第一章　特征值与特征向量

- 特征值与特征向量
  - 特征值与特征向量
    - 定义　$A\alpha = \lambda\alpha(\alpha \neq 0)$
    - 性质
    - 特征方程法,
      - $|A - \lambda E|$
      - $(A - \lambda E)\,x = 0$
  - 相似矩阵
    - 定义,　$B = P^{-1}AP$
    - 性质
  - 相似对角化
    - 定义　$P^{-1}AP = \Lambda$
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
      - $\Longleftrightarrow$ k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - 充分条件
      - A有n个不同的特征值
      - A为是实对称矩阵
  - 实对称矩阵
    - 特征值均为实数
    - 不同特征值的特征向量正交
    - k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - A可正交相似对角化, 即存在正交矩阵Q, 使得$Q^{-1}AQ = A^TAQ = \Lambda$

1.1　特征值与特征向量的计算

Remark. 特征值与特征值向量的性质

(1) 不同特征值的特征向量线性无关

(2) 不同特征值的特征向量之和不是特征向量

(3) k重特征值有k个线性无关的特征向量

(4) 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ 则 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A), \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$

(5) 若 $r(A) = 1$ 则 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 是 n 维非零列向量, 则 A 的特征值为

$$\lambda_1 = tr(A) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

(6) 设 α 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征值向量则, 有

A	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α	???	$P^{-1}\alpha$

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

Solution.

□

2. (2003, 数一) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P$ 求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量。

Solution.

□

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

Solution.

□

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2 = O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

   A.0　　B.1　　C.2　　D.3

   ***Solution*.**

□

5. 设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\frac{1}{3}$，证明：

   (I) 0 为 A 的特征值；

   (II) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量；

   (III) A 可相似对角化。

   Solution.

□

1.2 相似的判定与计算

Remark. 相似的性质

(1) 若 $A \sim B$, 则 A, B 具有相同的行列式, 秩, 特征方程, 特征值与迹

(2) 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), A^{-1} \sim B^{-1}, AB \sim BA(|A \neq 0|), A^T \sim B^T, A^* \sim B^*$

(3) 若 $A \sim B, B \sim C$ 则 $A \sim C$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 矩阵 B, A 相似, 则 $r(B-A)+r(B-3E)=$ ____

Solution.

$\square$

7. 设 n 阶矩阵 A, B 相似, 满足 $A^2 = 2E$, 则 $|AB + A - B - E| =$ ___

Solution.

□

8. (2019, 数一、二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y 的值;

(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。

Solution.

□

1.3 相似对角化的判定与计算

9. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$ 则 $P^{-1}AP =$ ____________。

   Solution.

□

10. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明 A 可相似对角化。

Solution.

□

11. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

 (I) 证明 P 为可逆矩阵；

 (II) 若 $A^2\alpha+6A\alpha-10\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution.

□

1.4 实对称矩阵的计算

12. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=O, n$ 阶矩阵 B 满足 $B^2+B=E$ 且 $r(AB)=2$ 则 $|A+2E|=$ ___

Solution.

□

13. (2010, 数二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$ 正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q。

Solution.

□

14. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2=E$,$A+E$ 的各行元素之和均为零，且 $r(A+E)=2$。

    (I) 求 A 的特征值与特征向量;

    (II) 求矩阵 A。

Solution.

□