

# 第一章 矩阵

## 1.1 求高次幂

1. 设  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B$  为 3 阶矩阵, 满足  $BA = O$ , 且  $r(B) > 1$ , 则  $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*



2. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  则  $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*



3. 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$   $P$  为 3 阶可逆矩阵,  $B = P^{-1}AP$ , 则  $(B + E)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$

*Solution.*



## 1.2 逆的判定与计算

4. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = 2A$ , 则下列结论不正确的是:

- (A)  $A$  可逆      (B)  $A - E$  可逆      (C)  $A + E$  可逆      (D)  $A - 3E$  可逆

*Solution.*



5. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $a, b$  为非零常数. 证明:

(a) 若  $AB = aA + bB$ , 则  $AB = BA$ ;

(b) 若  $A^2 + aAB = E$ , 则  $AB = BA$ .

*Solution.*



6. 设  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  满足  $A^3 = O$ .

(a) 求  $a$  的值;

(b) 若矩阵  $X$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 求  $X$ .

*Solution.*

## 1.3 秩的计算与证明

**Remark.** 秩的性质

- (1) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 则  $r(A) < \min\{m, n\}$
- (2)  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- (3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (4)  $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A \mid B) \leq r(A) + r(B)$
- (5)  $r(A) = r(kA) (k \neq 0)$
- (6) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $P$  为  $m$  阶可逆矩阵,  $Q$  为  $n$  阶可逆矩阵, 则  $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$
- (7) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 若  $r(A) = n$  则  $r(AB) = r(B)$ , 若  $r(A) = m$  则  $r(CA) = r(C)$
- (8)  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
- (9) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  为  $n \times s$  阶矩阵,  $AB = 0$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $(XY)$  表示分块矩阵, 则:

- (a)  $r(A \mid AB) = r(A)$
- (b)  $r(A \mid BA) = r(A)$
- (c)  $r(A \mid B) = \max\{r(A), r(B)\}$
- (d)  $r(A \mid B) = r(A^T B^T)$

*Solution.*



8. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明:

(1) 若  $A^2 = A$ , 则  $r(A) + r(A - E) = n$ .

(II) 若  $A^2 = E$ , 则  $r(A + E) + r(A - E) = n$ .

*Solution.*





## 1.4 关于伴随矩阵

**Remark.** 伴随矩阵的性质

$$(1) \quad AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A| \neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, A^* = |A| A^{-1}$$

$$(2) \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

$$(3) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$(4) \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(5) \quad (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$(6) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$(7) \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$(8) \quad r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

9. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的各列元素之和均为 2, 且  $|A| = 6$ , 则  $A^*$  的各列元素之和均为:

- (A) 2      (B)  $\frac{1}{3}$       (C) 3      (D) 6

*Solution.*



10. 设  $A = (a_{ij})$  为  $n(n \geq 3)$  阶非零矩阵,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 证明:

(a)  $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = 1$ ;

(b)  $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = -1$ .

*Solution.*



## 1.5 初等变换与初等矩阵

**Remark.** 初等变换与初等矩阵的性质

- (1)  $|E(i, j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$
- (2)  $E(i, j)^T = E(i, j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$
- (3)  $E(i, j)^{-1} = E(i, j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$
- (4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵
- (5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设  $A$  为  $n(n \geq 2)$  阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得到矩阵  $B$ , 则:

- (A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列, 得  $B^*$
- (B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行, 得  $B^*$
- (C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列, 得  $-B^*$
- (D) 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行, 得  $-B^*$

**Solution.**



12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

