姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 6 月 27 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 6 月 27 日

目录

第一章　函数极限连续

1.1　函数的性态

Remark. (有界性的判定)

连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界

连续函数在开区间 (a,b) 上只需要判断端点处的左右极限, 若 $\lim_{x\to a^+} \neq \infty$ 且 $\lim_{x\to b^-} \neq \infty$, 则连续函数在该区间内有界.

1. 下列函数无界的是

$$
\begin{aligned}
&(A) \quad f(x) = \frac{1}{x}\sin x, x \in (0,+\infty)\\
&(B) \quad f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)\\
&(C) \quad f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)\\
&(D) \quad f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, x \in (0,2022)
\end{aligned}
$$

Solution.

(A) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} = 0$ 均为有限值, 故 A 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(B) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} = 1$ 均为有限值, 故 B 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(C) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} = 0$ 在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间 $(0,+\infty)$ 无界

(D) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^x 1dt = 0$, $\lim_{x\to 2022^-} f(x) = \int_0^{2022} \frac{\sin t}{t}dt =$ 有限值 故 D 在区间 $(0,2022)$ 有界 □

Remark. (导函数与原函数的奇偶性与周期性)

连续奇函数的所有原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 都是偶函数

连续偶函数仅有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数

2. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A}) \quad \int_0^x f(t^2)dt \\ &(\mathrm{B}) \quad \int_0^x f^2(t)dt \\ &(\mathrm{C}) \quad \int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt \\ &(\mathrm{D}) \quad \int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt \end{aligned}$$

Solution. 这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令 $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt = -\int_0^x f(t^2)dt = -F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t)dt = -\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C) $t[f(t)-f(-t)]$ 是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D) $t[f(t)+f(-t)]$ 是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数 □

1.2 极限的概念

Definition 1.2.1 (函数极限的定义)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时，必有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

3. (2014, 数三) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

$$\text{(A)}|a_n| > \frac{|a|}{2} \qquad \text{(B)}|a_n| < \frac{|a|}{2} \qquad \text{(C)}a_n > a - \frac{1}{n} \qquad \text{(D)}a_n < a + \frac{1}{n}$$

Solution. 由数列极限的定义可知当 n 充分大的时候有 $|a_n - a| < \epsilon$
考虑选项 C,D, 令 $\epsilon = \frac{1}{n}$ 则 $|a_n - a| < \frac{1}{n} \implies a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$ □

1.3 函数极限的计算

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分的那么明显, 目标都是往最简单 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\cdot}{\infty}$ 模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

Remark. (类型一 $\frac{0}{0}$ 型)

4. (2000, 数二) 若 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

$$\text{(A) } 0 \qquad \text{(B) } 6 \qquad \text{(C) } 36 \qquad \text{(D) } \infty$$

Solution. 这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了.
$\sin 6x = 6x - 36x^2 + o(x^3)$, 带入题目极限有

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = 36$$

□

5. (2002, 数二) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \to 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不等于 (B)等于 1 (C)等于 2 (D)等于 3

Solution. 由微分方程和 $y(0) = y'(0) = 0$ 可知 $y''(0) = 1$, 则 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, 则

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

□

Remark. (类型二 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t\right] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t\right] dt}{x} &= \lim_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - x}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Remark. (类型三 $0 \cdot \infty$ 型)

7. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) \ln\left(1 + e^{1/x}\right)$

Solution. □

Remark. (类型四 $\infty - \infty$ 型)

8. 求极限 $\lim_{x\to\infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2\right)$

Solution. 【详解】 □

Remark. (类型五 0^0 与 ∞^0 型)

9. (2010, 数三) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/x}-1\right)^{1/\ln x}$

Solution. 【详解】 □

Remark. (类型六 1^∞ 型)

10. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{1/x}\quad(a>0,n\in\mathbb{N})$

Solution. □

1.4 已知极限反求参数

Remark. (方法)

11. (1998, 数二) 确定常数 a,b,c 的值, 使 $\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ (c\neq 0)$

Solution. 【详解】 □

1.5 无穷小阶的比较

Remark. (方法)

12. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$。证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

Solution. 【详解】 □

13. (2006, 数二) 试确定 A,B,C 的值, 使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

Solution. 【详解】 □

14. (2013, 数二、数三) 当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值。

Solution. 【详解】 □

1.6 数列极限的计算

Remark. (方法)

15. (2011, 数一、数二)

(i) 证明：对任意正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(ii) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

Solution. 【详解】 □

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$,$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

Solution. 【详解】 □

17. (2019, 数一、数三) 设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$。

(i) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$

(ii) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

Solution. 【详解】 □

18. (2017, 数一、数二、数三) 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Solution. 【详解】 □

1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则常数 a,b 满足

(A) $a<0,b<0$ (B) $a>0,b>0$

(C) $a\le 0,b>0$ (D) $a\ge 0,b<0$

Solution. 【详解】 □

第二章　一元函数微分学

2.1　导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

$$(A)\ f(a)=0 \text{ 且 } f'(a)=0$$
$$(B)\ f(a)=0 \text{ 且 } f'(a)\neq 0$$
$$(C)\ f(a)>0 \text{ 且 } f'(a)>0$$
$$(D)\ f(a)<0 \text{ 且 } f'(a)<0$$

Solution. 【详解】 □

2. (2001, 数一) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

$$(A)\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h) \text{ 存在}$$
$$(B)\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h) \text{ 存在}$$
$$(C)\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h) \text{ 存在}$$
$$(D)\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)] \text{ 存在}$$

Solution. 【详解】 □

3. (2016, 数一) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots \end{cases}$, 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导

(D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

Solution. 【详解】 □

2.2 导数与微分的计算

Remark (类型一分段函数求导).

4. (1997, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$($A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二复合函数求导).

5. (2012, 数三) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x}, & x \ge 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$,$y = f(f(x))$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

Solution. 【详解】 □

Remark (类型三隐函数求导).

6. (2007, 数二) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定。设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$

Solution. 【详解】 □

Remark (类型四反函数求导).

7. (2003, 数一、数二) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

   (i) 将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程

   (ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解

Solution. 【详解】 □

Remark (类型五参数方程求导).

8. (2008, 数二) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solution. 【详解】 □

Remark (类型六高阶导数).

9. (2015, 数二) 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$__

Solution. 【详解】 □

2.3 导数应用-切线与法线

Remark (类型一直角坐标表示的曲线).

10. (2000, 数二) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二参数方程表示的曲线).

11. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为__

Solution. 【详解】 □

Remark (类型三极坐标表示的曲线).

12. (1997, 数一) 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为__

Solution. 【详解】 □

2.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

$$(A)\ y = x + \sin x \quad (B)\ y = x^2 + \sin x$$
$$(C)\ y = x + \sin\frac{1}{x} \quad (D)\ y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$$

Solution. 【详解】 □

14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

$$(A)\ 0 \quad (B)\ 1 \quad (C)\ 2 \quad (D)\ 3$$

Solution. 【详解】 □

2.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

$$(A)\ \frac{\sqrt{10}}{50} \quad (B)\ \frac{\sqrt{10}}{100} \quad (C)\ 10\sqrt{10} \quad (D)\ 5\sqrt{10}$$

Solution. 【详解】 □

2.6 导数应用-极值与最值

17. (2000, 数二) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 且 $f'(0)=0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

Solution. 【详解】 □

18. (2010, 数一、数二) 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值

Solution. 【详解】 □

19. (2014, 数二) 已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$, 且 $y(2)=0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值

Solution. 【详解】 □

2.7 导数应用-凹凸性与拐点

20. (2011, 数一) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

Solution. 【详解】 □

2.8 导数应用-证明不等式

21. (2017, 数一、数三) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x)>0$, 则

(A) $f(1)>f(-1)$ (B) $f(1)<f(-1)$

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$ (D) $|f(1)|<|f(-1)|$

Solution. 【详解】 □

22. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a)=0$,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$。设 $b>a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$, 证明 $a<x_0<b$。

Solution. 【详解】 □

2.9 导数应用-求方程的根

23. (2003, 数二) 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数。

Solution. 【详解】 □

24. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数。

Solution. 【详解】 □

2.10 微分中值定理证明题

Remark (类型一证明含有一个点的等式).

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$。证明:
    (i) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;
    (ii) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

Solution. 【详解】 □

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二证明含有两个点的等式).

27. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$。证明:

    (i) 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$;

    (ii) 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使得 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型三证明含有高阶导数的等式或不等式).

28. (2019, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$。证明:

    (i) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

    (ii) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$。

Solution. 【详解】 □

第三章　一元函数积分学

3.1　定积分的概念

1. 例 1 (2007, 数一、数二、数三) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 [-3,-2],[2,3] 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 [-2,0],[0,2] 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是:

$$(A)F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

$$(A)\ (0,1) \quad (B)\left(1,\frac{\pi}{2}\right) \quad (C)\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \quad (D)(\pi,+\infty)$$

Solution. 【详解】 □

3. 例 3 (2003, 数二) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x}dx$, 则

$$(A)I_1 > I_2 > 1 \quad (B)1 > I_1 > I_2$$
$$(C)I_2 > I_1 > 1 \quad (D)1 > I_2 > I_1$$

Solution. 【详解】 □

3.2　不定积分的计算

4. 例 5 (2009, 数二、数三) 计算不定积分 $\int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}dx (x > 0)$

Solution. 【详解】 □

5. 例 6 求 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

Solution. 【详解】 □

3.3 定积分的计算

6. 例 7 (2013, 数一) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$

Solution. 【详解】 □

7. 例 8 求下列积分:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx$$

Solution. 【详解】 □

8. 例 9 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

Solution. 【详解】 □

3.4 反常积分的计算

9. 例 10 (1998, 数二) 计算积分 (题目内容缺失)

Solution. 【详解】 □

3.5 反常积分敛散性的判定

10. 例 11 (2016, 数一) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛, 则

$$(A)\ a<1\ \ b>1$$

$$(B)\ a>1\ \ b>1$$

$$(C)\ a<1\ \ a+b>1$$

$$(D)\ a>1\ \ a+b>1$$

Solution. 【详解】 □

11. 例 12 (2010, 数一、数二) 设 m, n 均为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) m

(B) n

(C) m, n

(D) m, n

Solution. 【详解】 □

3.6 变限积分函数

12. 例 13 (2013, 数二) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x < \pi \\ 2, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$,$F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则

(A) $x = \pi$ $F(x)$

(B) $x = \pi$ $F(x)$

(C) $F(x)$ $x = \pi$

(D) $F(x)$ $x = \pi$

Solution. 【详解】 □

13. 例 14 (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 3\pi]$ 上连续, 在 $(0, 3\pi)$ 内是函数的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(i) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(ii) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution. 【详解】 □

3.7 定积分应用求面积

14. 例 15 (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y = e^{-x}\sin x (x \ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution. 【详解】 □

3.8 定积分应用求体积

15. 例 16 (2003, 数一) 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(i) 求 D 的面积 A;

(ii) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

Solution. 【详解】 □

16. 例 17 (2014, 数二) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution. 【详解】 □

3.9 定积分应用求弧长

17. 例 18 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 的全长.

Solution. 【详解】 □

3.10 定积分应用求侧面积

18. 例 19 (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}(0 \leq x \leq 1)$ 与 $x = \cos^3 t$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution. 【详解】 □

3.11 一定积分物理应用

19. 例 20 (2020, 数二) 设边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 设重力加速度为 g, 水密度为 ρ, 则该平板一侧所受的水压力为

Solution. 【详解】 □

3.12 二证明含有积分的等式或不等式

20. 例 21 (2000, 数二) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

    (i) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$;

    (ii) 求 $\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$

    Solution.【详解】 □

21. 例 22 (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加,$0 \le g(x) \le 1$. 证明:

    (i) $0 \le \int_a^x g(t)dt \le x - a, x \in [a, b]$;

    (ii) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

    Solution.【详解】 □

第四章　常微分方程

1. 例 1 (1998, 数一、数二) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于

$$(A)\ 2\pi \quad (B)\ \pi \quad (C)\ e^{\frac{\pi}{4}} \quad (D)\ \pi e^{\frac{\pi}{4}}$$

Solution.【详解】 □

2. 例 2 (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导,$f(x) > 0$,$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$$

求 $f(x)$。

Solution.【详解】 □

4.1　一阶微分方程的解法

Remark (类型一可分离变量).

3. 例 3 (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0 \quad (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

Solution.【详解】 □

Remark (类型二一阶齐次).

4. 例 4 (2010, 数二、数三) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解。若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

$$(A)\ \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = \frac{1}{2} \quad (C)\ \lambda = \frac{2}{3},\ \mu = \frac{1}{3}$$

Solution. 【详解】 □

Remark (类型三一阶线性).

5. 例 5 (2018, 数一) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。
   (i) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;
   (ii) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型四伯努利方程 (数一掌握)).

6. 例 6 求解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型五全微分方程 (数一掌握)).

7. 例 7 求解下列微分方程:

$$(1)\ (2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2e^y - 2y)dy = 0;$$
$$(2)\ \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Solution. 【详解】 □

4.2 二阶常系数线性微分方程

8. 例 8 (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

$$(A)\ Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$
$$(B)\ Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$
$$(C)\ Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$
$$(D)\ Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

Solution. 【详解】 □

9. 例 9 (2015, 数一) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

$$(A)\ a = -3, b = 2, c = -1$$
$$(B)\ a = 3, b = 2, c = -1$$
$$(C)\ a = -3, b = 2, c = 1$$
$$(D)\ a = 3, b = 2, c = 1$$

Solution. 【详解】 □

10. 例 10 (2016, 数二) 已知 $y_1(x) = e^x$,$y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$ 的两个解。若 $u(-1) = e$,$u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution. 【详解】 □

11. 例 11 (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$。
    (i) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;
    (ii) 若 $y(0) = 1$,$y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值。

Solution. 【详解】 □

4.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 例 12 求解微分方程 $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$。

Solution. 【详解】 □

4.4 二阶可降阶微分方程

Remark (方法数一、数二掌握数三大纲不要求).

13. 例 13 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

Solution. 【详解】 □

4.5 欧拉方程

Remark (方法数一掌握数二、数三大纲不要求).

14. 例 14 求解微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$。

Solution. 【详解】 □

4.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. 例 17 (2005, 数二) 用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, 并求其满足 $y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=2$ 的特解。

Solution. 【详解】 □

4.7 微分方程综合题

Remark (类型一综合导数应用).

18. 例 18 (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。求曲线 L 的方程。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二综合定积分应用).

19. 例 19 (2009, 数三) 设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$。已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$,$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型三综合变限积分).

20. 例 20 (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型四综合多元复合函数).

21. 例 21 (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution. 【详解】 □

Remark (类型五综合重积分).

22. 例 22 (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint_{D_t} f(t)dxdy$$

其中 $D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x,0\le x\le t\}(0<t\le 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution. 【详解】 □

第五章　多元函数微分学

5.1　多元函数的概念

1. 例 1 求下列重极限:

$$(1)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} \quad (\alpha \ge 0, \beta \ge 0);$$

$$(2)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2};$$

Solution.【详解】 □

2. 例 2 (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

$$(A)\ 若极限\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}存在, 则f(x,y)在点(0,0)处可微$$

$$(B)\ 若极限\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}存在, 则f(x,y)在点(0,0)处可微$$

$$(C)\ 若f(x,y)在点(0,0)处可微, 则极限\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}存在$$

$$(D)\ 若f(x,y)在点(0,0)处可微, 则极限\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}存在$$

Solution.【详解】 □

3. 例 3 (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = 0$$

则 $dz|_{(0,1)} =$

Solution.【详解】 □

5.2 多元复合函数求偏导数与全微分

4. 例 4 (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且

$$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,$$
$$f(x,x^2)=2x^2\ln x$$

则 $df(1,1)=$

$$(A)\ dx+dy \quad (B)\ dx-dy \quad (C)\ dy$$

Solution. 【详解】 □

5. 例 5 (2011, 数一、数二) 设 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution. 【详解】 □

5.3 多元隐函数求偏导数与全微分

6. 例 6 (2005, 数一) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

$$(A)\ 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 z=z(x,y)$$
$$(B)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 x=x(y,z) 和 z=z(x,y)$$
$$(C)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 y=y(x,z) 和 z=z(x,y)$$
$$(D)\ 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 x=x(y,z) 和 y=y(x,z)$$

Solution. 【详解】 □

7. 例 7 (1999, 数一) 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution. 【详解】 □

5.4 变量代换化简偏微分方程

8. 例 8 (2010, 数二) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

Solution. 【详解】 □

5.5 求无条件极值

9. 例 9 (2003, 数一) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution. 【详解】 □

10. 例 10 (2004, 数一) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

Solution. 【详解】 □

5.6 求条件极值 (边界最值)

11. 例 11 (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

$$(A)\ 若 f'_x(x_0,y_0)=0, 则 f'_y(x_0,y_0)=0$$
$$(B)\ 若 f'_x(x_0,y_0)=0, 则 f'_y(x_0,y_0)\neq 0$$
$$(C)\ 若 f'_x(x_0,y_0)\neq 0, 则 f'_y(x_0,y_0)=0$$
$$(D)\ 若 f'_x(x_0,y_0)\neq 0, 则 f'_y(x_0,y_0)\neq 0$$

Solution. 【详解】 □

12. 例 12 (2013, 数二) 求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

Solution. 【详解】 □

13. 例 13 (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则

$$(A)\ u(x,y)的最大值和最小值都在D的边界上取得$$
$$(B)\ u(x,y)的最大值和最小值都在D的内部取得$$
$$(C)\ u(x,y)的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得$$
$$(D)\ u(x,y)的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得$$

Solution. 【详解】 □

14. 例 14 (2005, 数二) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$, 且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution. 【详解】 □

第六章　二重积分

6.1　二重积分的概念

1. 例 1 (2010, 数一、数二)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$$

$$(A)\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy \quad (B)\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$$
$$(C)\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy \quad (D)\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2016, 数三) 设 $J_i=\iint_{D_i}\sqrt[3]{x-y}dxdy(i=1,2,3)$, 其中

$$D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\},$$
$$D_3=\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\},$$

则

$$(A)\ J_1<J_2<J_3 \quad (B)\ J_3<J_1<J_2$$
$$(C)\ J_2<J_3<J_1 \quad (D)\ J_2<J_1<J_3$$

Solution. 【详解】 □

6.2 交换积分次序

3. 例 3 (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序:

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)dx =$$

Solution. 【详解】 □

4. 例 5 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr$ 的积分次序。

Solution. 【详解】 □

6.3 二重积分的计算

6. 例 6 (2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x,y)dxdy.$$

Solution. 【详解】 □

7. 例 7 计算 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$。

Solution. 【详解】 □

8. 例 8 (2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x+2y)dxdy$。

Solution. 【详解】 □

9. 例 9 (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 2\}$。

Solution.【详解】 □

10. 例 10 (2014, 数二、数三) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$$

Solution.【详解】 □

11. 例 11 (2019, 数二) 已知平面区域 $D=\{(x,y)||x|\le y, (x^2+y^2)^3\le y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

Solution.【详解】 □

6.4 其他题型

13. 例 12 (2010, 数二) 计算二重积分 $I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$, 其中 (题目描述不完整)

Solution.【详解】 □

14. 例 13 (2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x-y)dxdy$, 其中

$$D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}.$$

Solution.【详解】 □

第七章　无穷级数

7.1　数项级数敛散性的判定

1. 例 1 (2015, 数三) 下列级数中发散的是

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\quad (C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}\quad (D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2017, 数三) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$

$$(A)\ 1\quad (B)\ 2\quad (C)\ -1\quad (D)\ -2$$

Solution. 【详解】 □

7.2　交错级数

3. 例 3 判定下列级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}\quad (2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Solution. 【详解】 □

7.3　任意项级数

4. 例 4 (2002, 数一) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

$$(A)\qquad (B)\qquad (C)\qquad (D)$$

Solution. 【详解】 □

5. 例 5 (2019, 数三) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n\text{条件收敛}\quad(B)\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n\text{绝对收敛}$$
$$(C)\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)\text{收敛}\quad(D)\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)\text{发散}$$

Solution. 【详解】 □

7.4 幂级数求收敛半径与收敛域

6. 例 6 (2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的

$$(A)\ ,\quad(B)\ ,$$
$$(C)\ ,\quad(D)\ ,$$

Solution. 【详解】 □

7. 例 7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n+1}x^n$ 的收敛域.

Solution. 【详解】 □

7.5 幂级数求和

8. 例 8 (2005, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

Solution. 【详解】 □

9. 例 9 (2012, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

Solution. 【详解】 □

10. 例 10 (2004, 数三) 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$。求:

(i) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(ii) $S(x)$ 的表达式.

Solution. 【详解】 □

7.6 幂级数展开

11. 例 11 (2007, 数三) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

Solution. 【详解】 □

12. 例 12 将函数 $f(x) = \ln\frac{x}{x+1}$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

Solution. 【详解】 □

7.7 无穷级数证明题

13. 例 13 (2016, 数一) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$。设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$。证明:

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$.

Solution. 【详解】 □

14. 例 14 (2014, 数一) 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}, 0<b_n<\frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

(i) 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

(ii) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

Solution. 【详解】 □

7.8 傅里叶级数

15. 例 15 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于?, 在 $x=2\pi$ 收敛于?.

Solution. 【详解】由狄利克雷收敛定理知,$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于

$$S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

在 $x=2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

□

16. 例 16 将 $f(x)=1-x^2, 0\le x\le\pi$, 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

Solution. 【详解】对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶延拓, 由 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 知 $b_n=0$。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$, 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

□

第八章　多元函数积分学

8.1　三重积分的计算

1. 例 1 (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

   (I) 求曲面 Σ 的方程;

   (II) 求 Ω 的形心坐标.

   Solution. 【详解】 □

2. 例 2 (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

   Solution. 【详解】 □

8.2　第一类曲线积分的计算

3. 例 3 (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xyds=$

   Solution. 【详解】 □

4. 例 4 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

   Solution. 【详解】 □

8.3 第二类曲线积分的计算

Remark (类型一平面第二类曲线积分).

5. 例 5 (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

 (I) 求 $I(D_1)$ 的值;

 (II) 计算 $\oint_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

Solution. 【详解】 □

Remark (类型二空间第二类曲线积分).

6. 例 6 (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx + xdy + \frac{y^2}{2}dz =$

Solution. 【详解】 □

8.4 第一类曲面积分的计算

Remark (方法).

7. 例 7 (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点，若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

Solution. 【详解】 □

8.5 第二类曲面积分的计算

Remark (方法).

8. 例 8 (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

Solution.【详解】 □

9. 例 9 计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

Solution.【详解】 □

10. 例 10 (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy.$$

Solution.【详解】 □

第九章　行列式

行列式的主要内容

- 行列式的概念
  - 定义　$n!$项不同行不同列元素乘积的代数和
  - 性质
- 重要行列式
  - 上 (或下) 三角, 主对角矩阵
  - 副对角行列式
  - ab 型行列式
  - 拉普拉斯展开式
  - 范德蒙行列式
- 展开定理
  - $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
  - $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
- 行列式的公式
  - $|KA|=K^n|A|$
  - $|AB|=|A||B|$
  - $\left|A^T\right|=|A|$
  - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
  - $|A^*|=|A|^{n-1}$
  - 设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,　则 $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i$
  - 若 A 与 B 相似,　　则 $|A|=|B|$
- Cramer 法则　$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n\frac{D_n}{D}$

拉普拉斯展开式 (上, 下三角分块行列式的结论)

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D)$$

对于一般分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

若 B 可逆, 则有如下结论

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

9.1 数字行列式的计算

Remark. 基本方法

(1) 利用行列式的性质 (5 条) 来化简

(2) 要么出现重要行列式 (5 组)

(3) 要么展开定理 (0 比较多的时候)

1. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 根的个数为 ______

Solution. 第一列乘 -1 加到其他列

$$f(x)\underline{\underline{\text{第一列乘-1 加到其他列上面去}}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{第二列加到第四列}}}\left|\begin{array}{cc|cc} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{array}\right|$$

$$\underline{\underline{\text{拉普拉斯型}}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=[(x-2)-(2x-2)][-6(x-2)+(x-7)]=15x(x-1)$$

则 $x=0$ 或 $x=1$ □

2. 利用范德蒙行列式计算

$$\text{范德蒙行列式}V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & bc\\ b & b^2 & ac\\ c & c^2 & ab\end{vmatrix}=\underline{\qquad\quad}$$

Solution.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{第一列乘以 (a+b+c) 加到第三列}}\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+ac+ab+bc\\ b & b^2 & a^2+ac+ab+bc\\ c & c^2 & a^2+ac+ab+bc\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}}(ab+ac+bc)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

$$=(ac+bc+ab)(b-a)(c-a)(c-b)$$

□

3. 设 $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix} =$ ______.

Solution. 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$
\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3 & a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4 & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{将第一行分别乘以}-a_1,-a_2\ldots,\text{分别加到第2,3,...列}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{从下往上消, 分别乘以}\frac{a_i}{x_i}\text{,加到第一行}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_1x_2x_3x_4)(1+\sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i})
$$

□

爪型行列式

关键点在于**化简掉一条爪子**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Solution.

(方法一) 递推法

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha+\beta \\ D_2 &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \\ &\ldots \\ D_n &= (\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \\ D_n-\alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \\ &= \beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}) \\ &\ldots \\ &= \beta^{n-1}(D_2-D_1)=\beta^n \\ D_n &= \beta^n+\alpha D_{n-1}=\beta^n+\alpha(\beta^{n-1}+\alpha D_{n-2}) \\ &\ldots \\ &= \beta^n+\alpha\beta^{n-1}+\ldots+\alpha^n \end{aligned}$$

(方法二) 数学归纳法

$$
\begin{aligned}
&if\ \alpha=\beta, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2, assume, D_{n-1}=n\alpha^{n-1}\\
&then D_n=D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(n+1)\alpha^n\\
&when\ \alpha\neq\beta, D_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}, D_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\\
&Assume, D_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, then,\\
&D_n=\ldots=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

(方法三) 二阶差分方程

$$
\begin{aligned}
D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0\\
D_{n+2}-(\alpha+\beta)D_{n+1}+\alpha\beta D_n=0
\end{aligned}
$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$
\begin{aligned}
&r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta=0\\
&r_1=\alpha \qquad r_2=\beta
\end{aligned}
$$

差分方程的关键r^n代换e^{rx}

如果 $\alpha=\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=(C_1+C_2n)\alpha^n, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&\text{得到} C_1=C_2=1,\ D_n=(n+1)\alpha^n
\end{aligned}
$$

如果 $\alpha\neq\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n, \text{由} D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&C_1=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, C_2=\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\\
&D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

□

Corollary 9.1.1. 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\,\alpha^n, & \alpha=\beta \\ \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \end{cases}.$$

9.2 代数余子式求和

Remark. 代数余子式求和的基本办法

(1) 代数余子式的定义 (求一个的时候使用)

(2) 展开定理 (求一行或者一列的时候使用)

(3) 利用伴随矩阵的定义 (求全部代数余子式的时候使用)

5. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则 $A_{41}+A_{42}+A_{43} =$ ____________, $A_{44}+A_{45} =$ ____________

Solution.

(方法一) 利用展开定理构建新的矩阵来计算

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&0&0\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$$

$$A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\0&0&0&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$$

但这样 $|A|=27$ 的条件就没用到

(方法二)

直接对第四行使用展开定理, 则

$$|A|=A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27$$

直接对第二行使用展开定理, 则

$$|A|=2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0$$

相当于解 $A+2B=27, 2A+B=0$, 容易计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18$ □

6. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

则 $|A|$ 的所有代数余子式的和为____________

Solution. 对于求所有代数余子, 基本都是考察 A^* 的定义, 即

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

又由于 $A^* = |A|\, A^{-1}$, 对于这道题

$$|A| = (-1)^{(n+1)} n!$$

A^{-1} 可以通过分块矩阵来求

$$\begin{aligned} |A|A^{-1} &= |A| \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ \hline n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)^{-1} \\ &= |A| \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n} \\ \hline diag(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}) & 0 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n}|A| \\ \hline diag(|A|, \frac{|A|}{2}, \ldots, \frac{|A|}{n-1}) & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

则所有代数余子式之和为

$$(-1)^{(n+1)} n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

□

9.3 抽象行列式的计算

Remark. 抽象行列式的计算方法

(1) 通过行列式的性质

(2) 行列式的公式 (7 个)

7. (2005, 数一、二) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ __________

Solution.

(方法一利用性质)

$$\begin{aligned}
B &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3) \\
&= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_2+5\alpha_3) \\
&= 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_3) \\
&= 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
|B| &= 2\,|A| = 2
\end{aligned}$$

(方法二分块矩阵)

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = |A|(2-1)(3-1)(3-2) = 2$$

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, α, β 为 n 维列向量. 若 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$, 则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} =$ ____________

Solution. 这道题的关键在于巧妙构建行列式的和

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \alpha+0 \\ \beta^T & b+c-b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c-b \end{vmatrix} \\
&= |A|\,(c-b) = a(c-b)
\end{aligned}$$

□

9. 设 A 为 2 阶矩阵, $B = 2\begin{pmatrix} (2A)^{-1}-(2A)^* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 若 $|A|=-1$, 则 $|B|=$ __________

Solution. 这道题比较纯粹就是行列式公式的应用

$$\begin{aligned}|B| &= 2^4\,|A|\cdot\left|(2A)^{-1}-(2A)^*\right| \\ &= 2^4\,|A|\cdot\left|\frac{1}{2}A^{-1}-2A^*\right| \\ &= 2^4\left|\frac{1}{2}E-2|A|\right| = 100\end{aligned}$$

□

10. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, $A\neq E$, 证明 $|A|=0$

Solution. 这道题还是比较综合的 (或许更应该说可以从不同的角度思考问题, 这也是线代的核心思想) 但有几个易错点需要注意.

> **易错点**
>
> 由 $|A|^2=|A| \implies |A|=1$或$=0$, 又 $A\neq E \implies |A|\neq 1$, 故 $|A|=0$ 注意矩阵不等关系是无法推出行列式的不等关系的, 矩阵式数表只要顺序不同就不一样, 但不一样的矩阵其行列式完全有可能相等.
>
> 等于 1 的矩阵并非只能是 E

(方法一, 反证法) 若 $|A|\neq 0$, 则 A 可逆, 对于等式 $A^2=A$ 两边同乘 A^{-1}, 则 $A=E$ 与题设矛盾, 故 $|A|\neq 0$

(方法二, 秩) 由于 $A(A-E)=0 \implies r(A)+r(A-E)\leq n$, 又 $A\neq E, r(A-E)\geq 1$, 故 $r(A)\leq n$, 故 $|A|=0$

(方法三, 方程组) 由于 $A(A-E)=0$, 且 $A\neq E$ 可知方程 $AX=0$ 有非零解即 $(A-E)$,故 $r(A)<n, |A|=0$

(方法四, 特征值与特征向量) 由于 $A(A-E)=0, A\neq E$, 取 $A-E$ 的非零列向量 $\beta\neq 0, A\beta=0$ 故由特征值与特征值向量的定义,A 由特征值 0, 而 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ □

第十章 矩阵

10.1 求高次幂

1. 设 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA = O$, 且 $r(B) > 1$, 则 $A^n =$ ______.

Solution.

□

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $A^n =$ ________________.

Solution.

$\square$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵,$B = P^{-1}AP$, 则 $(B+E)^{100} =$ ______

Solution.

□

10.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

(A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C)$A + E$ 可逆 (D)$A - 3E$ 可逆

Solution.

$\square$

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,a, b 为非零常数. 证明:

   (a) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

   (b) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

   Solution.

□

6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3 = O$.

(a) 求 a 的值;

(b) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 求 X.

Solution.

□

10.3 秩的计算与证明

Remark. 秩的性质

(1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $r(A)<\min\{m,n\}$

(2) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

(3) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

(4) $\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A\mid B)\leq r(A)+r(B)$

(5) $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$

(6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,P 为 m 阶可逆矩阵,Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$, 若 $r(A)=m$ 则 $r(CA)=r(C)$

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times s$ 阶矩阵,$AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A,B 为 n 阶矩阵,(XY) 表示分块矩阵, 则:

(a) $r(A\ AB)=r(A)$

(b) $r(A\ BA)=r(A)$

(c) $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$

(d) $r(A\ B)=r(A^TB^T)$

Solution.

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

   (1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

   (II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

   Solution.

□

10.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

(1) $AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(5) $(A^T)^* = (A^*)^T$

(6) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(8) $r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D)6

Solution.

$\square$

10. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n(n \geq 3)$ 阶非零矩阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

    (a) $a_{ij} = A_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n) \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;

    (b) $a_{ij} = -A_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n) \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$.

Solution.

□

10.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

(1) $|E(i,j)|=-1, |E(i(k))|=k, |E(ij(k))|=1$

(2) $E(i,j)^T=E(i,j), E(i(k))^T=E(i(k)), E(ij(k))^T=E(ji(k))$

(3) $E(i,j)^{-1}=E(i,j), E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k)^{-1})=E(ij(-k))$

(4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵

(5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 则:

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 的 B^*

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$

(D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

Solution.

□

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} =$ ________________.

Solution.

□

第十一章　向量

11.1　线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0\ (km \neq 0)$，则

   (a) (A) α, β 与 α, γ 等价

   (b) (B) α, β 与 β, γ 等价

   (c) (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (d) (D) α 与 γ 等价

   Solution. 【详解】 □

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$，$\alpha_2 = (1, a + 2, -3a)^T$，$\alpha_3 = (-1, -b - 2, a + 2b)^T$，$\beta = (1, 3, -3)^T$。当 a, b 为何值时，

   (a) (II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

   (b) (III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

   Solution. 【详解】 □

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$；向量组 (II) $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T$, $\beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T$, $\beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价，求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

   Solution. 【详解】 □

11.2 线性相关与线性无关的判定

3. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 则对任意常数 k, l, $\alpha_1 + k\alpha_3$, $\alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

   (a) (A) 必要非充分条件

   (b) (B) 充分非必要条件

   (c) (C) 充分必要条件

   (d) (D) 既非充分又非必要条件

   Solution. 【详解】 □

4. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0$, $A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

   Solution. 【详解】 □

5. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交，证明 β_1, β_2 线性相关。

   Solution. 【详解】 □

11.3 极大线性无关组的判定与计算

6. 设 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (3,2,-1,a+2)^T$, $\alpha_4 = (-2,-6,10,a)^T$。

   (a) (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

   (b) (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha = (4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

   Solution. 【详解】 □

7. 证明:

   (a) (I) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$；

   (b) (II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$。

   Solution. 【详解】 □

11.4 向量空间 (数一专题)

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

   (a) (I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基:

   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

Solution.【详解】 □

第十二章　线性方程组

12.1　解的判定

1. (2001，数三) 设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量, 且 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$，则线性方程组

   (a) (A) $Ax = \alpha$ 有无穷多解

   (b) (B) $Ax = \alpha$ 有唯一解

   (c) (C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

   (d) (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

   Solution.【详解】 □

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = m < n$，则下列结论不正确的是

   (a) (A) 线性方程组 $A^T x = 0$ 只有零解

   (b) (B) 线性方程组 $A^T A x = 0$ 有非零解

   (c) (C) $\forall b$，线性方程组 $A^T x = b$ 有唯一解

   (d) (D) $\forall b$，线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

   Solution.【详解】 □

12.2　求齐次线性方程组的基础解系与通解

2. (2011, 数一, 二) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶矩阵, $(1, 0, 1, 0)^T$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $A^* x = 0$ 的基础解系可为

(a) (A) α_1, α_2

(b) (B) α_1, α_3

(c) (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(d) (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

Solution. 【详解】 □

3. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a, b, c), a, b, c 不全为零, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ 满足 $AB = O$，求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解。

Solution. 【详解】 □

4. (2002, 数三) 设线性方程组

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n &= 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n &= 0 \\ &\vdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n &= 0 \end{aligned}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$。当 a, b 为何值时，方程组只有零解、有非零解，当方程组有非零解时，求其通解。

Solution. 【详解】 □

12.3 求非齐次线性方程组的通解

5. 设 A 为 4 阶矩阵, k 为任意常数, η_1, η_2, η_3 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解, 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution. 【详解】 □

6. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ 有三个不同的特征值, 其中 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。
   (a) (I) 证明 $r(A)=2$;
   (b) (II) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

   Solution.【详解】 □

7. (I) 求 λ, a 的值;
8. (II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解。

   Solution.【详解】 □

9. (I) η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的特解, 证明:
   (a) (II) $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关;
   (b) (III) $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 为 $Ax=b$ 所有解的极大线性无关组。

   Solution.【详解】 □

12.4 解矩阵方程

9. 矩阵方程解的判定

$$AX=B \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A)<r(A|B)$$

$$AX=B \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow r(A)=r(A|B)=n$$

$$AX=B \text{ 有无穷多解} \Leftrightarrow r(A)=r(A|B)<n$$

10. 矩阵方程的求法对 $(A|B)$ 作初等行变换，化为行最简形矩阵，得矩阵 X。
11. (例 4.10) 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

矩阵 X 满足 $AX+E=A^{2022}+2X$，求矩阵 X。

Solution. 【详解】 □

12. (例 4.11) (2014, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) (I) 求线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系；

(b) (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B。

Solution. 【详解】 □

12.5 公共解的判定与计算

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$(II) x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

Solution. 【详解】 □

13. 设齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$

(a) (1) 求方程组 (I) 的一个基础解系；

(b) (2) 当 a 为何值时，方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解，并求所有非零公共解。

Solution. 【详解】 □

14. (2005，数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解，求 a, b, c 的值。

Solution. 【详解】 □

第十三章　特征值与特征向量

13.1　特征值与特征向量的计算

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

2. (2003, 数一) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}A^*P$$

求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

Solution.【详解】 □

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2=O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

   (a) (A) 0

   (b) (B) 1

   (c) (C) 2

   (d) (D) 3

   Solution.【详解】 □

5. 设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\frac{1}{3}$，证明：

   (a) (I) 0 为 A 的特征值；

   (b) (II) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量；

   (c) (III) A 可相似对角化。

   Solution.【详解】 □

13.2 相似的判定与计算

6. (2019, 数一、二、三) 设

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&0&0\\-1&-1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

(I) 求 x,y 的值；(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。

Solution.【详解】 □

7. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，满足 $A^2=2E$，则 $|AB+A-B-E|=$ ________。

Solution.【详解】 □

13.3 相似对角化的判定与计算

8. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 3, -2，对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若

$$P = (\alpha_1, 2\alpha_2, -\alpha_3)$$

则 $P^{-1}AP =$ _______________。

Solution.【详解】 □

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明 A 可相似对角化。

Solution.【详解】 □

10. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

   (a) (I) 证明 P 为可逆矩阵；

   (b) (II) 若 $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution.【详解】 □

13.4 实对称矩阵的计算

11. (2010, 数二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ 4 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)^T$，求 a, Q。

Solution.【详解】 □

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O$，A 的各行元素之和均为零，且 $r(A) = 2$。

(a) (I) 求 A 的特征值与特征向量；

(b) (II) 求矩阵 A。

Solution. 【详解】 □

第十四章　二次型

14.1　求二次型的标准形

1. (2016，数二、三) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

   (a) $a>1$

   (b) $a<-1$

   (c) $-1<a<1$

   (d) $a=1$ 或 $a=-1$

   Solution. 【详解】 □

2. (2022，数一) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$。

   (a) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

   (b) 求正交变换 $x=Qy$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

   (c) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

   Solution. 【详解】 □

3. (2020，数一、三) 设二次型 $f(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=y_1^2+by_2^2$，其中 $b\geq 0$。

   (a) 求 a,b 的值；

   (b) 求正交矩阵 Q。

   Solution. 【详解】 □

14.2 合同的判定

4. (2008，数二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，与 A 合同的矩阵是

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Solution.【详解】 □

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

   (a) $PAP = B$;

   (b) $P^{-1}ABP = BA$;

   (c) $P^{-1}AP = B$;

   (d) $P^TAP = B$。

   成立的个数是

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

   Solution.【详解】 □

14.3 二次型正定与正定矩阵的判定

6. (2017，数一、二、三) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(A)=n$，则下列结论

   (a) A^TA 与单位矩阵等价；

   (b) A^TA 与对角矩阵相似；

   (c) A^TA 与单位矩阵合同；

   (d) A^TA 正定。

   正确的个数是

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

   Solution.【详解】 □

7. 证明：

   (a) 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则 $A-B^2$ 为正定矩阵；

   (b) 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $r(A+B)=n$，则 A^TA+B^TB 为正定矩阵。

   Solution.【详解】 □

第十五章　事件与概率论

15.1　事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的**集合**
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

Remark. (事件的运算律)

(1)　交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2)　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup A, A(BC) = (AB)C$

(3)　分配律　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

(4)　摩根律　$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \bar{(}AB) = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5)　吸收律　$A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,$P(A \cup B) = 1$, 则

$$(A)\ A \cup B = \Omega \quad (B)\ AB = \varnothing \quad (C)\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 \quad (D)\ P(A - B) = 0$$

Solution. 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$
注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确
对于 (C) 选项 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{AB}) = 1$ 正确
对于 (D) 选项, 由减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$ □

总结

(1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件

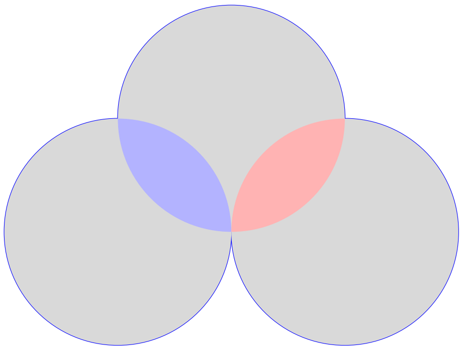
(2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件

这两个结论考虑**连续型随机变量**即可

2. (2020, 数一、三) 设 A, B, C 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 只有一个事件发生的概率为

$$(A)\ \frac{3}{4} \quad (B)\ \frac{2}{3} \quad (C)\ \frac{1}{2} \quad (D)\ \frac{5}{12}$$

Solution. 这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ □

3. 设随机事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$ ______

Solution. 根据结论, 有 A, B 互斥, 则 $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$ □

Corollary 15.1.1. 若 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 A, B 必然对立

Proof.

$$\begin{aligned} & AB = \bar{A}\bar{B} \\ \iff & AB \cup \bar{A}B = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \\ \iff & (A \cup \bar{A})B = \bar{A}(\bar{B} \cup B) \\ \iff & B = \bar{A} \end{aligned}$$

□

4. 设随机事件 A, B, C 两两独立, 满足 $ABC = \varnothing$, 且 $P(A) = P(B) = P(C)$,A, B, C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$

Solution. 由题意有 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 由加法公式与独立性有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) \\ &\quad - P(A)P(C) - P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

由 $P(A) = P(B) = P(C)$, 上式化为 $3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \implies P(A) = \frac{1}{4}$或$P(A) = \frac{3}{4}$, 显然 $P(A) \neq \frac{3}{4} > P(A \cup B \cup C)$, 故 $P(A) = \frac{1}{4}$ □

5. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{2}{3}$,$P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A|B) + P(B|A)$ 的最大值为 ______, 最小值为 ______.

Solution. 关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于 [0, 1] 之间, 事件 AB 的和事件不可能小于单独 A,B 发生概率之和, 事件 AB 的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A) + P(B) - 1 <= P(AB) \leq \min\left(P(A), P(B)\right) \leq P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)$$

□

15.2 三大概型的计算

Remark. 三大概率模型

经典概型 – 有限个等可能的样本点, **排列组合问题**

几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等

伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为 p, 不成功的概率为 $(1-p)$

6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中**有放回地**取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

Solution. (古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{3}}{3^4} = \frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序. □

7. 在区间 $(0,a)$ 中随机地取两个数, 则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为

Solution. (几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4}\cdot a+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\frac{a^2}{4x}dx}{a^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

□

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为 p, 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

Solution. 失败零次–p^5, 失败一次–$\binom{1}{5}p^4(1-p)p$, 失败两次–$\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$

故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5+\binom{1}{5}p^4(1-p)p+\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

□

15.3 三大概率公式的计算

Remark. 三大概率公式

条件概率公式 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

推论 $P(AB)=P(B)P(A\mid B), P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid P(A_1))P(A_3|P(A_1A_2))\ldots$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

贝叶斯公式 $P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

若称 $P(B_j)$ 为 B_j 的先验概率, 称 $P(B_j\mid A)$ 为 B_j 的后验概率. 则贝叶斯公式专门用于计算后验概率的公式.

9. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A\cup B)=0.6$,$P(B|\bar{A})=0.2$, 则 $P(A)=$ ______

Solution.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6, P(B\mid\bar{A})=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.2$$

联立有

$$\frac{0.6-P(A)}{1-P(A)}=0.2$$

, 则 $P(A)=0.5$

□

10. (2018, 数一) 设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立, 满足 $BC=\varnothing$, 且

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$______.

Solution.

$$\begin{aligned}P(AC|AB\cup C)&=\frac{P(AC)}{P(AB\cup C)}\\&=\frac{P(A)P(C)}{P(AB)+P(C)}\\&=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

则 $P(C)=\frac{1}{4}$ □

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

(1) 求乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

Solution. (作为小题来考还可以)

方法一: 用概率

(1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_{3-k}^k}{C_6^3}$

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

则所求数学期望 $EX=\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+\frac{3}{20}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(A\mid x=k)\\&=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

方法二: 超几何分布

(1) $X \sim H(N, M, n), N=6, M=3, n=3$, 则 $EX = \frac{nM}{N} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)P(A \mid x=k) \\
&= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)\frac{k}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3} P(X=k)k \\
&= \frac{1}{6}EX \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

15.4 事件独立的判定

Remark. (事件独立的充要条件)

$$\begin{aligned}
&P(AB) = P(A)P(B) \\
&\iff P(A \mid B) = P(A) \\
&\iff P(A \mid \bar{B}) = P(A) \iff P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1) \\
&\iff A \text{ 与} \bar{B}, \text{ 或} \bar{A} \text{ 与} B, \text{ 或} \bar{A} \text{ 与} \bar{B} \text{ 相互独立} \\
&\iff P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1
\end{aligned}$$

12. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 则

(A) 若 $A \supset B$, 则 A, B 一定不相互独立

(B) 若 $B \supset A$, 则 A, B 一定不相互独立

(C) 若 $AB = \varnothing$, 则 A, B 一定不相互独立

(D) 若 $A = \bar{B}$, 则 A, B 一定不相互独立

Solution. (A)(B)(C) 考虑 $\varnothing$ 则都不对

(D) 由于 A 不是必然事件, 则 B 不是不可能事件, 则 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 根据下面的总结 A, B 一定不独立 □

总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

A, B 互不相容, 则 A, B 一定不独立

A, B 独立, 则 A, B 一定不互不相容

13. 设 A, B, C 为随机事件,A 与 B 相互独立, 且 $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

(A)相互独立 (B)两两独立, 但不一定相互独立

(C)不一定两两独立 (D)一定不两两独立

Solution. 由 $P(C) = 0$ 知 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立. □

两两独立与相互独立

$$\text{相互独立}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{array}\right\} \quad \text{两两独立} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array}\right.$$

第十六章　一维随机变量

16.1　分布函数的判定与计算

Remark. (分布函数的性质)

(1) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

(2) (单调不减) 当 $x_1 < x_2$ 时,$F(x_1) < F(x_2)$

(3) (右连续) $F(x+0) = F(x)$

上面三个性质为分布函数的定义, 只要满足上述性质的函数一定是某一个概率分布的分布函数

(4) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$

(5) $P\{X < x\} = F(x-0), P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$

$P\{a \le x \le b\} = P\{x \le b\} - P\{x < a\} = F(b) - F(a-0)$

$P\{a < x < b\} = P\{x < b\} - P\{x \le a\} = F(b-0) - F(a)$

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,a, b 为任意常数, 则下列一定不是分布函数的是

$$(A)\ F(ax+b) \quad (B)\ F(x^2+b) \quad (C)\ F(x^3+b) \quad (D)\ 1-F(-x)$$

总结

对于 $F(ax+b), F(ax^3+b), \dots$ 只要 $a > 0$ 则这些函数都是分布函数

对于 $F(a^2x+b), F(a^4+b), \dots$ 都一定不是分布函数

对于 $G(x) = 1 - F(-x)$

若 X 是连续性随机变量则是, 否则不是 ($F(x)$ 不满足左连续, 则 $G(x)$ 不满足右连续)

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 X 的分布函数 $F(x)=$______,$P\{-2<X<\frac{1}{4}\}=$______.

Solution.

(方法一变限积分)

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

根据 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$，有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \int_{-1}^{x}(1+t)\,\mathrm{d}t, & -1<x<0\\ \int_{-1}^{0}(1+t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\,\mathrm{d}t, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\le -1\\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P\{-2<X<\frac{1}{4}\}&=F(\frac{1}{4})-F(-2)\\ &=\int_{-2}^{\frac{1}{4}}f(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{23}{32}\end{aligned}$$

(方法二定积分)

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} C_1, & x < -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + C_2, & -1 \le x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_3, & 0 \le x < 1 \\ C_4, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\xlongequal{\text{由分布函数的定义}} \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

□

16.2 概率密度的判定与计算

Remark. (概率密度的性质)

(1) $f(x) \ge 0, -\infty < x + \infty$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

上面两条性质为概率密度的定义, 任何满足上面的函数都是某个概率的概率密度函数

(3) $P\{a < X \le b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

推广 $P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(4) 在 $f(x)$ **连续点**处有 $F'(x) = f(x)$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则下列必为概率密度的是

$$(A)\ f(-x+1) \quad (B)\ f(2x-1) \quad (C)\ f(-2x+1) \quad (D)\ f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

Solution. 由于 $f(x)$ 已经满足非负性, 故选项的非负性都不需要考虑, 只需要考虑正则性就可以.

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+1)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$

(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{1}{2}-1)dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 2$ □

总结

$f(ax+b)$ 为概率密度 $\iff$ $|a|=1$

4. (2011, 数一、三) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为分布函数, 对应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 为连续函数, 则下列必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$ (C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

总结

(1) 线性组合

$af_1(x)+bf_2(x), a>0, b>0$ 为概率密度 $\iff$ $a+b=1$

$aF_1(x)+bF_2(x), a>0, b>0$ 为分布函数 $\iff$ $a+b=1$

(2) 乘积

F_1F_2 一定是分布函数

f_1f_2 不一定是概率论密度

(3) 混搭

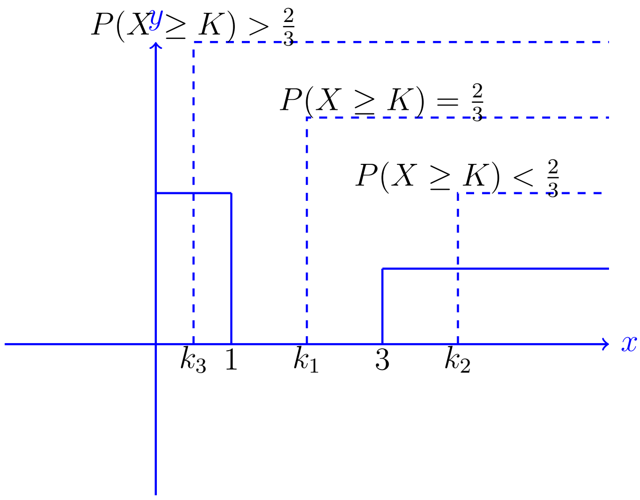
$f_1F_2+f_2F_1, 2f_1F_1, 2f_2F_2$ 是概率密度, 其余都不是.

5. (2000, 三) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1]\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6]\\ 0, & 其他\end{cases}$$

若 $P\{X\geq k\}=\frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是 ______.

Solution. 如图所示, 当且仅当 $1\leq k\leq 3$ 时候 $P(X\geq k)=\frac{2}{3}$ □



16.3 关于八大分布

Remark. (八大分布的概率分布与数字特征)

(1) 0-1 分布, $X\sim B(1,p)$ $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p\end{array}$, $EX=p, DX=p(1-p)$

(2) 二项分布,$X\sim B(n,p)$

$P\{X=k\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\ldots,n, EX=np, DX=np(1-p)$

(3) 泊松分布,$X\sim P(\lambda)$

$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots,$ $EX=\lambda, DX=\lambda$

(4) 几何分布,$X\sim G(p)$

$P=\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots,$ $EX=\frac{1}{p}, DX=\frac{1-p}{p^2}$

(5) 超几何分布,$X \sim H(N,M,n)$

$P=\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,\ldots,min(n,M),\ EX=\frac{nM}{N}$

(6) 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a \le x \le B \\ 0, & 其他\end{cases},\ F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b\end{cases}, EX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(7) 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0\end{cases},\ \lambda>0\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0\end{cases},\ EX=\frac{1}{\lambda}, DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

(8) 一般正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2),\ EX=\mu, DX=\sigma^2$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ F(\mu)=\frac{1}{2},\ F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

标准正态分布 $X \sim N(0,1)$ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(0)=\frac{1}{2},\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

正态分布的标准化若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

拓展-负二项分布

在一系列独立重复的伯努利试验 (每次试验只有“成功”或“失败”两种结果, 成功概率为 p) 中, 达到 r 次成功所需的试验总次数 X 服从负二项分布。

$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,r+2,\ldots,\quad EX=\frac{r}{p},\quad DX=\frac{r(1-p)}{p^2}$

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C\frac{\lambda^k}{k!},k=1,2,\cdots$, 则 $C=$______.

Solution.

(方法一: 级数) 由概率的规范性可知 $\sum_{k=1}^{\infty}C\frac{\lambda^k}{k!}=1$, 由于 $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 故 $C(e^\lambda-1)=1$, 故 $C=\frac{1}{e^\lambda-1}$

(方法二: 泊松分布) 考虑泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots$ □

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}$, 且 $EX=DX$, 则 $A=$___,$B=$___.

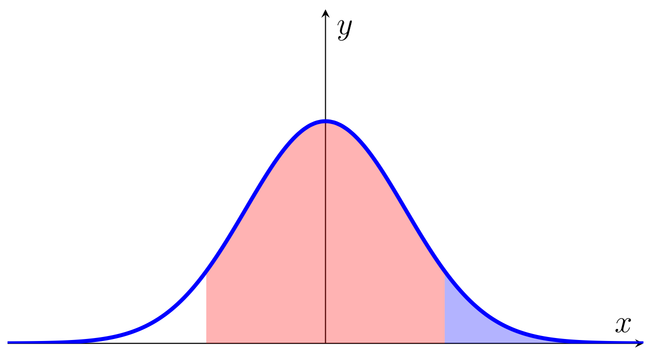
Solution. $f(x)=Ae^{\frac{B^2}{2}}e^{-\frac{(x-B)^2}{2}} \sim N(1,B^2)$, 又 $D(x)=E(x)$ 故 $B^2=1$, 对比正态分布的概率密度函数有 $Ae^{\frac{B^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 故 $A=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ □

总结

形如 $f(x) = Ae^{ax^2+b+c}, a < 0$ 一定可以化成某一个正态分布的概率密度.

8. (2004, 数一、三) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$。若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

$$(A)\ u_{\frac{\alpha}{2}} \quad (B)\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (C)\ u_{\frac{1-\alpha}{2}} \quad (D)\ u_{1-\alpha}$$



Solution. 如图所示,x 右侧的面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$ 故 x 是 $\frac{1-\alpha}{2}$ 上侧分位点 □

9. 设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$______.

Solution. 正态分布的基本套路就是遇事不决标准化 $P\{2 < X < 4\} = P\{0 < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{2}{\sigma}\} = 0.3$, 故 $P\{X < 0\} = P\{\frac{X-2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\} = \frac{1}{2} - 0.3 = 0.2$ □

10. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)(\mu < 0)$,$F(x)$ 为其分布函数,a 为任意常数, 则

$$(A)\ F(a) + F(-a) > 1 \quad (B)\ F(a) + F(-a) = 1$$
$$(C)\ F(a) + F(-a) < 1 \quad (D)\ F(\mu + a) + F(\mu - a) = \frac{1}{2}$$

Solution. 这道题是比较隐晦的考察了正态分布的对称性, 具体直接看总结. 但要注意先标准化再套结论! □

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \begin{cases} 1, & a + b = 1 \\ < 1, & a + b < 1 \\ > 1, & a + b > 1 \end{cases}$$

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 1 的指数分布, 则 $P\{1 < \max\{X,Y\} < 2\} =$______.

Solution.

$$\begin{aligned} P\{1<\max\{X,Y\}<2\} &= P\{\max\{X,Y\}<2\} - P\{\max\{X,Y\}\le 1\} \\ &= P\{X<2,Y<2\} - P\{X\le 1, Y\le 1\} \\ &\xlongequal{\text{由独立性}} P\{X<2\}P\{Y<2\} - P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\} \\ &= (1-e^{-2\lambda})^2 - (1-e^{-\lambda})^2 \end{aligned}$$

□

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{1 < \min\{X,Y\} < 2\} =$______.

Solution.

$$\begin{aligned} P\{1<\min\{X,Y\}<2\} &= P\{\min\{X,Y\}>1\} - P\{\min\{X,Y\}\ge 2\} \\ &= P\{X>1\}P\{Y>1\} - P\{X\ge 2\}P\{Y\ge 2\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

总结

对于 min 和 max 问题基本按照如下思路:

$$\begin{aligned} &P\{a<\min(X_1,X_2,\dots,X_n)<b\} \\ &= P\{\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>a\} - P\{\min(X_1,X_2,\dots,X_n)\ge b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P\{a<\max(X_1,X_2,\dots,X_n)<b\} \\ &= P\{\max(X_1,X_2,\dots,X_n)<b\} - P\{\min(X_1,X_2,\dots,X_n)\le a\} \end{aligned}$$

13. (2013, 数一) 设随机变量 $Y \sim E(1)$,$a>0$, 则 $P\{Y \le a+1 | Y > a\} =$______.

Solution. 由指数分布的无记忆性，有 $P\{Y \le a+1|Y > a\} = P\{0 < Y < 1\} = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$ □

14. 设随机变量 $X \sim G(p)$,m, n 为正整数，则 $P\{X > m+n|X > m\}$
   (A) 与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而减少
   (B) 与 m 无关，与 n 有关，且随 n 的增大而增大
   (C) 与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而减少
   (D) 与 n 无关，与 m 有关，且随 m 的增大而增大

Solution. 由几何分布的无记忆性，有 $P\{X > m+n|X > m\} = P\{X > n\} = \sum_{i=n+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$，故随着 n 增大概率反而减少 □

总结

指数分布与几何分布具有无记忆性

$$X \sim E(\lambda)$$
$$P\{x > s+t \mid x > s\} = P\{x > t\}$$
$$P\{x < s+t \mid x > s\} = P\{0 < x < t\}$$
$$X \sim G(p)$$
$$P\{x > n+m \mid x > m\} = P\{x > t\}$$
$$P\{x = n+m \mid x = m\} = P\{x = n\} = p(1-p)^{n-1}$$

16.4 求一维连续型随机变量函数的分布

Remark. 【方法】

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 求 $Y = g(X)$ 的分布.

分布函数法

(1) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$.

(2) 求 $Y = g(X)$ 在 X 的正概率密度区间的值域 (α, β) , 讨论 y .

当 $y < \alpha$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $\alpha \le y < \beta$ 时, $F_Y(y) = \int_{g(x) \le y} f_X(x)\, dx$;

当 $y \ge \beta$ 时, $F_Y(y) = 1$.

(3) 若 Y 为连续型随机变量, 则 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

公式法

设 $y = g(x)$ 在 X 的正概率密度区间单调, 值域为 (α, β) , 反函数为 $x = h(y)$, 则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, \alpha < y < \beta \\ 0, \end{cases}$$

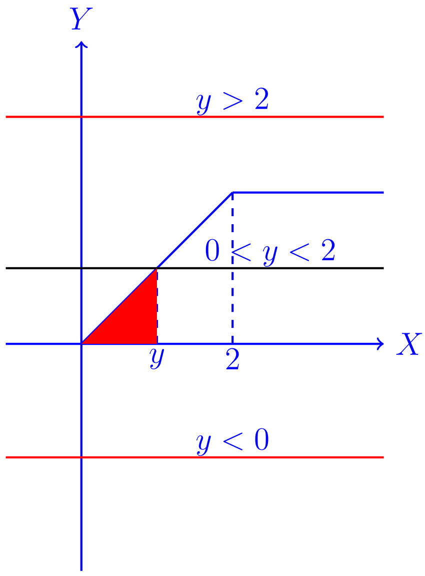
若 $y = g(x)$ 在 X 的正概率密度区间 $[a, b]$ 分段严格单调, 则分段运用公式法, 然后将概率密度相加.

15. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

(A) 为连续函数 (B) 为阶梯函数

(C) 至少有两个间断点 (D) 恰好有一个间断点

Solution. 这是一道比较简单的题目, 主要是用于演示所谓**图像法讨论 y** 的具体操作, 注意画的是 $X - Y$ 图像



故 $F_Y(y) = \min\{X, 2\} < y$, 当 $y < 0$ 时候 $F_Y(y) = 0$,$y \geq 2$,$F_Y(y) = 1$, 当 $0 \leq y < 2$ 时候, 有 $\int_0^y f(x)dx = 1 - e^{-\lambda y}$, 综上

$$F_Y = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

容易发现 $F(2-0) \neq 1$ 故存在一个跳跃间断点 □

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & 0 < x < 3 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$

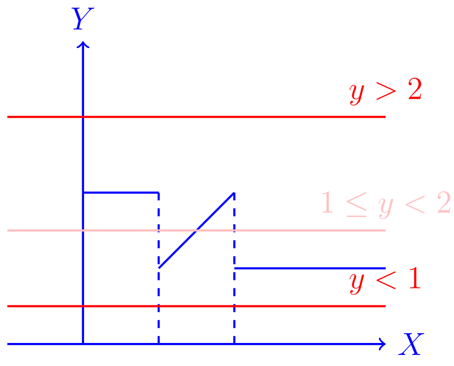
(a) 求 Y 的分布函数;

(b) 求 $P\{X \leq Y\}$.

Solution. 带参数的概率密度第一步就应该根据正则性把这个参数求出来.

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \implies a = 9$$

然后和上一题一样画 $X - Y$ 图像, 求 $F_Y(y)$, 注意分区域就是.



当 $y<1, F_Y(y)=0; y>2, F_Y(y)=1$

$1 \le y < 2, F_Y(y)=\int_1^y f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\frac{y^3}{27}+\frac{2}{3}$ □

17. (2021, 数一、三) 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X, 较长一段的长度记为 Y。

(a) 求 X 的概率密度;

(b) 求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度;

(c) 求 $E\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Solution. 有题设容易得到 $X \sim U(0,1), Y=2-X$

(1) 则 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(2) $Z=\frac{Y}{X}=\frac{2}{X}-1$, 显然 Z 关于 X 是单调的, 可以用公式法直接求出 $f_Z(z)$, 即

$$f_Z(z)=1\cdot\frac{2}{(y+1)^2}=\frac{2}{(y+1)^2}, z\in(1,+\infty)$$

(3)

$$E(Z)=\int_1^{\infty} zf_Z(z)dz=2\ln 2-1$$

或者也可以用

$$E(\frac{2}{x}-1)=\int_0^1(\frac{2}{x}-1)dx=2\ln(2)-1$$

□

第十七章　二维随机变量

17.1　联合分布函数的计算

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim B(1,p)$,$Y \sim E(\lambda)$, 则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =?$.

Solution.【详解】 □

17.2　二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。

   (a) 求在 $X+Y=n(n \geq 2)$ 的条件下,X 的条件概率分布;

   (b) 求 $P\{X+Y \geq n\}(n \geq 2)$.

Solution.【详解】 □

17.3　二维连续型随机变量分布的计算

4. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution.【详解】 □

5. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(x,1)$。

(a) 求 (X,Y) 的联合概率密度;

(b) 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(c) 求 $P\{X+Y>1\}$.

Solution. 【详解】 □

6. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,2;1,4;-\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX+bY\le 1\}=\frac{1}{2}$, 则 (a,b) 可以为

$$(A)\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\quad (B)\ \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$$
$$(C)\ \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\quad (D)\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Solution. 【详解】 □

7. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

$$(A)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\quad (B)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$$
$$(C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\quad (D)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$$

Solution. 【详解】 □

8. (2022, 数一) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下, 随机变量 $Y\sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ \frac{1}{4}\quad (B)\ \frac{1}{2}\quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}\quad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution. 【详解】 □

17.4 求二维离散型随机变量函数的分布

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$, 求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

Solution. 【详解】 □

17.5 求二维连续型随机变量函数的分布

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:

(a) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(b) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(d) $P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X\le\frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\right\}$;

(e) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

Solution.【详解】 □

17.6 求一离散一连续随机变量函数的分布

14. (2020, 数一) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,X_1 与 X_2 均服从标准正态分布,X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$,$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$。

(a) 求 (X_1,Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);

(b) 证明 Y 服从标准正态分布.

Solution.【详解】 □

第十八章　数字特征

18.1　期望与方差的计算

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty$, 则 $E[\min\{|X|,1\}]=?$.

Solution. 【详解】 □

2. (2016, 数三) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(1,2)$,$Y\sim N(1,4)$, 则 $D(XY)=$

$$(A)\ 6 \quad (B)\ 8 \quad (C)\ 14 \quad (D)\ 15$$

Solution. 【详解】 □

3. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 则 $E\left(\frac{X+Y}{2}\right)=?$.

Solution. 【详解】 □

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$, 且 $P\{X+Y>0\}=1-e^{-1}$, 则 $E(X+Y)^2=?$.

Solution. 【详解】 □

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim E(\lambda)$,$Y\sim E\left(\frac{1}{6}\right)$, 若 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$, 则 $EU=?$,$EV=?$.

Solution. 【详解】 □

6. (2017, 数一) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX=?$.

Solution. 【详解】 □

7. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $E|X|=?$,$D|X|=?$.

Solution. 【详解】 □

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E[\max\{X,Y\}]$,$E[\min\{X,Y\}]$.

Solution. 【详解】 □

9. 设独立重复的射击每次命中的概率为 p,X 表示第 n 次命中时的射击次数, 求 EX,DX.

Solution. 【详解】 □

10. (2015, 数一、三) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 对 X 进行独立的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数。
   (a) 求 Y 的概率分布;
   (b) 求 EY.

Solution. 【详解】 □

18.2 协方差的计算

11. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。若 $DX=4$, 正整数 $s\le n$,$t\le n$, 则

$$\operatorname{Cov}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i,\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=$$

(A) $4\max\{s,t\}$ (B) $4\min\{s,t\}$ (C) $\dfrac{4}{\max\{s,t\}}$ (D) $\dfrac{4}{\min\{s,t\}}$

Solution. 【详解】 □

12. (2005, 数三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$。记 $Y_i=X_i-\bar{X}$,$i=1,2,\cdots,n$。
   (a) 求 Y_i 的方差 DY_i,$i=1,2,\cdots,n$;
   (b) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c.

Solution. 【详解】 □

18.3 相关系数的计算

13. (2016, 数一) 设试验有三个两两互不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三个结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$。将试验独立重复地做两次,X 表示两次试验中 A_1 发生的次数,Y 表示两次试验中 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ -\frac{1}{2} \quad (B)\ -\frac{1}{3} \quad (C)\ \frac{1}{3} \quad (D)\ \frac{1}{2}$$

Solution. 【详解】 □

14. 设随机变量 $X \sim B\left(1, \frac{3}{4}\right)$,$Y \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

(a) 求 (X, Y) 的联合概率分布;

(b) 求 $P\{Y = 1|X = 1\}$.

Solution. 【详解】 □

18.4 相关与独立的判定

15. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上的均匀分布, 则

$$(A)\ X\ Y\quad ,$$

$$(B)\ X\ Y$$

$$(C)\ X\ Y$$

$$(D)\ X\ Y\quad U(-a, a)$$

Solution. 【详解】 □

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty < x < +\infty$。

(a) 求 X 的期望与方差;

(b) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(c) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 并说明理由.

Solution. 【详解】 □

第十九章　大数定律与中心极限定理

1. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,$\mu_k = E(X_i^k)(k = 1, 2, 3, 4)$。由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$(A)\ \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2} \quad (B)\ \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2} \quad (C)\ \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2} \quad (D)\ \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

Solution.【详解】 □

2. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,X_i 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于?.

Solution.【详解】 □

3. (2020, 数一) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,$P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数。利用中心极限定理得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为

$$(A)\ 1 - \Phi(1) \quad (B)\ \Phi(1) \quad (C)\ 1 - \Phi(0.2) \quad (D)\ \Phi(0.2)$$

Solution.【详解】 □

第二十章　统计初步

20.1　求统计量的抽样分布

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n)$,$Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

$$(A)\ \alpha \quad (B)\ 1-\alpha \quad (C)\ 2\alpha \quad (D)\ 1-2\alpha$$

Solution.【详解】 □

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

Solution.【详解】 □

20.2　求统计量的数字特征

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\left(\bar{X} - S^2\right)^2\right] =$$

Solution.【详解】 □

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (a) 求 $E[(\bar{X}S^2)^2]$;

   (b) 求 $D(S^2)$.

Solution.【详解】 □

第二十一章　参数估计

21.1　求矩估计与最大似然估计

1. (2002, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

Solution. 【详解】 □

2. (2011, 数一) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (a) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

   (b) 求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}^2)$。

Solution. 【详解】 □

3. (2022, 数一、三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$,

   (a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

   (b) 求 $D(\hat{\theta})$。

Solution. 【详解】 □

21.2 估计量的评价标准

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(b) 问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 并说明理由。

Solution. 【详解】 □

第二十二章　补充知识-高等数学

补充知识来自于

(1) 菲砖

(2) 做题总结

第二十三章　补充知识-线性代数

补充知识来自于

(1) 线性代数入门

(2) 做题总结

第二十四章　补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计　　茆诗松

(2) 做题总结

24.1　配对问题

问题描述: 在一个有 n 个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

Solution. (配对问题)

设 A_i 为事件: 第 i 个人自己抽到自己的礼物,$i = 1, 2, \ldots, n$ 所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n} \\
&P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \ldots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)} \\
&P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \ldots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \\
&\ldots \\
&P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} P(A_i A_{i+1} A_{i+2}) \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$, 上述概率由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

□

24.2 几个概率的不等式

1. $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$
2. $P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$ (Boole 不等式)
3. $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

Proof. 相关证明如下:

(1) 由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \implies P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于 n = 2, 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于 $n = k$ 个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) - (k-1)$$

考虑 $n = k+1$ 个事件 $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$, 不妨令 $B = A_1 A_2 \ldots A_k$, 则

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}) = P(B A_{k+1}) \geq P(B) + P(A_{k+1}) - 1 \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{k+1}) - (k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由 $P(A) \geq P(AB), P(B) \geq P(AB)$, 则 $P(A)P(B) \geq P(AB)^2$, 则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB))$$

令 $x = P(AB)$, 则 $f(x) = x(1-x)$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 取得 $f(x)_{max} = \frac{1}{4}$ 即

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

由于 $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, 即 $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$ 则

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - P(A) + P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(\bar{B}) \leq \frac{1}{4}$$

即

$$P(AB) - P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

24.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为 α, 乙命中的概率为 β. **甲先射**, 谁先设中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

Solution.

(方法一) 记事件 A_i 为第 i 次射中目标,$i = 1, 2, \ldots$, 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup \ldots.$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned}
P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2 \ldots \\
&= \alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i \\
&= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}
\end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned}
P(\text{乙获胜}) &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \ldots \\
&= \beta(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i \\
&= \frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}
\end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

□