第一章　线性方程组

1.1　知识体系

- 线性方程组
  - 解的性质与判定
    - 性质
    - 判定
      - $Ax=0$
        - $Ax=0$只有零解 $\iff r(A)=n$
        - $Ax=0$有非零解 $\iff r(A)<n$
      - $Ax=b$
        - $Ax=b$无解 $\iff r(A)<r(\bar{A}) \iff r(A)=r(\bar{A})-1$
        - $Ax=b$有唯一解 $\iff r(A)=r(\bar{A})=n$
        - $Ax=b$有无穷多解 $\iff r(A)=r(\bar{A})<n$
  - 解的结构
    - $Ax=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
    - $Ax=b$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$
  - 矩阵方程
    - 定义 $AX=B$
    - 判定
      - $AX=B$无解 $\iff r(A)<r(A\mid B)$
      - $AX=B$有唯一解 $\iff r(A)=r(A\mid B)=n$
      - $AX+B$有无穷多解 $\iff r(A)=r(A\mid B)<n$
    - 求法 $(A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵

- 线性方程组
  - 公共解与同解
    - 公共解
      - 定义
      - 求法
    - 同解
      - 定义
      - 充要条件
        - A, B的行向量组等价
        - $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(B)$

1.2 解的判定

1. (2001, 数三) 设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量, 且 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$，则线性方程组

   (A) $Ax = \alpha$ 有无穷多解

   (B) $Ax = \alpha$ 有唯一解

   (C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

   (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

Solution

2. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = m < n$，则下列结论不正确的是

   (A) 线性方程组 $A^T x = 0$ 只有零解

   (B) 线性方程组 $A^T Ax = 0$ 有非零解

   (C) $\forall b$，线性方程组 $A^T x = b$ 有唯一解

   (D) $\forall b$，线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

Solution

1.3 求齐次线性方程组的基础解系与通解

1. (2011, 数一, 二) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶矩阵, $(1,0,1,0)^T$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

   (A) α_1,α_2

   (B) α_1,α_3

   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

   (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

   Solution

2. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a,b,c), a,b,c 不全为零, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ 满足 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解。

   Solution

3. (2002, 数三) 设线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n &=0\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n &=0\\ bx_1+bx_2+ax_3+\cdots+bx_n &=0\\ \vdots & \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n &=0 \end{cases}$$

   其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2$。当 a,b 为何值时，方程组只有零解、有非零解，当方程组有非零解时，求其通解。

   Solution

1.4 求非齐次线性方程组的通解

求特解的方法

1. 对于抽象矩阵, 用定义和性质凑一个特解 $\sum k_i\mu_i(\sum k_i = 1)$
2. 对于数字矩阵,$\bar{A} \to$ 行最简型 让自由变量取 0

1. 设 A 为 4 阶矩阵, k 为任意常数, η_1, η_2, η_3 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解, 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

若 $r(A) = 3$ 则 $Ax = b$ 的通解为 ()

$(A)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(C)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(D)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution

由题设可知 $r(A) = 3$, 可知 $Ax = 0$ 基础解系里面有 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$ 个线性无关的向量. 根据解的形式可知要凑一个 $\sum k_i = 0$

$$3(\mu_1 + \mu_2) - 2(\mu_2 + 2\mu_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

为基础解系, 凑一个 $\sum k_i = 1$ 为特解, 考虑选项可知

$$2(\mu_1 + \mu_2) - (\mu_2 + 2\mu_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

为特解, 故其通解为

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

2. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 其中 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明 $r(A)=2$;

(II) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

Solution

(1) 由于 A 具有三个不同的特征值可知 A 可相似对角化即 $P^{-1}AP=\Lambda$ 故 $r(A)=r(\Lambda)\geq 2$ 又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可知 A 的列向量组的极大无关组至多为 2, 故 $r(A)\leq 2$ 综上 $r(A)=2$

(2) 由于 $r(A)=2$, $Ax=0$ 的基础解系里有 $n-r(A)=3-2=1$ 个线性无关的向量, 又因为

$$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$$

故基础解系为 $\xi\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 又因为 $\beta=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\mu$ 故通解为 $\mu+k\xi$, 其中 k 为任意常数

3. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解.

(I) 求 λ,a 的值;

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解。

Solution

(1) 有题设可知 $Ax=b$ 有无穷多解, 即 $r(A)=r(\bar{A})<3$ 对增广矩阵做初等行变换有

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a+1-\lambda\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ a=-2\end{cases}$$

(2) 将 $\bar{A}$ 经过初等行变换转换为行最简型有

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知其基础解系和特解分别为

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

故该方程组的通解为 $\eta+k\xi$, 其中 k 为任意常数

4. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 且 $r(A)=r$, 若 $\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-r}$ 为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系,η 为非其次线性方程组 $Ax=b$ 的特解, 证明:

(I) $\eta,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ 线性无关

(II) $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关;

(III) $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 为 $Ax=b$ 所有解的极大线性无关组。

Solution

(1) 用定义证明, 设 $\exists k_1,\ldots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0\eta+k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0 \tag{*}$$

* 式左乘 A, 可知 $k_0b=0$ 又 $b\neq 0$ 故 $k_0=0$ 将其值带回 * 式可知

$$k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$$

又因为 ξ_i 之间线性无关, 可知 $k_1=\ldots=k_{n-r}=0$ 故由线性无关的定义可知

$\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) 方法一: 用定义

设 $\exists l_0, \ldots, l_{n-r}$ 使得

$$l_0\eta + l_1(\eta + \xi_1) + \ldots + l_{n-r}(\eta + \xi_{n-t}) = 0$$

即

$$(l_0 + \ldots + l_{n-r})\eta + l_1\xi_1 + \ldots + l_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

由以可知上面的系数都为 0, 即 $l_i = 0$ 从而原命题成立

方法二: 用秩证明

$$\begin{aligned}
&(\eta, \eta + \xi_1, \ldots, \eta + \xi_{n-r}) \\
&= (\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\
&= (\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}) A_{(n-r+1)\times(n-r+1)}
\end{aligned}$$

有 (1) 可知 $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r})$ 线性无关, 即列满秩, 故有

$$r(\eta, \eta + \xi_1, \ldots, \eta + \xi_{n-r}) = r(A) = n - r + 1$$

由线性无关的充要条件可知, 该向量组线性无关.

(3) 由 (2) 可知 $(\eta, \eta+\xi_1, \ldots, \eta+\xi_{n-r})$ 为方程 $Ax = b$ 线性无关的解, 且 $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 可由其线性表示, 并且 $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 可表示所有解. 从而可知 $(\eta, \eta+\xi_1, \ldots, \eta+\xi_{n-r})$ 亦可以表示所有解, 故而其为所有解的极大线性无关组.

(非) 齐次方程解的个数

齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系 (解的极大无关组) 中解的个数为 $n - r$

有上题的 (3) 可知, 方程 $Ax = b$ 解的极大无关组中解的个数为 $n - r + 1$

5. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2 = O$, 非齐次线性方程 $Ax = b$ 有解, 则 $Ax = b$ 的线性无关解向量的个数为 ____

Solution

由 $A^2 = A{\cdot}A = O \implies r(A)+r(A) \le 3 \implies r(A) \le 1$ 又因为 $A \ne O$ 可知 $r(A) = 1$, 由上述结论可知 $Ax = b$ 的线性无关解的个数为 $n - r(A) + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$ 个.

6. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \ne O, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解, 则 $Ax = b$ 的线性无关解向量的个数为 ____

Solution

由 $A^* \ne O \implies r(A^*) \ge 1 \implies r(A) = n - 1$或$n$, 有题设可知 $Ax = b$ 有无穷多解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 从而 $r(A) = n - 1$, 由结论可知 $Ax = b$ 的线性无关解的个数为 $n - r(A) + 1 = n - n + 1 + 1 = 2$ 个

1.5 解矩阵方程

解 $Ax = B$ 三种方法

(方法一) 若 A 可逆, 此时 $X = A^{-1}B$

(i) 先求 A^{-1}, 再做 $A^{-1}B$ 一般不用

(ii) 联立做初等行变换 $(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$

(方法二) 若 A 不可逆, 且是二阶的时候直接待定系数

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

(方法三) 若 A 不可逆且, 大于二阶. 用分块 (按列) 矩阵乘法

$$A(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \implies \begin{cases} Ax_1 = \beta_1 \\ Ax_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ Ax_n = \beta_n \end{cases}$$

转换为求解非齐次方程组, 此时联立

$$(A \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简型}$$

变种 若矩阵方程为 $XA=B$ 则转换为 $A^TX^T=B^T$

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$ 矩阵 X 满足 $AX+E=A^{2022}+2X$，求矩阵 X。

Solution

有题 $r(A)=1$ 可知 $A^{2022}=[tr(A)]^{2021}A=A$ 此时原矩阵方程可以转换为

$$(A-2E)X=A-E$$

此时联立, 做初等行变换

$$\begin{pmatrix}-3&0&1&-2&0&1\\1&-2&-1&1&-1&-1\\-2&0&0&-2&0&1\end{pmatrix}\to\left(E\quad\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

2. (2014, 数一、二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$

(I) 求线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B。

Solution

直接联立 A,E 做初等行变换, 可以一次把两道题一起做了.

$$(A\mid E)\to\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$$

通过左边的矩阵可以解出基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ 通过右边的矩阵, 可以解出 B, 此

时结果为

$$B=\begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -2-k_3 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

分块矩阵解矩阵方程的注意点

解非齐次方程时候, 自由变量取 k, 解其余变量.

1.6 公共解的判定与计算

公共解的三种情况

(情况一) 已知两个方程组 (直接联立)

(情况二) 已知一个方程组与另一个方程组的通解, 将该通解带入方程组

(情况三) 已知两个方程组的通解 (令通解相等)

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$(II)x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

Solution

直接联立 I, II 有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

此时讨论参数 a 的值

(当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$) 此时 $r(A) < r(\bar{A})$ 无公共解

(当 $a = 1$ 时) 公共解为 $k(-1, 0, 1)^T$ 其中 k 为任意常数

(当 $a = 2$) 只有唯一解 $(0, 1, -1)^T$

13. 设齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解，并求所有非零公共解。

Solution

(I) 比较简单答案是 $k_1(5, -3, 1, 0)^T + k_2(-3, 2, 0, 1)^T$ 其中 k_1, k_2 为任意常数

(II, 方法一) 令 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_3\alpha_1 + k_4\alpha_4$ 则有

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 - k_3\alpha_1 - k_4\alpha_4 = 0$$

可以转换为求解齐次方程组 $(\xi_1, \xi_2, -\alpha_1, -\alpha_2)k = 0$ 的解

(II, 方法二) 将

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2m_1 - m_2 \\ 2m_2 - m_1 \\ (a+2)m_1 + 4m_2 \\ m_1 + (a+8)m_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \end{array}$$

代入方程组 (I) 有 $\begin{cases}(a+1)m_1=0\\(a+1)m_2=0\end{cases}$ 当 $a\neq -1$ 时候,$m_1=m_2=0$ 此时只有零解不合题意舍去

当 $a=-1$ 时候, 非零公共解为 $m_1\alpha_1+m_2\alpha_2$ 其中 m_1,m_2 为任意常数

1.7 方程组同解

同解问题的求法

(1) 方程组同解的定义

(2) 秩 (三秩相等) $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$ 即行向量组等价

1. (2005, 数三) 设线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值, 并求出同解.

Solution

联立 A,B 有

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc}1&2&3\\0&1&1\\0&0&a-2\\\hline 0&0&c-b-1\\0&0&c-b^2-1\end{array}\right)$$

不要忘记单独讨论 B 的秩, 由方程组同解可知 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$ 且显然由 $r(A)\geq 2, r(B)\leq 2$ 秩应该为 2, 此时可以解出

$$\begin{cases}a=2\\b=0\\c=1\end{cases} \quad \text{或} \begin{cases}a=2\\b=1\\c=2\end{cases}$$

注意当 $\begin{cases}a=2\\b=0\\c=1\end{cases}$ 时 $r(B)=1$ 不满足条件, 应该舍去. 由于它们都同解, 随便解一个方程即可. 不妨解 $Ax=0$, 即

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可知基础解系为 $\xi=(1,1,-1)^T$ 故两个方程的同解为 $k\xi$,k 为任意常数.