

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 21 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 21 日

目录

第一章 一元函数微分学	1
1.1 导数与微分的概念	1
1.2 导数与微分的计算	4
1.3 导数应用-切线与法线	10
1.4 导数应用-渐近线	12
1.5 导数应用-曲率	14
1.6 导数应用-极值与最值	15
1.7 导数应用-凹凸性与拐点	16
1.8 导数应用-证明不等式	16
1.9 导数应用-求方程的根	17
1.10 微分中值定理证明题	17

第一章 一元函数微分学

1.1 导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分条件是
- A $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$ B $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$
C $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$ D $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

Solution.

□

2. (2001, 数一) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件为

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

Solution.

□

3. (2016, 数一) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$, 则
- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
- (C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

Solution.



1.2 导数与微分的计算

Remark (类型一分段函数求导).

4. (1997, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

Solution.

□

Remark (类型二复合函数求导).

5. (2012, 数三) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e}$

Solution.



Remark (类型三隐函数求导).

6. (2007, 数二) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx}\bigg|_{x=0}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}\bigg|_{x=0}$

Solution.

□

Remark (类型四反函数求导).

7. (2003, 数一、数二) 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数。

(i) 将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程

(ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解

Solution.

□

Remark (类型五参数方程求导).

8. (2008, 数二) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) du \end{cases}$$
 确定, 其中 $x(t)$ 是初

值问题
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$$
 的解, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solution.



Remark (类型六高阶导数).

9. (2015, 数二) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{1cm}}$

Solution.



1.3 导数应用-切线与法线

Remark (类型一直角坐标表示的曲线).

10. (2000, 数二) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

Solution.

□

Remark (类型二参数方程表示的曲线).

11. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为__

Solution. 【详解】

□

Remark (类型三极坐标表示的曲线).

12. (1997, 数一) 对数螺线 $r = e^\theta$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为__

Solution.



1.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

Solution.



14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Solution.



1.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是
- (A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

Solution.

□

1.6 导数应用-极值与最值

Remark. 函数的极值的充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ 则有

$$f''(x_0) \begin{cases} > 0 & x_0 \text{ 是极小值} \\ < 0 & x_0 \text{ 是极大值} \end{cases}$$

(充分 3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 n 是大于 2 的偶数则有

$$f^{(n)}(x_0) \begin{cases} > 0 & x_0 \text{ 是极小值} \\ < 0 & x_0 \text{ 是极大值} \end{cases}$$

17. (2000, 数二) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

Solution. 有题设知 $f''(0) = 0$, 对等式两边求导有 $f^{(3)}(0) = 1 \neq 0$ 由拐点充分条件可知, $(0, f(0))$ 为函数的拐点 □

18. (2010, 数一、数二) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值

Solution. 求导有

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$$

令 $f'(x) = 0$ 有 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$ 并且无其余根, 带入可知

$x = \pm 1, f(\pm 1) = 0$ 为极小值点, $x = 0, f(0) = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$ 为极大值点 □

19. (2014, 数二) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值

Solution. 比较简单, 答案为极小值为 $y(-1) = 0$, 极大值为 $y(1) = 1$ □

1.7 导数应用-凹凸性与拐点

Remark. 拐点也有三个充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ 则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数拐点

(充分 3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 n 是大于 3 的奇数则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点

20. (2011, 数一) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) (1, 0) (B) (2, 0) (C) (3, 0) (D) (4, 0)

Solution. 直接用高中的穿针引线法画图就可以 □

1.8 导数应用-证明不等式

Remark. 通常优先考虑单调性, 较难的题会结合微分中值定理 (通常是拉格朗日/柯西/泰勒)

21. (2017, 数一、数三) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(A) $f(1) > f(-1)$ (B) $f(1) < f(-1)$ (C) $|f(1)| > |f(-1)|$ (D) $|f(1)| < |f(-1)|$

Solution. 这道题的辅助函数比较好想, 显然 $F(x) = \frac{1}{2}f^2(x)$, 由题设知 $F'(x) > 0$ 恒成立, 故 $F(x)$ 单调递增即 $F(1) > F(-1) \implies f^2(1) > f^2(-1) \implies |f(1)| > |f(-1)|$ □

22. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a) = 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 。设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$ 。

Solution. 这道题的几何直观非常明显, 证明也不算很难.

由题可知切线方程为 $y = f'(b)(x - b) + f(b)$ 令 $y = 0$ 有 $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

$$\begin{aligned} a &< b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a \\ \Leftrightarrow 0 &< f(b) < f'(b)(b - a) \end{aligned}$$

由 $f(a) = 0$ 和拉格朗日中值定理有 $f(b) = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, $a < \xi < b$, 又 $f''(x) > 0$ 故 $f'(\xi) < f'(b)$ 故 $f(b) < f'(b)(b - a)$ 从而原不等式成立 \square

1.9 导数应用-求方程的根

23. (2015, 数二) 已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数。

Solution. 这道题也比较简单, 感觉是高中题现在考研已经不太可能出了

$f'(x) = (2x - 1)\sqrt{1+x^2}$, 显然只有唯一根 $f'(1/2) = 0$ 又 $f(1) = 0$ 故 $f(1/2) < 0$ 又 $f(-1) > 0$ 故 $f(x)$ 在 $(-1, 1/2)$ 上必然还有唯一根, 故 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上仅有两根 \square

1.10 微分中值定理证明题

Remark. 证明含有一个 ξ 的等式

如果不含导数, 通常使用单调性 + 零点存在定理

如果包含导数, 通常需要构建辅助函数并使用费马引理/罗尔定理

构建辅助函数中比较困难的题目, 可以采用积分还原法做, 其基本思路为

(1) 将 ξ 都改写成 x , 变形做不定积分去掉导数

(2) 改写 $C = 0$, 移项构建辅助函数

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$ 。证明:

(i) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(ii) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

Solution. (1) 显然构建 $F(x) = f(x) - x$, 有 $F(1) = F(0) = 0$ 由 roller Th 可知

$$\exists \xi \in (0, 1), F'(\xi) = 0 \text{ 即 } f'(\xi) = 1$$

(2) 由 $f(x)$ 是可导的奇函数容易得知 $f'(x)$ 偶函数

(方法一) 构建 $G(x) = f'(x) + f(x) - x$, 则 $G(-1) = f'(1) = G(1)$ 由 roller Th 有...

(方法二) 构建 $G(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 则由第一问有 $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$ 带入 $G(x)$, 再由 roller Th 也可以得到答案

□

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $(2\xi + 1)f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

Solution. 这道题很难通过观察法得到辅助函数, 考虑使用积分还原法

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= -(2 + \frac{1}{x}) \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int -(2 + \frac{1}{x}) dx \end{aligned}$$

即

$$\ln |f(x)| + \ln x + \ln e^{2x} - \ln |C| = 0$$

化简且令 $C=0$ 后有

$$xe^{2x}f(x) = 0$$

故辅助函数 $G(x) = xe^{2x}f(x)$, 又 $G(1) = G(0)$ 由 roller Th 可知原等式成立

□

Remark. 类型二证明含有两个点的等式

若要求的是两个相异的点, 则分区间讨论 (具体看下题 1)

若并不要求两个相异的点, 则可能需要一次拉格朗日一次柯西 (具体见下题 2)

27. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。证明:

(i) 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$;

(ii) 存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, 使得 $\eta f'(\xi) = f(\eta)f'(\eta)$ 。

Solution. 对于 (1) 这种题目不应该从正面突破, 而应该先假设.

假设 $\exists \xi_1 \in (0, c), \xi_2(c, 1)$ 有

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

带入题设条件 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2 \implies c = \frac{1}{2}$

以上分析均不需要写在试卷上

由 lagrange Th $\exists \xi_1 \in (0, 1/2), \xi_2(1/2, 1)$ 有....

(2) 由 lagrange Th 可知 $\exists \xi \in (0, 1), f'(\xi) = f(1) - f(0) = 1$ 题目要求的为

$$f'(\xi) = \frac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$$

考虑柯西中值定理, 左侧分式实际是

$$\frac{f^2(1) - f^2(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{f'(\eta)f(\eta)}{\eta} = 1 = f'(\xi)$$

□

Remark. 类型三证明含有高阶导数的等式或不等式

基本就是 Taylor 的题, 当然有时也可以通过多次拉格朗日求出来.

这种问题的关键点在于如何寻找展开点, 基本思路就是谁信息多展开谁, 例如端点, 极值点, 最值点, 零点等等

28. (2019, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$. 证明:

(i) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(ii) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

Solution. 这道题算是比较难的题目, 当然不是最难的最难的那道比较像数学分析的题

(方法一) (1) 由积分中值定理可知 $\exists f(c) = 1$ 又 $f(1) = f(c) = 1$ 由 roller Th 可知 $\exists \xi, f'(\xi) = 0$

(2) 要证明 $f''(\eta) < -2$ 只需证明对于 $F(x) = f(x) + x^2, \exists \eta, F''(\eta) < 0$ 分别在区间 $(0, c)(c, 1)$ 上使用 lagrange Th 有

$$F(c) - F(0) = F'(\xi_1)c = 1 + c^2, \xi_1 \in (0, c)$$

$$F(1) - F(c) = F'(\xi_2)(1 - c) = 1 - c^2, \xi_2 \in (c, 1)$$

再在区间 (ξ_1, ξ_2) 使用 lagrange Th 有

$$F'(\xi_2) - F'(\xi_1) = F''(\eta)(\xi_2 - \xi_1), \eta \in (\xi_1, \xi_2)$$

将 $F'(\xi_1), F'(\xi_2)$ 带入上式, 有

$$F''(\eta) = \frac{c-1}{c(\xi_2 - \xi_1)} < 0$$

故原不等式成立

(方法二) (1) 由题设知在区间 $(0,1)$ 内必然存在最值, 且 $f(\xi) > 1$, 由费马引理可知 $f'(\xi) = 0$

(2) 在 $x = \xi$ 处进行 Taylor 展开有

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\eta)}{2}(x - \xi)^2$$

带入 $x = 0$ 点有

$$0 = f(\xi) + \frac{f''(\eta)}{2}\xi^2 \implies f''(\eta) = -\frac{2f(\xi)}{\xi^2} < -2$$

□