姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 14 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 14 日

目录

第一章　一元函数微分学

1.1　导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

   A　$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B　$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

   C　$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D　$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

   Solution.

□

2. (2001, 数一) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

   (A) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在 (B) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

   (C) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在 (D) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

   Solution.

□

3. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$, 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

Solution.

□

1.2 导数与微分的计算

Remark (类型一分段函数求导).

4. (1997, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$($A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

Solution.

□

Remark (类型二复合函数求导).

5. (2012, 数三) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$,$y=f(f(x))$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

Solution.

□

Remark (类型三隐函数求导).

6. (2007, 数二) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定。设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx}\big|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$

Solution.

□

Remark (类型四反函数求导).

7. (2003, 数一、数二) 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$,$x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数。

   (i) 将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程

   (ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0$,$y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解

Solution.

□

Remark (类型五参数方程求导).

8. (2008, 数二) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u)du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solution.

□

Remark (类型六高阶导数).

9. (2015, 数二) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$__

Solution.

□

1.3 导数应用-切线与法线

Remark (类型一直角坐标表示的曲线).

10. (2000, 数二) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

Solution.

□

Remark (类型二参数方程表示的曲线).

11. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为__

Solution. 【详解 □

Remark (类型三极坐标表示的曲线).

12. (1997, 数一) 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为__

Solution.

□

1.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

Solution.

□

14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

Solution.

□

1.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

Solution.

□

1.6 导数应用-极值与最值

17. (2000, 数二) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 且 $f'(0)=0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

Solution.

□

18. (2010, 数一、数二) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值

Solution.

□

19. (2014, 数二) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值

Solution.

□

1.7 导数应用-凹凸性与拐点

20. (2011, 数一) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

    (A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

    Solution.

□

1.8 导数应用-证明不等式

21. (2017, 数一、数三) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(*A*) $f(1) > f(-1)$ (*B*) $f(1) < f(-1)$ (*C*) $|f(1)| > |f(-1)|$ (*D*) $|f(1)| < |f(-1)|$

Solution.

□

22. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a)=0$,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$。设 $b>a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$, 证明 $a<x_0<b$。

Solution.

□

1.9 导数应用-求方程的根

23. (2003, 数二) 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数。

Solution.

□

24. (2015, 数二) 已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数。

Solution.

□

1.10 微分中值定理证明题

Remark (类型一证明含有一个 ξ 的等式).

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$。证明:

  (i) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

  (ii) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

Solution.

□

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(1)=0$, 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

Solution.

□

Remark (类型二证明含有两个点的等式).

27. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,f(1)=1$。证明:

    (i) 存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$;

    (ii) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$。

    Solution.

□

Remark (类型三证明含有高阶导数的等式或不等式).

28. (2019, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = 1$。证明:

(i) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(ii) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$。

Solution.

□