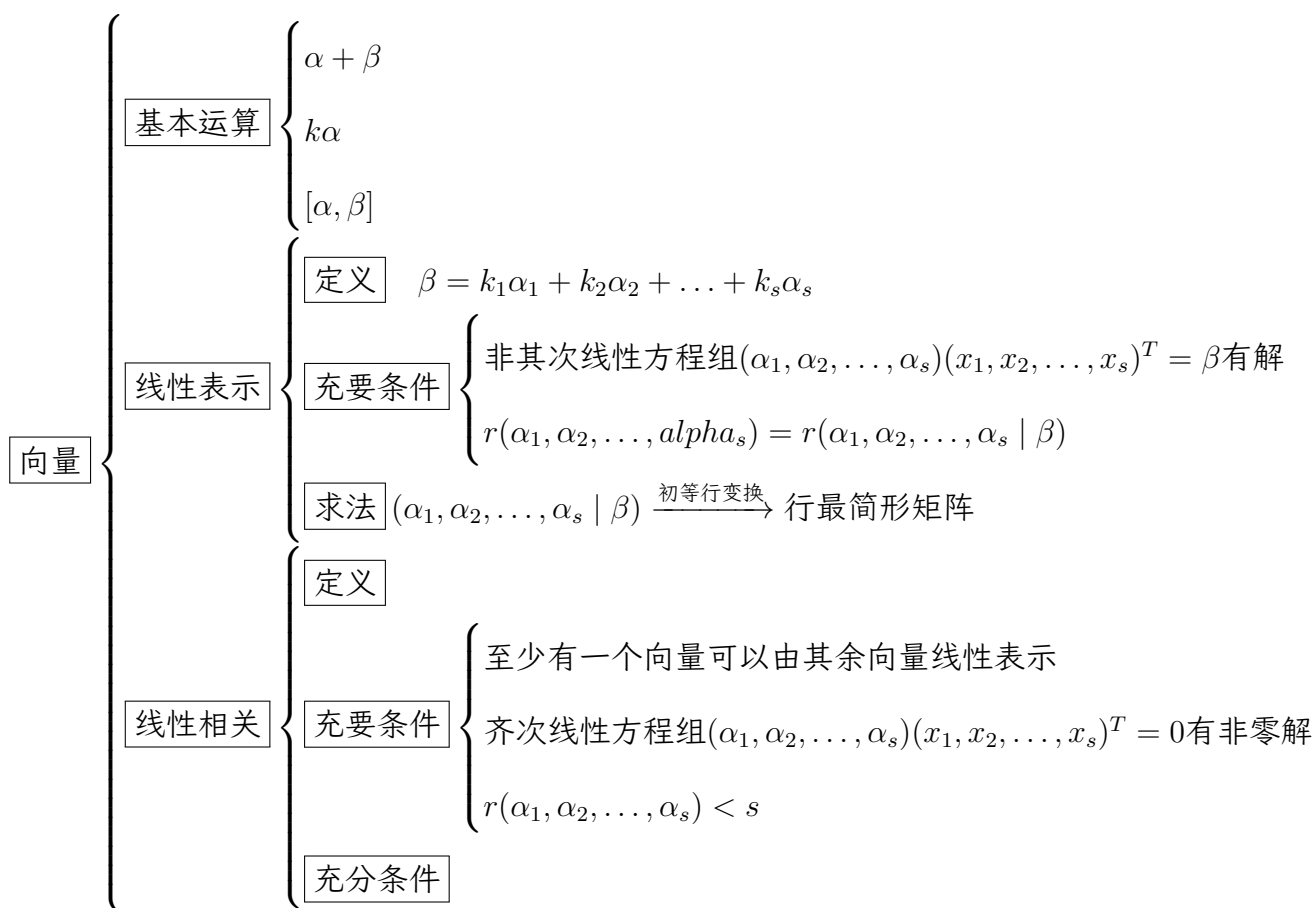
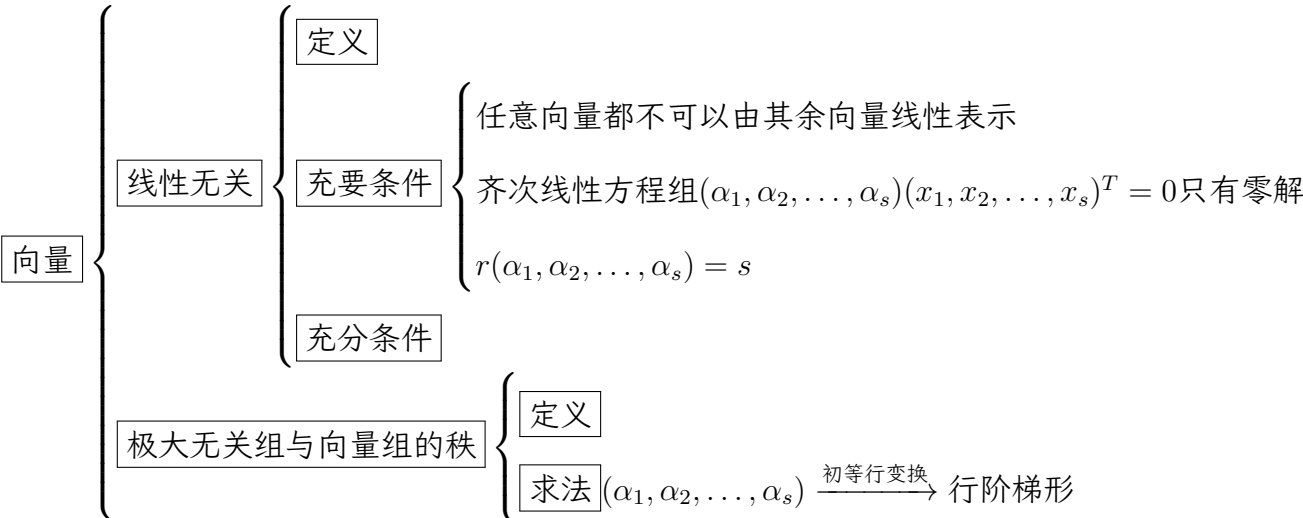


第一章 向量

1.1 知识体系





1.2 线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ ($km \neq 0$), 则

- (A) α, β 与 α, γ 等价
- (B) α, β 与 β, γ 等价
- (C) α, γ 与 β, γ 等价
- (D) α 与 γ 等价

Solution.



2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, a + 2, -3a)^T$, $\alpha_3 = (-1, -b - 2, a + 2b)^T$, $\beta = (1, 3, -3)^T$ 。当 a, b 为何值时,

(I) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式。

Solution.



3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$; 向量组 (II) $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T$, $\beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T$, $\beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$ 。若向量组 (I) 与 (II) 等价, 求 a 的值, 并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

Solution.



1.3 线性相关与线性无关的判定

4. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 则对任意常数 k, l , $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的
- (A) 必要非充分条件
 - (B) 充分非必要条件
 - (C) 充分必要条件
 - (D) 既非充分又非必要条件

Solution.



5. 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量, 满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0$, $A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

Solution.



6. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交, 证明 β_1, β_2 线性相关。

Solution.



1.4 极大线性无关组的判定与计算

7. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, a+2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, a)^T$ 。

(I) 当 a 为何值时, 该向量组线性相关, 并求其一个极大线性无关组;

(II) 当 a 为何值时, 该向量组线性无关, 并将 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 由其线性表示。

Solution.



8. 证明:

(I) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$;

(II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 。

Solution.



1.5 向量空间 (数一专题)

Remark. 向量空间

过渡矩阵

由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$ 即 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

坐标转换公式

设向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中的坐标为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中的坐标为 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 则坐标转换公式为 $x = Cy$

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ 。

(a) (I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基:

(b) (II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ 。

Solution.

