第一章　特征值与特征向量

- **特征值与特征向量**
  - 特征值与特征向量
    - 定义　$A\alpha = \lambda\alpha(\alpha \neq 0)$
    - 性质
    - 特征方程法，
      - $|A-\lambda E|$
      - $(A-\lambda E)\,x=0$
  - 相似矩阵
    - 定义，　$B = P^{-1}AP$
    - 性质
  - 相似对角化
    - 定义　$P^{-1}AP = \Lambda$
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
      - $\Longleftrightarrow$ k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - 充分条件
      - A有n个不同的特征值
      - A为是实对称矩阵
  - 实对称矩阵
    - 特征值均为实数
    - 不同特征值的特征向量正交
    - k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - A可正交相似对角化，即存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ = A^TAQ = \Lambda$

1.1 特征值与特征向量的计算

特征值与特征值向量的性质

(1) 不同特征值的特征向量线性无关

(2) 不同特征值的特征向量之和不是特征向量

(3) k重特征值有k个线性无关的特征向量

(4) 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ 则 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A), \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$

推论 1 上, 下, 主对角矩阵特征值为主对角线元素

推论 2 $aA + bE(a \neq 0)$ 不可逆时,$\lambda = -\frac{b}{a}$ 必然为 A 的一个特征值

(5) 若 $r(A) = 1$ 则 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 是 n 维非零列向量, 则 A 的特征值为

$$\lambda_1 = tr(A) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

当 $tr(A) \neq 0$ 时,$\lambda_1 = tr(A), \alpha_1 = \alpha, \lambda_2 \ldots, \lambda_n = 0$, 其特征向量解 $\beta^T x = 0$ 其线性无关的解即为特征向量 $\alpha_2 \ldots \alpha_n$

当 $tr(A) = 0$ 时 $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ 此时只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

综上秩为 1 矩阵能相似对角化 $\Longleftrightarrow$ $tr(A) \neq 0$

(6) 设 α 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征值向量则, 有

A	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α	???	$P^{-1}\alpha$

$f(A)$ 可以推广为 $+/-, kA, A^n, A^{-1}, A^*$

求特征值与特征值向量

(1) 利用特征的定义 ($A\alpha = \lambda\alpha(\alpha \neq 0)$) 或性质 (上述六条)

(2) 特征方程组法 (两大步)

(1) $|A - \lambda E| = 0$ 可以求出 A 的 n 个特征值

(2) $(A - \lambda_i E)x = 0$, 可以解出特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量 ($n - r(A - \lambda_i E)$ 个)

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

特征方程法

令 $|A-\lambda E|=0 \implies \begin{vmatrix}-2-\lambda&1&&1\\0&2-\lambda&0&0\\0&0&2-\lambda&0\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(2-\lambda)^3=0$ 即

$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

当 $\lambda_1=-2$ 时候, 解 $(A+2E)x=0 \implies \alpha_1=(-1,1,1,1)^T$

当 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ 时, 解 $(A-2E)x=0$ 解出其线性无关的特征向量为

$$\alpha_2=(1,1,0,0)^T,\alpha_3=(1,0,1,0)^T,\alpha_4=(1,0,0,1)^T$$

分解为秩为 1

可以将 A 分解为

$$A=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1,-1)+2E$$

由性质 5 和 6 可以立即确认 A 的特征值为 $\lambda_1=tr(B)+2,\lambda_2=\ldots=\lambda_4=0+2$ 且 $\alpha_1=\alpha$ 其余特征向量解 $\beta x=0$ 结果和上面一样.

2. (2003, 数一) 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=P^{-1}A^*P$ 求 $B+2E$ 的特征值与特征向量。

特征方程法

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda^2)=0$ 可知 $\lambda_1=7,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=7$ 解 $(A-7E)x=0$ 可以解出 $\alpha_1=(1,1,1)^T$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解 $(A-2E)x=0$ 可以解出线性无关的特征向量为 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$

分解为秩为 1

可以将 A 分解为

$$A=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}(1,1,1)+E$$

根据性质 5,6 容易得出和上述一样的答案.

$A^*\ldots,1,\ldots,\alpha_1$

$A^*\ldots,7,\ldots,\alpha_2,\alpha_3$

$B\ldots,1,\ldots,P^{-1}\alpha_1=(0,1,1)^T$

$B\ldots,7,\ldots,P^{-1}\alpha_2=(1,-1,0)^T,P^{-1}\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

此时求解上述三个特征向量也有三种不同的解法

(1) 直接求 p^{-1}

(2) 联立 $(P\mid\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

(3) 观察题设可知 P 是初等矩阵之积, 且很容易写出即

$$P=E(23(1))E(1,2)\implies P^{-1}=E(1,2)E(23(-1))$$

这个方法需要观察题目, 不是很通用; 虽然所有可逆矩阵都可以分解为初等矩阵, 但并非所有都好写出来.

$B+2E,\ldots,3,\ldots,P^{-1}\alpha_1=(0,1,1)^T$

$B+2E,\ldots,9,\ldots,P^{-1}\alpha_2=(1,-1,0)^T,P^{-1}\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

转圈化简

解特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ -1 & 4-\lambda & -2\\ 1 & -2 & a-\lambda\end{vmatrix}=0$ 这种三阶的行列, 当然可以直接展开那样比较难算. 由于考研不会故意恶心人, 大部分都可以提公因数. 依据此, 对行列式按顺 (逆) 时间, 选择不含 λ 的数, 化简其余不含 λ 的数, 产生 λ 式子的公因数因此上式可以化简为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 4-2\lambda & 2\\ -1 & 2-\lambda & -2\\ 1 & 0 & a-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[\lambda^2-(a+3)\lambda+3a-6\right]$$

此时讨论二重根的值, 若 $\lambda=2$ 不是其二重根, 对于后面那个二次式必然有 $\Delta=0\implies(a+3)^2+24>0$ 矛盾

故 $\lambda=2$ 只能是二重根, 此时可解出 $a=8$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=9$ 分别解

$$\begin{cases}(A-2E)x=0\\ (A-9E)x=0\end{cases}\implies\begin{cases}\alpha_1=(2,1,0)^T\\ \alpha_2=(1,3,-7)^T\end{cases}$$

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2=O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

A.0　B.1　C.2　D.3

Solution

由 $A^2=O$ 且 $A\neq O$ 可知 $r(A)=1$, 设 A 的任意特征值为 λ 满足 $\lambda^2=0$ 故 A 的特征值只能是 0 求解 $(A-0E)x=0$ 的基础解系中包含解的个数为 $3-r(A)=3-1=2$ 故 A 的线性无关的特征向量的个数是 2

5. 设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\dfrac{1}{3}$，证明：

(I) 0 为 A 的特征值；

(II) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量；

(III) A 可相似对角化。

Solution

1.2 相似的判定与计算

Remark

相似的性质

(1) 若 $A \sim B$, 则 A, B 具有相同的行列式, 秩, 特征方程, 特征值与迹

(2) 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), A^{-1} \sim B^{-1}, AB \sim BA(|A \neq 0|), A^T \sim B^T, A^* \sim B^*$

(3) 若 $A \sim B, B \sim C$ 则 $A \sim C$

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 矩阵 B, A 相似, 则 $r(B-A) + r(B-3E) =$ ____

Solution

2. 设 n 阶矩阵 A, B 相似, 满足 $A^2 = 2E$, 则 $|AB + A - B - E| =$ ___

Solution

3. (2019, 数一、二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y 的值;

(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$。

Solution

1.3 相似对角化的判定与计算

1. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$ 则 $P^{-1}AP =$ ______________。

Solution

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明 A 可相似对角化。

Solution

3. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

(I) 证明 P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution

1.4 实对称矩阵的计算

12. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O, n$ 阶矩阵 B 满足 $B^2 + B = E$ 且 $r(AB) = 2$ 则 $|A + 2E| =$ ___

Solution

13. (2010, 数二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ 正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$，求 a, Q。

Solution

14. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 = E$,$A + E$ 的各行元素之和均为零，且 $r(A + E) = 2$。

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A。

Solution