第一章　一元函数积分学

1.1　定积分的概念

2. (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$　(B) $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　$(D)(\pi,+\infty)$

Solution

(方法一) 利用单调性

$$f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$$
$$f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\begin{cases} x>0 & ,f'(x)<0 \\ x<0 & ,f'(x)>0\end{cases}$$

又 $f(1)=0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上大于 0, 在 $(1,\infty)$ 小于 0

(方法二) 利用几何意义

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$\int_1^x \frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t>0$$

由积分的几何意义容易知道, 当 $x\in(0,1)$ 时候上式成立

3. (2003, 数二) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x}dx$, 则

(A) $I_1>I_2>1$　(B) $1>I_1>I_2$

(C) $I_2>I_1>1$　(D) $1>I_2>I_1$

Solution

由基本不等式 $x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x < x < \tan x$, 故有 $\tan x/x > 1 > x/\tan x$ 由比较定理有 $I_1 > I_2$, 考虑 I_1 与 1 的关系.

(方法一) 求导用单调性

$f(x) = \tan x/x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sec^2 x \cdot x - \tan x}{x^2} \\ &= \frac{x - \sin x \cos x}{\cos^2 x x^2} > 0 \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(0, \pi/4)$ 上单调递增, 有 $f(x) < f(\pi/4) = \frac{4}{\pi}$, 故 $I_1 < 1$

(方法二) 利用凹凸性

由于 $\tan x$ 在 $(0, \pi/2)$ 上是一个凹函数, 则其割线的函数值大于函数的函数值大于切线的函数值 (割线在函数图像的上方, 切线在函数图像的下方) 则有

$$\frac{4}{\pi} x > \tan x$$

从而 $I_1 < 1$

1.2　不定积分的计算

Remark

$$\text{不定积分的计算} \begin{cases} \text{凑微分} \\ \text{分部} \\ \text{换元} \begin{cases} \text{倒代换} \\ \text{三角代换} \\ \text{根式代换} \\ \text{万能公式} \\ \text{整体代换} \end{cases} \end{cases}$$

分部里面要注意表格积分法, 与行列式积分法

‘’ 万能公式如下

$$令t=\tan\frac{x}{2}则\begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1-t^2}{2t}\\ x=2\cdot\arctan t,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{cases}$$

4. 计算下列积分 (1)$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;(2)$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

Solution

(1)

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\\&\xlongequal{\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\\&\xlongequal{\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{2}-(x+\frac{1}{x})}\right|\end{aligned}$$

5. 计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x,x>0$

Solution

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{t=\sqrt{\frac{(1+x)}{x}}} \ln 1 + t\mathrm{d}(\frac{1}{t^2-1}) \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2(1+t)} + C
\end{aligned}
$$

$$
\text{原式} = \ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2(1+t)} + C
$$

6. 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

Solution

(方法一 万能代换)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \ln|1+t| + C \\
&= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

(方法二 三角公式)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1} \int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan x2)} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} \\
&= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

1.3 定积分的计算

Remark

定积分除了不定积分的办法还有如下自己独有的办法

$$\text{定积分的计算}\begin{cases}\text{奇偶性}\\\text{周期性}\\\text{华里士公式}\\\text{区间再现}\end{cases}$$

其中华里士公式如下

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n=\text{奇数}\\\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=\text{偶数}\end{cases}$$

$\cos x$ 也是一样的结果

7. (2013, 数一) 计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

Solution

(方法一 分部积分法)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\sqrt{x}=t}-4\int_0^1\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\\&=-4t\ln(1+t^2)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=8-4\ln 2-2\pi\end{aligned}$$

(方法二 二重积分)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} -\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= \ldots \\
&= 8 - 4\ln 2 - 2\pi
\end{aligned}
$$

8. 求下列积分: (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{sinx}}{e^{sinx}+e^{cosx}}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx$

Solution

这两题都是典型的区间再现的题目

(1)

$$
\text{原式} \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos t}}{e^{\sin t}+e^{\cos t}}\mathrm{d}t
$$

由于积分与变量无关, 将上式与原式相加有

$$
\text{原式} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}}+\cos x)^{\sqrt{2}}} \\
&\xlongequal{\text{和一完全一致}} \ldots \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

9. 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

Solution

这道题是比较困难的积分计算题, 由于其他方法都不好用不妨考虑区间再现

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln 2-\ln\left(1+\tan t\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\text{原式} = \frac{\pi}{8}\ln 2
$$

区间再现总结

考试中可能直接考察的区间再现的公式为

$$
\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x
$$

其余的就只能见机行事 若其他积分方法都无法做出则可以考虑区间再现

1.4 反常积分的计算

Remark

瑕积分的计算需要注意, 若瑕点在内部则需要积分拆开分别计算

10. (1998, 数二) 计算积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$

Solution

显然 $x=1$ 是积分的瑕点, 故原积分需要拆成两部分即

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} \\
&\xlongequal{\text{配方}} \arcsin 2(x-\frac{1}{2})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

积分表的拓展

(1)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

(2)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(3)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

第二个如果是定积分也可以按照几何意义 (圆的面积) 做

1.5 反常积分敛散性的判定

Remark

反常积分的敛散性感觉不如无穷级数敛散性难

(方法一) 使用反常积分的定义, 算出其极限值

(方法二) 比较判别法–寻找 x^p

$$(\text{瑕积分})\int_0^1 \frac{1}{x^p}\begin{cases} 0<p<1, & \text{收敛} \\ p\geq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

$$(\text{无穷积分})\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\begin{cases} p>1, & \text{收敛} \\ p\leq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

11. (2016, 数一) 若反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛, 则

(A) a<1 且 b>1 (B) a>1 且 b>1

(C) a<1 且 a+b>1 (D) a>1 且 a+b>1

Solution

显然 $x=0$ 是该积分的瑕点, 需要分成两部分考虑 $\displaystyle\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^p}{x^a(1+x)^b}=1$$
$$\overset{\text{等价代换}}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{x^p}{x^a}\implies p=a$$

由 p 积分的性质可知当 $p<1$ 的时候其收敛故 $a<1$ 的时候原积分中的 $\displaystyle\int_0^1$ 收敛同理对于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x^{a+b}}=1\implies p=a+b$$

由 p 积分的性质可知当 $p>1$ 即 $a+b>1$ 的时候原积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ 收敛, 故由反常积分的定义可知只有 $a<1,a+b>1$ 的时候原积分收敛

12. (2010, 数一、数二) 设 m,n 均为正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m,n 的取值都有关 (D) 与 m,n 的取值都无关

Solution

显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是积分的瑕点, 需要分成两部分考虑, 有 $\displaystyle\int_0^1=\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^1$, 想考虑前一个积分

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{\frac12}x^p\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{x\to0^+}\int_0^{\frac12}x^p\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}\implies p=\frac1n-\frac2m$$

由 p 积分的性质, 只有 $p<1$ 上述积分就收敛, 而由于 $(n,m)\in\mathbb{Z}^+,\dfrac1n-\dfrac2m<\dfrac1n<1$ 故上式恒收敛.

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)^p\frac{\sqrt[m]{\ln(1-x)^2}}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{x\to1^-}(x-1)^p\sqrt[m]{\ln(1-x)^2}\implies \text{恒为 }0$$

故上式也恒收敛, 故原式的敛散性与 (n,m) 均无关

1.6 变限积分函数

原函数, 可积, 变限积分

(一) 原函数存在定理

$$\int f(x)\mathrm{d}x\text{存在}\begin{cases}\text{连续函数原函数必然存在}\\ \text{含有第一类间断点和无穷间断点其原函数必然不存在}\\ \text{含有震荡间断点其原函数可能存在}\end{cases}$$

(二) 可积性定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{存在}\begin{cases}\text{可积必有界}\\ \text{连续必可积}\\ \text{含有有限个间断点的有界函数可积}\end{cases}$$

(三) 变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}f(x)\text{可积} \implies F(x)\text{连续}\\ f(x)\text{连续} \implies F(x)\text{可导}\\ x=x_0\text{是函数可去间断点} \implies F(x)\text{可导, 但, }F'(x_0)\neq f(x_0)\\ x=x_0\text{是函数跳跃间断点} \implies F(x)\text{不可导, 但连续}\end{cases}$$

13. (2013, 数二) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则

(A) x=π 是函数 F(x) 的跳跃间断点 (B) x=π 是函数 F(x) 的可去间断点

(C) F(x) 在 x=π 处连续但不可导 (D) F(x) 在 x=π 处可导

Solution

显然由总结可知, 选 C

14. (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution

(一) 有题有 $f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$, 所求的平均值为

$$\begin{aligned}
\text{平均值} &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t}{\frac{3\pi}{2}} \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3\pi}
\end{aligned}$$

(二) 有题可知 $f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$, 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 只有唯一零点 $x=\frac{\pi}{2}$, 从而有 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递减, 而 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0)=0$, 考虑上述平均值, 由积分中值定理有 $f(c)=\frac{\pi}{3}>0$ 故 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}\sim\frac{3\pi}{2}$ 上有一个零点. 综上 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 仅有一个零点

定积分的应用

(一) 定积分求面积 (也可以用二重积分)

$$A=\begin{cases}\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{直角坐标系}\\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\\ \displaystyle\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_l -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y, & \text{L 对 D 来说取正向}\end{cases}$$

(二) 定积分求旋转体体积 (可以用微元法推, 也可以用二重积分)

$$V=\begin{cases}\displaystyle\iint_D 2\pi r(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{二重积分法, 其中}r(x,y)\text{为区域 D 内一点到转轴的距离}\\ \displaystyle\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x, & \text{微元法, 绕 x 轴旋转}\\ \displaystyle\int_a^b 2\pi\,|xf(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{微元法, 绕 y 轴旋转}\end{cases}$$

(三) 定积分求弧长 (第一类曲线积分)

$$s_{\text{弧长}}=\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x, & \text{直角坐标}\\ \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\end{cases}$$

(四) 定积分求侧面积 (第一类曲面积分)

$$S_{\text{侧面积}}=\iint_S \mathrm{d}S=\begin{cases}\displaystyle\int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x, & \text{直角坐标}\\ \displaystyle\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \displaystyle\int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\end{cases}$$

(五) 物理应用 (微元法, 不过数一不太可能考)

1.7 定积分应用求面积

15. (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution

$$A=\int_0^{+\infty}|e^x\sin x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$
$$\text{由于}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(e^{\alpha x})' & (\sin\beta x)'\\ e^{\alpha x} & (\sin\beta x)\end{vmatrix}}{\alpha^2+\beta^2}+C$$
$$\text{其中}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\left.\frac{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\right|_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$
$$\text{故原式}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}(1+e^{-\pi})$$
$$=\frac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$$

1.8 定积分应用求体积

16. (2003, 数一) 过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

Solution

(1) 有题设可求出其切点为 $(e,1)$ 切线方程为 $y=\dfrac{x}{e}$

方法一:

$$\begin{aligned} A &= \frac{e}{2} - \int_1^e \ln x \mathrm{d}x \\ &= \frac{e}{2} - (x\ln x)\Big|_1^e \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

方法二: 用反函数做 $x = e^y$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 e^y \mathrm{d}y - \frac{e}{2} \\ &= e - 1 - \frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

(2) 方法一:

$$V = \frac{\pi}{3}e^2 - 2\pi\int_1^e (e-x)\ln x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$$

方法二: 用反函数

$$V = \frac{\pi}{3}e^2 - \pi\int_0^1 (e^y - e)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$$

17. (2014, 数二) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution

先利用偏积分求出 $f(x,y) = (y+1)^2 - (2-x)\ln x$, 故曲线 $f(x,y) = 0 \implies (y+1)^2 = (2-x)\ln x$ $(1 \le x \le 2)$ 要根据题目条件求出 x 的范围! 显然曲线关于 $y = -1$ 对称利用微元法有

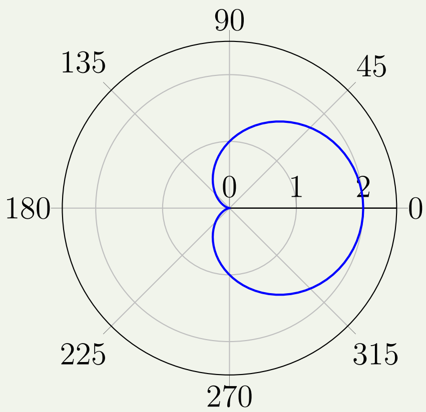
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^2 (y+1)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\int_1^2 (2-x)\ln x \mathrm{d}x \\ &= 2\pi\ln 2 - \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

1.9 定积分应用求弧长

18. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的全长.

Solution

这种极坐标的图像, 都可以通过描点法去画 (其实画不画也不影响求)



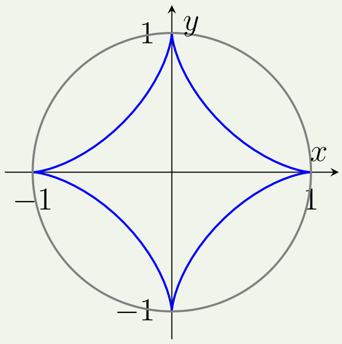
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin\theta^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\xlongequal{\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1} 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \\
&= 8a
\end{aligned}
$$

1.10 定积分应用求侧面积

19. (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution

这个参数方程的图像是需要记住即星形线



$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 - \int_0^1 \pi y^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{18}{35}\pi \\ S &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi + \int_0^1 2\pi y(x)\mathrm{d}s \\ &= 2\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot\sin^3 t\sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{16\pi}{5}\end{aligned}$$

1.11 证明含有积分的等式或不等式

Remark

积分中值定理 (三个)

(一) 第一积分中值定理, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\exists c\in[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

(二) 第一积分中值定理的推广, 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续

$$\exists c\in(a,b), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

(三) 第二积分中值定理, 若 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 且 $g(x)$ 在其上不变号则

$$\exists c\in(a,b), \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

比较定理及其推论

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\le\int_a^b g(x)$

推论一: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x) < \int_a^b g(x)$

推论二: 若 $f(x) \geq 0$,$x \in [a, b]$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$

推论三: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

21. (2000, 数二) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$

Solution

(1) 由比较定理有

$$\int_0^{n\pi} |\cos t|\, \mathrm{d}t \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\, \mathrm{d}t$$

显然 $|\cos t|$ 以 π 为周期故上式容易计算为

$$2n \leq S(x) < 2(n+1)$$

(2) 考虑夹逼准则

$$\frac{2}{\pi} \xleftarrow{\lim_{n\to\infty}} \frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \frac{2}{\pi}$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$

22. (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加,$0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(1) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a,b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx$.

Solution

(一) 由比较定理有

$$0 \leq \int_a^x g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^x \mathrm{d}x = x - a$$

(二) 构建函数用单调性

令

$$F(x) = \int_a^{ma+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

则其导数为

$$F'(x) = g(x)\left[f(a + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t) - f(x)\right]$$

由一可知 $a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leq x$ 从而可知 $F'(x)<0$ 故而 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减, 而 $F(a)=0$ 故 $F(b)<F(a)=0$ 即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

.