第一章　概率论

1.1　880

1. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A=\{$中间一段为三段中的最长者$\}$, 则 $P(A)=$ ______

   Solution. □

2. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 ______

   Solution. □

3. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 ______

   Solution. □

4. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 ______

   Solution.

(方法一) 首先考虑第 n 次试验,A 发生奇数次的情况有两种.(1) 前 n-1 次成功率偶数次, 第 n 次成功;(2) 前 n-1 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 $A_k=\{\ k\quad\},P(A_k)=p;B_k=\{$k 次实验中成功奇数次$\}$, 记 $P(B_k)=p_k$, 则有

$$B_n=B_{n-1}\bar{A}_n+\overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n=P(B_{n-1}\bar{A}_n+\overline{B_{n-1}}A_n)=P(B_{n-1}\bar{A}_n)+P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned}\text{上式} &= P(B_{n-1})P(\bar{A}) + P(\overline{B_{n-1}})P(A_n)\\ &= (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1})\\ &= p + (1-2p)p_{n-1}\end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)[p_{n-1} - \frac{1}{2}] \xlongequal{\text{等比数列}} -\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^(n-k), k = 0,1,2,\ldots$

若 n 为偶数则

$$\begin{aligned}P(X=odd) &= P(X=1) + P(X=3) + \ldots + P(X=n-1)\\ &= C_n^1(1-p)^{n-1} + C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3} + \ldots + C_n^{n-1}p^{n-1}(1-p)\\ P(X=even) &= P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=n)\\ &= C_n^0 p^0 (1-p)^n + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0\end{aligned}$$

且 $P(X=odd) + P(X=even) = 1$, 有注意到

$$\begin{aligned}P(X=odd) &= P(X=1) + P(X=3) + \ldots + P(X=n-1)\\ &= -C_n^1(p-1)^{n-1} - C_n^3 p^3 (p-1)^{n-3} - \ldots - C_n^{n-1}p^{n-1}(p-1)\\ P(X=even) &= P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=n)\\ &= C_n^0 p^0 (p-1)^n + \ldots + C_n^n p^n (p-1)^0\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}P(X=even) - P(X=odd) &= C_n^0 p^0 (p-1)^n + \ldots + C_n^n p^n (p-1)^0\\ &\xlongequal{\text{二项式定理}} (2p-1)^n\end{aligned}$$

则 $2P(X=odd) = 1-(2p-1)^n \implies P(X=odd) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X=\text{奇数}) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$,$k = 0,1,2,\ldots$

令 $Y = \frac{1}{2}[1+(-1)^X]$, 当 X 为奇数时, $Y=0$; 当 X 为偶数时, $Y=1$

于是原问题转换为求 $P(X\text{为奇数}) = P(Y=0)$ 注意到 $E[Y] = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) = P(Y=1) = 1 - P(Y=0)$，故只需要求 $E[Y]$

$$
\begin{aligned}
EY &= E(\frac{1}{2}[1+(-1)^X]) = \frac{1}{2} + E(-1)^X \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&\xlongequal{\text{逆用二项式定理}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n
\end{aligned}
$$

故 $P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$ □

5. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

 (I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

 (II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

Solution. 设 $A_i = \{\text{第 i 次取得红球}\}(i=1,2,3), B_i = \{\text{第 j 次投掷银币出现正面}\}(j=1,2,3)$

(1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = P(A_3) = P(A_1) \\
&P(A_1) \xlongequal{\text{全概率公式}} P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid \bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(2) 由于两次试验都是独立重复的所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的

则 $P(A_1B_1) = P(A_2B_2) = P(B_1)P(A_1 \mid P(B_1)) = \frac{1}{3}$

则所求概率为

$$
P(B_1B_2 \mid A_1A_2) = \frac{B_1B_2A_1A_2}{P(A_1A_2)} = \frac{\frac{1}{3}^2}{\frac{1}{2}^2} = \frac{4}{9}
$$

□

6. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

Solution. 设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X, 其显然满足 $X \sim B(20, 0.15)$, 不妨假设当 $X = k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X = k) \geq P(X = k-1), P(X = k) \geq P(X = k+1)$ 即

$$\frac{C_{20}^{k} 0.15^{k} 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)} 0.15^{k-1} 0.85^{(21-k)}} \geq 1$$

与

$$\frac{C_{20}^{k} 0.15^{k} 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)} 0.15^{k+1} 0.85^{(19-k)}} \geq 1$$

得到如下结果

$$\begin{cases} 300 - 15k + 15 \geq 85k \\ 85k + 85 \geq 300 - 15k \end{cases}$$

即 $2.15 \leq k \leq 3.15$ 故 $k = 3$, 其概率为 $P(X = 3) = C_{20}^{3} 0.15^{3} 0.85^{17}$ □

1.2 李艳芳 900

1.3 张宇题源大全