第一章　参数估计

1.1　求矩估计与最大似然估计

Reamrk

矩估计与最大似然估计

矩估计

令 $EX^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ 或者 $E(X-EX)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^k, k=1,2,\dots$ 得到 $\theta_1,\theta_2\dots$ 的矩估计量

$$\begin{cases} EX=\bar{X}, & \text{一个参数} \\ EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 & \text{两个参数} \end{cases}$$

最大似然估计

(1) 对样本点 $x_1,x_2\dots,x_n$, 似然函数为 $L(\theta)\begin{cases}\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta) \\ \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)\end{cases}$

(2) 似然函数两端取对数求导

(3) 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 就可以得到 θ 的最大似然估计值

一个关于规范的小提示, 如果问估计值用小写字母 (样本值), 问估计量用大写字母 (随机变量)

1. (2002, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

Solution

(矩估计) 这道题只有一个参数, 只需要用一阶矩估计 $EX=2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3-6\theta=\bar{X}$, 其中 $\bar{X}=\frac{16}{8}=2$, 故 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

(最大似然估计) 对于样本 $3,1,3,0,3,1,2,3$, 似然估计函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}\theta}=0$ 有 $\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}$ 又 $0<\theta<\frac{1}{2}$, 故最终 $\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

2. (2011, 数一) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 已知,$\sigma^2>0$ 未知, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (1) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

   (2) 求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}^2)$。

Solution

(1) 对于样本 $X_1,\ldots,X_n$ 其最大似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

注意参数为 σ^2, 令 $\frac{\mathrm{d}\ln\sigma^2}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$, 有 $\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}n(X_i-\mu)^2$

(2) 这种题优先考虑 χ^2 分布的期望与方差结论, 有题 (1) 有

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\implies\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

故 $E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2,D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$

3. (2022, 数一、三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$,

   (1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

   (2) 求 $D(\hat{\theta})$。

Solution

这是双总体, 但基本上和单总体一致, 不要被唬住了哦!

(1) 由题有 $X \sim E(\frac{1}{\theta}), Y \sim E(\frac{1}{2\theta})$, 故其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

则对于样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, 最大似然估计函数为

$$L(\theta) = (\frac{1}{2})^m \theta^{-(m+n)} e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j)}$$

则令 $\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}\theta} = 0$, 有 $\hat{\theta} = \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j)$

(2)

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= (\frac{1}{m+n})^2 D(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j) \\ &= \frac{\theta^2}{m+n} \end{aligned}$$

1.2 估计量的评价标准

Reamrk

估计量的评价标准

(1) (无偏性) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $E\hat{\theta} = \theta$ 则称其为 θ 无偏估计量

(2) (有效性) 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计, 若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

(3) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ

一致 (相合) 估计量

一致性的考点在于—$\frac{1}{n}\sum \square \xrightarrow{P} E\square$

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 并说明理由。

Solution

(1) 对于样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的最大似然估计函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(x_i-\theta)} = 2^n e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$$

显然 $L(\theta)$ 关于 θ 是单调递增的, 则根据最大似然的定义, 应该取使得 $L(\theta)$ 最大的值, 而由题目有 $X_1 > \theta, X_2 > \theta, \ldots$, 故 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2 \ldots, X_n\}$

(2) 由概率密度函数有 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, 故

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

故 $F_{min} = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ 即

$$F_{min} = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, x \leq \theta \end{cases}$$

故

$$f_{min} = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

由期望的定义有

$$E\hat{\theta} = \int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)} = \theta + \frac{1}{2n}$$

5. (2010, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知,N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 $(i = 1, 2, 3)$ 求常数 a_1, a_2, a_3 使得 $T = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

Solution

由题可知 $N_i \sim B(n,p)$, 具体来说有

$$\begin{cases} N_1 \sim B(n, 1-\theta) \\ N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2) \\ N_3 \sim B(n, \theta^2) \end{cases}$$

且有 $N_1 + N_2 + N_3 = n$

故 $ET = \sum_{i=1}^{3} a_i EN_i = n\left[a_1 + (a_2 - a_1)\theta + (a_3 - a_2)\theta^2\right] = \theta$, 只需要令

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{n} \\ a_3 = \frac{1}{n} \end{cases}$$

求 $DT = \frac{1}{n^2} D(n - N_1) = \frac{1}{n^2} DN_1 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

1.3 区间估计与假设检验

区间估计与假设检验

这一节内容很少, 只需要掌握置信度的概念, 假设检验的基本过程与第一类错误/第二类错误的概念即可

1. 置信度与置信区间

   设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$ 含有一个未知参数 $\theta, \theta \in \Theta$ 其中 Θ 是其所有可能取值的集合, 对于给定值 $0 < \alpha < 1$, 若由来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 确定了两个统计量 $\theta_1, \theta_2, \theta_1 \le \theta_2$ 对于 $\forall \theta \in \Theta$ 都有

   $$P\{\hat{\theta_1} < \theta < \hat{\theta_2}\} \ge 1 - \alpha$$

   则称区间 (θ_1, θ_2) 为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间,$\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}$ 分别称置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限,$1-\alpha$ 称为置信水平或置信度

2. 原假设 H_0 与备择假设 H_1

类型	H_0	H_1
双边检验	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$
单边检验-左边	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$
单边检验-右边	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$

3. 假设检验的过程

   (1) 根据题意写出原假设 H_0 和备择假设 H_1

   (2) 选择检验方式, 写出检验统计量及其分布

   (3) 根据给定的显著性水平确定拒绝域

   (4) 统计检验统计量的值, 做出推断

4. 第一类错误/第二类错误

类型	含义	犯错的概率
第一类错误	原假设 H_0 为真, 但却拒绝 H_0, 即弃真概率	$\alpha = P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}$
第二类错误	原假设 H_0 为假, 但却接受 H_0, 即取伪概率	$\beta = p\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

   (1) 仅控制犯第一类错误的检验称为显著检验,α 为显著性水平

   (2) 当样本容量固定时,α 和 β 中任意一个减少, 另一个必然增大; 如果要使 α 和 β 同时减少, 只能增大样本容量