第一章 参数估计

1.1 求矩估计与最大似然估计

Remark. 矩估计与最大似然估计

矩估计

令 $EX^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ 或者 $E(X-EX)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, \dots$ 得到 $\theta_1, \theta_2 \dots$ 的矩估计量

最大似然估计

(1) 对样本点 $x_1, x_2 \dots, x_n$, 似然函数为 $L(\theta) \begin{cases} \prod_{i=1}^n p(x_i;\theta) \\ \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) \end{cases}$

(2) 似然函数两端取对数求导

(3) 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 就可以得到 θ 的最大似然估计值

1. (2002, 数一) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0 < \theta < \frac{1}{2}$ 为未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 $3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3$, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

Solution.

□

2. (2011, 数一) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知,$\sigma^2 > 0$ 未知, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (a) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

   (b) 求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(\hat{\sigma}^2)$。

   Solution.

□

3. (2022, 数一、三) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自期望为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自期望为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$,

   (a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

   (b) 求 $D(\hat{\theta})$。

   Solution.

□

1.2 估计量的评价标准

Remark. 估计量的评价标准

(1) (无偏性) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $E\hat{\theta} = \theta$ 则称其为 θ 无偏估计量

(2) (有效性) 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计, 若 $D(th\hat{e}ta_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

(3) 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 一致 (相合) 估计量

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(a) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(b) 问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 并说明理由。

Solution.

$\square$

1.3 区间估计与假设检验