

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 24 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 24 日

目录

第一章 常微分方程	1
1.1 一阶微分方程	1
1.2 二阶常系数线性微分方程	8
1.3 高阶常系数线性齐次微分方程	12
1.4 二阶可降阶微分方程	13
1.5 欧拉方程	13
1.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程	14
1.7 微分方程综合题	15

第一章 常微分方程

1.1 一阶微分方程

1. (1998, 数一、数二) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 其中 α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于
(A) 2π (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

Solution.

□

2. (2002, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$$

求 $f(x)$ 。

Solution.

□

3. (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 & (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

Solution.

□

4. (2010, 数二、数三) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解。

若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

Solution.

□

5. (2018, 数一) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数。

(1) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解。

Solution.



6. 求解微分方程 $y' - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$.

Solution.



7. 求解下列微分方程:

$$(1) (2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2e^y - 2y)dy = 0;$$

$$(2) \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Solution.



1.2 二阶常系数线性微分方程

8. (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

(A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

(B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

(C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

(D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

Solution.

□

9. (2015, 数一) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$ (B) $a = 3, b = 2, c = -1$

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$ (D) $a = 3, b = 2, c = 1$

Solution.

□

10. (2016, 数二) 已知 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的两个解。若 $u(-1) = e, u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解。

Solution.

□

11. (2016, 数一) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$ 。

(1) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值。

Solution.



1.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 求解微分方程 $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$ 。

Solution.

□

1.4 二阶可降阶微分方程

13. 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解。

Solution.

□

1.5 欧拉方程

14. 求解微分方程 $x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin \ln x$ 。

Solution.

□

1.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. (2005, 数二) 用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

Solution.



1.7 微分方程综合题

18. (2001, 数二) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y) (x > 0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 。求曲线 L 的方程。

Solution.

□

19. (2009, 数三) 设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$ 。已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t (t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程。

Solution.

□

20. (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$ 。

Solution.

□

21. (2014, 数一、数二、数三) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

Solution.

□

22. (2011, 数三) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$$

其中 $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t - x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

Solution.

