第一章　高等数学

1.1　极限与连续

1. $\star$ 设函数 $f(x)=\cos(\sin x), g(x)=\sin(\cos x)$ 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 ( )

   A.$f(x)$ 单调递增,$g(x)$ 单调递减　　B.$f(x)$ 单调递减,$g(x)$ 单调递增

   C.$f(x), g(x)$ 均单调递减　　D.$f(x), g(x)$ 均单调递增

2. $\star\star$ 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性

3. $\star\star$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $a<c<d<b$ 证明: 在 (a,b) 内必定存在一点 ξ 使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$, 其中 m,n 为任意给定的自然数

4. $\star\star$ 设 $x_1=\sqrt{a}(a>0), x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求出其值.

5. $\star\star\star$ 设 $x_1=a\geq 0, y_1=b\geq 0, a\leq b, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\ldots)$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

6. $\star\star$ 设 $\{x_n\}$ 为数列, 则下列数据结论正确的是 ( )

   ① 若 $\{\arctan x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ② 若 $\{\arctan x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ③ 若 $x_n\in[-1,1]$, 且 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   ④ 若 $x_n\in[-1,1]$, 且 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   A.①②　　B.③④　　C.①③　　D.②④

7. $\star$ 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}$=____

8. $\star$ 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$=____

9. ⋆⋆ 设 $\lim_{x\to 0}\left\{a\,[x]+\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=b$ 则 a=___,b=___

10. ⋆ 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$, 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

11. ⋆⋆⋆ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$ 证明

    (I) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$

    (II) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$

12. ⋆⋆⋆⋆(2011. 数一)

    (I) 证明 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

    (II) 证明极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在

1.2 一元函数微分学/积分学 (除证明题)/多元函数微分学

1. ⋆ 设 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 均存在, 则下列结论正确的是 ( )

   A.$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在　　B.$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

   C.$\lim_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在　　D.$f(x,y)$ 在去心邻域 (x_0,y_0) 内有定义

2. ⋆ 设 $z=(1+xy)^y$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{1,1}=$ ___

3. ⋆⋆ 设 $\begin{cases}y=f(x,t)\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$ f,F 有一阶连续偏导数, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

4. ⋆⋆ 设 $y=f(x,t),t=t(x,t)$ 由方程 $G(x,y,t)=0$ 确定,f,G 可微, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

5. ⋆ 设 $z=z(x,y)$ 有方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=$ ____

6. ⋆ 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $P(2,1,4)$ 处的且平面方程为 ___ 法线方程 ___

7. ⋆ 求 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值

8. ⋆⋆ 求双曲线 $xy=4$ 与直线 $2x+y=1$ 之间的最短距离

1.3 空间解析几何/多元函数积分学

1. ⋆ 设向量 $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,0,2),\vec{c}=(0,k,-3)$ 共面, 则 $k=$ ___

2. ⋆⋆ 设非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 满足 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 于 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ 的模相等, 则必有 ( )

   A.$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ B.$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ C.$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$ D.$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

3. ⋆⋆ 直线 $L_1:\begin{cases}x-1=0\\ y=z\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y=0\\ z+2=0\end{cases}$ 的距离 $d=$___

4. ⋆⋆ 设 α,β 均为单位向量, 其夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 则 $\alpha+2\beta$ 与 $3\alpha+\beta$ 为邻边的平行四边形的面积为 ___

5. ⋆⋆ 设 α,β 是非零常向量, 夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\beta|=2$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\alpha+x\beta|-|\alpha|}{x}=$___

6. ⋆ 求平行于平面 $x+y+z=9$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

7. ⋆ 设平面 π 过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi_1: x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 求平面 π 的方程

8. ⋆ 求与直线 $L_1: x+2=3-y=z+1$ 与 $L_2:\frac{x+4}{2}=y=\frac{z-4}{3}$ 都垂直相交的直线方程

9. ⋆ 求直线 $L_1:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{0}$ 与 $L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=z$ 的公垂线方程

10. ⋆⋆ 求直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$ 绕直线 $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ 旋转一周所得到的曲面方程

1.4 常微分方程

1.5 无穷级数

1.6 证明题