姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 25 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 25 日

目录

第一章　常微分方程

1.1　一阶微分方程

Remark. 一阶微分方程

(一) 可分离变量类型: 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 可以转换为 $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$

(二) 一阶线性非齐次: 形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 其通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

特殊的, 一阶线性齐次 $y'+p(x)y=0$ 其通解公式为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

(三) 一阶齐次方程: 形如 $y'=f(\frac{y}{x})$ 则可以通过 $u=\frac{y}{x}$ 为可分离变量类型

(四) 全微分方程: 形如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$, 且 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ 则其解法本质都是求原函数

(I) 特殊路径积分法 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$

(II) 偏积分, 一般考虑直接偏积分

(III) 凑微分

(五) 伯努利方程: 形如 $y'(x)+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\alpha\neq(0,1)$ 其解法如下

(I) 同除 y^{α}, 转换为 $y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$

(II) 做 $z=y^{1-\alpha}$的换元, 则原微分方程转换为

(III) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$

(IV) 转换为一阶线性方程可以用公式法直接求

(六) 需要考虑变量互换: 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)x^{\alpha}}$$

交换后可以转换为一阶线性/一阶伯努利即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)}x^{\alpha}$$

1. (1998, 数一、数二) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$, 则 $y(1)$ 等于

   $(A)\ 2\pi$ $(B)\ \pi$ $(C)\ e^{\frac{\pi}{4}}$ $(D)\ \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

   Solution. 两边同除 Δx 且当 $\Delta x\to 0$, 有 $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$ 原问题转换为求初值问题的解

$$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{1+x^2}=0 \\ y(0)=\pi \end{cases}$$

   由公式有 $y=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$ □

2. (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$$

   求 $f(x)$。

   Solution. 由题设有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}}\\&=e^{\frac{f'(x)\cdot x}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\implies\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

   即原问题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{1}{x^2}\cdot f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1 \end{cases}$$

   带入公式有 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ □

3. (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0 \quad (x>0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

Solution. 等式两边同时除以 x, 原式化为

$$\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right] \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 原式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边同时积分

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} = Cx \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \ y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2$$

对于带有根式的结果特别需要注意化简, 两边同时乘以 $y - \sqrt{x^2+y^2}$, 可以解出 $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ □

4. (2010, 数二、数三) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解。若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$ (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

(C) $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$ (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

Solution. 由总结可知, 选 A □

一阶, 二阶线性微分方程 (组) 解的性质

若 y_1, y_2 分别为非齐次特解, 则

$$C_1y_1 + C_2y_2 \begin{cases} C_1 + C_1 = 0, & \text{齐次解} \\ C_1 + C_2 = 1, & \text{非齐次解} \end{cases}$$

5. (2018, 数一) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

(1) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution. (一) 由一阶线性的求解公式有

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left[\int e^{x}\cdot x\mathrm{d}x + C\right] \\ &= e^{-x}\left[(x-1)e^{-x}+C\right] \\ &= Ce^{-x}+x-1 \end{aligned}$$

(二) 由一阶线性的求解公式有

$$y = e^{-x}\left[\int f(x)e^{x}\mathrm{d}x + C\right] = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + C$$

则

$$\begin{aligned} y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right] \\ \int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T + \int_T^{x+T} \\ &= \frac{1}{e^t}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{e^T}\int_T^{x+T} e^T f(t)\mathrm{d}t \\ &= \ldots + \frac{1}{e^T}\int_0^T e^{t+T} f(t+T)\mathrm{d}t \\ y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right] \end{aligned}$$

由周期函数的定义, 只需要令 $y(x+T)-y(x)=0$ 即

$$C = -\frac{1}{1-e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t$$

的时候该方程的解是周期还是, 且唯一. □

6. 求解微分方程 $y' - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$.

Solution. 令 $z=\sqrt{y}$, 则 $z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{1}{2}x^2$, 则到

$$z = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = x^2\left(\frac{1}{2}\cdot x + C\right)$$

则该方程的通解为 $\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^3 + Cx^2$ □

7. 求解下列微分方程:

(1) $(2xe^y+3x^2-1)dx+(x^2e^y-2y)dy=0$;

(2) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Solution. (1) 偏积分法

$$u(x,y)=\int(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x=x^2e^y+x^3-x+\phi(y)$$

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+\phi'(y)$ 对比题目可知 $\phi'(y)=-2y \implies \phi(y)=-y^2$, 故原方程的解

$$x^2e^y+x^3-x-y^2=C$$

(2) 凑微分法

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x+(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y\\&=(2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y)+(3x^2-1)\mathrm{d}x+(-2y)\mathrm{d}y\\&=d(x^2e^y)+d(x^3-x)+d(-y^2)\\&=d(x^2e^y+x^3-x-y^2)=0\end{aligned}$$

即 $x^2e^y+x^3-x-y^2=C$ □

1.2 二阶常系数线性微分方程

Remark. 二阶齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=0$

求解特征方程 $(r^2+pr+q=0)$

$$\begin{cases}r_1\neq r_2, & \text{通解为}C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\\ r_1=r_2=r, & \text{通解为}(C_1+C_2x)e^{rx}\\ r_{1,2}=\alpha\pm\beta, & \text{通解为}e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$$

二阶非齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=f(x)$, 其解的结构为<u>齐次特解 + 非齐次通解</u>

$$\text{特解格式}\begin{cases}f(x)=P_ne^{\lambda x}, y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}\\ f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]\\ y^*=x^ke^{\alpha}[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x], l=\min\{m,n\}\end{cases}$$

8. (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

   (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   Solution.

$\square$

9. (2015, 数一) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

   (A) $a = -3, b = 2, c = -1$ (B) $a = 3, b = 2, c = -1$

   (C) $a = -3, b = 2, c = 1$ (D) $a = 3, b = 2, c = 1$

   Solution.

□

10. (2016, 数二) 已知 $y_1(x)=e^x$,$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解。若 $u(-1)=e$,$u(0)=-1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution.

$\square$

11. (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$。

    (1) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

    (2) 若 $y(0) = 1$,$y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值。

    Solution.

□

1.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 求解微分方程 $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$。

    Solution.

□

1.4 二阶可降阶微分方程

13. 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

Solution. □

1.5 欧拉方程

14. 求解微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$。

Solution.

□

1.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. (2005, 数二) 用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, 并求其满足 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$ 的特解。

Solution.

□

1.7 微分方程综合题

18. (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。求曲线 L 的方程。

Solution.

□

19. (2009, 数三) 设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$。已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0$,$x = 1$ 及 $x = t(t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

Solution.

□

20. (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$。

Solution.

□

21. (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0$,$f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution.

□

22. (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D_t = \{(x,y)|0 \le y \le t-x, 0 \le x \le t\}(0 < t \le 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution.

□