

# 姜晓千 2023 年强化班笔记

## 数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 3 日

# 相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 3 日

# 目录

第一章 补充知识-概率论	1
1.1 配对问题 . . . . .	1
1.2 几个概率的不等式 . . . . .	2
1.3 轮流射击模型 . . . . .	3
1.4 补充: 随机变量的矩 . . . . .	4

# 第一章 补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计 茆诗松

(2) 做题总结

## 1.1 配对问题

问题描述: 在一个有  $n$  个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的  $n$  件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

*Solution.* (配对问题)

设  $A_i$  为事件: 第  $i$  个人自己抽到自己的礼物,  $i = 1, 2, \dots, n$  所求概率为

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

...

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} P(A_i A_{i+1} A_{i+2}) \\
 &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\
 &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 上述概率由  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

□

## 1.2 几个概率的不等式

1.  $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$
2.  $P(A_1 A_2 \dots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)$  (Boole 不等式)
3.  $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

**Proof.** 相关证明如下:

(1) 由于  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \implies P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于  $n = 2$ , 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于  $n = k$  个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) - (k-1)$$

考虑  $n = k+1$  个事件  $A_1 A_2 \dots A_{k+1}$ , 不妨令  $B = A_1 A_2 \dots A_k$ , 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}) = P(B A_{k+1}) \geq P(B) + P(A_{k+1}) - 1 \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1}) - (k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由  $P(A) \geq P(AB), P(B) \geq P(AB)$ , 则  $P(A)P(B) \geq P(AB)^2$ , 则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB))$$

令  $x = P(AB)$ , 则  $f(x) = x(1-x)$ , 当  $x = \frac{1}{2}$  时, 取得  $f(x)_{\max} = \frac{1}{4}$  即

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

由于  $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$ , 即  $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$  则

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - P(A) + P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(\bar{B}) \leq \frac{1}{4}$$

即

$$P(AB) - P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

### 1.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为  $\alpha$ , 乙命中的概率为  $\beta$ . **甲先射**, 谁先设中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

*Solution.*

(方法一) 记事件  $A_i$  为第  $i$  次射中目标,  $i = 1, 2, \dots$ , 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \dots$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2 \dots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{乙获胜}) &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \dots \\ &= \beta(1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1 - \alpha)(1 - \beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

□

## 1.4 补充: 随机变量的矩

设  $(X, Y)$  是二维随机变量, 如果  $E(X^k Y^l)$  存在, 则称  $E(X^k), (k = 1, 2, \dots)$  为  $X$  的  $k$  阶原点矩; 称  $E(X - EX)^k, k = (2, 3, \dots)$  为  $X$  的  $k$  阶中心矩; 称  $E(X^k Y^l), (k, l = 1, 2, \dots)$  为  $X$  与  $Y$  的  $k + l$  阶混合原点矩; 称  $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l], (k, l = 1, 2, \dots)$  为  $X, Y$  的  $k + l$  阶混合中心矩