第一章　概率论

1.1　事件与概率, 随机变量及其分布

1. 每箱产品有 10 件, 其中次品数从 0 到 2 是等可能的, 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差, 一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被误判为正品的概率为 10%. 试求:

(I) 随机检验一箱产品, 它能通过验收的概率 p ;

(II) 检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 q .

Solution. (1) 设 $B=\{$任取一件为正品$\}$,$A=\{$一箱产品能通过验收$\}$ 则由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})$$

而其中

$$P(A\mid B)=1-0.02=0.98, P(A\mid \bar{B})=1-0.1=0.9$$

代入全概率公式有 $p=P(A)=1+0.88P(B)$, 为求 $P(B)$, 记 C_i 为每箱中包含 i 件次品, 且 C_0,C_1,C_2 为完备事件组, 再由全概率公式可以求出

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(C_i)P(B\mid C_i)=0.9$$

故 $P(A)=0.892$

(2)$q=P\{X/10\geq 0.9\}=P\{X\geq 9\}=P\{X=9\}+P\{X=10\}\approx 0.705$ □

2. 一条自动生产线生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, n=0,1,2,\cdots$. 假设产品的优质品率为 $p\,(0<p<1)$. 如果各件产品是否为优质品相互独立.

(I) 计算生产线在两次故障间共生产 k 件 $(k=0,1,2,\cdots)$ 优质品的概率;

(II) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品, 求它共生产 m 件产品的概率.

Solution. (1) 不妨令

B_k = {两次故障公生产了 k 件优质品},A_n = {两次故障间总共生产了 n 件产品}, 显然 $A_0, A_1, \ldots$ 构成了一个完备事件组, 故利用全概率公式有

$$\begin{aligned}
P(B_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) \\
&\xlongequal[]{\text{前 k-1 次不可能产生 k 件优质品}} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)P(B_k \mid A_n) \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda p} \\
&\xlongequal[]{\text{Possion 分布}} \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

(2) 当 $m < k$ 的时候,$P(A_m \mid B_k) = 0$, 当 $m \geq k$,

$$\begin{aligned}
P(A_m \mid B_k) &= \frac{P(A_m)P(B_k \mid A_m)}{P(B_k)} \\
&= \frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q}, m \in (k, k+1, \ldots)
\end{aligned}$$

□

总结

关于全概率公式与贝叶斯公式的总结

这种问题的关键在于寻找一个合适的完备事件组, 当问题涉及" 原因推结果/结果推原因" 大概率要用贝叶斯公式 (条件概率是贝叶斯的特殊情况)

3. 甲、乙二人轮流投篮, 游戏规则规定为甲先开始, 且甲每轮只投一次, 而乙每轮连续投两次, 先投中者为胜. 设甲、乙每次投篮的命中率分别是 p 与 0.5, 则 $p =$____ 时, 甲、乙胜负概率相同.

Solution. 这道题和笔记中的交替射击模型一致, 记 A = {甲获胜}, B = {乙获胜}, 则由题意有

$$P(A) = p + (1-p)(1-0.5)(1-0.5)P(A) \implies P(A) = \frac{p}{1-0.25(1-p)}$$

再由题意可知, 要使得甲乙获胜概率一致, 则 $P(A) = P(B) = 0.5 \implies p = \frac{3}{7}$ □

4. (非离散非连续的概率) 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, 且 $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$, 已知当 $X\neq 0$ 的时候,X 在其他取值范围内满足均匀分布, 求 X 的分布函数 $F_X(x)$.

Solution. 由题意有 $P\{|X|\leq 1\}=1, P\{X=0\}=\frac{1}{4} \implies P\{X\neq=0\}=\frac{3}{4}$, 又因为区间长度为 2, 有

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{3}{8}(x+1), & -1<=x<0 \\ \frac{3x+5}{8}, & 0\leq x<1 \\ 1, & 0\geq 1 \end{cases}$$

□

5. 设有四个编号分别为 $1,2,3,4$ 的盒子和三只球，现将每个球随机地放入四个盒子，记 X 为至少有一只球的盒子的最小号码.

(1) 求 X 的分布律;

(2) 若当 $X=k$ 的时候, 随机变量在 $[0,k]$ 上服从均匀分布, 求 $P\{Y\leq 2\}$;

Solution.

(1) 由题有 $P\{X=1\}=\frac{C_3^1 3^2+C_3^2 3+C_3^3}{4^3}=\frac{37}{64}$ 解释: 总共有 4^3 种方案, 若 1 是最小的有球的盒子, 则其中可以有 $1,2,3$ 三种可能,$C_3^1 3^2$ 表示选择一个球加入 1 号盒子, 其余两个球可以从剩余 3 个盒子中随机选择两个放入. 同理可以求出 X=2,3,4, 故有

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{37}{64} & \frac{19}{64} & \frac{7}{64} & \frac{1}{61} \end{pmatrix}$$

(2) 由全概率公式 $P\{Y\leq 2\}=\sum_{i=1}^{4}P\{Y\leq 2\mid X=k\}=\frac{367}{384}$ □

6. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A=\{$中间一段为三段中的最长者$\}$, 则 $P(A)=$ ______

Solution. □

7. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 ______

Solution. □

8. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 ______

Solution. □

9. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 ______

Solution.

(方法一) 首先考虑第 n 次试验,A 发生奇数次的情况有两种.(1) 前 n-1 次成功率偶数次, 第 n 次成功;(2) 前 n-1 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 $A_k = \{\ k \quad \}, P(A_k) = p; B_k = \{$k 次实验中成功奇数次$\}$, 记 $P(B_k) = p_k$, 则有

$$B_n = B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n = P(B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n) = P(B_{n-1}\bar{A}_n) + P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= P(B_{n-1})P(\bar{A}) + P(\overline{B_{n-1}})P(A_n) \\
&= (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) \\
&= p + (1-2p)p_{n-1}
\end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)[p_{n-1} - \frac{1}{2}] \xlongequal{\text{等比数列}} -\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^(n-k), k = 0,1,2,\ldots$ 若 n 为偶数则

$$\begin{aligned}
P(X=odd) &= P(X=1) + P(X=3) + \ldots + P(X=n-1) \\
&= C_n^1(1-p)^{n-1} + C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3} + \ldots + C_n^{n-1}p^{n-1}(1-p) \\
P(X=even) &= P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=n) \\
&= C_n^0 p^0 (1-p)^n + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0
\end{aligned}$$

且 $P(X=odd)+P(X=even)=1$, 有注意到

$$
\begin{aligned}
P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+\ldots+P(X=n-1) \\
&= -C_n^1(p-1)^{n-1}-C_n^3p^3(p-1)^{n-3}-\ldots-C_n^{n-1}p^{n-1}(p-1) \\
P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+\ldots+P(X=n) \\
&= C_n^0p^0(p-1)^n+\ldots+C_n^np^n(p-1)^0
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
P(X=even)-P(X=odd) &= C_n^0p^0(p-1)^n+C_n^1p^1(p-1)^{n-1}+\ldots+C_n^np^n(p-1)^0 \\
&\xlongequal{\text{二项式定理}} (2p-1)^n
\end{aligned}
$$

则 $2P(X=odd)=1-(2p-1)^n \implies P(X=odd)=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X=\text{奇数})=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X\sim B(n,p)$，则 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$,$k=0,1,2,\ldots$

令 $Y=\frac{1}{2}[1+(-1)^X]$，当 X 为奇数时，$Y=0$；当 X 为偶数时，$Y=1$

于是原问题转换为求 $P(X\text{为奇数})=P(Y=0)$ 注意到 $E[Y]=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=P(Y=1)=1-P(Y=0)$，故只需要求 $E[Y]$

$$
\begin{aligned}
EY &= E(\frac{1}{2}[1+(-1)^X])=\frac{1}{2}+E(-1)^X \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kp^k(1-p)^{n-k} \\
&\xlongequal{\text{逆用二项式定理}} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n
\end{aligned}
$$

故 $P(Y=0)=1-P(Y=1)=\frac{1-(1-2p)^n}{2}$ $\square$

10. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

(I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

(II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

Solution. 设 $A_i = \{$第 i 次取得红球$\}(i = 1,2,3), B_i = \{$第 j 次投掷银币出现正面$\}(j = 1,2,3)$

(1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = P(A_3) = P(A_1)$$

$$P(A_1) \xlongequal{\text{全概率公式}} P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid \bar{B}_1)P(\bar{B}_1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

(2) 由于两次试验都是独立重复的所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的

则 $P(A_1B_1) = P(A_2B_2) = P(B_1)P(A_1 \mid P(B_1)) = \frac{1}{3}$

则所求概率为

$$P(B_1B_2 \mid A_1A_2) = \frac{B_1B_2A_1A_2}{P(A_1A_2)} = \frac{\frac{1}{3}^2}{\frac{1}{2}^2} = \frac{4}{9}$$

□

11. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

Solution. 设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X, 其显然满足 $X \sim B(20, 0.15)$, 不妨假设当 $X = k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X = k) \geq P(X = k-1), P(X = k) \geq P(X = k+1)$ 即

$$\frac{C_{20}^k 0.15^k 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)} 0.15^{k-1} 0.85^{(21-k)}} \geq 1$$

与

$$\frac{C_{20}^k 0.15^k 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)} 0.15^{k+1} 0.85^{(19-k)}} \geq 1$$

得到如下结果

$$\begin{cases} 300 - 15k + 15 \geq 85k \\ 85k + 85 \geq 300 - 15k \end{cases}$$

即 $2.15 \leq k \leq 3.15$ 故 $k = 3$, 其概率为 $P(X = 3) = C_{20}^3 0.15^3 0.85^{17}$ □

12. 设自动机床在任意时长为 t 的时间间隔内发生故障的此时为 X 服从参数为 λ_t 的泊松分布,Y 表示相继两次故障之间的时间间隔, 则当 $t > 0$ 时,$P\{Y > t\} =$ ______

Solution. 是一个文字游戏, 所谓 $P\{Y > t\}$ 转换为 X 的话其实就是在 t 时间内没有发生故障,$P\{X=0\} = \frac{\lambda_t^0}{0!}e^{-\lambda_t} = e^{-\lambda_t}$ □

13. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0, (x_0, y_0)$ 为分布函数曲线 $y = F(x)$ 的拐点, 则 $x_0 =$ _____, $y_0 =$ _____

Solution. 这道题本身并没啥, 但要注意题目,y_0 是 $F(x_0)$ 而不是 $f(x_0)$, 答案是 $\mu, \frac{1}{2}$ □

14. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{a}{k!}e^{-2}, k = 0, 1, 2\ldots$ 则常数 $a =$ ______

Solution. 这道题由两个解法, 需要注意对比泊松分布时候系数的确定

(方法一) 由规范性有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{k!}e^{-2} = 1 = \Longrightarrow \ a = e$$

(方法二) 有泊松分布有

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

注意到 $\lambda = -1$ 的时候与题设要求接近, 故有 $ae^{-2} = e^{-1} \implies a = e$

□

15. 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$,X 在区间 (a, b) 内取值的概率最大, 其中 $a > 0$ 则 $\sigma^2 =$ ______

Solution. 这道题还真实蛮奇怪的, 有题可知所求概率为

$$P\{a/\sigma < X < b/\sigma\} = \Phi(a/\sigma) = \Phi(b/\sigma)$$

不妨记

$$f(\sigma) = \Phi(a/\sigma) = \Phi(b/\sigma)$$

问题等效为去上面函数的最值问题.

$$f'(\sigma) = -\frac{a}{\sigma^2}\phi(a/\sigma) - \frac{b}{\sigma^2}\phi(a/\sigma)$$

令 $f'(\sigma) = 0$, 则有 $be^{-(b^2/(2\sigma^2))} = ae^{-(a^2/(2\sigma^2))}$ 两边取对数, 可以得到

$$\sigma^2 = \frac{a^2 - b^2}{2(\ln a - \ln b)}$$

当 $\sigma^2 >$ 所求值的时候 $f'(\sigma) > 0$ 反之则有 $f'(\sigma) < 0$ 故所求值即为最大值

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{a^2-b^2}{2(\ln a - \ln b)}}$$

□

1.2 880

1.3 李艳芳 900

1.4 张宇题源大全