第一章　二维随机变量

1.1　联合分布函数的计算

Remark. (联合分布函数的性质)

(1) $0 \le F(x,y) \le 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty,y) = F(x,\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均右连续

(4) $P\{a < X \le b, c < Y \le b\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim B(1,p)$,$Y \sim E(\lambda)$, 则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =$_____.

   Solution.

□

1.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。
   (a) 求在 $X+Y=n(n\geq 2)$ 的条件下,X 的条件概率分布;
   (b) 求 $P\{X+Y\geq n\}(n\geq 2)$.

Solution.

□

1.3 二维连续型随机变量分布的计算

Remark. 主要内容

联合概率密度的性质

(1) $f(x,y) \geq 0, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$;

(3) $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy$;

(4) 在 $f(x,y)$ 的连续点处有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

边缘概率密度

(1) (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

(2) (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

条件概率密度

(1) 在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

(2) 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

3. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution.

$\square$

4. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(x,1)$。
   (a) 求 (X,Y) 的联合概率密度;
   (b) 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;
   (c) 求 $P\{X+Y>1\}$.

   Solution.

$\square$

1.4 关于二维正态分布

5. 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,2;1,4;-\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX+bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 (a,b) 可以为

$$(A)\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right) \quad (B)\ \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)\ (C)\ \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \quad (D)\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Solution.

$\square$

6. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

$$(A)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y) \quad (B)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\ (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \quad (D)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$$

Solution.

□

7. (2022, 数一) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 在 $X = x$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ \frac{1}{4} \quad (B)\ \frac{1}{2} \quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution.

□

1.5 求二维离散型随机变量函数的分布

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim P(\lambda_1)$,$Y \sim P(\lambda_2)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布.

   Solution.

□

1.6 求二维连续型随机变量函数的分布

Remark. 问题描述

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 求 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

分布函数法

(1) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$, 则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$.

(2) 求 $Z=g(X,Y)$ 在 (X,Y) 的正概率密度区域的值域 (α,β) , 讨论 z .

$z<\alpha$ 时, $F_Z(z)=0$;

当 $\alpha\le z<\beta$ 时, $F_Z(z)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy$;

当 $z\ge\beta$ 时, $F_Z(z)=1$.

(3) Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

卷积公式

(1) 设 $Z=aX+bY$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|b|}f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$;

(2) 设 $Z=XY$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$;

(3) 设 $Z=\frac{Y}{X}$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)\,dx$;

(4) 设 $Z=\frac{X}{Y}$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 求:

(a) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(b) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

(c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y),f_{Y|X}(y|x)$;

(d) $P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X\le\frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\right\}$;

(e) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

Solution.

□

1.7 求一离散一连续随机变量函数的分布

10. (2020, 数一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,X_1 与 X_2 均服从标准正态分布,X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$,$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$。

    (a) 求 (X_1, Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);

    (b) 证明 Y 服从标准正态分布.

    Solution.

□