第一章　一元函数微分学

1. x 为以 T 为周期的连续函数, 则下列结论中正确的个数为 ( ).

   (I) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

   (II) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

   (III) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

   (IV) $\int_0^x [f(t) - f(-t)]\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

   (V) 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期

   A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2. 设 $f(x)$ 为 x 的三次多项式,且 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=1, \lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0)$,则 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}=$

______

3. 设 $y=y(x)$ 为微分方程 $y''+(x+1)y'+x^2y=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解, 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^k}=c(c\neq 0)$ 则 $c=$ _____, $k=$ _____

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处三阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0, f'''(0)\neq 0$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

5. (1) 设 $f(x), g(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ 证明当 $x\to x_0$ 的时候,$\displaystyle\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^{\varphi(x)} g(t)\mathrm{d}t$

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+2\tan t)}{\left[\int_0^x\ln(1+2\tan t\mathrm{d}t)^2\right]}$

6. 设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-x}^{x}\left(1-\dfrac{|t|}{x}\right)\cos(\theta-t)\mathrm{d}t$ 存在, 求 θ 的值.

7. 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$, 求 A,B 的值.

8. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan\tan x - \sin\sin x}{\tan x - \sin x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\sin x - \sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x} - e^x)}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos\sin x - \cos\tan x}{x^3(\sqrt{1+x} - e^x)}$

9. (1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=a(a\neq 0)$ 求 a,n

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan 3x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^3}{x^n}=a(a\neq 0)$ 求 a,n

10. 求下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}(n\geq 1)$$

11. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$

13. 设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^n+1}\right]$ 存在, 求 n 的值并求出该极限.

14. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 且 $f''(x_0)\neq 0$ 若 $f(x)=f(x_0)+f'\left[x_0+\theta(x-x_0)\right](x-x_0)(0<\theta<1)$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta$

15. 证明数列 $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\dots$ 收敛, 并求出其极限.

16. 设 $f(x) = x + \ln(2 - x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $x_1 = \ln 2, x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \ldots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

17. (1) 设 $x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}(n = 1, 2, \ldots)$ 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

(2) 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{c(1 + x_n)}{c + x_n}(n = 1, 2, \ldots)$, 其中 $c > 1$ 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

18. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1)^n+(1+\frac{1}{2})^{2n}+\ldots+(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)+\sqrt{n^2+1}+\ldots+\sqrt[n]{n^n+1}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$

19. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n+n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$

20. (1) 证明: 当 $x > 0$ 时,$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

21. (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\ln n}[e^x]\,\mathrm{d}x$ 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

22. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\cdot\dfrac{1}{n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{(3i-1)\pi}{6n}\cdot\dfrac{1}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i-\sin^2 i}{n^2}\left[\ln\left(n+i-\sin^2 i\right)-\ln n\right]$

23. 求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{2n}\frac{n}{i(n+i)}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{n}{i(n+i)}$

24. (1) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 与 $x = 1$ 处连续, 满足 $f(x^2) = f(x)$ 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ ____

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 满足 $|f'(x)| \leq k\,|f(x)|\,(0 < k < 1)$, 且 $f(0) = 0$ 则 $f(x) =$ ____

25. 判定下列函数的间断点及其类型

(1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arctan e^{nx}}{x^{2n}+1}$

(2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^{n}+1}$