第一章　统计初步

1.1　求统计量的抽样分布

Remark. 样本均值与方差

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}nX_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$E\bar{X}=\mu,D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n},ES^2=\sigma^2$来自同一总体的样本均值与方差是独立的

有偏估计量 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 其 $ES_n^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

统计的三大分布

χ^2 分布的定义

设随机变量 $X_1,X_2,...,X_n$ 相互独立, 均服从 $N(0,1)$ 称 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记 $\chi^2\sim\chi^2(n)$, 特别的若 $X\sim N(0,1)$, 则 $\chi^2\sim\chi^2(1)$

χ^2 分布的性质

(1) 参数可加性　　设 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立, 且 $\chi_1^2\sim\chi^2(n),\chi_2^2\sim\chi^2(m)$ 则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n+m)$

(2) 设 $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 则 $E\chi^2=n,D\chi^2=2n$

F 分布的定义

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$, 称 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 n_1,n_2 的 F 分布, 记作 $F\sim F(n_1,n_2)$

F 分布的性质

(1) 设 $F\sim F(n_1,n_2)$, 则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

(2) $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)=\frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$

t 分布的定义　　设随机变量 X 和 Y 相互独立,$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$, 则称 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T\sim t(n)$

t 分布的性质

(1) 设 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1,n)$, $\frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

(2) $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

Remark. 单正态总体与双正态总体

单正态总体

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差, 则

(1) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 即 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

双正态总体

设总体 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, 总体 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right), X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本且相互独立, 样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 , 则

(4) $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(5) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-1\right)$;

(6) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1+n_2-2\right)$, 其中 $S_\omega = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

$$(A)\ \alpha \quad (B)\ 1-\alpha \quad (C)\ 2\alpha \quad (D)\ 1-2\alpha$$

Solution. 这道题考察的是 t 分布的对称性, 由题有

$$Y = \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n)} \qquad X = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

则有 $X^2 = Y$, 所求概率就变成 $P\{X^2 > c^2\}$ 由 t 分布的对称性有 $P\{X^2 > c^2\} = 2\alpha$ □

总结

正态分布与 t 分布具有相似的概率密度图像,F 分布与 χ^2 分布也有类似的图像.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

Solution. 这种题就是一步一步反推, 注意凑题目要求的结果即可

$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$ 同理 $Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

由 Y_1, Y_2 独立, 知道 $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2}) \implies \frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

又有 $\frac{2s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$, 故

$$\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\sigma^2/2}\sqrt{\frac{2s^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{s} \sim t(2)$$

□

1.2 求统计量的数字特征

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(nX_j - \sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] =$$

Solution. 这道题就是个凑系数化简, 过程省去 原式 $= n^3(n-1)\mu\sigma^2$ □

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

 (1) 求 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$ 的分布

 (2) 求 $E[(\bar{X}^2S^2)^2]$;

Solution.

(1) 和例题 3 一致, 过程省去 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,8)$

(2) 对于这种高幂次的一般都需要考虑用 χ^2 的结论

$$\begin{aligned} E\left[(\bar{X}^2S^2)^2\right] &= E\bar{X}^4 \cdot ES^4 \\ &= \left[D\bar{X}^2 + (E\bar{X}^2)^2\right]\left[DS^2 + (ES^2)^2\right] \\ &= \frac{5}{107}\sigma^8 \end{aligned}$$

又 $\frac{9\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \implies D\bar{X}^2 = \frac{2\sigma^4}{81}$ 同理有 $DS^2 = \frac{\sigma^4}{4}$ □