T B^T)$

Solution

(方法一) 由性质 4, 联立的秩大于等于每一个有

$$r[A(E, B)] \geq r(A)$$

由性质 3, 乘积的秩小于等于每一个有

$$r[A(E, B)] \leq r(A)$$

故 A 选项正确

易错点, B 选项为啥不能写成

$$r[(E + B)A]$$

其中 $(E + B)_{n \times 2n}$, $A_{n \times 2}$ 列 \neq 行无法乘

(方法二)

$$r(A, AB) = r[A(E, B)]$$

其中 (E, B) 显然行满秩, 由性质 7 右乘行满列则秩不变, 即

$$r(A, AB) = r(A)$$

(方法三)

$$AB = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{n1}\alpha_n, \dots, b_{1n}\alpha_1 + \dots + b_{nn}\alpha_n)$$

即 AB 的列向量可以由 A 的列向量线性表示, 故由极大无关组的定义有

$$r(A, AB) = r(A)$$

(方法四) 广义初等变化 (分块矩阵)

$$(A, AB) = (A, O) \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} \implies r(A, AB) = r(A, O) = r(A)$$

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(I) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

Solution

证明第二个, 第一个和第二个基本一致. 由 $A^2 = E$ 有 $(A + E)(A - E) = 0$ 故

$$r(A + E) + r(A - E) \leq n$$

又

$$r(A + E) + r(A - E) = r(A + E) + r(E - A) \geq r(2E) = n$$

因此 $r(A + E) + r(A - E) = n$

若 A 的二次方程有两个互异根, 则因式分解后, 秩的和为 n

1.4 关于伴随矩阵

Remark

伴随矩阵的性质

$$(1) \quad AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A| \neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$$

$$(2) \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(3) \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(4) \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(5) \quad (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$(6) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$(7) \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

$$(8) \quad r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

- (A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) 6

Solution

由题设有

$$(1, \dots, 1) A = 2(1, \dots, 1)$$

两边同时右乘 A^* 即

$$(1, \dots, 1) A^* = 3(1, \dots, 1)$$

故 A^* 的各列元素之和均为 3

各行/列元素之和

(各行元素之和为 λ) 通过右乘列向量即

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 为 } A \text{ 的特征值为 } \lambda \text{ 的特征向量}$$

(各列元素之和为 λ) 通过做成行向量即

$$(1, \dots, 1) A = \lambda (1, \dots, 1)$$

10. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n(n \geq 3)$ 阶非零矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

- (1) $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \iff A^* = A^T \iff AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;
 (2) $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \iff A^* = -A^T \iff AA^T = E$ 且 $|A| = -1$.

Solution

这道题的结论比较重要 第一个充要条件通过定义即可证明即

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T$$

下面证明第二个充要条件.

右推左, 由于 $AA^T = E$ 且 $|A| = 1$ 则

$$A^* = |A| A^{-1} = A^{-1} = A^T$$

左推右, 由 $A^* = A^T$ 则 $|A^*| = |A|^{n-1} = |A^T| = |A|$ 从而 $|A| = 0, 1, -1$

由于 $A \neq O$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 按第一行展开有

$$|A| = a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 > 0 \implies |A| = 1$$

又

$$AA^T = AA^* = |A|E = E$$

1.5 初等变换与初等矩阵

初等变换与初等矩阵的性质

- (1) $|E(i, j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$
- (2) $E(i, j)^T = E(i, j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$
- (3) $E(i, j)^{-1} = E(i, j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$
- (4) 初等行(列)变换相当于左(乘)对应的初等矩阵
- (5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B , 则:

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*
- (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 得 B^*
- (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$
- (D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

Solution

有题设有

$$E(1, 2)A = B$$

即

$$\begin{aligned} B^* &= A^* [E(1, 2)]^* \\ &= A^* |E(1, 2)| E^{-1}(1, 2) \\ &= -A^* E(1, 2) \end{aligned}$$

即交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$