考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 26 日

目录

第一章 函数极限连续

1.1 函数的性态

Remark. (有界性的判定)

(1) 连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界

(2) 连续函数在开区间 (a,b) 上只需要判断端点处的左右极限, 若 $\lim_{x\to a^+}\neq\infty$ 且 $\lim_{x\to b^-}\neq\infty$, 则连续函数在该区间内有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内有界.

Proof: $\forall x\in(a,b)$, 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi$

$$f(x)-f(\frac{a+b}{2})=f'(\xi)(x-\frac{a+b}{2})$$
$$|f(x)|\leq|f'(\xi)|\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\left|f(\frac{a+b}{2})\right|$$
$$|f(x)|\leq\frac{b-a}{2}|f'(\xi)|+\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\leq M$$

1. 下列函数无界的是

A $f(x)=\frac{1}{x}\sin x, x\in(0,+\infty)$ B $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$

C $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ D $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt, x\in(0,2022)$

Solution.

(A) $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 均为有限值, 故 A 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(B) $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}=1$ 均为有限值, 故 B 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(C) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间 $(0,+\infty)$ 无界

(D) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^x 1dt = 0$, $\lim_{x\to 2022^-} f(x) = \int_0^{2022} \frac{\sin t}{t}dt =$ 有限值 故 D 在区间 $(0, 2022)$ 有界 □

无穷 VS 无界

无界 只有有一个子列趋于无穷即可

无穷 任意子列均趋于无穷.

例如 A 选项, 当 $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}, f(x_n) = 2n\pi + \pi/2, n \to \infty, f(x_n) \to \infty$; 当 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, f(x_n) = 0, n \to \infty, f(x_n) \to 0$ 不为无穷大, 仅仅是无界.

Remark. (导函数与原函数的奇偶性与周期性)

连续奇函数的所有原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 都是偶函数

连续偶函数仅有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数

连续周期函数的原函数为周期函数 $\iff \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$

2. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

A $\int_0^x f(t^2)dt$ B $\int_0^x f^2(t)dt$

C $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$ D $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$

Solution. 这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令 $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt = -\int_0^x f(t^2)dt = -F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t)dt = -\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C) $t[f(t) - f(-t)]$ 是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D) $t[f(t) + f(-t)]$ 是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数 □

1.2 极限的概念

Definition 1.2.1 (函数极限的定义)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时，必有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

3. (2014, 数三) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

$$(\text{A})|a_n| > \frac{|a|}{2} \qquad (\text{B})|a_n| < \frac{|a|}{2} \qquad (\text{C})a_n > a - \frac{1}{n} \qquad (\text{D})a_n < a + \frac{1}{n}$$

Solution. 令 $\epsilon = |a|/2$, 则 $|a_n - a| < |a|/2 \geq ||a_n| - |a||$ 即

$$|a|/2 < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$$

对于 CD 考虑当

$a_n = a - \frac{2}{n}$ 和 $a_n = a + \frac{2}{n}$ 简单来说 $\forall \epsilon$ 这里面的 ϵ 与 n 是无关的. □

1.3 函数极限的计算

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分的那么明显, 目标都是往最简单 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\cdot}{\infty}$ 模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

Remark. (类型一 $\frac{0}{0}$ 型)

4. (2000, 数二) 若 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

Solution. 这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了.
$\sin 6x=6x-36x^2+o(x^3)$, 带入题目极限有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=36$$

□

5. (2002, 数二) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解, 则当 $x\to 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不等于 (B)等于 1 (C)等于 2 (D)等于 3

Solution. 由微分方程和 $y(0)=y'(0)=0$ 可知 $y''(0)=1$, 则 $y(x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

□

Remark. (类型二 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}&=\lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\\&=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-x}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Remark. (类型三 $0 \cdot \infty$ 型)

7. 求极限 $\lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) \ln\left(1+e^{1/x}\right)$

Solution. □

Remark. (类型四 $\infty - \infty$ 型)

8. 求极限 $\lim_{x \to \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2\right)$

Solution.

□

Remark. (类型五 0^0 与 ∞^0 型)

9. (2010, 数三) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/x}-1\right)^{1/\ln x}$

Solution.

□

Remark. (类型六 1^∞ 型)

10. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{1/x}$ $(a>0, n\in\mathbb{N})$

Solution. □

1.4 已知极限反求参数

Remark. (方法)

11. (1998, 数二) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ (c\neq 0)$

Solution.

□

1.5 无穷小阶的比较

Remark. (方法)

12. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0$,$f'(0)\neq 0$,$f''(0)\neq 0$。证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

Solution.

□

13. (2006, 数二) 试确定 A, B, C 的值, 使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

Solution.

□

14. (2013, 数二、数三) 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值。

Solution.

□

1.6 数列极限的计算

Remark. (方法)

(1) 单调有界准则 (三步走, 先确定单调性, 在确定有界性, 最后解方程求极限)

确定单调性, 可以考虑作差/做商/求导

(2) 压缩映射原理

(3) 夹逼准则

(4) 定积分的定义 (n 项和/n 项积)

15. (2011, 数一、数二)

(i) 证明：对任意正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(ii) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

Solution. (1) 是基本不等式的证明, 考虑拉格朗日中值即可

(2) 考研大题, 特别是分成几个小问的题目, 都需要合理利用前面的结论

考虑 $a_{n+1}-a_n$ 有

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+n/1) < 0$$

即 $\{a_n\}$ 单调递减, 考虑其有界性

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1/2+1/3+\ldots+1/n-\ln(n) \\ &< \ln(1+1)+\ln(1+1/2)+\ldots+\ln(1+n/1)-\ln(n) \\ &= \ln(n+1)-\ln(n) > 0 \end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界, 故由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

□

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$,$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

Solution. 这道题的难度在于如何处理条件. 考虑1 的妙用. 有

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x}=\frac{e^{x_n}-e^0}{1}$$
$$=e^{\xi},\xi\in(0,x_n)$$

而由于 e^x 是单调递增的函数则必然有 $\xi=x_{n+1}$ 即 $0<x_{n+1}<x_n$ 从而单调递减有下界. 此时 $\{x_n\}$ 极限存在.

不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 问题转换为求方程 $ae^a=e^a-1$ 的解的问题. 显然 $a=0$ 是其一个根. 考虑函数 $f(x)=e^x(1-x)-1$ 其导数为 $-xe^x$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递减故 $x=a$ 是 $f(x)$ 唯一零点, 即 $a=0$ 是唯一解. 故

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}x_n=0}$$

□

> 常见的等价代换有
>
> 1: $e^0,\sin(\pi/2),\cos(0),\ln(e)$ 具体情况还得看题目, 题目有啥用啥替换
>
> 0: $\sin(0),\cos(pi/2),\ln(1)$

17. (2019, 数一、数三) 设 $a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$。

(i) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$

(ii) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

Solution. 这道题第一问比较重要, 第二问比较简单

(1) 方法一:

可以直接求出 a_n 的值, 令 $x=\sin(t)$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)-\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{华里士公式}}\frac{1}{n+2}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2},\text{当 n 时偶数的时候}\end{aligned}$$

$$a_{n-2}=\frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi/2}{2}$$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

当 n 为奇数的时候同理可得

(1) 方法二:

也可以考虑分部积分法

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\left[x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\mid_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x^{n-1}\right] \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)x^{n-2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n \\
&\Longrightarrow a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}$$

(2)

由 (1) 可知

$$\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} < 1$$

当 $n \to \infty$ 由夹逼准则可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ □

18. (2017, 数一、数二、数三) 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Solution. 这是最普通的定积分的定义的应用

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \\
&\xlongequal{\text{定积分定义}} \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x\to-\infty}f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足

A $a<0, b<0$ B $a>0, b>0$ C $a\le 0, b>0$ D $a\ge 0, b<0$

Solution.

□

第二章　一元函数微分学

2.1　导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A　$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B　$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C　$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D　$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

Solution.

$\square$

2. (2001, 数一) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

   (A) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在 (B) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

   (C) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在 (D) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

   Solution.

□

3. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$, 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

Solution.

□

2.2 导数与微分的计算

Remark (类型一分段函数求导).

4. (1997, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A(A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

Solution.

□

Remark (类型二复合函数求导).

5. (2012, 数三) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$,$y=f(f(x))$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

Solution.

□

Remark (类型三隐函数求导).

6. (2007, 数二) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定。设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$

Solution.

□

Remark (类型四反函数求导).

7. (2003, 数一、数二) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

   (i) 将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程

   (ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解

Solution.

□

Remark (类型五参数方程求导).

8. (2008, 数二) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solution.

□

Remark (类型六高阶导数).

9. (2015, 数二) 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$__

***Solution*.**

□

2.3 导数应用-切线与法线

Remark (类型一直角坐标表示的曲线)**.**

10. (2000, 数二) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

Solution.

□

Remark (类型二参数方程表示的曲线).

11. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为__

Solution. 【详解 □

Remark (类型三极坐标表示的曲线).

12. (1997, 数一) 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为__

Solution.

□

2.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

Solution.

□

14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Solution.

□

2.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

$(A)\ \frac{\sqrt{10}}{50}$ $(B)\ \frac{\sqrt{10}}{100}$ $(C)\ 10\sqrt{10}$ $(D)\ 5\sqrt{10}$

Solution.

□

2.6 导数应用-极值与最值

Remark. 函数的极值的充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ 则有

$$f''(x)\begin{cases} > 0 & x_0\text{是极小值} \\ < 0 & x_0\text{是极大值} \end{cases}$$

(充分 3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)(x_0)=0, f^{(n)}}(x_0) \neq 0$, 且 n 是大于 2 的偶数则有

$$f^{(n)}(x_0)\begin{cases} > 0 & x_0\text{是极小值} \\ < 0 & x_0\text{是极大值} \end{cases}$$

17. (2000, 数二) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点$(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

Solution. 有题设知 $f''(0) = 0$, 对等式两边求导有 $f^{(3)}(0) = 1 \neq 0$ 由拐点充分条件可知,$(0, f(0))$ 为函数的拐点 □

18. (2010, 数一、数二) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2}(x^2 - t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值

Solution. 求导有

$$f'(x) = 2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

令 $f'(x) = 0$ 有 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$ 并且无其余根, 带入可知

$x = \pm 1, f(\pm 1) = 0$ 为极小值点,$x = 0, f(0) = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$ 为极大值点 □

19. (2014, 数二) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值

Solution. 比较简单, 答案为极小值为 $y(-1) = 0$, 极大值为 $y(1) = 1$ □

2.7 导数应用-凹凸性与拐点

Remark. 拐点也有三个充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ 则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数拐点

(充分 3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)(x_0)=0, f^{(n)}}(x_0) \neq 0$, 且 n 是大于 3 的奇数则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点

20. (2011, 数一) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

$(A)\ (1,0)$ $(B)\ (2,0)$ $(C)\ (3,0)$ $(D)\ (4,0)$

Solution. 直接用高中的穿针引线法画图就可以 □

2.8 导数应用-证明不等式

Remark. 通常优先考虑单调性, 较难的题会结合微分中值定理 (通常是拉格朗日/柯西/泰勒)

21. (2017, 数一、数三) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

$(A)\ f(1) > f(-1)$ $(B)\ f(1) < f(-1)$ $(C)\ |f(1)| > |f(-1)|$ $(D)\ |f(1)| < |f(-1)|$

Solution. 这道题的辅助函数比较好想, 显然 $F(x) = \frac{1}{2}f^2(x)$, 由题设知 $F'(x) > 0$ 恒成立, 故 $F(x)$ 单调递增即 $F(1) > F(-1) \implies f^(2)(1) > f^(2)(-1) \implies |f(1)| > |f(-1)|$ □

22. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a) = 0$,$f'(x) > 0$,$f''(x) > 0$。设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$。

Solution. 这道题的几何直观非常明显, 证明也不算很难.

由题可知切线方程为 $y=f'(b)(x-b)+f(b)$ 令 $y=0$ 有 $x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$

$$
\begin{aligned}
& a<b-\frac{f(b)}{f'(b)}<b \\
& \Leftarrow 0<\frac{f(b)}{f'(b)}<b-a \\
& \Leftarrow 0<f(b)<f'(b)(b-a)
\end{aligned}
$$

由 $f(a)=0$ 和拉格朗日中值定理有 $f(b)=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$, 又 $f''(x)>0$ 故 $f'(\xi)<f'(b)$ 故 $f(b)<f'(b)(b-a)$ 从而原不等式成立 □

2.9 导数应用-求方程的根

23. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数。

Solution. 这道题也比较简单, 感觉是高中题现在考研已经不太可能出了

$f'(x)=(2x-1)\sqrt{1+x^2}$, 显然只有唯一根 $f'(1/2)=0$ 又 $f(1)=0$ 故 $f(1/2)<0$ 又 $f(-1)>0$ 故 f(x) 在 $(-1,1/2)$ 上必然还有唯一根, 故 $f(x)$ 在 **R** 上仅有两根 □

2.10 微分中值定理证明题

Remark. 证明含有一个 ξ 的等式

如果不含导数, 通常使用单调性 + 零点存在定理

如果包含导数, 通常需要构建辅助函数并使用费马引理/罗尔定理

构建辅助函数中比较困难的题目, 可以采用积分还原法做, 其基本思路为

(1) 将 ξ 都改写成 x, 变形做不定积分去掉导数

(2) 改写 $C=0$, 移项构建辅助函数

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$。证明:

(i) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(ii) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$。

Solution. (1) 显然构建 $F(x) = f(x) - x$, 有 $F(1) = F(0) = 0$ 由 roller Th 可知 $\exists\xi \in (0,1), F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = 1$

(2) 由 $f(x)$ 是可导的奇函数容易得知 $f'(x)$ 偶函数

(方法一) 构建 $G(x) = f'(x) + f(x) - x$, 则 $G(-1) = f'(1) = G(1)$ 由 roller Th 有...

(方法二) 构建 $G(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 则由第一问有 $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$ 带入 $G(x)$, 再由 roller Th 也可以得到答案

□

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $(2\xi + 1)f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$。

Solution. 这道题很难通过观察法得到辅助函数, 考虑使用积分还原法

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -(2 + \frac{1}{x})$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int -(2 + \frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

即

$$\ln|f(x)| + \ln x + \ln e^{2x} - \ln|C| = 0$$

化简且令 C=0 后有

$$xe^{2x}f(x) = 0$$

故辅助函数 $G(x) = xe^{2x}f(x)$, 又 $G(1) = G(0)$ 由 roller Th 可知原等式成立 □

Remark. 类型二证明含有两个点的等式

若要求的是两个相异的点, 则分区间讨论 (具体看下题 1)

若并不要求两个相异的点, 则可能需要一次拉格朗日一次柯西 (具体见下题 2)

27. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0,f(1) = 1$。证明:

(i) 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$;

(ii) 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使得 $\eta f'(\xi) = f(\eta)f'(\eta)$。

Solution. 对于 (1) 这种题目不应该从正面突破, 而应该先假设.

假设 $\exists \xi_1 \in (0,c), \xi_2(c,1)$ 有

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(0)}{f}$$
$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c}$$

带入题设条件 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2 \implies c=\frac{1}{2}$

<u>以上分析均不需要写在试卷上</u>

由 lagrange Th$\exists \xi_1 \in (0,1/2), \xi_2(1/2,1)$ 有....

(2) 由 lagrange Th 可知 $\exists \xi \in (0,1), f'(\xi) = f(1)-f(0) = 1$ 题目要求的为

$$f'(\xi) = \frac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$$

考虑柯西中值定理, 左侧分式实际是

$$\frac{f^2(1)-f^2(0)}{1^2-0^2} = \frac{f'(\eta)f(\eta)}{\eta} = 1 = f'(\xi)$$

□

Remark. 类型三证明含有高阶导数的等式或不等式

基本就是 Taylor 的题, 当然有时也可以通过多次拉格朗日求出来.

这种问题的关键点在于如何寻找展开点, 基本思路就是谁信息多展开谁, 例如端点, 极值点, 最值点, 零点等等

28. (2019, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = 1$。证明:

(i) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(ii) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

Solution. 这道题算是比较难的题目, 当然不是最难的最难的那道比较像数学分析的题

(方法一) (1) 由积分中值定理可知 $\exists f(c) = 1$ 又 $f(1) = f(c) = 1$ 由 roller Th 可知 $\exists \xi, f'(\xi) = 0$

(2) 要证明 $f''(\eta) < -2$ 只需证明对于 $F(x) = f(x) + x^2, \exists \eta, F''(x) < 0$ 分别在区间 (0,c)(c,1) 上使用 lagrange Th 有

$$F(c) - F(0) = F'(\xi_1)c = 1 + c^2, \xi_1 \in (0, c)$$

$$F(1) - F(c) = F'(\xi_2)(1 - c) = 1 - c^2, \xi_2 \in (c, 1)$$

再在区间 (ξ_1, ξ_2) 使用 lagrange Th 有

$$F'(\xi_2) - F'(\xi_1) = F''(\eta)(\xi_2 - \xi_1), \eta \in (\xi_1, \xi_2)$$

将 $F'(\xi_1), F'(\xi_2)$ 带入上式, 有

$$F''(\eta) = \frac{c - 1}{c(\xi_2 - \xi_1)} < 0$$

故原不等式成立

(方法二) (1) 由题设知在区间 (0,1) 内必然存在最值, 且 $f(\xi) > 1$, 由费马引理可知 $f'(\xi) = 0$

(2) 在 $x = \xi$ 处进行 Taylor 展开有

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\eta)}{2}(x - \xi)^2$$

带入 $x = 0$ 点有

$$0 = f(\xi) + \frac{f''(\eta)}{2}\xi^2 \implies f''(\eta) = -\frac{2f(\xi)}{\xi^2} < -2$$

□

第三章　一元函数积分学

3.1　定积分的概念

2. (2009, 数三) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$　(B) $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　$(D)(\pi,+\infty)$

Solution. (方法一) 利用单调性

$$f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$$

$$f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\begin{cases} x>0 & ,f'(x)<0 \\ x<0 & ,f'(x)>0 \end{cases}$$

又 $f(1)=0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上大于 0, 在 $(1,\infty)$ 小于 0

(方法二) 利用几何意义

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$\int_1^x \frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t>0$$

由积分的几何意义容易知道, 当 $x\in(0,1)$ 时候上式成立 □

3. (2003, 数二) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$, 则

(A) $I_1>I_2>1$　(B) $1>I_1>I_2$

(C) $I_2>I_1>1$　(D) $1>I_2>I_1$

Solution. 由基本不等式 $x\in(0,\frac{\pi}{2}), \sin x<x<\tan x$, 故有 $\tan x/x>1>x/\tan x$ 由比较定理有 $I_1>I_1$, 考虑 I_1 与 1 的关系.

(方法一) 求导用单调性

$f(x)=\tan x/x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2} \\ &= \frac{x-\sin x\cos x}{\cos^2 x x^2} > 0 \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi/4)$ 上单调递增, 有 $f(x)<f(\pi/4)=\frac{4}{\pi}$, 故 $I_1<1$

(方法二) 利用凹凸性

由于 $\tan x$ 在 $(0,\pi/2)$ 上是一个凹函数, 则其割线的函数值大于函数的函数值大于切线的函数值 (割线在函数图像的上方, 切线在函数图像的下方) 则有

$$\frac{4}{\pi} > \tan x$$

从而 $I_1<1$ □

3.2 不定积分的计算

Remark.

$$\text{不定积分的计算}\begin{cases}\text{凑微分}\\ \text{分部}\\ \text{换元}\begin{cases}\text{倒代换}\\ \text{三角代换}\\ \text{根式代换}\\ \text{万能公式}\\ \text{整体代换}\end{cases}\end{cases}$$

分部里面要注意表格积分法, 与行列式积分法

万能公式如下

$$\text{令}x=\tan\frac{t}{2}\text{则}\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-t^2}{2t}\\ x=2\cdot\arctan t,\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{cases}$$

4. 计算下列积分 (1)$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;(2)$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

Solution. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \\
&\xlongequal{\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x} \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} \\
&\xlongequal{\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x} -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{2}-(x+\frac{1}{x})}\right|
\end{aligned}
$$

□

5. 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x, x>0$

Solution.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{t=\sqrt{\frac{(1+x)}{x}}} \ln 1+t\mathrm{d}(\frac{1}{t^2-1}) \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{2(1+t)}+C
\end{aligned}
$$

$$
\text{原式} = \ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{2(1+t)}+C
$$

□

6. 求 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

Solution. (方法一 万能代换)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \ln|1+t|+C \\
&= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}
$$

(方法二 三角公式)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} & \xlongequal{\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan x2)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} \\
&= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}
$$

□

3.3 定积分的计算

Remark. 定积分除了不定积分的办法还有如下自己独有的办法

$$
\text{定积分的计算}\begin{cases}\text{奇偶性}\\ \text{周期性}\\ \text{华里士公式}\\ \text{区间再现}\end{cases}
$$

其中华里士公式如下

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n=\text{奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=\text{偶数}\end{cases}
$$

$\cos x$ 也是一样的结果

7. (2013, 数一) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$

Solution. (方法一 分部积分法)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x} \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\sqrt{x}=t} -4\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \\
&= -4t\ln(1+t^2)\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= 8 - 4\ln 2 - 2\pi
\end{aligned}
$$

(方法二 二重积分)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} -\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= \dots \\
&= 8 - 4\ln 2 - 2\pi
\end{aligned}
$$

□

8. 求下列积分: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{sinx}}{e^{sinx}+e^{cosx}}\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx$

Solution. 这两题都是典型的区间再现的题目

(1)

$$
\text{原式} \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos t}}{e^{\sin t}+e^{\cos t}}\mathrm{d}t
$$

由于积分与变量无关, 将上式与原式相加有

$$
\text{原式} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}}+\cos x)^{\sqrt{2}}} \\
&\xlongequal{\text{和一完全一致}} \dots \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

□

9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

Solution. 这道题是比较困难的积分计算题, 由于其他方法都不好用不妨考虑区间再现

$$\text{原式} \xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln 2-\ln\left(1+\tan t\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$\text{原式} = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

□

区间再现总结

考试中可能直接考察的区间再现的公式为

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

其余的就只能见机行事 若其他积分方法都无法做出则可以考虑区间再现

3.4 反常积分的计算

Remark. 瑕积分的计算需要注意, 若瑕点在内部则需要积分拆开分别计算

10. (1998, 数二) 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$

Solution. 显然 $x=1$ 是积分的瑕点, 故原积分需要拆成两部分即

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$$
$$\xlongequal{\text{配方}} \arcsin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

□

积分表的拓展

(1)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

(2)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$
$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(3)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

第二个如果是定积分也可以按照几何意义 (圆的面积) 做

3.5 反常积分敛散性的判定

Remark. 反常积分的敛散性感觉不如无穷级数敛散性难

(方法一) 使用反常积分的定义, 算出其极限值

(方法二) 比较判别法–寻找 x^p

$$(\text{瑕积分}) \int_0^1 \frac{1}{x^p} \begin{cases} 0 < p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

$$(\text{无穷积分}) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

11. (2016, 数一) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛, 则

(A) a<1 且 b>1 (B) a>1 且 b>1

(C) a<1 且 a+b>1 (D) a>1 且 a+b>1

Solution. 显然 $x=0$ 是该积分的瑕点, 需要分成两部分考虑 $\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}\frac{x^p}{x^a(1+x)^b}=1\\ &\overset{\text{等价代换}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{x^p}{x^a}\implies p=a\end{aligned}$$

由 p 积分的性质可知当 $p<1$ 的时候其收敛故 $a<1$ 的时候原积分中的 $\int_0^1$ 收敛同理对于 $\int_1^{+\infty}$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x^{a+b}}=1\implies p=a+b$$

由 p 积分的性质可知当 $p>1$ 即 $a+b>1$ 的时候原积分 $\int_1^{+\infty}$ 收敛, 故由反常积分的定义可知只有 $a<1,a+b>1$ 的时候原积分收敛 □

12. (2010, 数一、数二) 设 m,n 均为正整数, 则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m,n 的取值都有关 (D) 与 m,n 的取值都无关

Solution. 显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是积分的瑕点, 需要分成两部分考虑, 有 $\int_0^1=\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^1$, 想考虑前一个积分

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{\frac12}x^p\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{x\to0^+}\int_0^{\frac12}x^p\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}\implies p=\frac1n-\frac2m$$

由 p 积分的性质, 只有 $p<1$ 上述积分就收敛, 而由于 $(n,m)\in\mathbb{Z}^+,\frac1n-\frac2m<\frac1n<1$ 故上式恒收敛.

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)^p\frac{\sqrt[m]{\ln(1-x)^2}}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{x\to1^-}(x-1)^p\sqrt[m]{\ln(1-x)^2}\implies \text{恒为 }0$$

故上式也恒收敛, 故原式的敛散性与 (n,m) 均无关 □

3.6 变限积分函数

原函数, 可积, 变限积分

(一) 原函数存在定理

$$\int f(x)\mathrm{d}x\text{存在}\begin{cases}\text{连续函数原函数必然存在}\\ \text{含有第一类间断点和无穷间断点其原函数必然不存在}\\ \text{含有震荡间断点其原函数可能存在}\end{cases}$$

(二) 可积性定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{存在}\begin{cases}\text{可积必有界}\\ \text{连续必可积}\\ \text{含有有限个间断点的有界函数可积}\end{cases}$$

(三) 变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}f(x)\text{可积} \implies F(x)\text{连续}\\ f(x)\text{连续} \implies F(x)\text{可导}\\ x=x_0\text{是函数可去间断点} \implies F(x)\text{可导, 但, }F'(x_0)\neq f(x_0)\\ x=x_0\text{是函数跳跃间断点} \implies F(x)\text{不可导, 但连续}\end{cases}$$

13. (2013, 数二) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则

(A) x=π 是函数 F(x) 的跳跃间断点 (B) x=π 是函数 F(x) 的可去间断点

(C) F(x) 在 x=π 处连续但不可导 (D) F(x) 在 x=π 处可导

Solution. 显然由总结可知, 选 C □

14. (2016, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 内存在唯一零点.

Solution. (一) 有题有 $f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$, 所求的平均值为

$$
\begin{aligned}
\text{平均值} &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t}{\frac{3\pi}{2}} \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t \int_t^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3\pi}
\end{aligned}
$$

(二) 有题可知 $f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$, 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 只有唯一零点 $x=\frac{\pi}{2}$, 从而有 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递减, 而 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0)=0$, 考虑上述平均值, 由积分中值定理有 $f(c)=\frac{\pi}{3}>0$ 故 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}\sim\frac{3\pi}{2}$ 上有一个零点. 综上 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 仅有一个零点 □

定积分的应用

(一) 定积分求面积 (也可以用二重积分)

$$A=\begin{cases}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{直角坐标系}\\ \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\\ \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \frac{1}{2}\int_l -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y, & \text{L 对 D 来说取正向}\end{cases}$$

(二) 定积分求旋转体体积 (可以用微元法推, 也可以用二重积分)

$$V=\begin{cases}\iint_D 2\pi r(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{二重积分法, 其中}r(x,y)\text{为区域 D 内一点到转轴的距离}\\ \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x, & \text{微元法, 绕 x 轴旋转}\\ \int_a^b 2\pi\,|xf(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{微元法, 绕 y 轴旋转}\end{cases}$$

(三) 定积分求弧长 (第一类曲线积分)

$$s_{\text{弧长}}=\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}\int_a^b \mathrm{d}s=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x, & \text{直角坐标}\\ \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\end{cases}$$

(四) 定积分求侧面积 (第一类曲面积分)

$$S_{\text{侧面积}}=\iint_S \mathrm{d}S=\begin{cases}\int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x, & \text{直角坐标}\\ \int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t, & \text{参数方程}\\ \int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标}\end{cases}$$

(五) 物理应用 (微元法, 不过数一不太可能考)

3.7 定积分应用求面积

15. (2019, 数一、数二、数三) 求曲线 $y = e^{-x}\sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

Solution.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{+\infty} |e^x \sin x| \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x \\
\text{由于} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \mathrm{d}x &= \frac{\begin{vmatrix} (e^{\alpha x})' & (\sin \beta x)' \\ e^{\alpha x} & (\sin \beta x) \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \beta^2} + C \\
\text{其中} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x &= \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \bigg|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\
\text{故原式} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}(1 + e^{-\pi}) \\
&= \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{\pi}}{2(e^{\pi} - 1)}
\end{aligned}
$$

□

3.8 定积分应用求体积

16. (2003, 数一) 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

 (1) 求 D 的面积 A;

 (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

Solution. (1) 有题设可求出其切点为 $(e, 1)$ 切线方程为 $y = \frac{x}{e}$

方法一:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{e}{2} - \int_1^e \ln x \mathrm{d}x \\
&= \frac{e}{2} - (x \ln x) \bigg|_1^e \\
&= \frac{e}{2} - 1
\end{aligned}
$$

方法二: 用反函数做 $x = e^y$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 e^y \mathrm{d}y - \frac{e}{2} \\
&= e - 1 - \frac{e}{2} \\
&= \frac{e}{2} - 1
\end{aligned}
$$

(2) 方法一:

$$
V = \frac{\pi}{3}e^2 - 2\pi \int_1^e (e - x) \ln x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)
$$

方法二: 用反函数

$$
V = \frac{\pi}{3}e^2 - \pi \int_0^1 (e^y - e)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)
$$

□

17. (2014, 数二) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

Solution. 先利用偏积分求出 $f(x,y) = (y+1)^2 - (2-x)\ln x$, 故曲线 $f(x,y) = 0 \implies (y+1)^2 = (2-x)\ln x$ $(1 \le x \le 2)$ 要根据题目条件求出 x 的范围! 显然曲线关于 $y = -1$ 对称利用微元法有

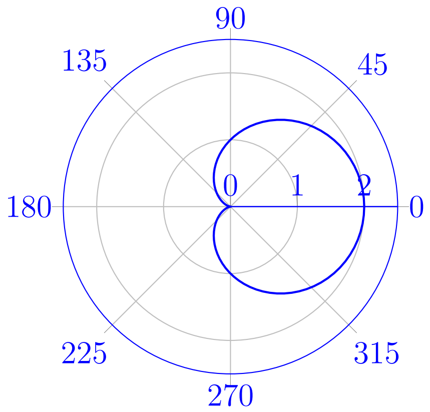
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^2 (y+1)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_1^2 (2-x) \ln x \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \ln 2 - \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$

□

3.9 定积分应用求弧长

18. 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 的全长.

Solution. 这种极坐标的图像, 都可以通过描点法去画 (其实画不画也不影响求)



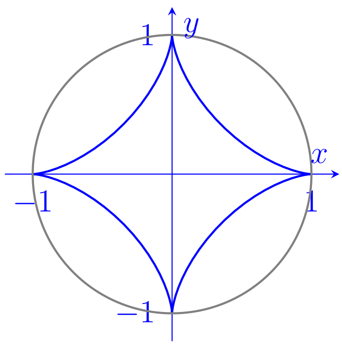
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin\theta^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\xlongequal{\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1} 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \\
&= 8a
\end{aligned}
$$

□

3.10 定积分应用求侧面积

19. (2016, 数二) 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

Solution. 这个参数方程的图像是需要记住即星形线



$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 - \int_0^1 \pi y^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{18}{35}\pi \\
S &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi + \int_0^1 2\pi y(x)\mathrm{d}s \\
&= 2\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot\sin^3 t\sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}
$$

□

3.11 证明含有积分的等式或不等式

Remark. 积分中值定理 (三个)

(一) 第一积分中值定理, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\exists c\in[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

(二) 第一积分中值定理的推广, 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续

$$\exists c\in(a,b), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

(三) 第二积分中值定理, 若 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 且 $g(x)$ 在其上不变号则

$$\exists c\in(a,b), \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

比较定理及其推论

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\le\int_a^b g(x)$

推论一: 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)<\int_a^b g(x)$

推论二: 若 $f(x)\ge 0$,$x\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$

推论三: $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$

21. (2000, 数二) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$

Solution. (1) 由比较定理有

$$\int_0^{n\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t \le S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t$$

显然 $|\cos t|$ 以 π 为周期故上式容易计算为

$$2n \le S(x) < 2(n+1)$$

(2) 考虑夹逼准则

$$\frac{2}{\pi} \xleftarrow{\lim_{n\to\infty}} \frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \frac{2}{\pi}$$

故 $\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$ □

22. (2014, 数二、数三) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加,$0 \le g(x) \le 1$. 证明:

(1) $0 \le \int_a^x g(t)dt \le x-a, x \in [a,b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Solution. (一) 由比较定理有

$$0 \le \int_a^x g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^x \mathrm{d}x = x-a$$

(二) 构建函数用单调性

令

$$F(x) = \int_a^{ma+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

则其导数为

$$F'(x) = g(x)\left[f(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t) - f(x)\right]$$

由一可知 $a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le x$ 从而可知 $F'(x) < 0$ 故而 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减, 而 $F(a) = 0$ 故 $F(b) < F(a) = 0$ 即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$$

. □

第四章　常微分方程

4.1　一阶微分方程

Remark. 一阶微分方程

(一) 可分离变量类型: 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 可以转换为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$

(二) 一阶线性非齐次: 形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 其通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

特殊的, 一阶线性齐次 $y'+p(x)y=0$ 其通解公式为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

(三) 一阶齐次方程: 形如 $y'=f(\dfrac{y}{x})$ 则可以通过 $u=\dfrac{y}{x}$ 为可分离变量类型

(四) 全微分方程: 形如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ 则其解法本质都是求原函数

(I) 特殊路径积分法 $u(x,y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$

(II) 偏积分, 一般考虑直接偏积分

(III) 凑微分

(五) 伯努利方程: 形如 $y'(x)+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\alpha\neq(0,1)$ 其解法如下

(I) 同除 y^{α}, 转换为 $y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$

(II) 做 $z=y^{1-\alpha}$的换元, 则原微分方程转换为

(III) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$

(IV) 转换为一阶线性方程可以用公式法直接求

(六) 需要考虑变量互换: 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)x^{\alpha}}$$

交换后可以转换为一阶线性/一阶伯努利即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{p(y)}{h(y)}+\frac{q(y)}{h(y)}x^{\alpha}$$

1. (1998, 数一、数二) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$, 则 $y(1)$ 等于

   $(A)\ 2\pi$ $(B)\ \pi$ $(C)\ e^{\frac{\pi}{4}}$ $(D)\ \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

   Solution. 两边同除 Δx 且当 $\Delta x\to 0$, 有 $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$ 原问题转换为求初值问题的解

$$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{1+x^2}=0 \\ y(0)=\pi \end{cases}$$

   由公式有 $y=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$ □

2. (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$$

   求 $f(x)$。

   Solution. 由题设有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}}\\&=e^{\frac{f'(x)\cdot x}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\implies\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

   即原问题转换为如下初值问题的解

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{1}{x^2}\cdot f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1 \end{cases}$$

   带入公式有 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ □

3. (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0 \quad (x>0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

Solution. 等式两边同时除以 x, 原式化为

$$\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right] \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 原式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边同时积分

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} = Cx \\ y(1) = 0 \end{cases} \implies y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2$$

对于带有根式的结果特别需要注意化简, 两边同时乘以 $y - \sqrt{x^2+y^2}$, 可以解出 $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ □

4. (2010, 数二、数三) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解。若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$ (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

(C) $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$ (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

Solution. 由总结可知, 选 A □

一阶, 二阶线性微分方程 (组) 解的性质

若 y_1, y_2 分别为非齐次特解, 则

$$C_1y_1 + C_2y_2 \begin{cases} C_1 + C_1 = 0, & \text{齐次解} \\ C_1 + C_2 = 1, & \text{非齐次解} \end{cases}$$

5. (2018, 数一) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

(1) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution. (一) 由一阶线性的求解公式有

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-x}\left[\int e^{x}\cdot x\mathrm{d}x + C\right] \\
&= e^{-x}\left[(x-1)e^{-x} + C\right] \\
&= Ce^{-x} + x - 1
\end{aligned}
$$

(二) 由一阶线性的求解公式有

$$
y = e^{-x}\left[\int f(x)e^{x}\mathrm{d}x + C\right] = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + C
$$

则

$$
\begin{aligned}
y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right] \\
\int_0^{x+T} e^t f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T + \int_T^{x+T} \\
&= \frac{1}{e^t}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{e^T}\int_T^{x+T} e^T f(t)\mathrm{d}t \\
&= \ldots + \frac{1}{e^T}\int_0^T e^{t+T} f(t+T)\mathrm{d}t \\
y(x+T)-y(x) &= e^{-x}\left[\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t + (\frac{1}{e^T-1})C\right]
\end{aligned}
$$

由周期函数的定义, 只需要令 $y(x+T)-y(x)=0$ 即

$$
C = -\frac{1}{1-e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t
$$

的时候该方程的解是周期还是, 且唯一. □

6. 求解微分方程 $y' - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$.

Solution. 令 $z=\sqrt{y}$, 则 $z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{1}{2}x^2$, 则到

$$
z = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = x^2\left(\frac{1}{2}\cdot x + C\right)
$$

则该方程的通解为 $\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^3 + Cx^2$ □

7. 求解下列微分方程:

(1) $(2xe^y+3x^2-1)dx+(x^2e^y-2y)dy=0$;

(2) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Solution. (1) 偏积分法

$$u(x,y)=\int(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x=x^2e^y+x^3-x+\phi(y)$$

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+\phi'(y)$ 对比题目可知 $\phi'(y)=-2y \implies \phi(y)=-y^2$, 故原方程的解

$$x^2e^y+x^3-x-y^2=C$$

(2) 凑微分法

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x+(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y\\&=(2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y)+(3x^2-1)\mathrm{d}x+(-2y)\mathrm{d}y\\&=d(x^2e^y)+d(x^3-x)+d(-y^2)\\&=d(x^2e^y+x^3-x-y^2)=0\end{aligned}$$

即 $x^2e^y+x^3-x-y^2=C$ □

4.2 二阶常系数线性微分方程

Remark. 二阶齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=0$

求解特征方程 $(r^2+pr+q=0)$

$$\begin{cases}r_1\neq r_2, & \text{通解为}C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\\ r_1=r_2=r, & \text{通解为}(C_1+C_2x)e^{rx}\\ r_{1,2}=\alpha\pm\beta, & \text{通解为}e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$$

二阶非齐次方程的通解, 形如 $y''+py'+qy=f(x)$, 其解的结构为<u>齐次特解 + 非齐次通解</u>

$$\text{特解格式}\begin{cases}f(x)=P_ne^{\lambda x}, y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}\\ f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]\\ y^*=x^ke^{\alpha}[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x], l=\min\{m,n\}\end{cases}$$

8. (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

   (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

   Solution.

□

9. (2015, 数一) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$ (B) $a = 3, b = 2, c = -1$

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$ (D) $a = 3, b = 2, c = 1$

Solution.

□

10. (2016, 数二) 已知 $y_1(x) = e^x$,$y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y = 0$ 的两个解。若 $u(-1) = e$,$u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution.

□

11. (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$。

    (1) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

    (2) 若 $y(0) = 1$,$y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值。

Solution.

□

4.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 求解微分方程 $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$。

Solution.

□

4.4 二阶可降阶微分方程

13. 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

Solution. □

4.5 欧拉方程

14. 求解微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$。

Solution.

□

4.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. (2005, 数二) 用变量代换 $x = \cos t(0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1$,$y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

Solution.

□

4.7 微分方程综合题

18. (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。求曲线 L 的方程。

Solution.

□

19. (2009, 数三) 设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$。已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0$,$x = 1$ 及 $x = t(t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

***Solution*.**

□

20. (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$。

Solution.

□

21. (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution.

□

22. (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D_t = \{(x,y)|0 \le y \le t-x, 0 \le x \le t\}(0 < t \le 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution.

□

第五章　多元函数微分学

5.1　多元函数的概念

1. 例 1 求下列重极限:

   (1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$;

   (2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

   (3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

   Solution.

□

2. (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在, 则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在, 则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微

(C) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在

(D) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在

Solution.

□

3. (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

则 $dz|_{(0,1)}=$

Solution.

□

5.2 多元复合函数求偏导数与全微分

4. (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 则 $df(1,1)=$

$(A)\ dx+dy$ $(B)\ dx-dy$ $(C)\ dy$ (D) dy

Solution.

□

5. (2011, 数一、数二) 设 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution.

□

5.3 多元隐函数求偏导数与全微分

6. (2005, 数一) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

   (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z = z(x,y)$

   (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$z = z(x,y)$

   (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y = y(x,z)$和$z = z(x,y)$

   (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$y = y(x,z)$

   Solution.

□

7. (1999, 数一) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution.

□

5.4 变量代换化简偏微分方程

8. (2010, 数二) 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

确定 a,b 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$。

Solution.

□

5.5 求无条件极值

9. (2003, 数一) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution.

□

10. (2004, 数一) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

Solution.

$\square$

5.6 求条件极值 (边界最值)

11. (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

    (A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

    (B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

    (C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

    (D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

    Solution.

□

12. (2013, 数二) 求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

Solution.

□

13. (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

(A) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

(B) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

(C) $u(x,y)$的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得

(D) $u(x,y)$的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得

Solution.

□

14. (2005, 数二) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$, 且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution.

□

第六章　二重积分

6.1　二重积分的概念

1. (2010, 数一、数二) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　(B) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　(D) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

Solution.

□

2. (2016, 数三) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3)$, 其中

$D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$,

$D_2 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$,

$D_3 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$, 则

(A) $J_1 < J_2 < J_3$ (B) $J_3 < J_1 < J_2$

(C) $J_2 < J_3 < J_1$ (D) $J_2 < J_1 < J_3$

Solution.

□

6.2 交换积分次序

3. (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x, y) dx$=____

Solution.

□

4. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) \mathrm{d}x$=____

Solution.

$\square$

5. 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr$ 的积分次序。

Solution.

□

6.3 二重积分的计算

6. (2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y) = 0, f(x,1) = 0, \iint_D f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□

7. 计算 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$。

Solution.

□

8. (2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dxdy$。

Solution.

□

9. (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 2\}$。

Solution.

$\square$

10. (2014, 数二、数三) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□

11. (2019, 数二) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□

6.4 其他题型

12. (2010, 数二) 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$

    其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \right\}$

    Solution.

□

13. (2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x-y)dxdy$

其中 $D = \{(x,y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

Solution.

□

第七章　无穷级数

7.1　数项级数敛散性的判定

1. (2015, 数三) 下列级数中发散的是

$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　$(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$(C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　$(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Solution.

□

2. (2017, 数三) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$

$(A)\ 1\qquad (B)\ 2\qquad (C)\ -1\qquad (D)\ -2$

Solution.

□

7.2 交错级数

3. 判定下列级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}\quad (2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Solution.

□

7.3 任意项级数

4. (2002, 数一) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$
则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}} \right)$
(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性根据所给条件不能判定

Solution.

□

5. (2019, 数三) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

$(A)\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$条件收敛 $(B)\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$绝对收敛

$(C)\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 收敛 $(D)\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 发散

Solution.

□

7.4 幂级数求收敛半径与收敛域

6. (2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的

   (A) 收敛点, 收敛点　　(B) 收敛点, 发散点

   (C) 发散点, 收敛点　　(D) 发散点, 发散点

   Solution.

□

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$ 的收敛域.

Solution.

□

7.5 幂级数求和

8. (2005, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

Solution.

□

9. (2012, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

Solution.

□

10. (2004, 数三) 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$。求:

   (1) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

   (2) $S(x)$ 的表达式.

Solution.

□

7.6 幂级数展开

11. 例 11 (2007, 数三) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

Solution.

□

12. 将函数 $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ 在 $x = 1$ 处展开成幂级数.

Solution.

□

7.7 无穷级数证明题

13. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1$,$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$。设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \cdots)$。证明:

    (i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

    (ii) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n\to\infty} x_n < 2$.

    Solution.

□

14. (2014, 数一) 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$,$0 < b_n < \frac{\pi}{2}$,$\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

Solution.

□

7.8 傅里叶级数

15. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于?, 在 $x=2\pi$ 收敛于?.

Solution. 由狄利克雷收敛定理知,$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于

$$S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

在 $x=2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

□

16. 将 $f(x)=1-x^2, 0\le x\le\pi$, 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

Solution. 对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶延拓, 由 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 知 $b_n=0$。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$, 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

□

第八章　多元函数积分学

8.1　三重积分的计算

1. (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

   (I) 求曲面 Σ 的方程;

   (II) 求 Ω 的形心坐标.

   Solution.

□

2. (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

Solution.

□

8.2 第一类曲线积分的计算

3. (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds =$

Solution.

□

4. 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

Solution.

□

8.3 第二类曲线积分的计算

5. (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

   (I) 求 $I(D_1)$ 的值;

   (II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

Solution.

□

6. (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$

Solution.

□

8.4　第一类曲面积分的计算

7. (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

Solution.

□

8.5 第二类曲面积分的计算

8. (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

Solution.

□

9. 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

Solution.

□

10. (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□

第九章　行列式

- 行列式的主要内容
  - 行列式的概念
    - 定义　$n!$项不同行不同列元素乘积的代数和
    - 性质
  - 重要行列式
    - 上 (或下) 三角, 主对角矩阵
    - 副对角行列式
    - ab 型行列式
    - 拉普拉斯展开式
    - 范德蒙行列式
  - 展开定理
    - $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
    - $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i=j\end{cases}$
  - 行列式的公式
    - $|KA|=K^n\,|A|$
    - $|AB|=|A|\,|B|$
    - $\left|A^T\right|=|A|$
    - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
    - $|A^*|=|A|^{n-1}$
    - 设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,　则 $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i$
    - 若 A 与 B 相似,　则 $|A|=|B|$
  - Cramer 法则　$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n\frac{D_n}{D}$

拉普拉斯展开式 (上, 下三角分块行列式的结论)

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D)$$

对于一般分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

若 B 可逆, 则有如下结论

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

9.1 数字行列式的计算

Remark. 基本方法

(1) 利用行列式的性质 (5 条) 来化简

(2) 要么出现重要行列式 (5 组)

(3) 要么展开定理 (0 比较多的时候)

1. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 根的个数为 ____

Solution. 第一列乘 -1 加到其他列

$$f(x)\xlongequal{\text{第一列乘-1 加到其他列上面去}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二列加到第四列}}\left|\begin{array}{cc|cc} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{array}\right|$$

$$\xlongequal{\text{拉普拉斯型}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=[(x-2)-(2x-2)][-6(x-2)+(x-7)]=15x(x-1)$$

则 $x=0$ 或 $x=1$ □

2. 利用范德蒙行列式计算

$$\text{范德蒙行列式}V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & bc\\ b & b^2 & ac\\ c & c^2 & ab\end{vmatrix}=\underline{\qquad}$$

Solution.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{第一列乘以 (a+b+c) 加到第三列}}\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+ac+ab+bc\\ b & b^2 & a^2+ac+ab+bc\\ c & c^2 & a^2+ac+ab+bc\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}}(ab+ac+bc)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

$$=(ac+bc+ab)(b-a)(c-a)(c-b)$$

□

3. 设 $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix} = \underline{\quad\quad}$.

Solution. 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3 & a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4 & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & x_4+a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{将第一行分别乘以}-a_1,-a_2\ldots,\text{分别加到第2,3,...列}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{从下往上消, 分别乘以}\frac{a_i}{x_i}\text{,加到第一行}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1x_2x_3x_4)(1+\sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i})$$

□

爪型行列式

关键点在于化简掉一条爪子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

***Solution*.**

(方法一) 递推法

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha+\beta \\ D_2 &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \\ &\ldots \\ D_n &= (\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \\ D_n-\alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \\ &= \beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}) \\ &\ldots \\ &= \beta^{n-1}(D_2-D_1) = \beta^n \\ D_n &= \beta^n+\alpha D_{n-1} = \beta^n+\alpha(\beta^{n-1}+\alpha D_{n-2}) \\ &\ldots \\ &= \beta^n+\alpha\beta^{n-1}+\ldots+\alpha^n \end{aligned}$$

(方法二) 数学归纳法

$$
\begin{aligned}
&if\ \alpha=\beta, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2, assume, D_{n-1}=n\alpha^{n-1}\\
&thenD_n=D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(n+1)\alpha^n\\
&when\ \alpha\neq\beta, D_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}, D_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\\
&Assume, D_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, then,\\
&D_n=\ldots=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

(方法三) 二阶差分方程

$$
\begin{aligned}
D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0\\
D_{n+2}-(\alpha+\beta)D_{n+1}+\alpha\beta D_n=0
\end{aligned}
$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$
\begin{aligned}
&r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta=0\\
&r_1=\alpha \qquad r_2=\beta
\end{aligned}
$$

差分方程的关键r^n代换e^{rx}

如果 $\alpha=\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=(C_1+C_2n)\alpha^n, D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&\text{得到}C_1=C_2=1, \square D_n=(n+1)\alpha^n
\end{aligned}
$$

如果 $\alpha\neq\beta$

$$
\begin{aligned}
&D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n, \text{由} D_1=2\alpha, D_2=3\alpha^2\\
&C_1=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, C_2=\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\\
&D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

□

Corollary 9.1.1. 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\,\alpha^n, & \alpha=\beta \\ \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \end{cases}.$$

9.2 代数余子式求和

Remark. 代数余子式求和的基本办法

(1) 代数余子式的定义 (求一个的时候使用)

(2) 展开定理 (求一行或者一列的时候使用)

(3) 利用伴随矩阵的定义 (求全部代数余子式的时候使用)

5. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=$ ____________, $A_{44}+A_{45}=$ ____________

Solution.

(方法一) 利用展开定理构建新的矩阵来计算

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

但这样 $|A|=27$ 的条件就没用到

(方法二)

直接对第四行使用展开定理, 则

$$|A|=A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27$$

直接对第二行使用展开定理, 则

$$|A|=2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0$$

相当于解 $A+2B=27, 2A+B=0$, 容易计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18$ □

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|A|$ 的所有代数余子式的和为____________

Solution. 对于求所有代数余子, 基本都是考察 A^* 的定义, 即

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

又由于 $A^* = |A|\, A^{-1}$, 对于这道题

$$|A| = (-1)^{(n+1)} n!$$

A^{-1} 可以通过分块矩阵来求

$$|A|A^{-1} = |A| \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ \hline n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)^{-1}$$

$$= |A| \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n} \\ \hline diag(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}) & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n}|A| \\ \hline diag(|A|, \frac{|A|}{2}, \ldots, \frac{|A|}{n-1}) & 0 \end{array}\right)$$

则所有代数余子式之和为

$$(-1)^{(n+1)} n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

□

9.3 抽象行列式的计算

Remark. 抽象行列式的计算方法

(1) 通过行列式的性质

(2) 行列式的公式 (7 个)

7. (2005, 数一、二) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ ______________

Solution.

(方法一利用性质)

$$\begin{aligned}
B &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3) \\
&= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_2+5\alpha_3) \\
&= 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_3) \\
&= 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
|B| &= 2\,|A| = 2
\end{aligned}$$

(方法二分块矩阵)

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = |A|(2-1)(3-1)(3-2) = 2$$

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, α, β 为 n 维列向量. 若 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$, 则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} =$ ________

Solution. 这道题的关键在于巧妙构建行列式的和

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \alpha+0 \\ \beta^T & b+c-b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c-b \end{vmatrix} \\
&= |A|\,(c-b) = a(c-b)
\end{aligned}$$

□

9. 设 A 为 2 阶矩阵, $B = 2\begin{pmatrix} (2A)^{-1} - (2A)^* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 若 $|A| = -1$, 则 $|B| =$ ______

Solution. 这道题比较纯粹就是行列式公式的应用

$$\begin{aligned}|B| &= 2^4 |A| \cdot \left|(2A)^{-1} - (2A)^*\right| \\ &= 2^4 |A| \cdot \left|\frac{1}{2}A^{-1} - 2A^*\right| \\ &= 2^4 \left|\frac{1}{2}E - 2|A|\right| = 100\end{aligned}$$

□

10. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A, A \neq E$, 证明 $|A| = 0$

> **易错点**
>
> 由 $|A|^2 = |A| \implies |A| = 1$或 $= 0$, 又 $A \neq E \implies |A| \neq 1$, 故 $|A| = 0$ 注意矩阵不等关系是无法推出行列式的不等关系的, 矩阵式数表只要顺序不同就不一样, 但不一样的矩阵其行列式完全有可能相等.
>
> 等于 1 的矩阵并非只能是 E

Solution.

(方法一, 反证法) 若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 对于等式 $A^2 = A$ 两边同乘 A^{-1}, 则 $A = E$ 与题设矛盾, 故 $|A| \neq 0$

(方法二, 秩) 由于 $A(A-E) = 0 \implies r(A) + r(A-E) \leq n$, 又 $A \neq E, r(A-E) \geq 1$, 故 $r(A) \leq n$, 故 $|A| = 0$

(方法三, 方程组) 由于 $A(A-E) = 0$, 且 $A \neq E$ 可知方程 $AX = 0$ 有非零解即 $(A-E)$ 中的非零列, 故 $r(A) < n, |A| = 0$

(方法四, 特征值与特征向量) 由于 $A(A-E) = 0, A \neq E$, 取 $A - E$ 的非零列向量 $\beta \neq 0, A\beta = 0$ 故由特征值与特征值向量的定义,A 由特征值 0, 而 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ □

总结

若 $AB=0$ 有如下结论

(1) $r(A)+r(B)\leq n$

(2)B 的列向量均为方程 $AX=0$ 的解

(3) 若 $A_{n\times n}$, 则 B 的非零列向量均为 A 的特征值为 0 的特征向量

第十章　矩阵

10.1　求高次幂

Remark. 基本方法

(1) 若 $r(A)=1$, 则 $A^n=tr(A)^{n-1}A$, 关键点在于 $r(A)=1 \implies A=\alpha\beta^T$

(2) 若 A 可以分解为 $E+B$, 且 B 是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{则} B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3=\mathbf{0}$$

$A^n=C_n^nE+C_n^1B+C_n^2B^2$

(3) 分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, A^n=\begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$ 则 $A=P\Lambda P^{-1}$,

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=Pdiag(\lambda_1^n,\dots,\lambda_n^n)P^{-1}$$

1. 设 A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA=O$, 且 $r(B)>1$, 则 $A^n=$____.

Solution. 由 $BA=0$ 知 $r(A)+r(B)\le n$, 又 $r(B)>1, r(A)\ge 1$ 所以 $1\le r(A)\le 1$, $\implies$

$r(A)=1$,

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,&-1,&2\end{pmatrix}$$

$$A^n=tr(A)^{n-1}\alpha\beta^T=9^{n-1}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}$$

□

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\4&1&2\end{pmatrix}$ 则 $A^n=$ ____________.

Solution. $A=2E+B$,$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&0&0\\4&1&0\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$, $B^3=\mathbf{0}$, 则

$$A^n=2^nE+2^{n-1}nB+2^{n-3}n(n-1)B^2$$

□

,

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&2&-1\\-3&6&-3\end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵,$B=P^{-1}AP$, 则 $(B+E)^{100}=$ ____

Solution. $r(A)=1, A^2=tr(A)\cdot A=-2A$ 即 $A^2+2A=\mathbf{0}, (A+E)^2=E$, 由题

$(B+E)^{100}=(P^{-1}AP+E)^{100}=(P^{-1}AP+P^{-1}EP)^{100}=(P^{-1}(A+E)P)^{100}=E$ □

10.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=2A$, 则下列结论不正确的是:

(A) A 可逆 (B) $A-E$ 可逆 (C)$A+E$ 可逆 (D)$A-3E$ 可逆

Solution.

□

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,a, b 为非零常数. 证明:

   (a) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

   (b) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

Solution.

□

总结

$$(1)A_{n\times n}B_{n\times n}=E \implies \begin{cases} \text{可逆} \\ \text{求逆}, B=A^{-1}, A=B^{-1} \\ \text{满足交换律}, AB=BA \end{cases}$$

$$(2)AB\ \text{可交换的充分条件} \begin{cases} B=f(A), A^{-1}, A^* \\ AB=aA+bB(a,b\neq 0) \\ A^2+aAB=E, (a\neq 0) \end{cases}$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3=O$.

(a) 求 a 的值;

(b) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$, 求 X.

Solution.

□

10.3 秩的计算与证明

Remark. 秩

秩的定义:$\exists r$ 阶子式非零且 $\forall r+1$ 阶子式均为零

秩的性质

(1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $r(A) < \min\{m,n\}$

(2) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

(3) $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

(4) $\max\{r(A),r(B)\}\le r(A\mid B)\le r(A)+r(B)$

(5) $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$

(6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,P 为 m 阶可逆矩阵,Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$, 若 $r(A)=m$ 则 $r(CA)=r(C)$

左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times s$ 阶矩阵,$AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\le n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A,B 为 n 阶矩阵,(XY) 表示分块矩阵, 则:

(a) $r(A\ AB)=r(A)$

(b) $r(A\ BA)=r(A)$

(c) $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$

(d) $r(A\ B)=r(A^TB^T)$

Solution.

$\square$

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

Solution.

□

10.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

(1) $AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(5) $(A^T)^* = (A^*)^T$

(6) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(8) $r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D)6

Solution.

□

10. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

    (a) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;

    (b) $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

Solution.

□

10.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

(1) $|E(i,j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$

(2) $E(i,j)^T = E(i,j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$

(3) $E(i,j)^{-1} = E(i,j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k)^{-1}) = E(ij(-k))$

(4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵

(5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 则:

    (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*

    (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 的 B^*

    (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$

    (D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

    Solution.

□

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} =$ ______________.

Solution.

□

第十一章 向量

11.1 知识体系

- 向量 =
  - 基本运算
    - $\alpha+\beta$
    - $k\alpha$
    - $[\alpha,\beta]$
  - 线性表示
    - 定义 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s$
    - 充要条件
      - 非其次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=\beta$有解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,alpha_s) = r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \mid \beta)$
    - 求法 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \mid \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵
  - 线性相关
    - 定义
    - 充要条件
      - 至少有一个向量可以由其余向量线性表示
      - 齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=0$有非零解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) < s$
    - 充分条件
  - 线性无关
    - 定义
    - 充要条件
      - 任意向量都不可以由其余向量线性表示
      - 齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=0$只有零解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) = s$
    - 充分条件
  - 极大无关组与向量组的秩
    - 定义
    - 求法 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形

11.2 线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0\ (km \neq 0)$，则

   (A) α, β 与 α, γ 等价

   (B) α, β 与 β, γ 等价

   (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (D) α 与 γ 等价

   Solution.

□

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1,2,0)^T$, $\alpha_2 = (1,a+2,-3a)^T$, $\alpha_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$, $\beta = (1,3,-3)^T$。当 a,b 为何值时，

(I) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(II) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(III) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

Solution.

□

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$；向量组 (II) $\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价，求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

***Solution*.**

□

11.3 线性相关与线性无关的判定

4. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，则对任意常数 k, l，$\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分又非必要条件

Solution.

□

5. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0, A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2,$ $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

Solution.

□

6. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交，证明 β_1, β_2 线性相关。

Solution.

□

11.4 极大线性无关组的判定与计算

7. 设 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T, \alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T, \alpha_3 = (3,2,-1,a+2)^T, \alpha_4 = (-2,-6,10,a)^T$。

   (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

   (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha = (4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

Solution.

□

8. 证明:

(I) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$;

(II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$。

Solution.

□

11.5 向量空间 (数一专题)

Remark. 向量空间

过度矩阵

由基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)C$ 即 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

坐标转换公式

设向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 中的坐标为 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 在基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 中的坐标为 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ 则坐标转换公式为 $x = Cy$

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$。

   (a) (I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基:

   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

Solution.

□

第十二章　线性方程组

12.1　知识体系

- 线性方程组
  - 解的性质与判定
    - 性质
    - 判定
      - $Ax=0$
        - $Ax=0$只有零解 $\iff r(A)=n$
        - $Ax=0$有非零解 $\iff r(A)<n$
      - $Ax=b$
        - $Ax=b$无解 $\iff r(A)<r(\bar{A}) \iff r(A)=r(\bar{A})-1$
        - $Ax=b$有唯一解 $\iff r(A)=r(\bar{A})=n$
        - $Ax=b$有无穷多解 $\iff r(A)=r(\bar{A})<n$
  - 解的结构
    - $Ax=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
    - $Ax=b$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$
  - 矩阵方程
    - 定义 $AX=B$
    - 判定
      - $AX=B$无解 $\iff r(A)<r(A\mid B)$
      - $AX=B$有唯一解 $\iff r(A)=r(A\mid B)=n$
      - $AX+B$有无穷多解 $\iff r(A)=r(A\mid B)<n$
    - 求法 $(A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵
  - 公共解与同解
    - 公共解
      - 定义
      - 求法
    - 同解
      - 定义
      - 充要条件
        - A,B的行向量组等价
        - $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$

12.2 解的判定

1. (2001, 数三) 设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量, 且 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$, 则线性方程组

(A) $Ax = \alpha$ 有无穷多解

(B) $Ax = \alpha$ 有唯一解

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

Solution.

□

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = m < n$，则下列结论不正确的是

(A) 线性方程组 $A^T x = 0$ 只有零解

(B) 线性方程组 $A^T A x = 0$ 有非零解

(C) $\forall b$，线性方程组 $A^T x = b$ 有唯一解

(D) $\forall b$，线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

Solution.

□

12.3 求齐次线性方程组的基础解系与通解

3. (2011, 数一, 二) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶矩阵, $(1,0,1,0)^T$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

(A) α_1,α_2

(B) α_1,α_3

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

Solution.

□

4. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a, b, c), a, b, c 不全为零, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ 满足 $AB = O$，求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解。

***Solution*.**

□

5. (2002, 数三) 设线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n &= 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n &= 0 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + \cdots + bx_n &= 0 \\ \vdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n &= 0 \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$。当 a, b 为何值时，方程组只有零解、有非零解，当方程组有非零解时，求其通解。

Solution.

□

12.4 求非齐次线性方程组的通解

6. 设 A 为 4 阶矩阵, k 为任意常数, η_1, η_2, η_3 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解, 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

若 $r(A) = 3$ 则 $Ax = b$ 的通解为 ()

$(A) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(B) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(C) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(D) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution.

□

7. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 其中 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$。

   (I) 证明 $r(A) = 2$;

   (II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

Solution.

□

8. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, 线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解.

(I) 求 λ, a 的值;

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解。

Solution.

□

9. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = r$, 若 $\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{n-r}$ 为齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系,η 为非其次线性方程组 $Ax = b$ 的特解, 证明:

(I) $\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关

(II) $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \cdots, \eta + \xi_{n-r}$ 线性无关;

(III) $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \cdots, \eta + \xi_{n-r}$ 为 $Ax = b$ 所有解的极大线性无关组。

Solution.

□

12.5 解矩阵方程

10. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$ 矩阵 X 满足 $AX+E=A^{2022}+2X$，求矩阵 X。

Solution.

□

11. (例 4.11) (2014, 数一、二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(a) (I) 求线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(b) (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B。

Solution.

□

12.6 公共解的判定与计算

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$(II)x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

Solution.

$\square$

13. 设齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为 $\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T$, $\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解，并求所有非零公共解。

Solution.

□

14. (2005, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解，求 a, b, c 的值。

Solution.

□

第十三章　特征值与特征向量

13.1　特征值与特征向量的计算

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

2. (2003, 数一) 设

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&3\\3&2&0\\2&0&1\end{pmatrix},\quad B=P^{-1}A^*P$$

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&4&-2\\1&-2&a\end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2 = O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

   (a) (A) 0

   (b) (B) 1

   (c) (C) 2

   (d) (D) 3

Solution. 【详解】 □

5. 设 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$，其中 α, β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta = \frac{1}{3}$，证明：

   (a) (I) 0 为 A 的特征值；

   (b) (II) $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 为 A 的特征向量；

   (c) (III) A 可相似对角化。

Solution. 【详解】 □

13.2 相似的判定与计算

6. (2019, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(I) 求 x, y 的值；(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$。

Solution. 【详解】 □

7. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，满足 $A^2 = 2E$，则 $|AB + A - B - E| =$ ________。

Solution. 【详解】 □

13.3 相似对角化的判定与计算

8. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 3, -2，对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若

$$P = (\alpha_1, 2\alpha_2, -\alpha_3)$$

则 $P^{-1}AP =$ ______________。

Solution. 【详解】 □

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明 A 可相似对角化。

Solution. 【详解】 □

10. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。
    (a) (I) 证明 P 为可逆矩阵；
    (b) (II) 若 $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution. 【详解】 □

13.4 实对称矩阵的计算

11. (2010, 数二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ 4 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)^T$，求 a, Q。

Solution. 【详解】 □

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O$，A 的各行元素之和均为零，且 $r(A) = 2$。

(a) (I) 求 A 的特征值与特征向量;

(b) (II) 求矩阵 A。

Solution.【详解】 □

第十四章　二次型

14.1　求二次型的标准形

1. (2016，数二、三) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

   (a) $a>1$

   (b) $a<-1$

   (c) $-1<a<1$

   (d) $a=1$ 或 $a=-1$

   Solution. 【详解】 □

2. (2022，数一) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$。

   (a) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

   (b) 求正交变换 $x=Qy$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

   (c) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

   Solution. 【详解】 □

3. (2020，数一、三) 设二次型 $f(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=y_1^2+by_2^2$，其中 $b\geq 0$。

   (a) 求 a,b 的值；

   (b) 求正交矩阵 Q。

   Solution. 【详解】 □

14.2 合同的判定

4. (2008，数二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，与 A 合同的矩阵是

   (a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

   Solution.【详解】 □

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

   (a) $PAP=B$;

   (b) $P^{-1}ABP=BA$;

   (c) $P^{-1}AP=B$;

   (d) $P^{T}AP=B$。

   成立的个数是

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

   Solution.【详解】 □

14.3 二次型正定与正定矩阵的判定

6. (2017，数一、二、三) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，且 $r(A) = n$，则下列结论

   (a) $A^T A$ 与单位矩阵等价；

   (b) $A^T A$ 与对角矩阵相似；

   (c) $A^T A$ 与单位矩阵合同；

   (d) $A^T A$ 正定。

   正确的个数是

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

   Solution. 【详解】 □

7. 证明：

   (a) 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则 $A - B^2$ 为正定矩阵；

   (b) 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 $r(A + B) = n$，则 $A^T A + B^T B$ 为正定矩阵。

   Solution. 【详解】 □

第十五章　事件与概率论

15.1　事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的集合
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

Remark. (事件的运算律)

(1)　交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2)　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup A, A(BC) = (AB)C$

(3)　分配律　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

(4)　摩根律　$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \bar{(}AB) = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5)　吸收律　$A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,$P(A \cup B) = 1$, 则

$$(A)\ A \cup B = \Omega \quad (B)\ AB = \varnothing \quad (C)\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 \quad (D)\ P(A - B) = 0$$

Solution. 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$

注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确

对于 (C) 选项 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{AB}) = 1$ 正确

对于 (D) 选项, 由减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$ □

总结

(1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件

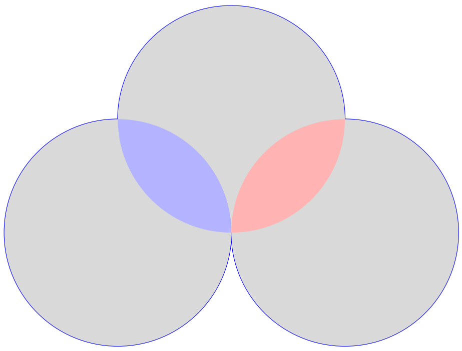
(2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件

这两个结论考虑连续型随机变量即可

2. (2020, 数一、三) 设 A, B, C 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,$P(AB) = 0$,$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 只有一个事件发生的概率为

$$(A)\ \frac{3}{4} \quad (B)\ \frac{2}{3} \quad (C)\ \frac{1}{2} \quad (D)\ \frac{5}{12}$$

Solution. 这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ □

3. 设随机事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 且 $0 < P(A) < 1$,$0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$ ______

Solution. 根据结论, 有 A, B 互斥, 则 $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$ □

Corollary 15.1.1. 若 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 A, B 必然对立

Proof.

$$\begin{aligned} &AB = \bar{A}\bar{B} \\ \iff\ & AB \cup \bar{A}B = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \\ \iff\ & (A \cup \bar{A})B = \bar{A}(\bar{B} \cup B) \\ \iff\ & B = \bar{A} \end{aligned}$$

□

4. 设随机事件 A, B, C 两两独立, 满足 $ABC = \varnothing$, 且 $P(A) = P(B) = P(C)$,A, B, C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$

Solution. 由题意有 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 由加法公式与独立性有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) \\ &\quad - P(A)P(C) - P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

由 $P(A) = P(B) = P(C)$, 上式化为 $3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \implies P(A) = \frac{1}{4}$或$P(A) = \frac{3}{4}$, 显然 $P(A) \neq \frac{3}{4} > P(A \cup B \cup C)$, 故 $P(A) = \frac{1}{4}$ □

5. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{2}{3}$,$P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A|B) + P(B|A)$ 的最大值为 ____, 最小值为 ____.

Solution. 关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于 $[0, 1]$ 之间, 事件 AB 的和事件不可能小于单独 A,B 发生概率之和, 事件 AB 的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A) + P(B) - 1 <= P(AB) \leq \min(P(A), P(B)) \leq P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)$$

□

15.2 三大概型的计算

Remark. 三大概率模型

经典概型 – 有限个等可能的样本点, 排列组合问题

几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等

伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为 p, 不成功的概率为 $(1 - p)$

6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

Solution. (古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{3}}{3^4} = \frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序. □

7. 在区间 $(0,a)$ 中随机地取两个数, 则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为

Solution. (几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4}\cdot a+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\frac{a^2}{4x}dx}{a^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

□

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为 p, 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

Solution. 失败零次–p^5, 失败一次–$\binom{1}{5}p^4(1-p)p$, 失败两次–$\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$

故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5+\binom{1}{5}p^4(1-p)p+\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

□

15.3 三大概率公式的计算

Remark. 三大概率公式

条件概率公式 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

推论 $P(AB)=P(B)P(A\mid B), P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid P(A_1))P(A_3|P(A_1A_2))\dots$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^n P(AB_i)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A\mid B_i)$

贝叶斯公式 $P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$

若称 $P(B_j)$ 为 B_j 的先验概率, 称 $P(B_j\mid A)$ 为 B_j 的后验概率. 则贝叶斯公式专门用于计算后验概率的公式.

9. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A\cup B)=0.6$,$P(B|\bar{A})=0.2$, 则 $P(A)=$ ____

Solution.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6, P(B\mid\bar{A})=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.2$$

联立有

$$\frac{0.6-P(A)}{1-P(A)}=0.2$$

, 则 $P(A)=0.5$

□

10. (2018, 数一) 设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立, 满足 $BC=\varnothing$, 且

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$____.

Solution.

$$\begin{aligned}P(AC|AB\cup C)&=\frac{P(AC)}{P(AB\cup C)}\\&=\frac{P(A)P(C)}{P(AB)+P(C)}\\&=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

则 $P(C)=\frac{1}{4}$ □

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

(1) 求乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

Solution. (作为小题来考还可以)

方法一: 用概率

(1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3}$

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

则所求数学期望 $EX=\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+\frac{3}{20}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(A\mid x=k)\\&=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

方法二: 超几何分布

(1) $X \sim H(N,M,n), N=6, M=3, n=3$, 则 $EX = \frac{nM}{N} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)P(A \mid x=k) \\ &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k)\frac{k}{6} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3} P(X=k)k \\ &= \frac{1}{6}EX \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

15.4 事件独立的判定

Remark. (事件独立的充要条件)

$$\begin{aligned} &P(AB) = P(A)P(B) \\ &\iff P(A \mid B) = P(A) \\ &\iff P(A \mid \bar{B}) = P(A) \iff P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1) \\ &\iff A \text{ 与 } \bar{B}, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } B, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } \bar{B} \text{ 相互独立} \\ &\iff P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1 \end{aligned}$$

12. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 则

(A) 若 $A \supset B$, 则 A, B 一定不相互独立

(B) 若 $B \supset A$, 则 A, B 一定不相互独立

(C) 若 $AB = \varnothing$, 则 A, B 一定不相互独立

(D) 若 $A = \bar{B}$, 则 A, B 一定不相互独立

Solution. (A)(B)(C) 考虑 $\varnothing$ 则都不对

(D) 由于 A 不是必然事件, 则 B 不是不可能事件, 则 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 根据下面的总结 A, B 一定不独立 $\square$

总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

A, B 互不相容, 则 A, B 一定不独立

A, B 独立, 则 A, B 一定不互不相容

13. 设 A, B, C 为随机事件,A 与 B 相互独立, 且 $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

(A)相互独立 (B)两两独立, 但不一定相互独立

(C)不一定两两独立 (D)一定不两两独立

Solution. 由 $P(C) = 0$ 知 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立. $\square$

两两独立与相互独立

$$\text{相互独立}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{array}\right\} \quad \text{两两独立} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array}\right.$$

第十六章　一维随机变量

16.1　分布函数的判定与计算

Remark. (分布函数的性质)

(1) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

(2) (单调不减) 当 $x_1 < x_2$ 时,$F(x_1) < F(x_2)$

(3) (右连续) $F(x+0) = F(x)$

上面三个性质为分布函数的定义, 只要满足上述性质的函数一定是某一个概率分布的分布函数

(4) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$

(5) $P\{X < x\} = F(x-0), P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$

$P\{a \le x \le b\} = P\{x \le b\} - P\{x < a\} = F(b) - F(a-0)$

$P\{a < x < b\} = P\{x < b\} - P\{x \le a\} = F(b-0) - F(a)$

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,a, b 为任意常数, 则下列一定不是分布函数的是

$$(A)\ F(ax+b) \quad (B)\ F(ax^2+b) \quad (C)\ F(ax^3+b) \quad (D)\ 1-F(-x)$$

总结

对于 $F(ax+b), F(ax^3+b), \ldots$ 只要 $a > 0$ 则这些函数都是分布函数

对于 $F(a^2x+b), F(a^4+b), \ldots$ 都一定不是分布函数

对于 $G(x) = 1 - F(-x)$

若 X 是连续性随机变量则是, 否则不是 ($F(x)$ 不满足左连续, 则 $G(x)$ 不满足右连续)

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 X 的分布函数 $F(x)=$____,$P\{-2<X<\frac{1}{4}\}=$____.

Solution.

(方法一变限积分)

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0\leq x<1\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

根据 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$，有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -1\\ \int_{-1}^{x}(1+t)\,\mathrm{d}t, & -1<x<0\\ \int_{-1}^{0}(1+t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\,\mathrm{d}t, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\leq -1\\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P\{-2<X<\frac{1}{4}\}&=F(\frac{1}{4})-F(-2)\\&=\int_{-2}^{\frac{1}{4}}f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{23}{32}\end{aligned}$$

(方法二定积分)

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}C_1, & x<-1\\ x+\frac{x^2}{2}+C_2, & -1\le x<0\\ x-\frac{x^2}{2}+C_3, & 0\le x<1\\ C_4, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\xlongequal{\text{由分布函数的定义}}\begin{cases}0, & x\le -1\\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

□

16.2 概率密度的判定与计算

Remark. (概率密度的性质)

(1) $f(x)\ge 0, -\infty<x+\infty$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$

上面两条性质为概率密度的定义, 任何满足上面的函数都是某个概率的概率密度函数

(3) $P\{a<X\le b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

推广 $P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(4) 在 $f(x)$ 连续点处有 $F'(x)=f(x)$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则下列必为概率密度的是

$$(A)\ f(-x+1)\quad (B)\ f(2x-1)\quad (C)\ f(-2x+1)\quad (D)\ f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

Solution. 由于 $f(x)$ 已经满足非负性, 故选项的非负性都不需要考虑, 只需要考虑正则性就可以.

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x+1)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du=1$

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$

(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{1}{2}-1)dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 2$ $\square$

总结

$f(ax+b)$ 为概率密度 $\iff$ $|a|=1$

4. (2011, 数一、三) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为分布函数, 对应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 为连续函数, 则下列必为概率密度的是

$$(A)\ f_1(x)f_2(x) \quad (B)\ 2f_2(x)F_1(x) \quad (C)\ f_1(x)F_2(x) \quad (D)\ f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$$

总结

(1) 线性组合

$af_1(x)+bf_2(x), a>0, b>0$ 为概率密度 $\iff$ $a+b=1$

$aF_1(x)+bF_2(x), a>0, b>0$ 为分布函数 $\iff$ $a+b=1$

(2) 乘积

F_1F_2 一定是分布函数

f_1f_2 不一定是概率论密度

(3) 混搭

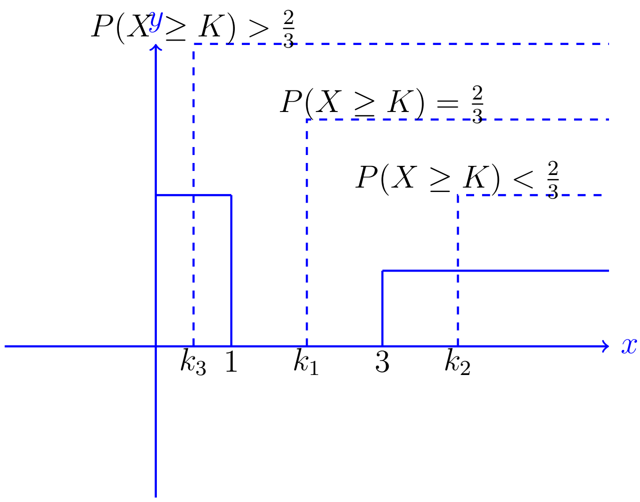
$f_1F_2+f_2F_1, 2f_1F_1, 2f_2F_2$ 是概率密度, 其余都不是.

5. (2000, 三) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1]\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若 $P\{X\geq k\}=\frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是 ____.

Solution. 如图所示, 当且仅当 $1\leq k\leq 3$ 时候 $P(X\geq k)=\frac{2}{3}$ □



16.3 关于八大分布

Remark. (八大分布的概率分布与数字特征)

(1) 0-1 分布, $X\sim B(1,p)$ $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1\\ \hline P & 1-p & p\end{array}$, $EX=p, DX=p(1-p)$

(2) 二项分布,$X\sim B(n,p)$

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\ldots,n,EX=np, DX=np(1-p)$

(3) 泊松分布,$X\sim P(\lambda)$

$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots, EX=\lambda, DX=\lambda$

(4) 几何分布,$X\sim G(p)$

$P=\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots, EX=\frac{1}{p}, DX=\frac{1-p}{p^2}$

(5) 超几何分布,$X \sim H(N,M,n)$

$P=\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,\ldots,min(n,M), EX=\frac{nM}{N}$

(6) 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}, F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b\end{cases}, EX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(7) 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0\end{cases}, \lambda>0\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0\end{cases}, EX=\frac{1}{\lambda}, DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

(8) 一般正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2), EX=\mu, DX=\sigma^2$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, F(\mu)=\frac{1}{2}, F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

标准正态分布 $X \sim N(0,1)$ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \Phi(0)=\frac{1}{2}, \Phi(-x)=1-\Phi(x)$

正态分布的标准化若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

拓展-负二项分布

在一系列独立重复的伯努利试验 (每次试验只有“成功”或“失败”两种结果, 成功概率为 p) 中, 达到 r 次成功所需的试验总次数 X 服从负二项分布。

$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,r+2,\ldots,\quad EX=\frac{r}{p},\quad DX=\frac{r(1-p)}{p^2}$

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C\frac{\lambda^k}{k!}, k=1,2,\cdots$, 则 $C=$____.

Solution.

(方法一: 级数) 由概率的规范性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} C\frac{\lambda^k}{k!}=1$, 由于 $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 故 $C(e^\lambda-1)=1$, 故 $C=\frac{1}{e^\lambda-1}$

(方法二: 泊松分布) 考虑泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots$ □

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}$, 且 $EX=DX$, 则 $A=$__,$B=$__.

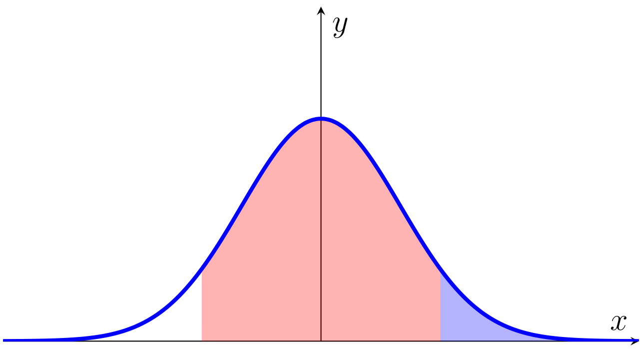
Solution. $f(x)=Ae^{\frac{B^2}{2}}e^{-\frac{(x-B)^2}{2}} \sim N(1,B^2)$, 又 $D(x)=E(x)$ 故 $B^2=1$, 对比正态分布的概率密度函数有 $Ae^{\frac{B^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 故 $A=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ □

总结

形如 $f(x)=Ae^{ax^2+b+c}, a<0$ 一定可以化成某一个正态分布的概率密度.

8. (2004, 数一、三) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$。若 $P\{|X|<x\}=\alpha$, 则 x 等于

$$(A)\ u_{\frac{\alpha}{2}}\quad (B)\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}\quad (C)\ u_{\frac{1-\alpha}{2}}\quad (D)\ u_{1-\alpha}$$



Solution. 如图所示,x 右侧的面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$ 故 x 是 $\frac{1-\alpha}{2}$ 上侧分位点 □

9. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$, 且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$____.

Solution. 正态分布的基本套路就是遇事不决标准化 $P\{2<X<4\}=P\{0<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{2}{\sigma}\}=0.3$, 故 $P\{X<0\}=P\{\frac{X-2}{\sigma}<\frac{-2}{\sigma}\}=\frac{1}{2}-0.3=0.2$ □

10. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu<0)$,$F(x)$ 为其分布函数,a 为任意常数, 则

$$(A)\ F(a)+F(-a)>1\quad (B)\ F(a)+F(-a)=1$$
$$(C)\ F(a)+F(-a)<1\quad (D)\ F(\mu+a)+F(\mu-a)=\frac{1}{2}$$

Solution. 这道题是比较隐晦的考察了正态分布的对称性, 具体直接看总结. 但要注意先标准化再套结论! □

$$\Phi(a)+\Phi(b)=\begin{cases}1, & a+b=1\\ <1, & a+b<1\\ >1, & a+b>1\end{cases}$$

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 1 的指数分布, 则 $P\{1 < \max\{X,Y\} < 2\} =$____.

Solution.

$$\begin{aligned} P\{1 < \max\{X,Y\} < 2\} &= P\{\max\{X,Y\} < 2\} - P\{\max\{X,Y\} \leq 1\} \\ &= P\{X < 2, Y < 2\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\ &\xlongequal{\text{由独立性}} P\{X < 2\}P\{Y < 2\} - P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} \\ &= (1 - e^{-2\lambda})^2 - (1 - e^{-\lambda})^2 \end{aligned}$$

□

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{1 < \min\{X,Y\} < 2\} =$____.

Solution.

$$\begin{aligned} P\{1 < \min\{X,Y\} < 2\} &= P\{\min\{X,Y\} > 1\} - P\{\min\{X,Y\} \geq 2\} \\ &= P\{X > 1\}P\{Y > 1\} - P\{X \geq 2\}P\{Y \geq 2\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

总结

对于 min 和 max 问题基本按照如下思路:

$$\begin{aligned} &P\{a < \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) < b\} \\ &= P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > a\} - P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P\{a < \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) < b\} \\ &= P\{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) < b\} - P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq a\} \end{aligned}$$

13. (2013, 数一) 设随机变量 $Y \sim E(1)$,$a > 0$, 则 $P\{Y \leq a + 1 | Y > a\} =$____.

Solution. 由指数分布的无记忆性, 有 $P\{Y \le a+1|Y > a\} = P\{0 < Y < 1\} = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$ □

14. 设随机变量 $X \sim G(p)$,m,n 为正整数, 则 $P\{X > m+n|X > m\}$

(A) 与 m 无关, 与 n 有关, 且随 n 的增大而减少

(B) 与 m 无关, 与 n 有关, 且随 n 的增大而增大

(C) 与 n 无关, 与 m 有关, 且随 m 的增大而减少

(D) 与 n 无关, 与 m 有关, 且随 m 的增大而增大

Solution. 由几何分布的无记忆性, 有 $P\{X > m+n|X > m\} = P\{X > n\} = \sum_{i=n+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$, 故随着 n 增大概率反而减少 □

总结

指数分布与几何分布具有无记忆性

$$X \sim E(\lambda)$$

$$P\{x > s+t \mid x > s\} = P\{x > t\}$$

$$P\{x < s+t \mid x > s\} = P\{0 < x < t\}$$

$$X \sim G(p)$$

$$P\{x > n+m \mid x > m\} = P\{x > t\}$$

$$P\{x = n+m \mid x = m\} = P\{x = n\} = p(1-p)^{n-1}$$

16.4 求一维连续型随机变量函数的分布

Remark. 【方法】

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 求 $Y = g(X)$ 的分布.

分布函数法

(1) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$.

(2) 求 $Y = g(X)$ 在 X 的正概率密度区间的值域 (α, β) , 讨论 y .

当 $y < \alpha$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $\alpha \le y < \beta$ 时, $F_Y(y) = \int_{g(x) \le y} f_X(x)\, dx$;

当 $y \ge \beta$ 时, $F_Y(y) = 1$.

(3) 若 Y 为连续型随机变量, 则 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

公式法

设 $y = g(x)$ 在 X 的正概率密度区间单调, 值域为 (α, β) , 反函数为 $x = h(y)$, 则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|\, , \alpha < y < \beta \\ \qquad\qquad 0, \end{cases}$$

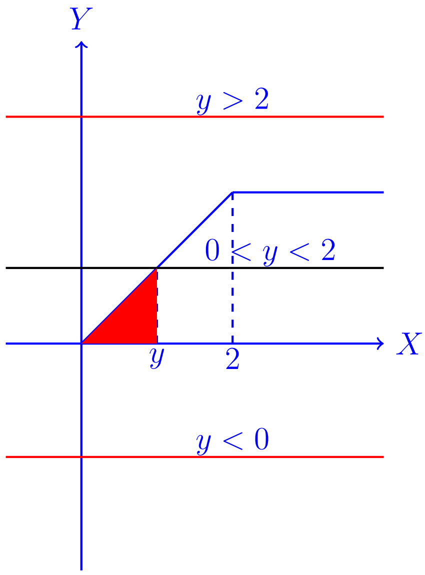
若 $y = g(x)$ 在 X 的正概率密度区间 $[a, b]$ 分段严格单调, 则分段运用公式法, 然后将概率密度相加.

15. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数

(A) 为连续函数　　(B) 为阶梯函数

(C) 至少有两个间断点　　(D) 恰好有一个间断点

Solution. 这是一道比较简单的题目, 主要是用于演示所谓图像法讨论 **y** 的具体操作, 注意画的是 $X - Y$ 图像



故 $F_Y(y) = \min\{X, 2\} < y$, 当 $y < 0$ 时候 $F_Y(y) = 0$,$y \geq 2$,$F_Y(y) = 1$, 当 $0 \leq y < 2$ 时候, 有 $\int_0^y f(x)dx = 1 - e^{-\lambda y}$, 综上

$$F_Y = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

容易发现 $F(2-0) \neq 1$ 故存在一个跳跃间断点 $\square$

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$

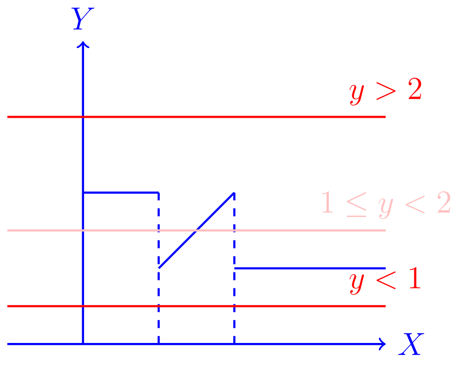
(a) 求 Y 的分布函数;

(b) 求 $P\{X \leq Y\}$.

Solution. 带参数的概率密度第一步就应该根据正则性把这个参数求出来.

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \implies a = 9$$

然后和上一题一样画 $X - Y$ 图像, 求 $F_Y(y)$, 注意分区域就是.



当 $y<1, F_Y(y)=0; y>2, F_Y(y)=1$

$1\le y<2, F_Y(y)=\int_1^y f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\frac{y^3}{27}+\frac{2}{3}$ □

17. (2021, 数一、三) 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X, 较长一段的长度记为 Y。

 (a) 求 X 的概率密度;

 (b) 求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度;

 (c) 求 $E\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Solution. 有题设容易得到 $X\sim U(0,1), Y=2-X$

(1) 则 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $Z=\frac{Y}{X}=\frac{2}{X}-1$, 显然 Z 关于 X 是单调的, 可以用公式法直接求出 $f_Z(z)$, 即

$$f_Z(z)=1\cdot\frac{2}{(y+1)^2}=\frac{2}{(y+1)^2}, z\in(1,+\infty)$$

(3)

$$E(Z)=\int_1^{\infty} zf_Z(z)dz=2\ln 2-1$$

或者也可以用

$$E(\frac{2}{x}-1)=\int_0^1(\frac{2}{x}-1)dx=2\ln(2)-1$$

□

第十七章　二维随机变量

17.1　联合分布函数的计算

Remark. (联合分布函数的性质)

(1) $0 \le F(x,y) \le 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均右连续

(4) $P\{a < X \le b, c < Y \le b\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

(5) $F_X(x) = F(x,+\infty), F_Y(y) = F(+\infty,y)$

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim B(1,p)$,$Y \sim E(\lambda)$, 则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =$___.

Solution. 由 X 和 Y 相互独立, 则有 $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), f(x,y) = f_X(x)F_Y(x)$,$X$ 的概率分布如下:

X	0	1
P	$1-p$	p

则 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

而 $Y \sim E(\lambda)$, 故

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} (1-p)(1-e^{-\lambda y}), & 0 \le x < 1,\ y > 0 \\ 1-e^{-\lambda y}, & x \ge 1,\ y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

17.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。

   (a) 求在 $X+Y=n(n \ge 2)$ 的条件下,X 的条件概率分布;

   (b) 求 $P\{X+Y \ge n\}(n \ge 2)$.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned} P\{X+Y=n\} &\xlongequal{\text{几何分布从 1 开始}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X=k, Y=n-k\} \\ &\xlongequal{\text{独立性}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p \cdot (1-p)^{n-k-1}p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2}p^2 \\ &= (n-1)(1-p)^{n-2}p^2 \end{aligned}$$

在 $X+Y=n$ 的条件下,X 的条件概率为

$$\begin{aligned} P\{X=k \mid X+Y=n\} &= \frac{P\{X=k, Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-2} \end{aligned}$$

$k=1,2\ldots n-1$这个范围千万别忘喽!

(2)

$$\begin{aligned}
P\{X+Y\geq n\} &= P\{X+Y=n\}+P\{X+Y=n+1\}+\dots \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} P\{X+Y=k\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}
\end{aligned}$$

不妨先计算级数 $\sum_{k=n}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty}(k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=n}^{\infty}(x^{k-1})' \\
&= \left(\frac{\sum_{n=k}^{\infty}}{x}\right)' \\
&= \frac{(n-1)x^{n-2}(1-x)+x^{n-1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

故当 $x=1-p$ 的时有

$$\begin{aligned}
P\{X+Y\geq n\} &= p^2\frac{(n-1)(1-p)^{n-2}p+(1-p)^{n-1}}{p^2} \\
&= (1-p)^{n-2}(np-2p+1)
\end{aligned}$$

□

17.3 二维连续型随机变量分布的计算

Remark. 主要内容

联合概率密度的性质

(1) $f(x,y)\geq 0, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$;

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy$;

(4) 在 $f(x,y)$ 的连续点处有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

边缘概率密度

(1) (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

(2) (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

条件概率密度

(1) 在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

(2) 在 $X=x$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

3. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution.

(方法一正常求) 首先通过规范性求出参数 A

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{Possion 积分}} A\pi=1 \implies A=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, x\in\mathbf{R}\end{aligned}$$

则在 $X=x$ 的条件下,Y 的条件概率为

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y\mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}\end{aligned}$$

(方法二, 通过二维正态分布) 形如 $f(x,y)=Ae^{ax^2+bxy+cy^2}$ 的函数如果是概率密度, 则其一定是某个二维正态的概率密度函数, 故

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$$

通过下一节讲的确定系数的办法, 可以很快的确定

$$(X,Y)\sim N(0,0;\frac{1}{2},1;\frac{\sqrt{2}}{2})$$

故 $A=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\pi}, f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ □

4. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 $Y\sim U(x,1)$。

   (a) 求 (X,Y) 的联合概率密度;

   (b) 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

   (c) 求 $P\{X+Y>1\}$.

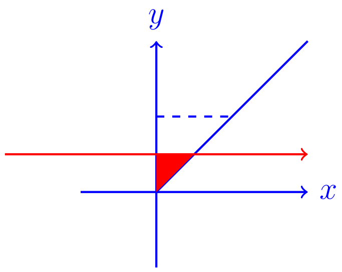
Solution.

(1) 在 $X=x$ 的条件下,Y 的条件概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

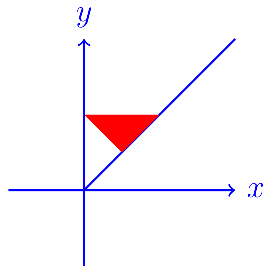
故 $f(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & 0<x<1, x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) 通过概率密度求边缘密度的时候, 需要画出 x-y 图, 并且确定要求的那个参数的范围, 比如说这里是 $y\in(0,1)$, 让后再从 [0,1] 上面去做偏积分, 具体如图所示



$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3) 根据性质 (3) 有 $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 此时 x-y 的可行范围为



$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{1/2}^{1} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{y} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^{1} [\ln y - \ln(1-y)]\, \mathrm{d}y \\
&= [y \ln y - (1-y)\ln(1-y)] \Big|_{1/2}^{1} \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

□

17.4 关于二维正态分布

Remark. 二维正态分布的性质 设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$, 则

(1) $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, 反之不成立 (独立的时候反之成立);

(2) X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关 $(\rho = 0)$;

(3) $aX + bY \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2\right)$; 特别地, 若 X 与 Y 相互独立, $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, 则 $aX + bY \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)$;

(4) 若 $U = aX + bY, V = cX + dY$, 即 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 则 (U,V) 服从二维正态分布 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

5. 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,2;1,4;-\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 (a,b) 可以为

$$(A)\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right) \quad (B)\ \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right) \quad (C)\ \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \quad (D)\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Solution. 由性质 (3) 可知 $aX+bY \sim N$, 而由正态分布的对称性可知,$\mu = 1 \implies a+2b = 1$ 故选择 (D) □

6. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

$$(A)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y) \quad (B)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\ (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \quad (D)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$$

Solution. 这道题选择出来并不困难, 但要证明其与 X 相互独立还是有点说法的.

第一步, 先求 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的标准化

由性质三可知 $X+Y \sim N(0,3), X-Y \sim N(0,7)$, 故 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ sin $N(0,1)$; $\frac{\sqrt{7}}{7} \sim N(0,1)$;

这里其时就已经可以选出答案喽

第二步证明独立性

考虑 $(X+Y,X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

由性质 (4) 可知,$(X+Y,X)$ 服从二维正态分布, 由性质 (2) 可知, 只需要证明二者的相关系数为 0 即可, 证明二者独立.

□

7. (2022, 数一) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ \frac{1}{4} \quad (B)\ \frac{1}{2} \quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution.

(方法一传统方法计算)

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

问题转换为求 EXY, DY, 由题设可知, 在 $X=x$ 的条件下,Y 的概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$$

故 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$$

故 y 的边缘分布函数为

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$$

即 $Y \sim N(0,2)$, 故 $EY=0, DY=2$ 而 EXY 根据方差的定义可以计算

TODO: 计算 EXY

$$EXY=\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

故 $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 通过二维正态参数的结论直接求出 ρ, 由上述可知 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$, 对比二维正态概率密度的公式

$$f(x,y)=\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2^2}\right]\}$$

容易得出 $(X,Y)\sim N(0,0;1,2;\frac{\sqrt{2}}{2})$, 具体如总结所示. □

总结

对于形如 $Ae^{-ax^2+bxy+cy^2}$ 的式子, 若其是概率密度, 则必然是某个二维正态的概率密度 (由规范性) 且满足

(1) $b^2=4\rho^2a^2c^2 \implies \rho^2=\frac{b^2}{4a^2c^2}$

(2) rho 的符号与 xy 系数的符号一致

17.5 求二维离散型随机变量函数的分布

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim P(\lambda_1)$,$Y \sim P(\lambda_2)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布.

Solution. 这道题是参数可加性的直接考察, 可以先证明一下

$$
\begin{aligned}
P\{Z=n\} &= P\{X+Y=n\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\} \\
&\xlongequal{\text{独立性}} \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&\xlongequal{\text{上下同乘}k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&\xlongequal{\text{二项式定理}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}
$$

□

参数可加性

当 X, Y 独立的时候

(1) $X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p) \implies X+Y \sim B(n+m,p)$

(2) $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \implies X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

(3) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \implies X+Y \sim (\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

(4) $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), \implies X+Y \sim \chi^2(n+m)$

(5) $X \sim E(\lambda_1), Y \sim E(\lambda_2) \implies \min(X,Y) \sim E(\lambda_1+\lambda_2)$

17.6 求二维连续型随机变量函数的分布

Remark. 问题描述

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 求 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

分布函数法

(1) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$, 则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$.

(2) 求 $Z=g(X,Y)$ 在 (X,Y) 的正概率密度区域的值域 (α,β) , 讨论 z .

$z<\alpha$ 时, $F_Z(z)=0$;

当 $\alpha\le z<\beta$ 时, $F_Z(z)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy$;

当 $z\ge\beta$ 时, $F_Z(z)=1$.

(3) Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

卷积公式

(1) 设 $Z=aX+bY$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|b|}f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$;

(2) 设 $Z=XY$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$;

(3) 设 $Z=\frac{Y}{X}$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)\,dx$;

(4) 设 $Z=\frac{X}{Y}$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求:

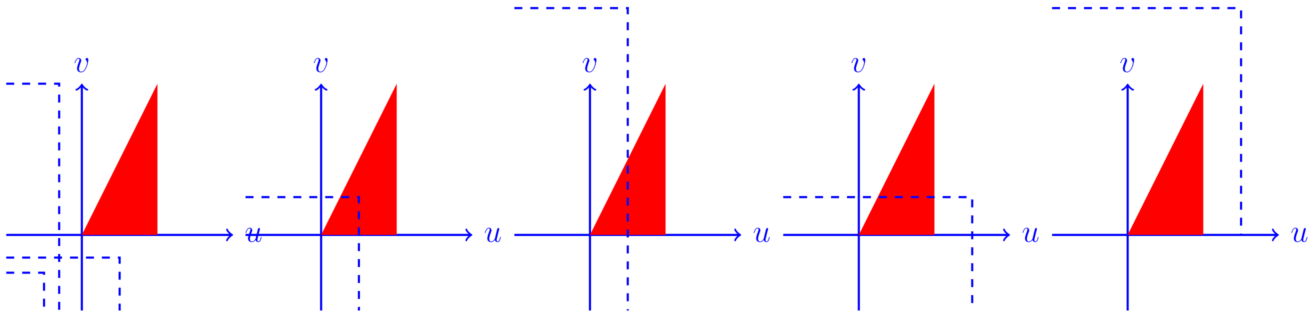
(a) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(b) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

(c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y),f_{Y|X}(y|x)$;

(d) $P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X\le\frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{Y\le\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\right\}$;

(e) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.



Solution.

(1) 由定义可知 $F(x,y)=\int_{-\infty} x\int_{-\infty} y f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 x,y 的可行域如下图所示, 分为五个部分故

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y \mathrm{d}v\int_{\frac{v}{2}}^x \mathrm{d}u, & 0<x<1,0<y<2x\\ \int_0^x \mathrm{d}u\int_0^{2u}\mathrm{d}v, & 0<x<1,y\ge 2x\\ \int_0^y \mathrm{d}v\int_{\frac{v}{2}}^1 \mathrm{d}u, & x>1,0<y<2\\ 1, & x\ge 1,y\ge 2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{y^2}{4}-xy, & 0<x<1,0<y<2x\\ x^2, & 0<x<1,y\ge 2x\\ y-\frac{y^2}{4}, & x>1,0<y<2\\ 1, & x\ge 1,y\ge 2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 由定义可知

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) 当0<x<1在 $X=x$ 的条件下,Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当0<y<2在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2}<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4) 对于 $P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X \le \frac{1}{2}\right\}$ 可以采用条件概率公式,

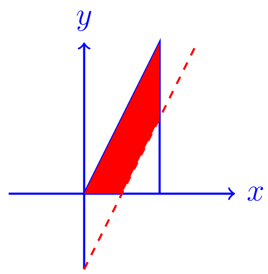
$$P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X \le \frac{1}{2}\right\} = \frac{\iint\limits_{y\le\frac{1}{2},x\le\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x)\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$$

而对于 $P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X = \frac{1}{2}\right\}$ 则不能采用条件概率公式, 因为 $P\{X = \frac{1}{2}\} = 0$ 不能做分母, 此时就体现出来条件概率的用处

$$P\left\{Y \le \frac{1}{2}|X = \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y \mid x)\mathrm{d}y$$

将 $X = \frac{1}{2}$ 带入, 求出该条件概率为 $\frac{1}{2}$

(5) 方法一: 分布函数法



$F_Z(z) = P\{2X - Y \ge Z\} = \iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 绘制 $y \ge 2x - z$, 讨论截距, 如图所示, 其结果如下

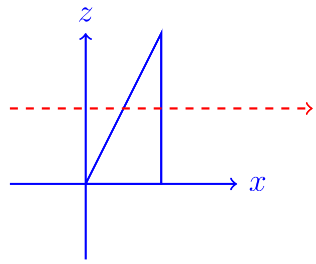
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}$$

方法二: 卷积公式

由卷积公式有 $f_Z(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z)dx$, 此时把 $f(x,y)$ 中的 y 全部转换为 z 并确定 z 的取值范围即

$$f(x, 2x - z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x \implies, 0 < x < 1, 0 < z < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

此时再对 x 进行偏积分即可, 绘制 $x - z$ 图像, 首先确认 z 的范围, 再从 z 上对 x 进行积分



如图, 最终

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 \le z < 2; \\ 0, & □□ \end{cases}$$

□

17.7 求一离散一连续随机变量函数的分布

10. (2020, 数一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,X_1 与 X_2 均服从标准正态分布,X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$,$Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$。

    (1) 求 (X_1, Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);

    (2) 证明 Y 服从标准正态分布.

Solution. 一离散加一连续的基本方法就是" 全概率公式 + 独立性"

(1)

$$\begin{aligned} F(X_1, Y) &= P\{X \le x, Y \le y\} \\ &= P\{X_1 \le x, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \le y\} \\ &\xlongequal{\text{全概率公式}} P\{X_1 \le x, X_2 \le y, X_3 = 0\} + P\{X_1 \le x, X_1 \le y, X_3 = 1\} \\ &\xlongequal{\text{独立性}} P\{X_1 \le x\}P\{X_2 \le y\}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{X_1 \le \min(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

(2) 方法一, 通过 Y 的分布函数确定

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\{Y \le y\} &= P\{X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \le y\} \\ &= (\text{和 (1) 完全一致省去}) \ldots \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

方法二, 直接求边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = F(X, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = F(+\infty, Y)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$$

故 $Y \sim N(0,1)$ □

第十八章　数字特征

18.1　期望与方差的计算

Remark. 期望与方差

期望的定义

(1) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\ldots$, 则 $EX=\sum_i x_i p_i$

推广: 若 $Y=g(X)$ 则 $EY=\sum_i g(x_i)p_i$

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$ 则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

推广: 若 $Y=g(X)$ 则 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$

(3) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\ldots$ 则

$EZ=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$

(4) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y), Z=g(X,Y)$ 则

$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

特别的 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

期望的性质

(1) $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

(2) $EXY=EX\cdot EY \iff$ X 与 Y 不相关

特别的若 X 与 Y 相互独立, 由 $EXY=EXEY$

方差的定义

(1) $DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$

方差的性质

(1) $D(aX+c)=a^2DX$

(2) $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y)$

推论 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \iff$ X 与 Y 不相关

特别的, 若 X 与 Y 独立, 则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

(3) 若 X 与 Y 独立, 则 $DXY = DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX$

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty$, 则 $E[\min\{|X|, 1\}] =$____.

Solution.

$$
\begin{aligned}
E[\min(|X|, 1)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|, 1) f(x) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \min(|x|, 1) f(x) \mathrm{d}x \\
&= 2(\int_{0}^{1} x f(x) \mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{\pi} \ln(1 + x^2) \mid_0^1 + \frac{2}{\pi} \arctan x \mid_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

2. (2016, 数三) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim N(1, 2)$,$Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$

(A) 6　　(B) 8　　(C) 14　　(D) 15

Solution.

(方法一) 通过计算方法做

$$
\begin{aligned}
DXY &= E(XY)^2 - (EXY)^2 \\
&= EX^2 \cdot EY^2 - (EXEY)^2 \\
&= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EXEY)^2 \\
&= 3 \times 5 - 1 = 14
\end{aligned}
$$

(方法二) 用结论

$$
\begin{aligned}
DXY &= DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX \\
&= 8 + 4 + 2 = 14
\end{aligned}
$$

□

3. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 则 $E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)=$____

Solution. 由轮换对称性有

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)=E\left(\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{2}E\left(\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{2}$$

□

总结

若 X,Y 同分布, 则 X,Y 具有相同的 F,f,E,D, 上题的推广结论

$$\text{若}X_1,X_2\ldots,X_n\text{同分布, 则}E\left(\frac{X_1^2}{X_1^2+\ldots+X_n^2}\right)=\frac{1}{n}$$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$, 且 $P\{X+Y>0\}=1-e^{-1}$, 则 $E(X+Y)^2=$____.

Solution. 利用参数可加性可知,$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$, 由 $P\{X+Y>0\}=1-e^{-1}=1-P\{X=0\}\implies\lambda_1+\lambda_2=1$, 则 $E(X+Y)^2=D(X+Y)+(E(X+Y))^2=1+1=2$ □

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim E(\frac{1}{3})$, $Y\sim E\left(\frac{1}{6}\right)$, 若 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$, 则 $EU=$____,$EV=$____.

Solution. EV 是比较好求的, 由参数可加性有 $V\sim E(\frac{1}{2})$

方法一利用二维概率密度计算:

由 X,Y 独立, 知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 则

$$EU=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ldots=7$$

方法二求 U 的概率密度:

由 $U=\max(X,Y)$ 知 $F_U(u)=F_1F_2\implies f_u=f_1F_2+F_1f_2$

$$EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_u\mathrm{d}u=\ldots=7$$

方法三利用性质

$$E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=3+6=9$$

$EV=2\implies EU=7$ □

总结

若 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$, 则 $E(U+V)=E(X+Y),E(UV)=E(XY)$

独立同分布随机变量的最大值与最小值的分布函数, 由如下结果

令 $Z=\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, 则

$$F_Z z=F_{X_1}F_{X_2}\ldots F_{X_n}$$

令 $Z=\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, 则

$$F_Z z=1-[(1-F_{(X_2)})][(1-F_{(X_2)})]\ldots[(1-F_{(X_n)})]$$

6. (2017, 数一) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX=$____

Solution.

(方法一) $f(x)=\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(\frac{x-4}{2})$, 则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2$

(方法二) 考虑 $F(X_1)=0.5\Phi(x),F(X_2)=0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$, 则由第二章的结论 $aF_1+bF_2,(a,b>0,a+b=1)$ 的时候也是分布函数, 故 $EX=\frac{1}{2}EX_1+\frac{1}{2}EX_2=0+\frac{4}{2}=2$ □

7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 则 $E|X|=$____,$D|X|=$____.

Solution.

$$\begin{aligned}E|X|&=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\phi(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}x\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}(-\frac{x^2}{2})\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D|X|&=E(|X|)^2-(E|X|)^2\\&=EX^2-(E|X|)^2\\&=DX+(EX)^2-(E|X|)^2\\&=1-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

□

总结

(1) 若 $X \sim N(0,1)$, 则 $E|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, D|X| = 1 - \frac{2}{\pi}$

(2) 若 $X \sim N(0,\sigma^2)$, 则 $E|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma, D|X| = (1-\frac{2}{\pi}) \cdot \sigma^2$

(3) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $E|X-\mu| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma, D|X| = (1-\frac{2}{\pi}) \cdot \sigma^2$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E[\max\{X,Y\}]$,$E[\min\{X,Y\}]$.

Solution. 由 X,Y 独立, 有 $X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$,$E|X-Y| = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

由下述总结, 可知所求期望为

$$E[max\{X,Y\}] = \frac{1}{2}[E(X)+E(Y)+E|X-Y|] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E[min\{X,Y\}] = \frac{1}{2}[E(X)+E(Y)-E|X-Y|] = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

□

总结

关于最大值最小值函数的拆法

$max\{X,Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}$

$min\{X,Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2}$

9. 设独立重复的射击每次命中的概率为 p,X 表示第 n 次命中时的射击次数, 求 EX,DX.

Solution. Pascal 分布 (负二项分布), 关键在于分解随机变量, 设 X_i 表示第 $i-1$ 次命中到 i 命中所需要的射击次数, 则有 $X_1, X_2, \ldots$ 之间相互独立, 且 $X_i \sim G(p)$, 对于 $X = X_1 + X_2 \ldots X_n$, 故

$$EX = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n = \frac{n}{p}$$

$$DX = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

□

10. (2015, 数一、三) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, 对 X 进行独立的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数。

(a) 求 Y 的概率分布;

(b) 求 EY.

Solution. 不妨令 $p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$

(1)

$$\begin{aligned}P\{Y = k\} &= C_{k-1}^1 p^2(1-p)^{k-2}\\ &= (k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}, k = 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}EY &= \sum_{k=2}^{\infty} kP\{Y = k\}\\ &= p^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}\\ &\xlongequal{\text{幂级数求和}} \ldots\\ &= 16\end{aligned}$$

也可以用 Pascal 分布的结论直接得出 $EX = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$ □

18.2 协方差的计算

Remark. 协方差

协方差的定义 $Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EX \cdot EY$

协方差的性质

(1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X, X) = DX$

(2) $Cov(aX + bY + c, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。若 $DX = 4$, 正整数 $s \le n$,$t \le n$, 则

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} X_j\right) =$$

(A) $4\max\{s, t\}$ (B) $4\min\{s, t\}$ (C) $\dfrac{4}{\max\{s, t\}}$ (D) $\dfrac{4}{\min\{s, t\}}$

Solution.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i,\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)&=\frac{1}{st}[Cov(X_1,X_1)+Cov(X_1,X_2)+\dots\\&+Cov(X_2,X_1)+\dots+Cov(X_s,X_t)]\\&\xlongequal{Cov(X_i,X_i)=DX_i,Cov(X_i,X_j)=0}\frac{\min(s,t)}{st}\cdot DX\\&=\frac{4}{\max(s,t)}\end{aligned}$$

来自总体 X 的简单随机样本必然是独立同分布的. □

12. (2005, 数三) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$。记 $Y_i=X_i-\bar{X}$,$i=1,2,\cdots,n$。

(1) 求 Y_i 的方差 DY_i,$i=1,2,\cdots,n$;

(2) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$;

(3) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c.

Solution.

(1) 方法一:

$$\begin{aligned}DY_i&=D(X_i-\bar{X})\\&=DX_i+D\bar{X}-2Cov(X_i,\bar{X})\\&\xlongequal{E\bar{X}=\mu,D\bar{X}=\sigma^2/n}\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}-2Cov(X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\\&=\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}DY_i&=D(\frac{n-1}{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}X_j(j\neq i))\\&=(\frac{n-1}{n})^2\sigma^2-\frac{n-1}{n^2}\sigma^2\\&=\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_n) &= Cov(X_1, \bar{X}, X_n - \bar{X}) \\
&= Cov(X_1, X_n) - Cov(X_1, \bar{X}) - Cov(X_n - \bar{X}) + D\bar{X} \\
&= \frac{-\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

(3) 由无偏性有 $cE(Y_1 + Y_n)^2 = \sigma^2 \implies c = \frac{\sigma^2}{E(Y_1+Y_n)^2}$

$$
\begin{aligned}
E(Y_1 + Y_n)^2 &= D(Y_1 + Y_n) + (EY_1 EY_n)^2 \\
&= DY_1 + DY_n + 2Cov(Y_1, Y_n) + 0 \\
&= \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

故 $c = \frac{n}{2(n-2)}$ □

18.3 相关系数的计算

Remark. 相关系数

相关系数的定义 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$

(2) $\rho_{XY} = 0 \iff Cov(X,Y) = 0 \iff EXY = EXEY \iff D(X+Y) = DX + DY$

(3) $\rho_{XY} = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1(a > 0); \rho_{XY} = -1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1(a < 0)$

13. (2016, 数一) 设试验有三个两两互不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三个结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$。将试验独立重复地做两次,X 表示两次试验中 A_1 发生的次数,Y 表示两次试验中 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ -\frac{1}{2} \qquad (B)\ -\frac{1}{3} \qquad (C)\ \frac{1}{3} \qquad (D)\ \frac{1}{2}$$

Solution.

(方法一) 由题意有 X, Y 均服从 $B(2, \frac{1}{3})$, 而 $P\{XY = 1\} = PX = 1, Y = 1 = C_2^1(\frac{1}{3})^2$, 且 $P\{XY = 0\} = \frac{7}{9}$, 故 XY 的概率分布如下所示

XY	0	1
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

故 $EXY = \frac{2}{9}$, 进而可以求出 $\rho_{XY} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = -\frac{1}{2}$

(方法二) 设 Z 为"A_3 在两次试验中发生的次数"

由题意有 $Z \sim B(2, \frac{1}{3}), X + Y + Z = 2$ 而 $D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X,Y) = \frac{8}{9} + 2Cov(X,Y)$, 其中 $D(X+Y) = D(2-Z) = DZ = \frac{4}{9}$, 故 $Cov(X,Y) = \frac{-2}{9}$

(方法三)

$$\begin{aligned}
Cov(X, X+Y+Z) &= DX + Cov(X,Y) + Cov(X,Z) \\
&\xlongequal{\text{轮换对称性}} \frac{4}{9} + 2Cov(X,Y) \\
&= Cov(X,2) = 0 \implies Cov(X,Y) = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

□

14. 设随机变量 $X \sim B\left(1, \frac{3}{4}\right)$,$Y \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

(a) 求 (X,Y) 的联合概率分布;

(b) 求 $P\{Y=1|X=1\}$.

Solution. 这道题比较简单, 直接给答案

X/Y	0	1	P_i
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
P_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$P\{Y=1|X=1\} = \frac{2}{3}$ □

18.4 相关与独立的判定

Remark. 相关与独立性

(1) 一般来说独立是强于不相关的条件, 即 独立 $\implies$ 不相关

(2) 对于二维正态分布有 独立 $\iff$ 不相关

(3) 对于 0-1 分布有 独立 $\iff$ 不相关

Remark. 判断是否独立的基本方法

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$, 对于离散型选点, 对于连续型选区间

(2) 三个充要条件 $\forall(x,y)$或$(i,j)F(x,y)=F_XF_Y, f(x,y)=f_Xf_Y, P(ij)=P_{\cdot i}P_{j\cdot}$

(3) $\rho_{XY}\neq 0 \implies X,Y$ 不独立

15. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$ 上的均匀分布, 则

(A) X 与 Y 不相关, 也不相互独立 (B) X 与 Y 相互独立

(C) X 与 Y 相关 (D) X 与 Y 均服从 $U(-a,a)$

Solution. 这道题可以记结论, 对于均匀分布若其区域不为 $(a,b)\times(c,d)$ 的矩形, 则必然不独立, 其中 $X\in(a,b), Y\in(c,d)$

正常来做的话, 步骤如下

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi a^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{对称性}} 0$$

同理根据对称性可知 $EXY=EX=EY=0$, 故 X,Y 一定不相关, 现在求 X,Y 的边缘分布概率密度, 有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, & x\in(-a,a)\\ 0, & x\notin(-a,a)\end{cases}$$

同理可以求出

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}, & y\in(-a,a)\\ 0, & y\notin(-a,a)\end{cases}$$

显然 $f_Yf_X\neq f(x,y)$ 故 X,Y 不独立. □

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$。

(a) 求 X 的期望与方差;

(b) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(c) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 并说明理由.

Solution.

(1)

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = 0 \\
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 2 \\
DX &= EX^2 - (EX)^2 = 2
\end{aligned}
$$

(2)

$$
E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X|Xf(x)\mathrm{d}x = 0 = EXE|X| \implies \rho_{X|X|} = 0, Cov(X, |X|) = 0
$$

(3) 设 $A = \{0 < X < 1\}, B = \{|X| < 1\}$, 故

$$
P(AB) = P\{0 < X < 1, |X| < 1\} = P\{0 < X < 1\} = P(A)
$$

而 $P(B) < 1$ 是显然的, 故 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 即 $X|X|$ 不独立 □

第十九章　大数定律与中心极限定理

Remark. 相关知识

依概率收敛设 $Y_1, Y_2, \ldots$ 是一个随机变量的序列,a 是一个常数, 对于任意的给定正数若有 $\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \epsilon\} = 1$, 则称该随机变量的序列依概率收敛与 a, 记作 $Y_n \xrightarrow{P} a$

切比雪夫大数定律设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 数学期望 EX_i 和方差 DX_i 都存在, 并且方差有公共上界, 即 $DX_i \leq c, i = 1, 2, \cdots$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

伯努利大数定律设随机变量 X_n 服从参数为 n 和 p 的二项分布, 即 $X_n \sim B(n, p)$, μ_n 是 n 次试验中事件 A 发生的次数 $(n = 1, 2, \cdots)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

辛钦大数定律设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布, 期望存在, 记 μ 为它们共同的期望, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

Remark. 三个考点

(1) 切比雪夫不等式

$$P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}, \text{或者} P\{|X - EX| < \epsilon\} > 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$$

(2) 大数定理

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boxed{X_i} \xrightarrow{P} E\boxed{X_i}$$

(3) 中心极限定理

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

(4) 不同定理的成立条件的差别

切比雪夫大数定理要求 X_i 相互独立, 均值方差存在, 且方差具有公共上界

伯努利大数定理要求 $X_i \sim B(n, p)$

辛钦大数定律要求 X_i 独立同分布, 期望存在

列维-林德伯格定理要求 X_i 独立同分布, 且期望方差均存在

棣莫弗-拉普拉斯定理要求 $X_i \sim B(n,p)$

1. 设随机变量 $X_1, X_2 \dots X_n$ 相互独立, 令 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维-林德伯格定理, 当 n 充分大的时候 S_n 近似服从正态分布, 则要求 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 满足 ()

   (A) 有相同的期望与方差　　(B) 服从同一离散型分布

   (C) 服从同一均匀分布　　(D) 服从同一连续型分布

   Solution. 答案选 C □

2. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,$\mu_k = E(X_i^k)(k=1,2,3,4)$。由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$

$$(A)\ \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2} \quad (B)\ \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2} \quad (C)\ \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2} \quad (D)\ \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

   Solution. 首先需要确定 $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2)$ 是否等于 μ_2 显然, 所以这个式子满足切比雪夫不等式, 故根据切比雪夫不等式有

$$\text{原式} \geq \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2)}{\epsilon^2} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\epsilon^2}$$

□

3. (2022, 数一) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,X_i 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

   则当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于?.

   Solution. 由大数定理有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} EX_i^2$, 又期望的定义有

$$EX_i^2 = 2\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

□

4. (2020, 数一) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,$P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数。利用中心极限定理得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 55\right\}$ 的近似值为

$$(A)\ 1-\Phi(1) \quad (B)\ \Phi(1) \quad (C)\ 1-\Phi(0.2) \quad (D)\ \Phi(0.2)$$

Solution. 由中心极限定理有 $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50, 25)$ 标准化后所求概率为

$$P\{\frac{X-50}{5} \le 1\} \implies \Phi(1)$$

□

第二十章　统计初步

20.1　求统计量的抽样分布

Remark. 样本均值与方差

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1} nX_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$E\bar{X}=\mu, D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}, ES^2=\sigma^2$来自同一总体的样本均值与方差是独立的

有偏估计量 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 其 $ES_n^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

统计的三大分布

χ^2 分布的定义

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 均服从 $N(0,1)$ 称 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记 $\chi^2\sim\chi^2(n)$, 特别的若 $X\sim N(0,1)$, 则 $\chi^2\sim\chi^2(1)$

χ^2 分布的性质

(1) 参数可加性　　设 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立, 且 $\chi_1^2\sim\chi^2(n), \chi_2^2\sim\chi^2(m)$ 则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n+m)$

(2) 设 $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 则 $E\chi^2=n, D\chi^2=2n$

F 分布的定义

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$, 称 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 n_1, n_2 的 F 分布, 记作 $F\sim F(n_1,n_2)$

F 分布的性质

(1) 设 $F\sim F(n_1,n_2)$, 则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

(2) $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)=\frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$

t 分布的定义　　设随机变量 X 和 Y 相互独立,$X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$, 则称 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T\sim t(n)$

t 分布的性质

(1) 设 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1,n)$, $\frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

(2) $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

Remark. 单正态总体与双正态总体

单正态总体

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差, 则

(1) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 即 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

双正态总体

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本且相互独立, 样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 , 则

(4) $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(5) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$;

(6) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$, 其中 $S_\omega = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n)$,$Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

$$(A)\ \alpha \quad (B)\ 1-\alpha \quad (C)\ 2\alpha \quad (D)\ 1-2\alpha$$

Solution. 这道题考察的是 t 分布的对称性, 由题有

$$Y = \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n)} \qquad X = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

则有 $X^2 = Y$, 所求概率就变成 $P\{X^2 > c^2\}$ 由 t 分布的对称性有 $P\{X^2 > c^2\} = 2\alpha$ □

总结

正态分布与 t 分布具有相似的概率密度图像,F 分布与 χ^2 分布也有类似的图像.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

Solution. 这种题就是一步一步反推, 注意凑题目要求的结果即可

$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$ 同理 $Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

由 Y_1, Y_2 独立, 知道 $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2}) \implies \frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

又有 $\frac{2s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$, 故

$$\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\sigma^2/2}\sqrt{\frac{2s^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{s} \sim t(2)$$

□

20.2 求统计量的数字特征

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(nX_j - \sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] =$$

Solution. 这道题就是个凑系数化简, 过程省去 原式 $= n^3(n-1)\mu\sigma^2$ □

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

(1) 求 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$ 的分布

(2) 求 $E[(\bar{X}^2 S^2)^2]$;

Solution.

(1) 和例题 3 一致, 过程省去 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,8)$

(2) 对于这种高幂次的一般都需要考虑用 χ^2 的结论

$$\begin{aligned} E\left[(\bar{X}^2S^2)^2\right] &= E\bar{X}^4 \cdot ES^4 \\ &= \left[D\bar{X}^2 + (E\bar{X}^2)^2\right]\left[DS^2 + (ES^2)^2\right] \\ &= \frac{5}{107}\sigma^8 \end{aligned}$$

又 $\frac{9\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \implies D\bar{X}^2 = \frac{2\sigma^4}{81}$ 同理有 $DS^2 = \frac{\sigma^4}{4}$ □

第二十一章　参数估计

21.1　求矩估计与最大似然估计

Remark. 矩估计与最大似然估计

矩估计

令 $EX^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ 或者 $E(X-EX)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^k, k=1,2,\ldots$ 得到 $\theta_1,\theta_2\ldots$ 的矩估计量

$$\begin{cases} EX=\bar{X}, & \text{一个参数} \\ EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 & \text{两个参数} \end{cases}$$

最大似然估计

(1) 对样本点 $x_1,x_2\ldots,x_n$, 似然函数为 $L(\theta)\begin{cases} \prod_{i=1}^n p(x_i;\theta) \\ \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) \end{cases}$

(2) 似然函数两端取对数求导

(3) 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 就可以得到 θ 的最大似然估计值

一个关于规范的小提示, 如果问估计值用小写字母 (样本值), 问估计量用大写字母 (随机变量)

1. (2002, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

Solution.

(矩估计) 这道题只有一个参数, 只需要用一阶矩估计 $EX = 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3 - 6\theta = \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{16}{8} = 2$, 故 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$

(最大似然估计) 对于样本 $3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3$, 似然估计函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 有 $\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12}$ 又 $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 故最终 $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$ □

2. (2011, 数一) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 已知,$\sigma^2 > 0$ 未知, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

(1) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}^2)$。

Solution.

(1) 对于样本 $X_1, \ldots, X_n$ 其最大似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

注意参数为 σ^2, 令 $\frac{\mathrm{d}\ln\sigma^2}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0$, 有 $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} n(X_i - \mu)^2$

(2) 这种题优先考虑 χ^2 分布的期望与方差结论, 有题 (1) 有

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \implies \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

故 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$ □

3. (2022, 数一、三) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$,

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $D(\hat{\theta})$。

Solution. 这是双总体, 但基本上和单总体一致, 不要被唬住了哦!

(1) 由题有 $X \sim E(\frac{1}{\theta}), Y \sim E(\frac{1}{2\theta})$, 故其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

则对于样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, 最大似然估计函数为

$$L(\theta) = (\frac{1}{2})^m \theta^{-(m+n)} e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j)}$$

则令 $\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}\theta} = 0$, 有 $\hat{\theta} = \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j)$

(2)

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= (\frac{1}{m+n})^2 D(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m Y_j) \\ &= \frac{\theta^2}{m+n} \end{aligned}$$

□

21.2 估计量的评价标准

Remark. 估计量的评价标准

(1) (无偏性) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $E\hat{\theta} = \theta$ 则称其为 θ 无偏估计量

(2) (有效性) 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计, 若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

(3) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 一致 (相合) 估计量

一致性的考点在于—$\frac{1}{n}\sum\Box \xrightarrow{P} E\Box$

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 并说明理由。

***Solution*.**

(1) 对于样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的最大似然估计函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(x_i-\theta)} = 2^n e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$$

显然 $L(\theta)$ 关于 θ 是单调递增的, 则根据最大似然的定义, 应该取使得 $L(\theta)$ 最大的值, 而由题目有 $X_1 > \theta, X_2 > \theta, \ldots$, 故 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2 \ldots, X_n\}$

(2) 由概率密度函数有 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, 故

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

故 $F_{min} = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ 即

$$F_{min} = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, x \le \theta \end{cases}$$

故

$$f_{min} = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

由期望的定义有

$$E\hat{\theta} = \int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)} = \theta + \frac{1}{2n}$$

□

5. (2010, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知,N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 $(i = 1, 2, 3)$ 求常数 a_1, a_2, a_3 使得 $T = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

***Solution*.** 由题可知 $N_i \sim B(n, p)$, 具体来说有

$$\begin{cases} N_1 \sim B(n, 1-\theta) \\ N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2) \\ N_3 \sim B(n, \theta^2) \end{cases}$$

且有 $N_1+N_2+N_3=n$

故 $ET=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i=n\left[a_1+(a_2-a_1)\theta+(a_3-a_2)\theta^2\right]=\theta$, 只需要令

$$\begin{cases} a_1=0 \\ a_2=\frac{1}{n} \\ a_3=\frac{1}{n} \end{cases}$$

求 $DT=\frac{1}{n^2}D(n-N_1)=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ □

21.3 区间估计与假设检验

Remark (区间估计与假设检验). 这一节内容很少, 只需要掌握置信度的概念, 假设检验的基本过程与第一类错误/第二类错误的概念即可

1. 置信度与置信区间

   设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$ 含有一个未知参数 $\theta,\theta\in\Theta$ 其中 Θ 是其所有可能取值的集合, 对于给定值 $0<\alpha<1$, 若由来自总体 X 的样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 确定了两个统计量 $\theta_1,\theta_2,\theta_1\leq\theta_2$ 对于 $\forall\theta\in\Theta$ 都有

   $$P\{\hat{\theta_1}<\theta<\hat{\theta_2}\}\geq 1-\alpha$$

   则称区间 (θ_1,θ_2) 为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间,$\hat{\theta_1},\hat{\theta_2}$ 分别称置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限,$1-\alpha$ 称为置信水平或置信度

2. 原假设 H_0 与备择假设 H_1

类型	H_0	H_1
双边检验	$\theta=\theta_0$	$\theta\neq\theta_0$
单边检验-左边	$\theta\geq\theta_0$	$\theta<\theta_0$
单边检验-右边	$\theta\leq\theta_0$	$\theta>\theta_0$

3. 假设检验的过程

   (1) 根据题意写出原假设 H_0 和备择假设 H_1

   (2) 选择检验方式, 写出检验统计量及其分布

(3) 根据给定的显著性水平确定拒绝域

(4) 统计检验统计量的值, 做出推断

4. 第一类错误/第二类错误

类型	含义	犯错的概率
第一类错误	原假设 H_0 为真, 但却拒绝 H_0, 即弃真概率	$\alpha = P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}$
第二类错误	原假设 H_0 为假, 但却接受 H_0, 即取伪概率	$\beta = p\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

(1) 仅控制犯第一类错误的检验称为显著检验,α 为显著性水平

(2) 当样本容量固定时,α 和 β 中任意一个减少, 另一个必然增大; 如果要使 α 和 β 同时减少, 只能增大样本容量

第二十二章　补充知识-高等数学

补充知识来自于

(1) 菲砖

(2) 做题总结

22.1　平方数和的求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

22.2　莱布尼兹法则

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$$

那么 F(x) 的导数为

$$F'(x) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt$$

特别的, 若上下限为常数有

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t$$

例如对于 $F(x) = \int_1^0 e^{-x^2t^2} dt$, 则

$$F'(x) = 2x \int_0^1 t^2 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$$

第二十三章　补充知识-线性代数

补充知识来自于

(1) 线性代数入门

(2) 做题总结

第二十四章　补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计　　茆诗松

(2) 做题总结

24.1　配对问题

问题描述: 在一个有 n 个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

Solution. (配对问题)

设 A_i 为事件: 第 i 个人自己抽到自己的礼物,$i = 1, 2, \dots, n$ 所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n} \\
&P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \dots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)} \\
&P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \dots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \\
&\dots \\
&P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i=1}^{n-1}P(A_iA_{i+1})+\sum_{i=1}^{n-2}P(A_iA_{i+1}A_{i+2})\\&+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)\\&=C_n^1\frac{1}{n}-C_n^2\frac{1}{n(n-1)}+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{n!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$, 上述概率由 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 则

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=1-e^{-1}\approx 0.6321$$

□

24.2 几个概率的不等式

1. $P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$
2. $P(A_1A_2\ldots A_n)\geq P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-(n-1)$ (Boole 不等式)
3. $|P(AB)-P(A)P(B)|\leq\frac{1}{4}$

Proof. 相关证明如下:

(1) 由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leq 1 \implies P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于 n = 2, 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于 $n=k$ 个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1A_2\ldots A_k)\geq P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)-(k-1)$$

考虑 $n=k+1$ 个事件 $A_1A_2\ldots A_{k+1}$, 不妨令 $B=A_1A_2\ldots A_k$, 则

$$P(A_1A_2\ldots A_kA_{k+1})=P(BA_{k+1})\geq P(B)+P(A_{k+1})-1\geq P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_{k+1})-(k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由 $P(A)\geq P(AB),P(B)\geq P(AB)$, 则 $P(A)P(B)\geq P(AB)^2$, 则

$$P(AB)-P(A)P(B)\leq P(AB)-P(AB)^2=P(AB)(1-P(AB))$$

令 $x=P(AB)$, 则 $f(x)=x(1-x)$, 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 取得 $f(x)_{max}=\frac{1}{4}$ 即

$$P(AB)-P(A)P(B)\leq\frac{1}{4}$$

由于 $P(AB)+P(A\bar{B})=P(A)$, 即 $P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})$ 则

$$P(A)P(B)-P(AB)=P(A)P(B)-P(A)+P(A\bar{B})=P(A\bar{B})-P(A)P(\bar{B})\leq\frac{1}{4}$$

即

$$P(AB)-P(A)P(B)\geq\frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

24.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为 α, 乙命中的概率为 β. 甲先射, 谁先设中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

Solution.

(方法一) 记事件 A_i 为第 i 次射中目标,$i=1,2,\ldots$, 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\ldots.$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned}P(\text{甲获胜})&=\alpha+(1-\alpha)(1-\beta)\alpha+(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2\ldots\\&=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i\\&=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}\end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned}P(\text{乙获胜})&=(1-\alpha)\beta+(1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta+\ldots\\&=\beta(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i\\&=\frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}\end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

□

24.4 补充: 随机变量的矩

设 (X, Y) 是二维随机变量, 如果 $E(X^kY^l)$ 存在, 则称 $E(X^k), (k=1,2\dots)$ 为 X 的 k 阶原点矩; 称 $E(X-EX)^k, k=(2,3,\dots)$ 为 X 的 k 阶中心矩; 称 $E(X^kY^l), (k,l=1,2,\dots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩; 称 $E[(X-EX)^k(Y_EY)^l, (k,l=1,2,\dots)]$ 为 X, Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩