第一章　向量

1.1　知识体系

- 向量
  - 基本运算
    - $\alpha+\beta$
    - $k\alpha$
    - $[\alpha,\beta]$
  - 线性表示
    - 定义　$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s$
    - 充要条件
      - 非其次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=\beta$有解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\mid\beta)$
    - 求法 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\mid\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵
  - 线性相关
    - 定义
    - 充要条件
      - 至少有一个向量可以由其余向量线性表示
      - 齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=0$有非零解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)<s$
    - 充分条件

- 向量
  - 线性无关
    - 定义
    - 充要条件
      - 任意向量都不可以由其余向量线性表示
      - 齐次线性方程组$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T = 0$只有零解
      - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s$
    - 充分条件
  - 极大无关组与向量组的秩
    - 定义
    - 求法 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形

1.2 线性表示的判定与计算

线性表示的判定与计算

(题型一 判断)

(I) 线性表示的定义 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s$

(II) 秩 $r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s \mid \beta)$

(题型二 计算)

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \mid \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简型}$$

(题型三 向量组等价)

(I) 向量组等价的定义 向量组 I, II 可以相互线性表示

(II) 三秩相等 $r(I) = r(I, II) = r(II)$

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ ($km \neq 0$)，则

   (A) α, β 与 α, γ 等价

   (B) α, β 与 β, γ 等价

   (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (D) α 与 γ 等价

Solution

由于 $km \neq 0$ 则有 $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{k}(l\beta + m\gamma) \\ \gamma = -\dfrac{1}{k}(l\beta + k\alpha) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta, \gamma \to \alpha \\ \beta, \alpha \to \gamma \end{cases}$ 又因为 $(\beta, \gamma) \to \beta, (\beta, \alpha) \to \beta$ 是显然的, 故 $(\alpha, \beta) \to (\beta, \gamma)$

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1,2,0)^T$, $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$, $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$, $\beta = (1,3,-3)^T$。当 a, b 为何值时,

(I) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式;

(III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

Solution

数字矩阵多半带参数, 关键就是讨论这个参数的范围. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 联立有

$$(A \mid \beta) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a \neq 0$ 的时候

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) < r(A \mid \beta)$ 即 β 不可以有 α_i 表示

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时有

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} 1 - \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a} \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) = r(A \mid \beta)$ 故 β 可由 α_i 唯一表示即

$$\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$$

(3) 当 $a \neq 0, a \neq b$ 时有

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 β 可由 α_i 无穷多表示, 即

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + (k+\frac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}$$

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1,1,4)^T$, $\alpha_2 = (1,0,4)^T$, $\alpha_3 = (1,2,a^2+3)^T$; 向量组 (II) $\beta_1 = (1,1,a+3)^T$, $\beta_2 = (0,2,1-a)^T$, $\beta_3 = (1,3,a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价, 求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

Solution

数字矩阵直接用三秩相等即可 $r(I) = r(I,II) = r(II)$ 要分两部分令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$(A \mid B) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right) B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

当 $a = 1$ 的时候 $r(I) = r(I,II) = r(II) = 2$ 此时线性组等价

$$(A \mid \beta_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (k-2)\alpha_2 + k\alpha_3$

当 $a^2 \neq 1$ 的时候 $r(I) = r(I,II) = r(II) = 3$ 此时线性组等价

$$(A \mid \beta_3) \to \begin{pmatrix} & 1 \\ E & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

此时 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

1.3 线性相关与线性无关的判定

相关/无关的判定

(方法一 用定义)

(方法二 用秩)

1. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，则对任意常数 k, l，$\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

   (A) 必要非充分条件

   (B) 充分非必要条件

   (C) 充分必要条件

   (D) 既非充分又非必要条件

Solution

证明充分性, 取 $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T, \alpha_3 = O$ 显然证明不了 α_i 无关

证明必要性

(方法一 用定义证明) 由线性无关的定义, 只需证明 $\forall k, l, \exists k_1, k_2$

$$k_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + k_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = 0$$

即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + (k_1 k + l)\alpha_3 = 0$$

由 α_i 线性无关有 $\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_1 k + l = 0 \end{cases}$

(方法二 用秩)

$$(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$$

记 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 又 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性无关, 故 $r(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = r(C) = 2$

2. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0$, $A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

Solution

有题设有

$$\begin{cases}(A^2 - A)\alpha_1 = O \\ (A^2 - A)\alpha_2 = \alpha_1 \\ (A^2 - A)\alpha_3 = \alpha_2\end{cases}$$

(用定义证明) 假设存在 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = O \tag{$\star$}$$

$(\star)$ 式两端同时左乘以 $(A^2 - A)$ 有

$$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_3 = O \tag{$\star\star$}$$

同理将上式两端同乘 $A^2 - A$ 有

$$k_3\alpha_1 = 0$$

由于 $A\alpha_1 \neq O \implies \alpha_1 \neq O$ 可知 $k_3 = 0$ 代回 $(\star\star)$ 可知 $k_2 = 0$; 将 $k_3 = k_2 = 0$ 代回 $\star$ 可知 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 故由线性无关的定义可知 α_i 线性无关.

3. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交，证明 β_1, β_2 线性相关。

Solution

由题设可知 $\forall \alpha_i^T\beta_j = 0$ 即 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T\end{pmatrix}\beta_i = O \implies (\beta_1, \beta_2)$ 为方程 $AX = 0$ 的解, 因而有 $r(\beta_1, \beta_2) \leq 4 - r(A)$ 又因为 (α_i) 线性无关可知 $r(A) = 3$ 故而 $r(\beta_1, \beta_2) \leq 4 - 3 = 1$ 从而 β_1, β_2 线性相关.

1.4 极大线性无关组的判定与计算

抽象与数字矩阵

对于抽象矩阵: 使用定义

对于具体数字矩阵: 初等行变换转换为行阶梯形

1. 设 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,a+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,a)^T$。

   (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

   (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

Solution

(1) 联立 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,|,\alpha)$ 化简为行阶梯形有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 1-a \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=2$ 的时候 $r(A)=3-4$ 此时极大无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

(2) 当 $a\neq 2$ 的时候 $r(A)=4$ 该向量组线性无关

(2) 当 $a\neq 2$ 将 $(A\mid\alpha)$ 转换为行最简型有

$$\left(\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} 2 \\ \dfrac{3a-4}{a-2} \\ 1 \\ \dfrac{1-a}{a-2} \end{matrix} \end{array}\right)$$

$\alpha=2\alpha_1+\dfrac{3a-4}{a-2}\alpha_2+\alpha_3+\dfrac{1-a}{a-2}\alpha_4$

2. 证明:

   (I) 设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$；

   (II) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$。

Solution

1.5 向量空间 (数一专题)

向量空间

过度矩阵

由基 (极大线性无关组)$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)C$ 即 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$

坐标转换公式

设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 中的坐标为 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$, 在基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 中的坐标为 $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$ 则坐标转换公式为 $x=Cy$

$$\begin{aligned}\gamma&=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)X\\&=(\beta_1,\dots,\beta_n)Y\\&=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)CY\implies x=Cy\end{aligned}$$

1. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

   (I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基:

   (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

Solution

(1) 有题设有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

又因为 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$ 从而 β_i 线性无关, 因此 β_i 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

(2) 设 ξ 在基 (α_i) 和 (β_i) 下的坐标为 x, 则

$$\xi = (\alpha_i)x = (\beta_i)x = (\alpha_i)Cx$$

得齐次方程 $(C-E)x = O$ 有非零解, 对其做初等初等行变换, 有

$$(C-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

当 $k=0$ 的时候, 方程组有非零解, 所有非零解为 $x = k(-1,0,1)^T, k$ 为任意常数, 此时在两个基下坐标相同的所有非零向量为

$$\xi = k(\alpha_i)(-1,0,1)^T = k(\alpha_3 - \alpha_1)$$