第一章　特征值与特征向量

1.1　特征值与特征向量的计算

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

2. (2003, 数一) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}A^*P$$

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

Solution. 【详解】 □

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2 = O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

   (a) (A) 0

   (b) (B) 1

   (c) (C) 2

   (d) (D) 3

   Solution. 【详解】 □

5. 设 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$，其中 α, β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta = \frac{1}{3}$，证明：

   (a) (I) 0 为 A 的特征值；

   (b) (II) $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 为 A 的特征向量；

   (c) (III) A 可相似对角化。

   Solution. 【详解】 □

1.2 相似的判定与计算

6. (2019, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   (I) 求 x, y 的值；(II) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$。

   Solution. 【详解】 □

7. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，满足 $A^2 = 2E$，则 $|AB + A - B - E| =$ _______________。

   Solution. 【详解】 □

1.3 相似对角化的判定与计算

8. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 3, -2，对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若

$$P = (\alpha_1, 2\alpha_2, -\alpha_3)$$

则 $P^{-1}AP =$ ______________。

Solution.【详解】 □

9. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明 A 可相似对角化。

Solution.【详解】 □

10. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

    (a) (I) 证明 P 为可逆矩阵；

    (b) (II) 若 $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution.【详解】 □

1.4 实对称矩阵的计算

11. (2010, 数二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ 4 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)^T$，求 a, Q。

Solution.【详解】 □

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O$，A 的各行元素之和均为零，且 $r(A) = 2$。

(a) (I) 求 A 的特征值与特征向量;

(b) (II) 求矩阵 A。

Solution. 【详解】 □