

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 23 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 23 日

目录

第一章 一元函数积分学	1
1.1 定积分的概念	1
1.2 不定积分的计算	2
1.3 定积分的计算	4
1.4 反常积分的计算	6
1.5 反常积分敛散性的判定	7
1.6 变限积分函数	9
1.7 定积分应用求面积	12
1.8 定积分应用求体积	12
1.9 定积分应用求弧长	13
1.10 定积分应用求侧面积	14
1.11 证明含有积分的等式或不等式	15

第一章 一元函数积分学

1.1 定积分的概念

2. (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是
(A) $(0, 1)$ (B) $(1, \frac{\pi}{2})$ (C) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (D) $(\pi, +\infty)$

Solution. (方法一) 利用单调性

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \ln x$$
$$f'(x) = \frac{\sin x - 1}{x} \begin{cases} x > 0, & f'(x) < 0 \\ x < 0, & f'(x) > 0 \end{cases}$$

又 $f(1) = 0$ 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上大于 0, 在 $(1, \infty)$ 小于 0

(方法二) 利用几何意义

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$
$$\int_1^x \frac{\sin t - 1}{t} dt > 0$$

由积分的几何意义容易知道, 当 $x \in (0, 1)$ 时候上式成立

□

3. (2003, 数二) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则
(A) $I_1 > I_2 > 1$ (B) $1 > I_1 > I_2$
(C) $I_2 > I_1 > 1$ (D) $1 > I_2 > I_1$

Solution. 由基本不等式 $x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x < x < \tan x$, 故有 $\tan x/x > 1 > x/\tan x$ 由比较定理有 $I_1 > I_2$, 考虑 I_1 与 1 的关系.

(方法一) 求导用单调性

$f(x) = \tan x/x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sec^2 x \cdot x - \tan x}{x^2} \\ &= \frac{x - \sin x \cos x}{\cos^2 x x^2} > 0 \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(0, \pi/4)$ 上单调递增, 有 $f(x) < f(\pi/4) = \frac{4}{\pi}$, 故 $I_1 < 1$

(方法二) 利用凹凸性

由于 $\tan x$ 在 $(0, \pi/2)$ 上是一个凹函数, 则其割线的函数值大于函数的函数值大于切线的函数值 (割线在函数图像的上方, 切线在函数图像的下方) 则有

$$\frac{4}{\pi} > \tan x$$

从而 $I_1 < 1$

□

1.2 不定积分的计算

Remark.

$$\text{不定积分的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{凑微分} \\ \text{分部} \\ \text{换元} \left\{ \begin{array}{l} \text{倒代换} \\ \text{三角代换} \\ \text{根式代换} \\ \text{万能公式} \\ \text{整体代换} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分部里面要注意表格积分法, 与行列式积分法

万能公式如下

$$\text{令 } x = \tan \frac{t}{2} \text{ 则 } \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-t^2}{2t} \\ x = 2 \cdot \arctan t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right.$$

4. 计算下列积分 (1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$; (2) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$

Solution. (1)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} \\ &\stackrel{\int \frac{1}{x^2+a^2} dx}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} \\ &\stackrel{\int \frac{1}{a^2-x^2} dx}{=} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + (x + \frac{1}{x})}{\sqrt{2} - (x + \frac{1}{x})} \right|\end{aligned}$$

□

5. 计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx, x > 0$

Solution.

$$\begin{aligned}\text{原式} &\stackrel{t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{=} \ln 1 + t d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \ln(1+t) \cdot \frac{1}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{1+t} dt \\ \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{1+t} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C \\ \text{原式} &= \ln(1+t) \cdot \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C\end{aligned}$$

□

6. 求 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$

Solution. (方法一 万能代换)

$$\begin{aligned}\text{原式} &\stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln |1+t| + C \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C\end{aligned}$$

(方法二 三角公式)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
 &= \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 + \tan x)} \\
 &= \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \\
 &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$

□

1.3 定积分的计算

Remark. 定积分除了不定积分的办法还有如下自己独有的办法

$$\text{定积分的计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{奇偶性} \\ \text{周期性} \\ \text{华里士公式} \\ \text{区间再现} \end{array} \right.$$

其中华里士公式如下

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n = \text{奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = \text{偶数} \end{array} \right.$$

$\cos x$ 也是一样的结果

7. (2013, 数一) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

Solution. (方法一 分部积分法)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx \\
 &\stackrel{\sqrt{x}=t}{=} -4 \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \\
 &= -4t \ln(1+t^2) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1} dt \\
 &= 8 - 4 \ln 2 - 2\pi
 \end{aligned}$$

(方法二 二重积分)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \\
 &\stackrel{\text{交换积分次序}}{=} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt \\
 &= \dots \\
 &= 8 - 4 \ln 2 - 2\pi
 \end{aligned}$$

□

8. 求下列积分: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$

Solution. 这两题都是典型的区间再现的题目

(1)

$$\text{原式} \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos t}}{e^{\sin t} + e^{\cos t}} dt$$

由于积分与变量无关, 将上式与原式相加有

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}} + (\cos x)^{\sqrt{2}}} dx \\
 &\stackrel{\text{和一完全一致}}{=} \dots \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

□

9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

Solution. 这道题是比较困难的积分计算题, 由于其他方法都不好用不妨考虑区间再现

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{x=\frac{\pi}{4}-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right] dt \\ & \stackrel{\tan(a+b)=\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\ln 2 - \ln(1 + \tan t)] dt \\ \text{原式} & = \frac{\pi}{8} \ln 2 \end{aligned}$$

□

区间再现总结

考试中可能直接考察的区间再现的公式为

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

其余的就只能见机行事 若其他积分方法都无法做出则可以考虑区间再现

1.4 反常积分的计算

Remark. 瑕积分的计算需要注意, 若瑕点在内部则需要积分拆开分别计算

10. (1998, 数二) 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

Solution. 显然 $x = 1$ 是积分的瑕点, 故原积分需要拆成两部分即

$$\begin{aligned} \text{原式} & = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} \\ & \stackrel{\text{配方}}{=} \arcsin 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ & = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

□

积分表的拓展

(1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

(2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

(3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

第二个如果是定积分也可以按照几何意义 (圆的面积) 做

1.5 反常积分敛散性的判定

Remark. 反常积分的敛散性感觉不如无穷级数敛散性难

(方法一) 使用反常积分的定义, 算出其极限值

(方法二) 比较判别法—寻找 x^p

$$(\text{瑕积分}) \int_0^1 \frac{1}{x^p} \begin{cases} 0 < p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

$$(\text{无穷积分}) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

11. (2016, 数一) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则

- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$ (B) $a > 1$ 且 $b > 1$
 (C) $a < 1$ 且 $a+b > 1$ (D) $a > 1$ 且 $a+b > 1$

Solution. 显然 $x = 0$ 是该积分的瑕点, 需要分成两部分考虑 $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{x^a(1+x)^b} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{x^a} \implies p = a$$

由 p 积分的性质可知当 $p < 1$ 的时候其收敛故 $a < 1$ 的时候原积分中的 \int_0^1 收敛同理对于 $\int_1^{+\infty}$ 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^{a+b}} = 1 \implies p = a + b$$

由 p 积分的性质可知当 $p > 1$ 即 $a + b > 1$ 的时候原积分 $\int_1^{+\infty}$ 收敛, 故由反常积分的定义可知只有 $a < 1, a + b > 1$ 的时候原积分收敛 \square

12. (2010, 数一、数二) 设 m, n 均为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

- (A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关
 (C) 与 m, n 的取值都有关 (D) 与 m, n 的取值都无关

Solution. 显然 $x = 0$ 和 $x = 1$ 是积分的瑕点, 需要分成两部分考虑, 有 $\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$, 想考虑前一个积分

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \frac{1}{x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}}} \implies p = \frac{1}{n} - \frac{2}{m}$$

由 p 积分的性质, 只有 $p < 1$ 上述积分就收敛, 而由于 $(n, m) \in \mathbb{Z}^+, \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < \frac{1}{n} < 1$ 故上式恒收敛.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^p \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)^2}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^p \sqrt[n]{\ln^2(1-x)^2} \implies \text{恒为 } 0$$

故上式也恒收敛, 故原式的敛散性与 (n, m) 均无关 \square

1.6 变限积分函数

原函数, 可积, 变限积分

(一) 原函数存在定理

$$\int f(x)dx \text{ 存在 } \begin{cases} \text{连续函数原函数必然存在} \\ \text{含有第一类间断点和无穷间断点其原函数必然不存在} \\ \text{含有震荡间断点其原函数可能存在} \end{cases}$$

(二) 可积性定理

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 存在 } \begin{cases} \text{可积必有界} \\ \text{连续必可积} \\ \text{含有有限个间断点的有界函数可积} \end{cases}$$

(三) 变限积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \begin{cases} f(x) \text{ 可积} \implies F(x) \text{ 连续} \\ f(x) \text{ 连续} \implies F(x) \text{ 可导} \\ x = x_0 \text{ 是函数可去间断点} \implies F(x) \text{ 可导, 但 } F'(x_0) \neq f(x_0) \\ x = x_0 \text{ 是函数跳跃间断点} \implies F(x) \text{ 不可导, 但连续} \end{cases}$$

$$13. (2013, \text{数二}) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}, F(x) = \int_0^x f(t)dt, \text{ 则}$$

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点 (B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导 (D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

Solution. 显然由总结可知, 选 C

□

14. (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution. (一) 有题有 $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$, 所求的平均值为

$$\begin{aligned} \text{平均值} &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx}{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt}{\frac{3\pi}{2}} \\ &\quad \underline{\underline{\text{交换积分次序}}} \quad \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt \int_t^{\frac{3\pi}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3\pi} \end{aligned}$$

(二) 有题可知 $f'(x) = \frac{\cos x}{2x-3\pi}$, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 只有唯一零点 $x = \frac{\pi}{2}$, 从而有 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递减, 而 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0) = 0$, 考虑上述平均值, 由积分中值定理有 $f(c) = \frac{\pi}{3} > 0$ 故 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$ 上有一个零点. 综上 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 仅有一个零点 □

定积分的应用

(一) 定积分求面积 (也可以用二重积分)

$$A = \begin{cases} \int_a^b |f(x)| dx, & \text{直角坐标系} \\ \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta, & \text{极坐标} \\ \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)| dt, & \text{参数方程} \\ \frac{1}{2} \int_L -ydx + xdy, & L \text{ 对 } D \text{ 来说取正向} \end{cases}$$

(二) 定积分求旋转体体积 (可以用微元法推, 也可以用二重积分)

$$V = \begin{cases} \iint_D 2\pi r(x, y) d\sigma, & \text{二重积分法, 其中 } r(x, y) \text{ 为区域 } D \text{ 内一点到转轴的距离} \\ \int_a^b \pi f^2(x) dx, & \text{微元法, 绕 } x \text{ 轴旋转} \\ \int_a^b 2\pi |xf(x)| dx, & \text{微元法, 绕 } y \text{ 轴旋转} \end{cases}$$

(三) 定积分求弧长 (第一类曲线积分)

$$s_{\text{弧长}} = \int_C f(x, y) ds = \begin{cases} \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, & \text{直角坐标} \\ \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, & \text{参数方程} \\ \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta, & \text{极坐标} \end{cases}$$

(四) 定积分求侧面积 (第一类曲面积分)

$$S_{\text{侧面积}} = \iint_S dS = \begin{cases} \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, & \text{直角坐标} \\ \int_\alpha^\beta 2\pi y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, & \text{参数方程} \\ \int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta, & \text{极坐标} \end{cases}$$

(五) 物理应用 (微元法, 不过数一不太可能考)

1.7 定积分应用求面积

15. (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{+\infty} |e^x \sin x| dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\
 &\quad \text{由于 } \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{\alpha x})' & (\sin \beta x)' \\ e^{\alpha x} & (\sin \beta x) \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \beta^2} + C \\
 &\quad \text{其中 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\
 &\quad \text{故原式} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} (1 + e^{-\pi}) \\
 &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{\pi}}{2(e^{\pi} - 1)}
 \end{aligned}$$

□

1.8 定积分应用求体积

16. (2003, 数一) 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

Solution. (1) 有题设可求出其切点为 $(e, 1)$ 切线方程为 $y = \frac{x}{e}$

方法一:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{e}{2} - \int_1^e \ln x dx \\
 &= \frac{e}{2} - (x \ln x) \Big|_1^e \\
 &= \frac{e}{2} - 1
 \end{aligned}$$

方法二: 用反函数做 $x = e^y$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 e^y dy - \frac{e}{2} \\ &= e - 1 - \frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

(2) 方法一:

$$V = \frac{\pi}{3}e^2 - 2\pi \int_1^e (e-x) \ln x dx = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$$

方法二: 用反函数

$$V = \frac{\pi}{3}e^2 - \pi \int_0^1 (e^y - e)^2 dy = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$$

□

17. (2014, 数二) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution. 先利用偏积分求出 $f(x, y) = (y+1)^2 - (2-x) \ln x$, 故曲线 $f(x, y) = 0 \implies (y+1)^2 = (2-x) \ln x$ ($1 \leq x \leq 2$) 要根据题目条件求出 x 的范围! 显然曲线关于 $y = -1$ 对称利用微元法有

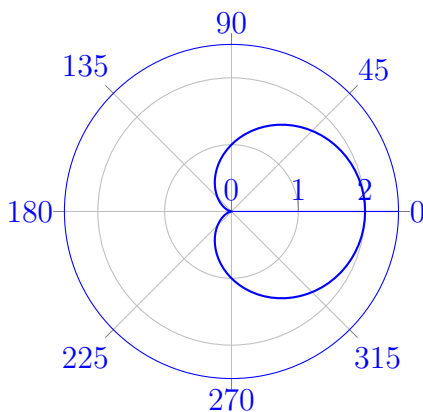
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (2-x) \ln x dx \\ &= 2\pi \ln 2 - \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

□

1.9 定积分应用求弧长

18. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 的全长.

Solution. 这种极坐标的图像, 都可以通过描点法去画 (其实画不画也不影响求)



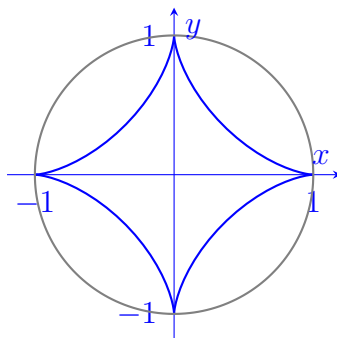
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\
 &\stackrel{\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1}{=} 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
 &= 8a
 \end{aligned}$$

□

1.10 定积分应用求侧面积

19. (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution. 这个参数方程的图像是需要记住即星形线



$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 - \int_0^1 \pi y^2(x) dx \\
&= \frac{18}{35} \pi \\
S &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi + \int_0^1 2\pi y(x) ds \\
&= 2\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cdot \sin^3 t \sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\
&= \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}$$

□

1.11 证明含有积分的等式或不等式

Remark. 积分中值定理 (三个)

(一) 第一积分中值定理, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\exists c \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

(二) 第一积分中值定理的推广, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续

$$\exists c \in (a, b), \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

(三) 第二积分中值定理, 若 $f(x), g(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且 $g(x)$ 在其上不变号则

$$\exists c \in (a, b), \int_a^b f(x)g(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx$$

比较定理及其推论

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$

推论一: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) < \int_a^b g(x)$

推论二: 若 $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

推论三: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

21. (2000, 数二) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$

Solution. (1) 由比较定理有

$$\int_0^{n\pi} |\cos t| dt \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t| dt$$

显然 $|\cos t|$ 以 π 为周期故上式容易计算为

$$2n \leq S(x) < 2(n+1)$$

(2) 考虑夹逼准则

$$\frac{2}{\pi} \xleftarrow{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{2}{\pi}$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$

□

22. (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$.

证明:

(1) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$.

Solution. (一) 由比较定理有

$$0 \leq \int_a^x g(x) dx \leq \int_a^x dx = x - a$$

(二) 构造函数用单调性

令

$$F(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(t) dt} f(t) dt - \int_a^x f(t) g(t) dt$$

则其导数为

$$F'(x) = g(x) \left[f\left(a + \int_a^x g(t) dt\right) - f(x) \right]$$

由一可知 $a + \int_a^x g(t) dt \leq x$ 从而可知 $F'(x) < 0$ 故而 $F(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减, 而 $F(a) = 0$ 故 $F(b) < F(a) = 0$ 即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$$

.

□