考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 31 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 31 日

目录

第一章 无穷级数 **1**

1.1 数项级数敛散性的判定 1

1.2 交错级数 2

1.3 任意项级数 3

1.4 幂级数求收敛半径与收敛域 4

1.5 幂级数求和 6

1.6 幂级数展开 8

1.7 无穷级数证明题 9

1.8 傅里叶级数 11

第一章　无穷级数

1.1　数项级数敛散性的判定

Remark. 正项级数敛散性的判断

比较判别法 (放缩/等价/Taylor 展开)

比值判别法 (当出现 $n!$)

根值判别法 (当出现 n^n)

积分判别法 (P 级数/对数 P 级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & p\le 1\end{cases}$$

推广

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{\alpha} n}{n^p}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

对数 P 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & p\le 1\end{cases}\leftarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p n}=\int\frac{d\ln x}{\ln^p x}$$

故其与 P 级数的敛散性与 P 的关系一致, 推广

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^p n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}\alpha>1, & \text{收敛}\\ \aleph\le 1, & \text{发散}\end{cases}$$

1. (2015, 数三) 下列级数中发散的是

   $(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　$(B)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$(C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ $\quad$ $(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Solution. (A) 由根值判别法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$ 收敛

(B) 由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 而 $\frac{3}{2}>1$ 故原级数收敛

(C) 原级数等于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 前一个级数由莱布尼兹判别法知收敛, 第二个级数由 P 级数的推广容易得知其发散, 故原级数发散

(D) 由比值判别法有 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=e^{-1}<1$ 故原级数收敛 □

2. (2017, 数三) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$

$(A)\ 1$ $\quad$ $(B)\ 2$ $\quad$ $(C)\ -1$ $\quad$ $(D)\ -2$

Solution.

$$\text{原式}\xlongequal{Taylor}\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})-k\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^2})\right]$$
$$=\frac{1+k}{n}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由 P 级数判别法可知,$1+k=0\implies k=-1$ □

1.2 交错级数

Remark. 交错级数敛散性的判断

莱布尼兹判别,通项单调递减趋于 0 可以判断原级数收敛.

取绝对值, 若其绝对收敛则原级数也收敛

3. 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Solution. (1) 记 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}, f'(x)=-\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}<0$ 从而 u_n 单调递减, 又 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 故由莱布尼兹判别法可知 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 收敛

(2) 在一起不好判断的时候, 把它们拆开了分别做

$$\text{原式} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

由莱布尼兹判别法易知第一个级数收敛, 第二个级数由 P 级数可知其发散. 故原级数发散 □

1.3 任意项级数

Remark. 任意项级数

收敛级数的定义 (部分和极限存在)

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \text{若级数收敛} \iff \lim_{n\to\infty} S_n \exists$$

$$\text{级数的性质 - 线性组合} \begin{cases} \text{收敛} + \text{收敛} = \text{收敛} \\ \text{收敛} + \text{发散} = \text{发散} \\ \text{发散} + \text{发散} = ? \end{cases}$$

级数的性质 改变有限项级数的敛散性不变

级数的性质 结合律, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则不改变其项的次序间任意添加符号, 并把每个括号内的数作为一项, 这样得到的新奇数仍然收敛, 且其和不变. 反之不然.

结合律的推论 1 若加括号后的级数发散, 则原级数必然发散

结合律的推论 2 若 $\lim_{n\to\infty} = 0$ 又其相继两项加括号后的级数收敛, 则原级数也收敛, 且和相等

收敛级数的必要条件 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

4. (2002, 数一) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性根据所给条件不能判定

Solution. 这种题首先判断是否绝对收敛, 由 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$ 可知其一定不可能绝对收敛

让后判断级数本身是否收敛, 这种形式的题目大概率就是要使用定义, 求其部分和

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \ldots + (-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}})\right)$$

故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{n_1}$$

因此原级数条件收敛 □

5. (2019, 数三) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$条件收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

Solution. 这种题目比较好的解法是用特殊值筛选掉错误答案. 如令 $u_n = 0$ 则 A 错误,$v_n = (-1)^n$ 则 B 错误,$v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 则 D 错误

证明 B 选项正确, 关键点考虑极限的有界性 由 $\sum \frac{v_n}{n}$ 收敛可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = 0$$

由极限的有界性, 可知

$$\exists M, \forall n, \left|\frac{v_n}{n}\right| \leq M$$

从而

$$|u_n v_n| = \left|nu_n \cdot \frac{v_n}{n}\right| \leq M\,|nn|$$

故 B 选项正确 □

1.4 幂级数求收敛半径与收敛域

Remark. 方法一: 阿贝尔定理. 收敛的幂级数在收敛区间内绝对收敛, 在收敛域外发散, 在边界点上可能收敛也可能发散, 可能绝对收敛也可能条件收敛

方法二: 比值定理/根值定理

方法三:柯西判别法 最常用

逐项求导/逐项积分,收敛区间不变, 需要注意边界点, 其敛散性可能发生改变.

6. (2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点　　(B) 收敛点, 发散点

(C) 发散点, 收敛点　　(D) 发散点, 发散点

Solution. 由题设条件可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n &= (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}\\ &= (x-1)\left[\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n\right]'\end{aligned}$$

故其收敛区间为 $-1<x-1<1 \implies x\in(0,2)$ 由阿贝尔定理可知 $x=\sqrt{3}$ 为绝对收敛点,$x=3$ 为发散点 □

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$ 的收敛域.

Solution. 这种题目优先考虑柯西定理, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\frac{x^2}{3}<1$$

即 $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$(收敛区间). 接着判断边界点的敛散性. 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pm\sqrt{3}}{2n+1}$$

由莱布尼兹判别法可知其条件收敛, 故原级数的收敛域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ □

1.5 幂级数求和

Remark. 关键就是六组公式

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},, x \in (-\infty, +\infty) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},, x \in (-\infty, +\infty) \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},, x \in (-\infty, +\infty) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1, 1] \\
\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in [-1, 1)
\end{aligned}
$$

8. (2005, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right] x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

Solution. 这种题都可以说是套路题, 第一步先求收敛域. 由柯西定理有

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right] x^{2n}\right|} = x^2 < 1
$$

故收敛区间为 $(-1, 1)$

$$
S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}
$$

其中

$$
S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1)
$$

$$\begin{aligned}S_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}\\ &= 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}\\ &= 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}-\ln(1+x^2)\\ &= 2x\arctan x-\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

综上, 和函数为 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2)$ □

9. (2012, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

Solution. 由柯西定理有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot x^{2n}\right|}=x^2<1$$

从而收敛区间为 $x\in(-1,1)$ 当 $x=\pm 1$ 时级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$$

显然发散. 故收敛域为 $(-1,1)$, 接下来求和函数.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\neq 0$$

其中

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=(x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n})'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$S_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

故

$$S_2(x)=S_2(x)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

需要单独计算 $S(0)=3$

综上和函数为 $S(x)\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3, & x=0\end{cases}$ □

10. (2004, 数三) 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$。求:

(1) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) $S(x)$ 的表达式.

Solution. (1) 求上述级数求导

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} + \dots \\ &= x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \dots\right) \\ &= x\left[\frac{x^2}{2} + S(x)\right] \end{aligned}$$

且有初值 $S(0) = 0$. (2) 上述问题转换为如下初值问题

$$\begin{cases} y' - xy = \frac{x^3}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

可以解出 $S(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2}{2} - 1$ □

1.6 幂级数展开

11. (2007, 数三) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

Solution.

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-4} &= \frac{1}{-3+x-1} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n, x \in (-2,4) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n \end{aligned}$$

同理另一部分为

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n, x \in (-1,3)$$

故

$$f(x) = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n, x \in (-1, 3)$$

□

1.7 无穷级数证明题

12. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$

(I) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值

(II) 证明任意常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

Solution. (1)

$$a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

故原级数等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

(2) 由一可知

$$a_n = \frac{1}{n+1} - a_{n+2} \implies a_n < \frac{1}{n+1}$$

故要证级数的通项满足

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{(\lambda+1)}}$$

当 $\lambda > 0$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(\lambda+1)}}$ 收敛, 由比较判别法可知原级数收敛 □

13. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$,$0<f'(x)<\frac{1}{2}$。设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$。证明:

(I) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

Solution. (1) 本质考察的为压缩映射的证明

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\\&=|f'(\xi)|\cdot|x_n-x_{n-1}|\\&<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\\&\cdots\\&<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|\end{aligned}$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 故原级数收敛

(2) 由 (1) 级数的收敛有

$$\lim_{n\to\infty}S_n\exists\implies\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=A+x_1=a$$

故极限存在, 有题设有 $f(a)=a$ 记 $g(x)=x-f(x)$ 有 $g'(x)=1-f'(x)>0$ 故 $g(x)$ 单调递增, 又 $g(0)=-1<0$

$$g(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\xi)>0,\xi\in(0,2)$$

由零点存在定理可知有且仅有唯一零点且 $0<a<2$ □

14. (2014, 数一) 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$,$0<b_n<\frac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

Solution. (1) 由题设条件有

$$\cos b_n>\cos a_n\implies0<a_n<b_n$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 故 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 再由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) 方法一: 拉格朗日中值定理

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} \\ &= \frac{-\sin\xi(a_n - b_n)}{b_n}, \xi \in (a_n, b_n) \\ &= \frac{(b_n - a_n)\cdot\sin\xi}{a_n} < b_n - a_n < b_n\end{aligned}$$

方法二: 等价代换

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} < \frac{1-\cos b_n}{b_n} \sim \frac{1}{2}b_n$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 故原级数收敛 □

1.8 傅里叶级数

Remark. 傅里叶级数就两个考点

(一) 求傅里叶级数的展开式 (以 $2l$ 为周期)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

(二) 狄利克雷收敛定理 (充分条件) 若函数在区间 $[-1,1]$ 上满足

(1) 连续, 或只有有限个间断点, 且都是第一类间断点

(2) 只有有限个极值点

则 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 上的傅里叶级数收敛, 且满足

$$f(x)\text{对应傅里叶级数} = \begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right], & x\text{为第一类间断点} \\ \frac{1}{2}\left[f(-l+0)+f(l-0)\right], & x\text{为区间端点} \end{cases}$$

15. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于?, 在 $x=2\pi$ 收敛于?.

Solution. 由狄利克雷收敛定理知,$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于

$$S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

在 $x=2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

□

16. 将 $f(x)=1-x^2, 0\le x\le\pi$, 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

Solution. 对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶延拓, 由 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 知 $b_n=0$。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$, 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

□