第一章　二维随机变量

1.1　联合分布函数的计算

Remark. (联合分布函数的性质)

(1) $0 \leq F(x,y) \leq 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减

(2) $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均右连续

(4) $P\{a < X \leq b, c < Y \leq b\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

(5) $F_X(x) = F(x, +\infty), F_Y(y) = F(+\infty, y)$

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim B(1,p)$,$Y \sim E(\lambda)$, 则 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y) =$_____.

Solution. 由 X 和 Y 相互独立, 则有 $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), f(x,y) = f_X(x)F_Y(x)$,$X$ 的概率分布如下:

X	0	1
P	$1-p$	p

则 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

而 $Y \sim E(\lambda)$, 故

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} (1-p)(1-e^{-\lambda y}), & 0 \le x < 1,\ y > 0 \\ 1-e^{-\lambda y}, & x \ge 1,\ y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

1.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。

   (a) 求在 $X+Y=n(n \ge 2)$ 的条件下,X 的条件概率分布;

   (b) 求 $P\{X+Y \ge n\}(n \ge 2)$.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned} P\{X+Y=n\} &\xlongequal{\text{几何分布从 1 开始}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X=k, Y=n-k\} \\ &\xlongequal{\text{独立性}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p \cdot (1-p)^{n-k-1}p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}p^2 \\ &= (n-1)(1-p)^{n-2}p^2 \end{aligned}$$

在 $X+Y=n$ 的条件下,X 的条件概率为

$$\begin{aligned} P\{X=k \mid X+Y=n\} &= \frac{P\{X=k, Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-2} \end{aligned}$$

$k = 1, 2 \ldots n-1$这个范围千万别忘喽!

(2)

$$\begin{aligned}P\{X+Y\geq n\}&=P\{X+Y=n\}+P\{X+Y=n+1\}+\dots\\&=\sum_{k=n}^{+\infty}P\{X+Y=k\}\\&=\sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}\end{aligned}$$

不妨先计算级数 $\sum_{k=n}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}(k-1)x^{k-2}&=\sum_{k=n}^{\infty}(x^{k-1})'\\&=\left(\frac{\sum_{n=k}^{\infty}}{x}\right)'\\&=\frac{(n-1)x^{n-2}(1-x)+x^{n-1}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

故当 $x=1-p$ 的时有

$$\begin{aligned}P\{X+Y\geq n\}&=p^2\frac{(n-1)(1-p)^{n-2}p+(1-p)^{n-1}}{p^2}\\&=(1-p)^{n-2}(np-2p+1)\end{aligned}$$

□

1.3 二维连续型随机变量分布的计算

Remark. 主要内容

联合概率密度的性质

(1) $f(x,y)\geq 0,-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$;

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy$;

(4) 在 $f(x,y)$ 的连续点处有 $\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

边缘概率密度

(1) (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

(2) (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

条件概率密度

(1) 在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

(2) 在 $X=x$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

3. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution.

(方法一正常求) 首先通过规范性求出参数 A

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{Possion 积分}} A\pi = 1 \implies A = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, x \in \mathbf{R}\end{aligned}$$

则在 $X=x$ 的条件下,Y 的条件概率为

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}\end{aligned}$$

(方法二, 通过二维正态分布) 形如 $f(x,y) = Ae^{ax^2+bxy+cy^2}$ 的函数如果是概率密度, 则其一定是某个二维正态的概率密度函数, 故

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$$

通过下一节讲的确定系数的办法, 可以很快的确定

$$(X,Y) \sim N(0,0;\frac{1}{2},1;\frac{\sqrt{2}}{2})$$

故 $A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ □

4. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(x,1)$。
   (a) 求 (X,Y) 的联合概率密度;
   (b) 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;
   (c) 求 $P\{X+Y>1\}$.

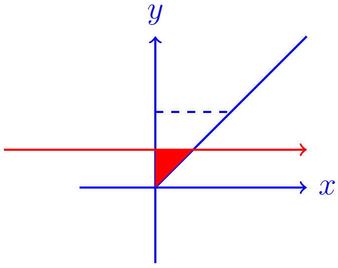
Solution.

(1) 在 $X = x$ 的条件下,Y 的条件概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

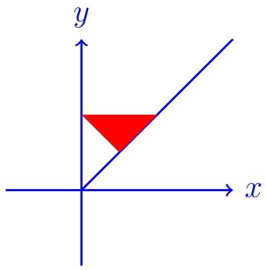
故 $f(x,y) = f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0<x<1, x<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) 通过概率密度求边缘密度的时候, 需要画出 x-y 图, 并且确定要求的那个参数的范围, 比如说这里是 $y \in (0,1)$, 让后再从 [0,1] 上面去做偏积分, 具体如图所示



$f_Y(y) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(3) 根据性质 (3) 有 $P\{X+Y>1\} = \iint\limits_{x+y<1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 此时 x-y 的可行范围为



$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{1/2}^{1} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{y} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^{1} [\ln y - \ln(1-y)]\, \mathrm{d}y \\
&= [y \ln y - (1-y)\ln(1-y)] \Big|_{1/2}^{1} \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

□

1.4 关于二维正态分布

Remark. 二维正态分布的性质　　设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则

(1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 反之不成立 (独立的时候反之成立);

(2) X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关 $(\rho = 0)$;

(3) $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$; 特别地, 若 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$;

(4) 若 $U = aX + bY, V = cX + dY$, 即 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 则 (U,V) 服从二维正态分布 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

5. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 2; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 (a, b) 可以为

$$(A)\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \quad (B)\ \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \quad (C)\ \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad (D)\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Solution. 由性质 (3) 可知 $aX + bY \sim N$, 而由正态分布的对称性可知,$\mu = 1 \Longrightarrow a + 2b = 1$ 故选择 (D) □

6. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

$$(A)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y) \quad (B)\ \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\ (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \quad (D)\ \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$$

Solution. 这道题选择出来并不困难, 但要证明其与 X 相互独立还是有点说法的.

第一步, 先求 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的标准化

由性质三可知 $X+Y \sim N(0,3), X-Y \sim N(0,7)$, 故 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sin N(0,1); \frac{\sqrt{7}}{7} \sim N(0,1)$;

这里其时就已经可以选出答案喽

第二步证明独立性

考虑 $(X+Y,X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

由性质 (4) 可知,$(X+Y,X)$ 服从二维正态分布, 由性质 (2) 可知, 只需要证明二者的相关系数为 0 即可, 证明二者独立.

□

7. (2022, 数一) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

$$(A)\ \frac{1}{4} \quad (B)\ \frac{1}{2} \quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution.

(方法一传统方法计算)

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

问题转换为求 EXY, DY, 由题设可知, 在 $X=x$ 的条件下,Y 的概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$$

故 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$$

故 y 的边缘分布函数为

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$$

即 $Y \sim N(0,2)$, 故 $EY=0, DY=2$ 而 EXY 根据方差的定义可以计算

TODO: 计算 EXY

$$EXY = \int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

故 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 通过二维正态参数的结论直接求出 ρ, 由上述可知 $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$, 对比二维正态概率密度的公式

$$f(x,y) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2^2}\right]\}$$

容易得出 $(X,Y) \sim N(0,0;1,2;\frac{\sqrt{2}}{2})$, 具体如总结所示. □

总结

对于形如 $Ae^{-ax^2+bxy+cy^2}$ 的式子, 若其是概率密度, 则必然是某个二维正态的概率密度 (由规范性) 且满足

(1) $b^2 = 4\rho^2a^2c^2 \implies \rho^2 = \frac{b^2}{4a^2c^2}$

(2) rho 的符号与 xy 系数的符号一致

1.5 求二维离散型随机变量函数的分布

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X \sim P(\lambda_1)$,$Y \sim P(\lambda_2)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布.

Solution. 这道题是参数可加性的直接考察, 可以先证明一下

$$\begin{aligned}
P\{Z=n\} &= P\{X+Y=n\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\} \\
&\xlongequal{\text{独立性}} \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&\xlongequal{\text{上下同乘}k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&\xlongequal{\text{二项式定理}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}$$

□

参数可加性

当 X, Y 独立的时候

(1) $X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p) \implies X+Y \sim B(n+m,p)$

(2) $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \implies X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

(3) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \implies X+Y \sim (\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

(4) $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), \implies X+Y \sim \chi^2(n+m)$

(5) $X \sim E(\lambda_1), Y \sim E(\lambda_2) \implies \min(X,Y) \sim E(\lambda_1+\lambda_2)$

1.6 求二维连续型随机变量函数的分布

Remark. 问题描述

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$ ，求 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

分布函数法

(1) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$ ，则 $F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{g(X,Y)\leq z\}$.

(2) 求 $Z=g(X,Y)$ 在 (X,Y) 的正概率密度区域的值域 (α,β) ，讨论 z .

$z<\alpha$ 时, $F_Z(z)=0$;

当 $\alpha\leq z<\beta$ 时, $F_Z(z)=\iint_{g(x,y)\leq z}f(x,y)\,dxdy$;

当 $z\geq\beta$ 时, $F_Z(z)=1$.

(3) Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

卷积公式

(1) 设 $Z=aX+bY$ ，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|b|}f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$;

(2) 设 $Z=XY$ ，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$;

(3) 设 $Z=\frac{Y}{X}$ ，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)\,dx$;

(4) 设 $Z=\frac{X}{Y}$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 求:

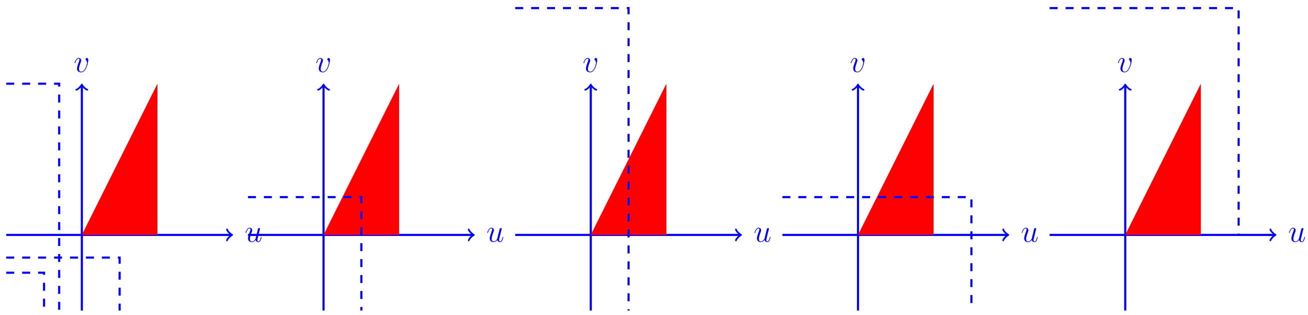
   (a) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

   (b) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

   (c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y),f_{Y|X}(y|x)$;

   (d) $P\left\{Y\leq\frac{1}{2}|X\leq\frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{Y\leq\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\right\}$;

   (e) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.



***Solution*.**

(1) 由定义可知 $F(x,y)=\int_{-\infty}x\int_{-\infty}yf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 x,y 的可行域如下图所示, 分为五个部分故

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y \mathrm{d}v\int_{\frac{v}{2}}^x \mathrm{d}u, & 0<x<1,0<y<2x\\ \int_0^x \mathrm{d}u\int_0^{2u} \mathrm{d}v, & 0<x<1,y\geq 2x\\ \int_0^y \mathrm{d}v\int_{\frac{v}{2}}^1 \mathrm{d}u, & x>1,0<y<2\\ 1, & x\geq 1,y\geq 2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{y^2}{4}-xy, & 0<x<1,0<y<2x\\ x^2, & 0<x<1,y\geq 2x\\ y-\frac{y^2}{4}, & x>1,0<y<2\\ 1, & x\geq 1,y\geq 2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 由定义可知

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) 当0<x<1在 $X=x$ 的条件下,Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当0<y<2在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2}<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4) 对于 $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 可以采用条件概率公式,

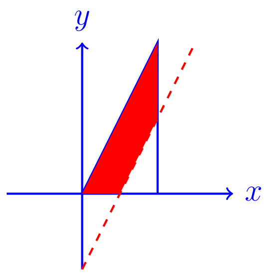
$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{\iint\limits_{y \leq \frac{1}{2}, x \leq \frac{1}{2}} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y}{\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) \mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$$

而对于 $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right\}$ 则不能采用条件概率公式, 因为 $P\{X = \frac{1}{2}\} = 0$ 不能做分母, 此时就体现出来条件概率的用处

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y \mid x) \mathrm{d}y$$

将 $X = \frac{1}{2}$ 带入, 求出该条件概率为 $\frac{1}{2}$

(5) 方法一: 分布函数法



$F_Z(z) = P\{2X - Y \geq Z\} = \iint\limits_{2x - y \leq z} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 绘制 $y \geq 2x - z$, 讨论截距, 如图所示, 其结果如下

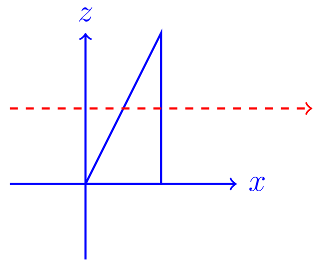
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

方法二: 卷积公式

由卷积公式有 $f_Z(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx$, 此时把 $f(x, y)$ 中的 y 全部转换为 z 并确定 z 的取值范围即

$$f(x, 2x - z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x \implies, 0 < x < 1, 0 < z < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

此时再对 x 进行偏积分即可, 绘制 $x - z$ 图像, 首先确认 z 的范围, 再从 z 上对 x 进行积分



如图, 最终

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 \le z < 2; \\ 0, & \end{cases}$$

□

1.7 求一离散一连续随机变量函数的分布

10. (2020, 数一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,X_1 与 X_2 均服从标准正态分布,X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$,$Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$。

    (1) 求 (X_1, Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);

    (2) 证明 Y 服从标准正态分布.

Solution. 一离散加一连续的基本方法就是" 全概率公式 + 独立性"

(1)

$$\begin{aligned} F(X_1, Y) &= P\{X \le x, Y \le y\} \\ &= P\{X_1 \le x, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \le y\} \\ &\xlongequal{\text{全概率公式}} P\{X_1 \le x, X_2 \le y, X_3 = 0\} + P\{X_1 \le x, X_1 \le y, X_3 = 1\} \\ &\xlongequal{\text{独立性}} P\{X_1 \le x\}P\{X_2 \le y\}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{X_1 \le \min(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

(2) 方法一, 通过 Y 的分布函数确定

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\{Y \le y\} &= P\{X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \le y\} \\ &= (\text{和 (1) 完全一致省去}) \ldots \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

方法二, 直接求边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(X, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = F(+\infty, Y)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$$

故 $Y \sim N(0,1)$ □