第一章　真题与模拟题

备注

▲ 表示难度, 越多越难 ♦ 表示计算量, 越多计算量越大

1.1　数学真题一网打尽

1. ▲▲ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

Solution

显然是一道夹逼定理的题目, 但有几点需要注意.

$$\text{原式}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \xlongequal{n\to\infty} \int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$$

放大这一方向是比较好想的, 重点在于缩小.

$$\text{原式}>\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \xlongequal{n\to\infty} \int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \sin\pi x=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\text{原式}=\frac{2}{\pi}$$

2. ▲▲ 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(\ )$

(A). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{2n}$　(B). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$

(C). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$　(D). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$

解法一 正面突破

这道题显然是考察定积分的定义, 但考察的比较细节.

i 其中 (A)(B) 选项是将区间进行 n 等分的划分, 且取的是区间重点, 如何得知呢? 考虑端点 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ 而

$$\frac{k-1}{n} = \frac{2k-2}{2n} < \frac{2k-1}{2n} < \frac{2k}{2n} = \frac{k}{n}$$

故由定积分的定义, 此时有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n})\cdot\frac{1}{n}$$

ii 其中 (C)(D) 是将区间进行 $2n$ 等分的划分, 取的分别是左/右端点, 这并不影响定积分形式, 应该为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n})\cdot\frac{1}{2n}$$

解法二 选择题不客气!

取 $f(x) = 1$ 则 $\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$, 对应的选项可以直接计算, 结果为

(A) 原式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 1$

(B) 原式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$

(C) 原式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n} = 2 \neq 1$

(D) 原式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{2}{n} = 4 \neq 1$

定积分的定义

定积分的定义有如下几个要点

(1) 将区间 $[a,b]$ 划分为 n 个区域, 其中记

$$\lambda = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \Delta_n\}$$

(2) 取任意区间内的某一点 ξ 取其函数值 $f(\xi)$, 则定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta_i$$

这个 ξ 的选择, 即是上题中的划分, 可以是中点/左边界/右边界等特殊点, 当然也可以是任意非特殊点.

3. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减且非负的连续函数,$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x (n = 1,2,\ldots)$ 证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在

Solution

4. (I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1 (n > 1, n \in \mathbf{N})$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内仅有一个实根

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出此极限

5. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小值

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限

6. 当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 则下列命题中

(1) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

(2) 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

(3) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

(4) 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

A.1,3　B.1,4　C.1,3,4　D.2,3,4

7. 设对任意的 x, 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$( )

   A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零

   C. 一定不存在　　D. 不一定存在

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n)(n=1,2,\ldots)$ 则下列结论正确的是 ( )

   A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛　　B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

   C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛　　D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 且 $a\neq 0$ 则当 n 充分大的时候, 有 ( )

   A. $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　B.$|a_n|<\frac{|a|}{2}$　　C. $a_n>a-\frac{1}{n}$　　D.$a_n<a+\frac{1}{n}$

10. 设有数列 $\{x_n\}$, $-\frac{\pi}{2}\leq x_n\leq\frac{\pi}{2}$ 则 ( )

    A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

    B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

    C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

    C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

11. 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\frac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\ldots)$ 则 $\{a_n\}$( )

    A. 有最大值与最小值　　B. 有最大值无最小值

    C. 有最小值无最大值　　D. 无最大值与最小值

12. ♦♦ 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$

    (1) 求 $\mathrm{d}z$

    (2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

1.2 超越 (11-25 年)

1.3 共创 (22,23,24) 年

1.4 25 年模拟卷 (百来套)