

错题集

Weary Bird

2025 年 8 月 3 日

梅花引·荆溪阻雪

白鸥问我泊孤舟，是身留，是心留？心若留时，何事锁眉头？风拍小帘灯晕舞，对闲影，冷清清，忆旧游。

旧游旧游今在否？花外楼，柳下舟。梦也梦也，梦不到，寒水空流。漠漠黄云，湿透木棉裘。都道无人愁似我，今夜雪，有梅花，似我愁。

2025年8月3日

目录

第一章 高等数学第一讲	1
第二章 高等数学第二讲	2
第三章 Template	4
第四章 Template	5
第五章 Template	6
第六章 Template	7
第七章 Template	8
第八章 Template	9
第九章 Template	10
第十章 Template	11
第十一章 Template	12
第十二章 Template	13
第十三章 Template	14
第十四章 Template	15
第十五章 Template	16

第十六章	Template	17
第十七章	Template	18
第十八章	Template	19
第十九章	Template	20
第二十章	Template	21
第二十一章	Template	22
第二十二章	Template	23
第二十三章	Template	24
第二十四章	Template	25

第一章 高等数学第一讲

第二章 高等数学第二讲

Example

(莫斯科 1975 年竞赛题) 证明数列 $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \cdots$ 收敛, 并求其极限。

Example

设 $f(x) = x + \ln(2 - x)$.

(I) 求 $f(x)$ 的最大值;

(II) 若 $x_1 = \ln 2, x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

Example

(1) 设 $x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

(2) (南京大学 2000 年, 武汉大学 2004 年, 天津大学 2004 年, 浙江大学 2007 年) 设

$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $c > 1$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

Example

求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(1+1)^n + (1+\frac{1}{2})^{2n} + \cdots + (1+\frac{1}{n})^{n^2}}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) + \sqrt{n^2+1} + \cdots + \sqrt[n]{n^n+1}}.$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}.$

Example

求下列极限:

(1) (莫斯科 1976 年竞赛题) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n^2} \right).$

(3) (第十一届中国大学生数学竞赛题, 2020 年) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{i}} \right).$

Example

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$.

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right).$

Example

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\ln n} [e^x] dx$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

Example

【例 1.22】求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \cos \frac{(2i-1)\pi}{4n} \cdot \frac{1}{n}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \cos \frac{(3i-1)\pi}{6n} \cdot \frac{1}{n}.$

(3) (浙江省高等数学竞赛题, 2013 年) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i - \sin^2 i}{n^2} [\ln(n+i - \sin^2 i) - \ln n].$

Example

(浙江省高等数学竞赛题, 2009 年) 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{2n} \frac{n}{i(n+i)}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{n}{i(n+i)}.$

第三章 **Template**

第四章 **Template**

第五章 **Template**

第六章 **Template**

第七章 **Template**

第八章 **Template**

第九章 **Template**

第十章 **Template**

第十一章 **Template**

第十二章 **Template**

第十三章 **Template**

第十四章 **Template**

第十五章 **Template**

第十六章 **Template**

第十七章 **Template**

第十八章 **Template**

第十九章 **Template**

第二十章 **Template**

第二十一章 **Template**

第二十二章 **Template**

第二十三章 **Template**

第二十四章 **Template**