错题集

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 12 日

梅花引·荆溪阻雪

白鸥问我泊孤舟，是身留，是心留？心若留时，何事锁眉头？风拍小帘灯晕舞，对闲影，冷清清，忆旧游。

旧游旧游今在否？花外楼，柳下舟。梦也梦也，梦不到，寒水空流。漠漠黄云，湿透木棉裘。都道无人愁似我，今夜雪，有梅花，似我愁。

2025 年 7 月 12 日

目录

第一章　高等数学

1.1　660

1.2　880

1.3　李艳芳 900

1.4　张宇题源大全

第二章　线性代数

2.1　880

2.2　李艳芳 900

2.3　张宇题源大全

第三章　概率论

3.1　李正元复习全书

1. 每箱产品有 10 件, 其中次品数从 0 到 2 是等可能的, 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差, 一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被误判为正品的概率为 10%. 试求:

(I) 随机检验一箱产品, 它能通过验收的概率 p ;

(II) 检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 q .

Solution. (1) 设 $B=\{$任取一件为正品$\}$,$A=\{$一箱产品能通过验收$\}$ 则由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})$$

而其中

$$P(A\mid B)=1-0.02=0.98, P(A\mid \bar{B})=1-0.1=0.9$$

代入全概率公式有 $p=P(A)=1+0.88P(B)$, 为求 $P(B)$, 记 C_i 为每箱中包含 i 件次品, 且 C_0,C_1,C_2 为完备事件组, 再由全概率公式可以求出

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(C_i)P(B\mid C_i)=0.9$$

故 $P(A)=0.892$

(2)$q=P\{X/10\geq 0.9\}=P\{X\geq 9\}=P\{X=9\}+P\{X=10\}\approx 0.705$ □

2. 一条自动生产线生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, n=0,1,2,\cdots$. 假设产品的优质品率为 $p\,(0<p<1)$. 如果各件产品是否为优质品相互独立.

(I) 计算生产线在两次故障间共生产 k 件 $(k=0,1,2,\cdots)$ 优质品的概率;

(II) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品, 求它共生产 m 件产品的概率.

Solution. (1) 不妨令

B_k = {两次故障公生产了 k 件优质品},A_n = {两次故障间总共生产了 n 件产品}, 显然 $A_0, A_1, \ldots$ 构成了一个完备事件组, 故利用全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) \\ &\xlongequal{\text{前 k-1 次不可能产生 k 件优质品}} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda p} \\ &\xlongequal{\text{Possion 分布}} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

(2) 当 $m < k$ 的时候,$P(A_m \mid B_k) = 0$, 当 $m \geq k$,

$$\begin{aligned} P(A_m \mid B_k) &= \frac{P(A_m)P(B_k \mid A_m)}{P(B_k)} \\ &= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda q}, m \in (k, k+1, \ldots) \end{aligned}$$

□

总结

关于全概率公式与贝叶斯公式的总结

这种问题的关键在于寻找一个合适的完备事件组, 当问题涉及" 原因推结果/结果推原因" 大概率要用贝叶斯公式 (条件概率是贝叶斯的特殊情况)

3. 甲、乙二人轮流投篮, 游戏规则规定为甲先开始, 且甲每轮只投一次, 而乙每轮连续投两次, 先投中者为胜. 设甲、乙每次投篮的命中率分别是 p 与 0.5, 则 $p =$____ 时, 甲、乙胜负概率相同.

Solution. 这道题和笔记中的交替射击模型一致, 记 A = {甲获胜}, B = {乙获胜}, 则由题意有

$$P(A) = p + (1-p)(1-0.5)(1-0.5)P(A) \implies P(A) = \frac{p}{1-0.25(1-p)}$$

再由题意可知, 要使得甲乙获胜概率一致, 则 $P(A) = P(B) = 0.5 \implies p = \frac{3}{7}$ □

4. (非离散非连续的概率) 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, 且 $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$, 已知当 $X\neq 0$ 的时候,X 在其他取值范围内满足均匀分布, 求 X 的分布函数 $F_X(x)$.

Solution. 由题意有 $P\{|X|\leq 1\}=1, P\{X=0\}=\frac{1}{4} \implies P\{X\neq=0\}=\frac{3}{4}$, 又因为区间长度为 2, 有

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{3}{8}(x+1), & -1<=x<0 \\ \frac{3x+5}{8}, & 0\leq x<1 \\ 1, & 0\geq 1 \end{cases}$$

□

5. 设有四个编号分别为 $1,2,3,4$ 的盒子和三只球，现将每个球随机地放入四个盒子，记 X 为至少有一只球的盒子的最小号码.

(1) 求 X 的分布律;

(2) 若当 $X=k$ 的时候, 随机变量在 $[0,k]$ 上服从均匀分布, 求 $P\{Y\leq 2\}$;

Solution.

(1) 由题有 $P\{X=1\}=\frac{C_3^1 3^2+C_3^2 3+C_3^3}{4^3}=\frac{37}{64}$ 解释: 总共有 4^3 种方案, 若 1 是最小的有球的盒子, 则其中可以有 $1,2,3$ 三种可能,$C_3^1 3^2$ 表示选择一个球加入 1 号盒子, 其余两个球可以从剩余 3 个盒子中随机选择两个放入. 同理可以求出 X=2,3,4, 故有

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{37}{64} & \frac{19}{64} & \frac{7}{64} & \frac{1}{61} \end{pmatrix}$$

(2) 由全概率公式 $P\{Y\leq 2\}=\sum_{i=1}^{4}P\{Y\leq 2\mid X=k\}=\frac{367}{384}$ □

3.2 880

1. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A=\{$中间一段为三段中的最长者$\}$, 则 $P(A)=$ ______

Solution. □

2. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 ______

Solution. □

3. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 ______

Solution. □

4. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 ______

Solution.

(方法一) 首先考虑第 n 次试验,A 发生奇数次的情况有两种.(1) 前 n-1 次成功率偶数次, 第 n 次成功;(2) 前 n-1 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 $A_k = \{\, k \quad \}, P(A_k) = p; B_k = \{$k 次实验中成功奇数次$\}$, 记 $P(B_k) = p_k$, 则有

$$B_n = B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n = P(B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n) = P(B_{n-1}\bar{A}_n) + P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned} \text{上式} &= P(B_{n-1})P(\bar{A}) + P(\overline{B_{n-1}})P(A_n) \\ &= (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) \\ &= p + (1-2p)p_{n-1} \end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)[p_{n-1} - \frac{1}{2}] \xlongequal{\text{等比数列}} -\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^(n-k), k = 0, 1, 2, \ldots$ 若 n 为偶数则

$$\begin{aligned} P(X=odd) &= P(X=1) + P(X=3) + \ldots + P(X=n-1) \\ &= C_n^1(1-p)^{n-1} + C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3} + \ldots + C_n^{n-1} p^{n-1}(1-p) \\ P(X=even) &= P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=n) \\ &= C_n^0 p^0 (1-p)^n + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 \end{aligned}$$

且 $P(X=odd)+P(X=even)=1$, 有注意到

$$
\begin{aligned}
P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+\ldots+P(X=n-1) \\
&= -C_n^1(p-1)^{n-1}-C_n^3p^3(p-1)^{n-3}-\ldots-C_n^{n-1}p^{n-1}(p-1) \\
P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+\ldots+P(X=n) \\
&= C_n^0p^0(p-1)^n+\ldots+C_n^np^n(p-1)^0
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
P(X=even)-P(X=odd) &= C_n^0p^0(p-1)^n+C_n^1p^1(p-1)^{n-1}+\ldots+C_n^np^n(p-1)^0 \\
&\xlongequal{\text{二项式定理}} (2p-1)^n
\end{aligned}
$$

则 $2P(X=odd)=1-(2p-1)^n \implies P(X=odd)=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X=\text{奇数})=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X\sim B(n,p)$, 则 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$,$k=0,1,2,\ldots$

令 $Y=\frac{1}{2}[1+(-1)^X]$, 当 X 为奇数时, $Y=0$; 当 X 为偶数时, $Y=1$

于是原问题转换为求 $P(X\text{为奇数})=P(Y=0)$ 注意到 $E[Y]=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=P(Y=1)=1-P(Y=0)$, 故只需要求 $E[Y]$

$$
\begin{aligned}
EY=E(\frac{1}{2}[1+(-1)^X]) &= \frac{1}{2}+E(-1)^X \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kp^k(1-p)^{n-k} \\
\xlongequal{\text{逆用二项式定理}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n
\end{aligned}
$$

故 $P(Y=0)=1-P(Y=1)=\frac{1-(1-2p)^n}{2}$ □

5. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

(I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

(II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

Solution. 设 $A_i=\{$第 i 次取得红球$\}(i=1,2,3), B_i=\{$第 j 次投掷银币出现正面$\}(j=1,2,3)$

(1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$P(A_3 \mid A_1A_2)=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}=P(A_3)=P(A_1)$$

$$P(A_1)\xlongequal{\text{全概率公式}}P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid \bar{B}_1)P(\bar{B}_1)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) 由于两次试验都是独立重复的所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的

则 $P(A_1B_1)=P(A_2B_2)=P(B_1)P(A_1\mid P(B_1))=\frac{1}{3}$

则所求概率为

$$P(B_1B_2\mid A_1A_2)=\frac{B_1B_2A_1A_2}{P(A_1A_2)}=\frac{\frac{1}{3}^2}{\frac{1}{2}^2}=\frac{4}{9}$$

□

6. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

Solution. 设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X, 其显然满足 $X\sim B(20,0.15)$, 不妨假设当 $X=k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X=k)\geq P(X=k-1), P(X=k)\geq P(X=k+1)$ 即

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^k0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)}0.15^{k-1}0.85^{(21-k)}}\geq 1$$

与

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^k0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)}0.15^{k+1}0.85^{(19-k)}}\geq 1$$

得到如下结果

$$\begin{cases}300-15k+15\geq 85k\\ 85k+85\geq 300-15k\end{cases}$$

即 $2.15\leq k\leq 3.15$ 故 $k=3$, 其概率为 $P(X=3)=C_{20}^{3}0.15^{3}0.85^{17}$ □

7. 设自动机床在任意时长为 t 的时间间隔内发生故障的此时为 X 服从参数为 λ_t 的泊松分布,Y 表示相继两次故障之间的时间间隔, 则当 $t>0$ 时,$P\{Y>t\}=$ ______

Solution. 是一个文字游戏, 所谓 $P\{Y>t\}$ 转换为 X 的话其实就是在 t 时间内没有发生故障,$P\{X=0\}=\frac{\lambda_t^0}{0!}e^{-\lambda_t}=e^{-\lambda_t}$ □

8. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma>0,(x_0,y_0)$ 为分布函数曲线 $y=F(x)$ 的拐点, 则 $x_0=$ _____, $y_0=$ _____

Solution. 这道题本身并没啥, 但要注意题目,y_0 是 $F(x_0)$ 而不是 $f(x_0)$, 答案是 $\mu,\frac{1}{2}$ □

9. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{a}{k!}e^{-2},k=0,1,2\ldots$ 则常数 $a=$ ______

Solution. 这道题由两个解法, 需要注意对比泊松分布时候系数的确定

(方法一) 由规范性有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{k!}e^{-2}=1=\implies a=e$$

(方法二) 有泊松分布有

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

注意到 $\lambda=-1$ 的时候与题设要求接近, 故有 $ae^{-2}=e^{-1}\implies a=e$

□

10. 设 $X\sim N(0,\sigma^2)$,X 在区间 (a,b) 内取值的概率最大, 其中 $a>0$ 则 $\sigma^2=$ ______

Solution. 这道题还真实蛮奇怪的, 有题可知所求概率为

$$P\{a/\sigma<X<b/\sigma\}=\Phi(a/\sigma)=\Phi(b/\sigma)$$

不妨记

$$f(\sigma)=\Phi(a/\sigma)=\Phi(b/\sigma)$$

问题等效为去上面函数的最值问题.

$$f'(\sigma)=-\frac{a}{\sigma^2}\phi(a/\sigma)-\frac{b}{\sigma^2}\phi(a/\sigma)$$

令 $f'(\sigma)=0$, 则有 $be^{-(b^2/(2\sigma^2))}=ae^{-(a^2/(2\sigma^2))}$ 两边取对数, 可以得到

$$\sigma^2=\frac{a^2-b^2}{2(\ln a-\ln b)}$$

当 $\sigma^2>$ 所求值的时候 $f'(\sigma)>0$ 反之则有 $f'(\sigma)<0$ 故所求值即为最大值

$$\boxed{\sigma^2=\frac{a^2-b^2}{2(\ln a-\ln b)}}$$

□

3.3 李艳芳 900

3.4 张宇题源大全

第四章　真题与模拟题

真题全刷结束后才开始套卷练习 (8 月)

真题卷要保证刷 3 遍 (9 月,10 月,11 月) 各一次

模拟卷从 25 年开始往前刷

4.1　数一真题套卷 (00-25)

4.2　计算机基础真题套卷

4.3　合工大

第五章　计算机基础

5.1　数据结构

1. 评估下面这段代码的时间复杂度 ()

```
int func(int n) {
    int i = 0, sum = 0;
    while(sum < n) sum += ++i;
    return i;
}
```

Solution. □

2. 评估下面这段代码的时间复杂度 ()

```
int sum = 0;
    for(int i = 1; i < n; i *= 2)
        for (int j = 0; j < i; j++)
            sum++;
```

Solution. □

3. 一个栈的入栈序列为$\underline{1, 2, 3, \ldots, n}$, 出栈序列是$\underline{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n}$. 若 $P_2 = 3$, 则 P_3 的可能取值的个数可能是 ()

   A.n-1　　B.n-2　　C.n-3　　D. 无法确认

4. 已知循环队列 存储在一维数组 $A[0, \ldots, n-1]$ 中, 且队列非空的时候 front 和 rear 分别指向队头和队尾. 若初始时队列为空, 且要求第一个进入队列的元素存储在 $A[0]$, 则初始

时 front 和 rear 的值分别为 ()

A.0,0 B.0,n-1 C.n-1,0 D.n-1,n-1

5. 循环队列 放在一维数组 $A[0,...,M-1]$ 中,end1 指向队头元素,end2 指向队尾元素的后一个位置. 假设队列两端都可以进行入队和出队操作, 队列中最多能容纳 $M-1$ 个元素. 初始队列不为空. 下列判断对空和队满的条件中, 正确的是 ()

A. 对空:end1 == end2; 队满:end1 == (end2+1)mod M

B. 对空:end1 == end2; 队满:end2 == (end1+1)mod M-1

C. 对空:end2 == (end1+1)mod M; 队满:end1 == (end2+1)mod M

D. 对空:end1 == (end2+1)mod M; 队满:end2 == (end1+1)mod (M-1)

6. 火车重排问题

假设火车入口和出口之间有 n 条轨道, 列车驶入的顺序为$8,4,2,5,3,9,1,6,7$ 若希望得到的驶出顺序为 $1\sim9$ 则 n 至少为 ()

A.2 B.3 C.4 D.5

7. 在一颗度为 4 的树 T 中, 若有 20 个度为 4 的结点,10 个度为 3 的结点,1 个度为 2 的结点,10 个度为 1 的结点, 则树 T 的叶结点个数为 ()

A.41 B.82 C.113 D.122

8. 已知一颗完全二叉树的第六层 (设根为第一层) 由 8 个叶结点, 则该完全二叉树的结点个数最多为()

A.39 B.52 C.111 D.119

9. 若一颗完全二叉树有 786 个结点, 则该二叉树中叶结点的个数为 ()

A.257 B.258 C.384 D.385

10. 先序序列为a,b,c,d 的不同二叉树的个数为 ()

A.13 B.14 C.15 D.16

11. 将森林转换为对应的二叉树, 若在二叉树中, 结点 u 是结点 v 的父结点的父结点, 则在原来的森林中,u 和 v 可能的关系是 ()

(I) 父子关系

(II) 兄弟关系

(III) u 的父结点与 v 的父结点是兄弟关系

12. 已知一颗有 2011 个结点的树, 其叶结点的个数为 116, 该树对应的二叉树中无右孩子 的结点个数为 ()

13. 已知森林 F 及与之对应的二叉树 T, 若 F 的先根遍历序列为a, b, c, d, e, f, 中根遍历序列为b, a, d, f, e, c, 则 T 的后根遍历序列为 ()

14. 对任意给定的含 n(n>2) 个字符的有限集合 S, 用二叉树表示 S 的哈夫曼编码集与定长编码集, 分别得到二叉树 T_1, T_2. 下列叙述中, 正确的是 ()

    A. T_1 和 T_2 的结点个数相同

    B. T_1 的高度大于 T_2 的高度

    C. 出现频次不同的字符在 T_1 中处于不同的层

    D. 出现频次不同的字符在 T_2 中处于相同的层

15. 在由 6 个字符构成的字符集 S 中, 各字符出现的频次为$3, 4, 5, 6, 8, 10$, 为 S 构造的哈夫曼树的加权平均长度为 ()

    A.2.4　　B.2.5　　C.2.67　　D.2.75

16. 对于任意一棵高度为 5 且有 10 个结点的二叉树, 若采用顺序存储结构保存, 每个结点占一个存储单元, 则存放该二叉树至少需要多少存储单元?

    Solution. 对应顺序存储, 应该按照满二叉树存储, 故需要的存储空间为 $2^h - 1 = 2^5 - 1 = 31$ 个 □

17. 在下列关于二叉树遍历的说法中, 正确的是 ( ).

    (A) 若有一个结点是二叉树中某个子树的中序遍历结果序列的最后一个结点, 则它一定是该子树的前序遍历结果序列的最后一个结点

    (B) 若有一个结点是二叉树中某个子树的前序遍历结果序列的最后一个结点, 则它一定是该子树的中序遍历结果序列的最后一个结点

    (C) 若有一个叶结点是二叉树中某个子树的中序遍历结果序列的最后一个结点, 则它一定是该子树的前序遍历结果序列的最后一个结点

    (D) 若有一个叶结点是二叉树中某个子树的前序遍历结果序列的最后一个结点, 则它一定是该子树的中序遍历结果序列的最后一个结点

    Solution. 二叉树中序遍历的最后一个结点必然是从根开始沿着起右指针走到底的结点, 记其为 p.

若其不是叶子结点, 不妨假设其左子树非空, 则在先序遍历中最后的结点必然在其左子树中, 故 ABD 都不对.

若其是叶子结点, 则前序遍历和中序遍历的最后一个结点都会是它, 故 C 正确. □

5.2 计算机网络

1. TCP/IP 参考模型分为四个层次 (正确)

Solution. 虽然一直讲物理层-数据链路层-网络层-传输层-应用层,TCP/IP 五层结构; 但如果问层次, 其实物理层和数据链路层做的事情可以被概况的, 通常称为网络接口层. □

2. 二进制信号在信噪比为 127:1 的 4kHz 的信道上传输, 最大数据传输速率可达到 ()

A.28000bps B.8000bps C.4000bps D. 无限大

Solution. 考虑奈氏定理, 有 $B = 2W = 8kBand$ 此时最大数据传输速率为

$$R_{N-max} = B \times \log_2(n) = 8kbps$$

考虑香农定理, 有

$$R_{S-max} = W \times \log_2(1 + S/N) = 4kHz \times \log_2(1 + 127) = 28kbps$$

最终的传输速率有二者的**最小值**限制, 故 $R_{max} = \min\left(R_{Nmax}, R_{Smax}\right) = 8kpbs$ □

5.3 计算机组成原理

5.4 操作系统