

# 第一章 行列式

行列式的主要内容	行列式的概念	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义 } n! \text{项不同行不同列元素乘积的代数和} \\ \text{性质} \end{array} \right.$
	重要行列式	$\left\{ \begin{array}{l} \text{上 (或下) 三角, 主对角矩阵} \\ \text{副对角行列式} \\ \text{ab 型行列式} \\ \text{拉普拉斯展开式} \\ \text{范德蒙行列式} \end{array} \right.$
	展开定理	$\left\{ \begin{array}{l} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases}  A , & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases}  A , & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{array} \right.$
	行列式的公式	$\left\{ \begin{array}{l}  KA  = K^n  A  \\  AB  =  A   B  \\  A^T  =  A  \\  A^{-1}  =  A ^{-1} \\  A^*  =  A ^{n-1} \\ \text{设 } A \text{ 的特征值为 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \text{ 则 }  A  = \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ \text{若 } A \text{ 与 } B \text{ 相似, 则 }  A  =  B  \end{array} \right.$
	Cramer 法则	$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$

拉普拉斯展开式 (上, 下三角分块行列式的结论)

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A) \det(D)$$

对于一般分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

若  $B$  可逆, 则有如下结论

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

## 1.1 数字行列式的计算

**Remark.** 基本方法

- (1) 利用行列式的性质 (5 条) 来化简
- (2) 要么出现重要行列式 (5 组)
- (3) 要么展开定理 (0 比较多时候)

1. 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程  $f(x) = 0$  根的个数为 \_\_\_\_\_**Solution.** 第一列乘  $-1$  加到其他列

$$f(x) \xrightarrow{\text{第一列乘-1 加到其他列上面去}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二列加到第四列}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{拉普拉斯型}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= [(x-2) - (2x-2)][-6(x-2) + (x-7)] = 15x(x-1)$$

则  $x = 0$  或  $x = 1$ 

□

## 2. 利用范德蒙行列式计算

$$\text{范德蒙行列式 } V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

*Solution.*

$$\begin{aligned} \text{原式} & \xrightarrow{\text{第一列乘以 } (a+b+c) \text{ 加到第三列}} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 + ac + ab + bc \\ b & b^2 & a^2 + ac + ab + bc \\ c & c^2 & a^2 + ac + ab + bc \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}} (ab + ac + bc) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ & = (ac + bc + ab)(b - a)(c - a)(c - b) \end{aligned}$$

□

3. 设  $x_1 x_2 x_3 x_4 \neq 0$ , 则

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 \\ a_2 a_1 & x_2 + a_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & x_3 + a_3^2 & a_3 a_4 \\ a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & x_4 + a_4^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**Solution.** 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 \\ a_2 & a_2 a_1 & x_2 + a_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 \\ a_3 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & x_3 + a_3^2 & a_3 a_4 \\ a_4 & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & x_4 + a_4^2 \end{vmatrix}$$

将第一行分别乘以  $-a_1, -a_2, \dots$ , 分别加到第2, 3, ... 列

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

从下往上消, 分别乘以  $\frac{a_i}{x_i}$ , 加到第一行

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 x_2 x_3 x_4) \left( 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} \right)$$

□

## 爪型行列式

关键在于化简掉一条爪子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

*Solution.*

(方法一) 递推法

$$D_1 = \alpha + \beta$$

$$D_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

...

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$

...

$$= \beta^{n-1}(D_2 - D_1) = \beta^n$$

$$D_n = \beta^n + \alpha D_{n-1} = \beta^n + \alpha(\beta^{n-1} + \alpha D_{n-2})$$

...

$$= \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \cdots + \alpha^n$$

(方法二) 数学归纳法

if  $\alpha = \beta, D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2, \text{assume}, D_{n-1} = n\alpha^{n-1}$

then  $D_n = D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = (n+1)\alpha^n$

when  $\alpha \neq \beta, D_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, D_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta},$

Assume,  $D_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{then},$

$$D_n = \dots = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

(方法三) 二阶差分方程

$$D_n - (\alpha + \beta)D_{n-1} + \alpha\beta D_{n-2} = 0$$

$$D_{n+2} - (\alpha + \beta)D_{n+1} + \alpha\beta D_n = 0$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$r^2 - (\alpha + \beta)r + \alpha\beta = 0$$

$$r_1 = \alpha \quad r_2 = \beta$$

差分方程的关键  $r^n$  代换  $e^{rx}$ 如果  $\alpha = \beta$ 

$$D_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n, D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2$$

$$\text{得到 } C_1 = C_2 = 1, D_n = (n+1)\alpha^n$$

如果  $\alpha \neq \beta$ 

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \text{由 } D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2$$

$$C_1 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, C_2 = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}$$

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

□

**Corollary 1.1.1.** 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \alpha = \beta \\ \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

## 1.2 代数余子式求和

**Remark.** 代数余子式求和的基本办法

- (1) 代数余子式的定义 (求一个的时候使用)
- (2) 展开定理 (求一行或者一列的时候使用)
- (3) 利用伴随矩阵的定义 (求全部代数余子式的时候使用)

5. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则  $A_{41} + A_{42} + A_{43} =$  \_\_\_\_\_,  $A_{44} + A_{45} =$  \_\_\_\_\_

*Solution.*



(方法一) 利用展开定理构建新的矩阵来计算

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{44} + A_{45} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

但这样  $|A| = 27$  的条件就没用到

(方法二)

直接对第四行使用展开定理, 则

$$|A| = A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2A_{44} + 2A_{45} = 27$$

直接对第二行使用展开定理, 则

$$|A| = 2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + A_{44} + A_{45} = 0$$

相当于解  $A + 2B = 27, 2A + B = 0$ , 容易计算  $A_{41} + A_{42} + A_{43} = -9, A_{44} + A_{45} = 18$   $\square$

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则  $|A|$  的所有代数余子式的和为\_\_\_\_\_

**Solution.** 对于求所有代数余子, 基本都是考察  $A^*$  的定义, 即

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

又由于  $A^* = |A| A^{-1}$ , 对于这道题

$$|A| = (-1)^{(n+1)} n!$$

$A^{-1}$  可以通过分块矩阵来求

$$\begin{aligned} |A|A^{-1} &= |A| \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ \hline n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)^{-1} \\ &= |A| \left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n} \\ \hline \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}) & 0 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n}|A| \\ \hline \text{diag}(|A|, \frac{|A|}{2}, \dots, \frac{|A|}{n-1}) & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

则所有代数余子式之和为

$$(-1)^{(n+1)} n! \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

□

## 1.3 抽象行列式的计算

**Remark.** 抽象行列式的计算方法

- (1) 通过行列式的性质
- (2) 行列式的公式 (7 个)

7. (2005, 数一、二) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量,  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$ . 若  $|A| = 1$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$

*Solution.*

(方法一利用性质)

$$\begin{aligned}
 B &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) \\
 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3) \\
 &= 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3) \\
 &= 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
 |B| &= 2|A| = 2
 \end{aligned}$$

(方法二分块矩阵)

$$\begin{aligned}
 B &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\
 |B| &= |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = |A|(2-1)(3-1)(3-2) = 2
 \end{aligned}$$

□

8. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha, \beta$  为  $n$  维列向量. 若  $|A| = a$ ,  $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$ , 则  $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} =$

---

*Solution.* 这道题的关键在于巧妙构建行列式的和

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \alpha + 0 \\ \beta^T & b + c - b \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c - b \end{vmatrix} \\
 &= |A|(c - b) = a(c - b)
 \end{aligned}$$

□

9. 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $B = 2 \begin{pmatrix} (2A)^{-1} - (2A)^* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  若  $|A| = -1$ , 则  $|B| =$  \_\_\_\_\_

**Solution.** 这道题比较纯粹就是行列式公式的应用

$$\begin{aligned} |B| &= 2^4 |A| \cdot |(2A)^{-1} - (2A)^*| \\ &= 2^4 |A| \cdot \left| \frac{1}{2} A^{-1} - 2A^* \right| \\ &= 2^4 \left| \frac{1}{2} E - 2|A| \right| = 100 \end{aligned}$$

□

10. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ ,  $A \neq E$ , 证明  $|A| = 0$

#### 易错点

由  $|A|^2 = |A| \implies |A| = 1$  或  $= 0$ , 又  $A \neq E \implies |A| \neq 1$ , 故  $|A| = 0$  注意矩阵不等关系是无法推出行列式的不等关系的, 矩阵式数表只要顺序不同就不一样, 但不是一样的矩阵其行列式完全有可能相等.

等于 1 的矩阵并非只能是  $E$

**Solution.**

(方法一, 反证法) 若  $|A| \neq 0$ , 则  $A$  可逆, 对于等式  $A^2 = A$  两边同乘  $A^{-1}$ , 则  $A = E$  与题设矛盾, 故  $|A| \neq 0$

(方法二, 秩) 由于  $A(A - E) = 0 \implies r(A) + r(A - E) \leq n$ , 又  $A \neq E, r(A - E) \geq 1$ , 故  $r(A) \leq n$ , 故  $|A| = 0$

(方法三, 方程组) 由于  $A(A - E) = 0$ , 且  $A \neq E$  可知方程  $AX = 0$  有非零解即  $(A - E) \quad$ , 故  $r(A) < n, |A| = 0$

(方法四, 特征值与特征向量) 由于  $A(A - E) = 0, A \neq E$ , 取  $A - E$  的非零列向量  $\beta \neq 0, A\beta = 0$  故由特征值与特征值向量的定义,  $A$  有特征值 0, 而  $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0$  □

**总结**

若  $AB = 0$  有如下结论

(1)  $r(A) + r(B) \leq n$

(2)  $B$  的列向量均为方程  $AX = 0$  的解

(3) 若  $A_{n \times n}$ , 则  $B$  的非零列向量均为  $A$  的特征值为 0 的特征向量