

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 21 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 21 日

目录

第一章 一元函数积分学	1
1.1 定积分的概念	1
1.2 不定积分的计算	3
1.3 定积分的计算	6
1.4 反常积分的计算	9
1.5 反常积分敛散性的判定	10
1.6 变限积分函数	12
1.7 定积分应用求面积	14
1.8 定积分应用求体积	15
1.9 定积分应用求弧长	17
1.10 定积分应用求侧面积	18
1.11 定积分物理应用	19
1.12 证明含有积分的等式或不等式	20

第一章 一元函数积分学

1.1 定积分的概念

2. (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是
(A) $(0, 1)$ (B) $(1, \frac{\pi}{2})$ (C) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (D) $(\pi, +\infty)$

Solution.

□

3. (2003, 数二) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

$$(A) I_1 > I_2 > 1 \quad (B) 1 > I_1 > I_2$$

$$(C) I_2 > I_1 > 1 \quad (D) 1 > I_2 > I_1$$

Solution.



1.2 不定积分的计算

4. 计算下列积分 (1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$; (2) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$

Solution.

□

5. 计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$

Solution.



6. 求 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$

Solution.



1.3 定积分的计算

7. (2013, 数一) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

Solution.



8. 求下列积分: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$

Solution.

□

9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

Solution.



1.4 反常积分的计算

10. (1998, 数二) 计算积分 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

Solution.



1.5 反常积分敛散性的判定

11. (2016, 数一) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则

(A) $a < 1$ 且 $b > 1$ (B) $a > 1$ 且 $b > 1$

(C) $a < 1$ 且 $a+b > 1$ (D) $a > 1$ 且 $a+b > 1$

Solution.

□

12. (2010, 数一、数二) 设 m, n 均为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性
- (A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关
- (C) 与 m, n 的取值都有关 (D) 与 m, n 的取值都无关

Solution.



1.6 变限积分函数

13. (2013, 数二) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则
- (A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点 (B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点
- (C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导 (D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

Solution.

□

14. (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

- (1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;
- (2) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution.



1.7 定积分应用求面积

15. (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution.



1.8 定积分应用求体积

16. (2003, 数一) 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

Solution.

□

17. (2014, 数二) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution.



1.9 定积分应用求弧长

18. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 的全长.

Solution.

□

1.10 定积分应用求侧面积

19. (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution.



1.11 定积分物理应用

20. (2020, 数二) 设边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 设重力加速度为 g , 水密度为 ρ , 则该平板一侧所受的水压力为 _____

Solution.

□

1.12 证明含有积分的等式或不等式

21. (2000, 数二) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(i) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(ii) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$

Solution.

□

22. (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(2) \quad \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Solution.

□