考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 26 日

目录

第一章　常微分方程

1.1　一阶微分方程

Remark. 一阶微分方程

(一) 可分离变量类型: 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 可以转换为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$

(二) 一阶线性非齐次: 形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 其通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

特殊的, 一阶线性齐次 $y'+p(x)y=0$ 其通解公式为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

(三) 一阶齐次方程: 形如 $y'=f(\dfrac{y}{x})$ 则可以通过 $u=\dfrac{y}{x}$ 为可分离变量类型

(四) 全微分方程: 形如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ 则其解法本质都是求原函数

(I) 特殊路径积分法 $u(x,y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$

(II) 偏积分, 一般考虑直接偏积分

(III) 凑微分

(五) 伯努利方程: 形如 $y'(x)+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\alpha\neq(0,1)$ 其解法如下

(I) 同除 y^{α}, 转换为 $y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$

(II) 做 $z=y^{1-\alpha}$的换元, 则原微分方程转换为

(III) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$

(IV) 转换为一阶线性方程可以用公式法直接求

(六) 需要考虑变量互换: 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)x^{\alpha}}$$

交换后可以转换为一阶线性/一阶伯努利即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)}x^{\alpha}$$

1. (1998, 数一、数二) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$, 则 $y(1)$ 等于

$(A)\ 2\pi$ $\quad(B)\ \pi$ $\quad(C)\ e^{\frac{\pi}{4}}$ $\quad(D)\ \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

Solution. 两边同除 Δx 且当 $\Delta x\to 0$, 有 $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$ 原问题转换为求初值问题的解

$$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{1+x^2}=0 \\ y(0)=\pi \end{cases}$$

由公式有 $y=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$ □

2. (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$$

求 $f(x)$。

Solution. 由题设有

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}}$$
$$=e^{\frac{f'(x)\cdot x}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\implies\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}=\frac{1}{x}$$

即原问题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{1}{x^2}\cdot f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1 \end{cases}$$

带入公式有 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ □

3. (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0 \quad (x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$$

Solution. 等式两边同时除以 x, 原式化为

$$\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right]\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 原式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边同时积分

$$\begin{cases}\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}=Cx\\ y(1)=0\end{cases} \implies y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$$

对于带有根式的结果特别需要注意化简, 两边同时乘以 $y-\sqrt{x^2+y^2}$, 可以解出 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ □

4. (2010, 数二、数三) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解。若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

$(A)\ \lambda=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2}$ $\quad (B)\ \lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

$(C)\ \lambda=\frac{2}{3},\ \mu=\frac{1}{3}$ $\quad (D)\ \lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

Solution. 由总结可知, 选 A □

一阶, 二阶线性微分方程 (组) 解的性质

若 y_1,y_2 分别为非齐次特解, 则

$$C_1y_1+C_2y_2\begin{cases}C_1+C_1=0, & \text{齐次解}\\ C_1+C_2=1, & \text{非齐次解}\end{cases}$$

5. (2018, 数一) 已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

(1) 若 $f(x)=x$, 求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution. (一) 由一阶线性的求解公式有

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left[\int e^{x}\cdot x\mathrm{d}x + C\right] \\ &= e^{-x}\left[(x-1)e^{-x}+C\right] \\ &= Ce^{-x}+x-1 \end{aligned}$$

(二) 由一阶线性的求解公式有

$$y = e^{-x}\left[\int f(x)e^{x}\mathrm{d}x + C\right] = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + C$$

则

$$\begin{aligned} y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right] \\ \int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T + \int_T^{x+T} \\ &= \frac{1}{e^t}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{e^T}\int_T^{x+T} e^T f(t)\mathrm{d}t \\ &= \ldots + \frac{1}{e^T}\int_0^T e^{t+T} f(t+T)\mathrm{d}t \\ y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right] \end{aligned}$$

由周期函数的定义, 只需要令 $y(x+T)-y(x)=0$ 即

$$C = -\frac{1}{1-e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t$$

的时候该方程的解是周期还是, 且唯一. □

6. 求解微分方程 $y' - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$.

Solution. 令 $z=\sqrt{y}$, 则 $z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{1}{2}x^2$, 则到

$$z = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = x^2\left(\frac{1}{2}\cdot x + C\right)$$

则该方程的通解为 $\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^3 + Cx^2$ □

7. 求解下列微分方程:

(1) $(2xe^y+3x^2-1)dx+(x^2e^y-2y)dy=0$;

(2) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Solution. (1) 偏积分法

$$u(x,y)=\int(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x=x^2e^y+x^3-x+\phi(y)$$

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+\phi'(y)$ 对比题目可知 $\phi'(y)=-2y \implies \phi(y)=-y^2$, 故原方程的解

$$x^2e^y+x^3-x-y^2=C$$

(2) 凑微分法

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x+(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y\\&=(2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y)+(3x^2-1)\mathrm{d}x+(-2y)\mathrm{d}y\\&=d(x^2e^y)+d(x^3-x)+d(-y^2)\\&=d(x^2e^y+x^3-x-y^2)=0\end{aligned}$$

即 $x^2e^y+x^3-x-y^2=C$ □

1.2 二阶常系数线性微分方程

Remark. 二阶齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=0$

求解特征方程 $(r^2+pr+q=0)$

$$\begin{cases} r_1\neq r_2, & \text{通解为}C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\\ r_1=r_2=r, & \text{通解为}(C_1+C_2x)e^{rx}\\ r_{1,2}=\alpha\pm\beta, & \text{通解为}e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$$

二阶非齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=f(x)$, 其解的结构为<u>齐次特解 + 非齐次通解</u>

$$\text{特解格式}\begin{cases} f(x)=P_ne^{\lambda x}, y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}\\ f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]\\ y^*=x^ke^{\alpha}[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x], l=\min\{m,n\}\end{cases}$$

8. (2017, 数二) 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

Solution. 原方程可以转换为如下两式的和

$$y''-4y'+8y=e^2x \tag{1.1}$$

$$y''-4y'+8y=e^2x\cdot\cos 2x \tag{1.2}$$

解特征方程有

$$r^2-4r+8=0 \implies r_{1,2}=\frac{4+\sqrt{-16}}{2}=2\pm 2i$$

则上述两个方程的特解分别为

$$y_1^*=Ae^{2x}$$

$$y_2^*=xe^{2x}(B\sin 2x+C\cos 2x)$$

由叠加原理 可知, 原方程的特解为

$$y^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\sin 2x+C\cos 2x)$$

□

9. (2015, 数一) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a=-3,b=2,c=-1$ (B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$ (D) $a=3,b=2,c=1$

Solution. (方法一) 带入原方程求解 a,b,c 即

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^x \\ y'=e^{2x}+(x+\frac{2}{3})e^x \\ y''=2e^{2x}+(x+\frac{5}{3})e^x \\ y''+ay'+by=ce^x \end{cases} \implies \begin{cases} 2+a+\frac{b}{2}=0 \\ 1+a+b=0 \\ \frac{5}{3}+\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}=c \end{cases} \implies \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

(方法二) 利用解的特性反推微分方程

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{x} + xe^{x}$$

显然其齐次方程的解为 $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{x}$, 非齐次特解为 xe^{x}, 故可以推导出该微分方程的齐次通解为 $C_1e^{2x} + C_2e^{x}$, 则其特征方程为 $(r-2)(r-1)=0$, 从而可知 $a=-3, b=2$, 将非齐次特解带入可以求出 $c=-1$ □

10. (2016, 数二) 已知 $y_1(x)=e^{x}$,$y_2(x)=u(x)e^{x}$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解。若 $u(-1)=e$,$u(0)=-1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution. 将 $y_2(x)$ 以及如下带入原方程有

$$\begin{cases} y_2'(x) = e^{x}\left[u'(x)+u(x)\right] \\ y_2''(x) = e^{x}\left[u''(x)+2u'(x)+u(x)\right] \end{cases}$$

有

$$(2x-1)u''(x) + (2x-3)u'(x) = 0$$

(方法一) 典型的可降阶方程, 令 $u'(x)=p$ 有

$$(2x-1)p' + (2x-3)p = 0 \implies p = Ce^{-\int \frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x} = u'(x)$$

(方法二) 分离变量

$$\int \frac{u''(x)}{u'(x)}\mathrm{d}x = \int -\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x$$

即 $\ln|u'(x)| = \ln|2x-1| - x + \ln|C_1|$

$$u(x) = \int u'(x)\mathrm{d}x = -C_1(1+2x)e^{-x} + C_2$$

带入初值条件有

$$\boxed{u(x) = -(2x+1)e^{-x}}$$

□

11. (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$。

(1) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $y(0)=1$,$y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值。

Solution. (1) 解特征方程 $r^2+2r+k=0$ 又 $0<k<1$ 故特征方程的解为

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$$

从而该方程的齐次通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2^{r_2x}$$

方法一: 直接计算方常积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\left(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\right)\mathrm{d}x&=\left(\frac{C_1}{r_1}e^{r_1x}+\frac{C_2}{r_2}e^{r_2x}\right)\bigg|_0^{+\infty}\\&\overset{r_{1,2}<0}{=\!=\!=}-\left(\frac{C_1}{r_1}+\frac{C_2}{r_2}\right)\end{aligned}$$

故原反常积分收敛

方法二: 用比较判别法

$$\lim_{x\to\infty}x^p\left(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\right)$$

又 $r_{1,2}<0$ 上式恒为 0, 又 $p=2$ 的时候 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛由比较判别法可知原反常积分收敛

(2) 方法一: 尝试求根并计算由 $y(0)=y'(0)=1$ 有

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\ r_1C_1+r_2C_2=1\end{cases}\implies\begin{cases}C_1=\frac{r_2-1}{r_2-r_1}\\ C_2=\frac{1-r_1}{r_2-r_1}\end{cases}$$

此时 $C_1r_1+C_2r_2=r_1+r_2-1$ 带入积分有

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{C_1r_2+C_2r_1}{r_1r_2}=-\frac{r_1+r_2-1}{r_1r_2}$$

则由韦达定理有 $\begin{cases}r_1+r_2=-2\\ r_1r_2=k\end{cases}$ 则原反常积分为 $\dfrac{3}{k}$

方法二: 利用微分方程替换, 带入 $y=\dfrac{-1}{k}(y''+2y')$ 此时反常积分转换为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}-\frac{1}{k}(y''+2y')\mathrm{d}x&=-\frac{1}{k}(y'+2y)\bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{3}{k}\end{aligned}$$

□

1.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 求解微分方程 $y^{(4)}-3y''-4y=0$。

Solution. 高阶齐次的解法和二阶齐次的解法完全一致, 解特征方程判断解的结构

该微分方程的特征方程为

$$r^4-3r^2-4=0 \implies (r-2)(r+2)(r^2+1)=0 \implies \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=-2 \\ r_{3,4}=\pm i \end{cases}$$

故原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

□

1.4 二阶可降阶微分方程

Remark. 有两种类型

(一) 缺 y 型 $y''=f(x,y')$ 令 $y'=p$, 则 $p'=f(x,p)$

(二) 缺 x 型 $y''=f(y',y)$ 令 $y'=p$ 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

13. 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

Solution. 本题不含 y, 令 $y'=p, y''=p'$ 则原方程化简为 $p'(x+p^2)=p$ 转换为反函数即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\frac{1}{p}\cdot x=p \implies x=p(p+C)$$

又 $p(1)=p'(1)=1$ 可知 $C=0$, 从而 $x=p^2 \implies y'=\sqrt{x}$, 从而 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$ 又 $y(1)=1$ 可知 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$ 则 □

1.5 欧拉方程

Remark. 对于形如

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-2} y^{(n-1)} \ldots + P_{n-1} x y' + P_n y = f(x)$$

令 $x = e^t$, 记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\begin{cases} xy' = Dy \\ x^2 y'' = D(D-1)y \\ \ldots \\ x^n y^{(n)} = D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)y \end{cases}$$

一般只需要将 $D \to r$ 求解特征方程即可, 注意换元.

14. 求解微分方程 $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin\ln x$。

Solution. 令 $x = e^t$, 则原方程转换为 $D(D-1)y + Dy + y = 2\sin t$ 特征方程为

$$r(r-1) + r + 1 = 0 \implies r_{1,2} = \pm i$$

齐次方程的通解为 $y = C_1\cos t + C_2\sin t$, 令 $y^* = t(A\cos t + B\sin t)$, 带入方程有 $A = -1, B = 0$ 故原方程的通解为 $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x - \ln x \cdot \cos\ln x$ □

1.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. (2005, 数二) 用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1$,$y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

Solution. 有题设可知

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{\sin t}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right) \end{cases}$$

代入方程有

$$y''(t) + y(t) = 0 \implies y = C_1\cos t + C_2\sin t = C_1 x + C_2\sqrt{1-x^2}$$

带入题设初值条件, 可知 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$ □

1.7 微分方程综合题

18. (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。求曲线 L 的方程。

Solution. 由题可设切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $x=0$, 则 $Y=-xy'+y$ 由题设原问题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} y-xy'=\sqrt{x^2+y^2} \\ y(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$$

可以解出 $y=-x^2+\dfrac{1}{4}$ □

19. (2009, 数三) 设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$。已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

Solution. 有题设可以得到

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$$

两边同时求导有

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t)$$

变限积分要注意其可能隐藏初值条件 由 $f(x)>0$ 可知 $f(1)=1$ 再求导, 此时原问题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} 2f(t)f'(t)=tf'(t)+2f(t) \\ f(1)=1 \end{cases}$$

可以解出 $x=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3\sqrt{y}}$ □

20. (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$。

Solution.

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x-t} \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

故原式等于

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + e^{-x} - 1$$

两边同时求导有

$$f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - e^{-x} \implies f(0) = -1$$

再求导则原题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + e^{-x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

可以解出 $y = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x}$ □

21. (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution. 有题设可知

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y + f'(u)e^x \cos y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)(-\sin y e^x) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}\sin^2 y + f'(u)(-\cos y e^x) \end{cases}$$

代入题设有

$$f''(u) - 4f(u) = u$$

带入题设初值条件, 可以解出

$$f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$$

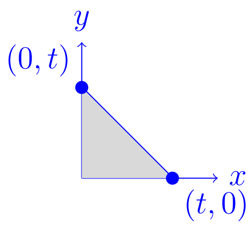
□

22. (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}(0<t\le 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution. 积分区域如下所示



$$\iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}t^2 f(t)$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^t f(x+y)\Big|_{y=0}^{y=t-x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t [f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由题即转换为求解如下初值问题

$$\begin{cases} tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}t^2 f(t) \\ f(0)=1 \end{cases}$$

可以解出 $f(x)=\dfrac{4}{(x-2)^2}$ □