第一章　二次型

- 二次型
  - 二次型与标准型
    - 定义　$f = x^T A x$
    - 标准型的求法
      - 拉格朗日配方法
      - 合同变换法
      - 正交变换法
  - 合同矩阵
    - 定义　$B = C^T A C$
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ $x^T A x$与$x^T B x$有相同的正负惯性指数
      - $\Longleftrightarrow$ A, B有相同的正,负特征值个数
    - 充分条件　A与B相似
    - 必要条件　A与B等价
  - 正定矩阵
    - 定义　$\forall x \neq 0$, 有$x^T A x > 0$
    - 性质
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ f的正惯性指数为n
      - $\Longleftrightarrow$ A与E合同
      - $\Longleftrightarrow$ A的特征值均大于零
      - $\Longleftrightarrow$ A的顺序主子式均大于零
    - 必要条件
      - $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$
      - $|A| > 0$

1.1 求二次型的标准形

常规方法

(方法一 拉格朗日配方法)

∘1 令 $f(x_1,x_2,x_3)=d_1(x_1+x_2+x_3)^2+d_2(x_2+cx_3)^2+d_3x_3^2=d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2$

∘2 换元, 令

$$\begin{cases} y_1=x_1+ax_2+bx_3 \\ y_2=x_2+cx_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3=y_3 \\ x_2=y_2-cy_3 \\ x_3=y_1-ay_2+(ac-b)y_3 \end{cases}$$

从而可以通过可逆线性变换 $x=Cy$ 其中 $C=\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(方法二 正交变换法) $x=Qy$ 二次型转换为标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$, 系数为特征值

合同变化法

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行列成对的初等变换}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

此时 $C^TAC=\Lambda$, 举例说法计算过程

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

即经过可逆线性变换 $x = Cy$ 其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价于做如下变量代换

$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 此时标准型为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$

1. (2016, 数二、三) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^1 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2 则

A. $a > 1$ B. $a < -2$ C.$-2 < a < 1$ D.$a = 1$ 或 $a = -2$

直接求特征值

由题设可知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 求解特征值方程 $|A - \lambda E| = 0 \implies (a - \lambda + 2)(a - \lambda - 1)^2$ 由题设可知

$$\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \implies -2 < a < 1$$

分解为秩 1 矩阵

$A = (1, 1, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a - 1)E$ 从而可知其特征值为 $\begin{cases} \lambda_1 = a + 2 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1 \end{cases}$

2. (2022, 数一) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$。

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;

(2) 求正交变换 $x = Qy$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

Solution

由题设可知 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_1x_3$

(1) 矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = (1,2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 即 $r(A) = 1$

(2) 由秩一矩阵特性可知 $\lambda_1 = tr(A) = 14, \alpha_1 = (1,2,3)^T$ 通过知一求二, 设 $\alpha_2 = (a,b,0)^T, \alpha_3 = (-b,a,c)^T$ 可知当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \alpha_2 = (-2,1,0)^T, \alpha_3 = (-3,-6,5)$

单位化后有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5)^T$$

记 $Q = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 此时经过 $x = Qy$ 二次型化为标准型 $f = 14y_1^2$

(3) 方法一, 解 $f = 14y_1^2 = 0 \implies y_1 = 0, y_2 = k_1, y_3 = k_2$ 又 $x = Qy = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1\gamma_2 + k_2\gamma_3$ 其中 k_1, k_2 为任意常数

方法二, 配方直接接.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 = 0$$

从而可知 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ 其基础解系为 $\xi_1 = (-2,1,0)^T, \xi_2 = (-3,0,1)^T$, 从而可知 $f = 0$ 的通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 其中 k_1, k_2 为任意常数

3. (2020, 数一、三) 设二次型 $f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $b \geq 0$。

   (1) 求 a, b 的值;

   (2) 求正交矩阵 Q。

Solution

(1)$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 由题设可知 $Q_1^TAQ_1 = \Lambda = Q_2^TBQ_2$ 从而可知 $A \sim B$, 又因为 $r(A) = 1$ 可知 A 的特征值与特征向量分别为

当 $\lambda_1 = tr(A) = 5, \alpha_1 = (1, -2)^T$

当 $\lambda_2 = 0, \alpha_2 = (2, 1)^T$

单位化后有 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$ 从而 $Q_1 = (\gamma_1, \gamma_2)$

有题设可知 $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ 通过 $B \sim A$ 可知 $\begin{cases} ab - 4 = 0 \\ a + b = 5 \\ a > b \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$

当 $\lambda_1 = tr(B) = 5, \beta_1 = (2, 1)^T; \lambda_2 = 0, \beta_2 = (-1, 2)^T$

单位化后 $\gamma_1^{'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T; \gamma_2^{'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)^T$ 从而有 $Q_2 = (\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'})$

因此 $B = Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2^T$ 进而可知 $Q = Q_1 Q_2^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

1.2 合同的判定

4. (2008, 数二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 与 A 合同的矩阵是

A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Solution

D

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵, 则存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得

$(I) PA = B$ $(II) P^{-1}ABP = BA$ $(III) P^{-1}AP = B$ $(IV) P^T A^2 P = B^2$

成立的个数是

A.1 B.2 C.3 D.4

Solution

(I) 有 $BA^{-1}A = B$

(II) $A^{-1}ABA = BA$

(III) 令 $A = E, B = -E$ 则 $P^{-1}AP = E \neq B$

(IV) 设 A 的任意特征值为 λ 则 A^2 的任意特征值为 λ^2 又 A 可逆可知 $\lambda^2>0$, 同理可知 B^2 的任意特征值为 $\lambda^2>0$ 从而 A^2,B^2 均只有 n 个正的特征值从而 A,B 合同.

1.3 二次型正定与正定矩阵的判定

方法

(1) 正定的定义

∘1 A 为实对称矩阵

∘2 $\forall\alpha\neq 0$ 有 $\alpha^TA\alpha>0$

注意着两个条件缺一不可!

(2) 充要条件

∘1 对于 n 阶矩阵, 其正惯性指数为 n

∘2 与单位矩阵 E 合同

∘3 对于任意特征值 $\lambda_i>0$

∘4 对于任意顺序主子式均大于 0

6. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 且 $r(A)=m$, 则下列结论

(1) A^TA 与单位矩阵等价;

(2) A^TA 与对角矩阵相似;

(3) A^TA 与单位矩阵合同;

(4) A^TA 正定。

正确的个数是

A. 1　　B. 2　　C.3　　D.4

$r(A)=m$ 时有关 AA^T 的结论

对于矩阵 $A_{m\times n},r(A)=m$ 此时 $AA^T_{m\times m}$ 有如下结论

1. $\iff|AA^T|\neq 0$　　**2.** $\iff AA^T$ 可逆

3. $\Longleftrightarrow r(AA^T) = r(A) = m$

4. $\Longleftrightarrow AA^T$ 与 $E_{m\times m}$ 等价

5. $\Longleftrightarrow AA^T$ 行 (列) 向量组线性无关

6. $\Longleftrightarrow AA^TX = 0$ 只有零解

7. $\Longleftrightarrow AA^TX = b$ 有唯一解

8. $\Longleftrightarrow \lambda_i \neq 0$

9. $\Longrightarrow AA^T$ 可相似对角化

10. $\Longrightarrow AA^T$ 为实对称矩阵

11. $\Longleftrightarrow AA^T$ 与 E 合同

12. $\Longleftrightarrow AA^T$ 正定

7. 证明:

(1) 设 A 为 n 阶正定矩阵,B 为 n 阶反对称矩阵, 则 $A - B^2$ 为正定矩阵;

(2) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $r(A + B) = n$, 则 $A^TA + B^TB$ 为正定矩阵。

Solution

(1) 由 $A^T = A, B^T = -B$ 因此 $(A - B^2)^T = A^T - (B^T)^2 = A - B^2$ 故而 $A - B^2$ 为实对称矩阵.

$\forall \alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \alpha^T(A - B^2)\alpha &= \alpha^TA\alpha - \alpha^TB^2\alpha \\ &= \alpha^TA\alpha + \alpha^TB^TB\alpha \end{aligned}$$

又 $\alpha^TA\alpha > 0, \alpha^TB^TB\alpha \geq 0$ 从而 $\alpha^T(A - B^2)\alpha > 0$ 故而 $A - B^2$ 为正定矩阵.

(2)$(A^TA + B^TB)^T = A^TA + B^B$ 从而其为实对称矩阵

$\forall \alpha \neq 0$ 有

$$\begin{aligned} \alpha^T(A^TA + B^TB)\alpha &= \alpha^TA^TA\alpha + \alpha^TB^TB\alpha \\ &= (A\alpha)^TA\alpha + (B\alpha)^TB\alpha \geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当 $A\alpha = B\alpha = 0$ 时候上式才能取 0, 此时有 $(A + B)\alpha = 0$ 由 $\alpha \neq 0$ 故 $(A + B)X = 0$ 由非零解而 $r(A + B) = n$ 矛盾, 从而不可能 $A\alpha = B\alpha = 0$ 故而上式只能大于 0. 从而题设得证.