考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 8 月 2 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 8 月 2 日

目录

第一章　补充知识-高等数学

1.1　平方数求和

平方数和的求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

1.2　莱布尼兹法则

莱布尼兹法则

若有如下变限积分

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$$

那么 F(x) 的导数为

$$F'(x) = f(x,b(x)) \cdot b'(x) - f(x,a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

特别的, 若上下限为常数有

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t$$

例如对于 $F(x) = \int_1^0 e^{-x^2t^2}dt$, 则

$$F'(x) = 2x\int_0^1 t^2 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$$

1.3　柯西不等式

柯西不等式

(1) 柯西不等式的实数形式, 对于任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2 \ldots, b_n$ 有

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

(2) 柯西不等式的向量形式, 对于向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 有

$$|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$$

其中 $||a|| = \sqrt{\sum_{i}^{n} a_i^2}$

(3) 柯西不等式的积分形式, 对于可积函数 f, g 有

$$\left(\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$