考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 29 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 29 日

目录

第一章　多元函数微分学

1.1　多元函数的概念

Remark. 多元函数微分学的概念

可微的概念 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义, 且其全增量可以写成

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 其中 A,B 为不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 而仅与 x_0, y_0 有关, 则其在 (x_0,y_0) 可微

全微分 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 则其全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y \xlongequal{\text{可微的必要条件}} f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

可微的必要条件 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 $f(x,y)$ 在该点连续, 且两个偏导数都存在

可微的充分条件 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在, 且作为二元函数在该点连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

1. 例 1 求下列重极限:

   (1)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}\quad(\alpha\geq0,\beta\geq0)$;

   (2)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

   (3)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

   Solution. (1) 即总结

   (2) 重极限也满足极限的四则运算故

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^3y}{x^2+y^2} - \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

由结论可知 原式 $=0$

(3)

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}=0$$

□

求重极限的技巧

若需要计算重极限, 考虑极坐标换元通常比较简单. 对于形如

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$$

只需要做极坐标换元即可

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{r\to0^+}\frac{r^{\alpha+\beta}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta}{r^2},(\theta\in[0,2\pi])\\&=\begin{cases}0, & \alpha+\beta-2>0\\ \text{不存在}, & \alpha+\beta-2\le0\end{cases}\end{aligned}$$

2. (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

Solution. (方法一) 证明 B 选项正确

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\exists, \text{且} f(x,y)\text{连续} \implies f(0,0)=0$$

脱极限号有

$$f(x,y)=o(\rho)$$

由可微的定义有

$$f(x,y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\rho)$$

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

(方法二) 特殊值证明 ACD 不正确

对于 A 选项, 当 $f(x)=|x|+|y|$ 不可微

对于 CD 选项, 当 $f(x,y)=C\neq 0$ 的时候, 极限不存在 □

3. (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

则 $dz|_{(0,1)}=$

Solution. (方法一) 和上面的题目比较相似, 由题设可知 $f(0,1)=1$, 脱极限号有

$$f(x,y)-2x+y-2=o(\rho)$$

由可微的定义有

$$f(x,y)-1=2x-(y-1)+o(\rho)=2\Delta x-\Delta+o(\rho)$$

即

$$d\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$$

(方法二) 特殊值令 $f(x,y)=2x-y+2$, 可以直接求出 $d\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ □

1.2 多元复合函数求偏导数与全微分

Remark. 本质是计算题, 仔细计算即可. 注意点

(一) 链式法则

(二) 一阶全微分形式不变性

(三) 二阶混合偏导数若连续则相等

4. (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$, $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 则 $df(1,1)=$

$(A)\ dx+dy\quad (B)\ dx-dy\quad (C)\ dy\qquad (D)\ \mathrm{d}y$

Solution. 第一个等式两边同时对 x 求导有

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1)$$

令 $x=0$ 则

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$$

同理, 第二个等式两边同时对 x 求导有

$$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x$$

令 $x=1$ 则

$$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可以解出

$$\begin{cases} f_1'(1,1)=0 \\ f_2'(1,1)=1 \end{cases}$$

故 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$ □

5. (2011, 数一、数二) 设 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution. 由题设可知 $g'(1)=0,g(1)=0$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_1'\cdot yg'(x)$$

这种求值的题目先带入可以化简

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x=1)}=f_1'\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x=1)}=f_{11}''\cdot y+f_1'+f_{12}''\cdot g(x)$$

带入 $y=1$ 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x=1,y=1)}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)+f_{12}''(1,1)$$

□

1.3 多元隐函数求偏导数与全微分

Remark. 三个方法

(方法一) 代入求偏导 $z=z(x,y)$

(方法二) 公式法 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$

(方法三) 全微分

6. (2005, 数一) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$

Solution. 由题设有 $F(x,y,z)=xy-2\ln y+e^{xz}-1$ 分别对 x,y,z 求导有

$$\begin{cases} F_x'(0,1,1)=2\neq 0 \\ F_y'(0,1,1)=-2\neq 0 \\ F_z'(0,1,1)=0 \end{cases}$$

由隐函数存在定理可知仅 x,y 可以作为因变量 □

隐函数存在定理

(隐函数存在定理) 如果二元函数 $F(x,y)=0$, 满足如下三个条件

(1) 函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内有连续偏导数

(2) $F(x_0,y_0)=0$

(3) $F;(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内恒能唯一确定一个连续函数 $y=y(x)$, 且

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}$$

简单来说对谁的偏导数不为零, 谁能表示为其余变量的函数 (作为因变量)

7. (1999, 数一) 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution. 记

$$z = xf(x+y) \tag{1}$$

$$F(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

分别对 (1) 和 (2) 的两端对 x/y 求导有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x+y) + xf'(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \tag{3}$$

$$F_1' + F_2'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{4}$$

联立 (3) 和 (4) 可以解出

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f+xf')F_2' - xf'F_1'}{F_2' + xf'\cdot F_3'}$$

□

多元函数组确认函数的情况

本质是方程组思想

一个三元方程可以确定一个二元函数

二个三元方程可以确定两个二元函数

参考线性代数的方程组的解, 就很容易明白

1.4 变量代换化简偏微分方程

8. (2010, 数二) 设函数 $u = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a,b 的值, 使等式在变换 $\xi = x+ay, \eta = x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$。

Solution. 有题设有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a+b)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

带入题设等式有

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}$$

□

1.5 求无条件极值

Remark. 两个方法

(一) 多元函数微分学的定义

$$\begin{cases} \text{是极值, 一般使用保号性证明} \\ \text{不是极值, 一般取不同路径} \end{cases}$$

(二)$AC-B^2$ 判别法, 若 $f'_x = f'_y = 0$且其二阶偏导数存在, 记

$$\begin{cases} A = f''_{xx} \\ B = f''_{xy} \\ C = f''_{yy} \end{cases} \implies AC-B^2 \begin{cases} >0, & \begin{cases} A>0, & \text{极小值} \\ A<0, & \text{极大值} \end{cases} \\ <0, & \text{不是} \\ =0, & \text{判别法失效, 无法判断} \end{cases}$$

9. (2003, 数一) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution. 有题设可知 $f(0,0)=0$

方法一: 选特殊路径证明, 脱极限号有 $f(x,y) = xy + o(x^2+y^2)$

令 $y=x, f(x,x)=x^2+o(x^2)>0$

令 $y=-x, f(x,-x)=-x^2+O(x^2)<0$

故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

方法二: 特殊值用判别法证明, 不妨假设 $f(xy)=xy+(x^2+y^2)^2$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=0$

而 $A=0,B=1,C=0 \implies AC-B^2=-1<0$ 故 $(0,0)$ 不是极值 □

10. (2004, 数一) 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

Solution. 对于这种题分两步, 第一步求驻点, 第二步求二阶偏导数并用判别法判断所有驻点. 题目等式两边分别对 x,y 求导有

$$\text{对}x\text{求导}2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\text{对}y\text{求导}-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 有 $\begin{cases} x=3y \\ y=z \end{cases}$ 带入题设等式有可以解出

$$\begin{cases} x=9 \\ y=z=3 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} x=-9 \\ y=z=-3 \end{cases}$$

对(1)两侧对 x,y 求导有, 且带入 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

$$-6-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \tag{4}$$

对(2)两测对 y 求导有, 且带入 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$20-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \tag{5}$$

综上可以解出

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y+z} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3}{y+z} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{10}{y+z} \end{cases}$$

带入题设条件可知

$$\begin{cases} 对于点(9,3,3) AC-B^2>0, 且A>0, 故z(9,3)为极小值 \\ 对于点(-9,-3,-3) AC-B^2>0, 且A<0, 故z(-9,-3)为极大值 \end{cases}$$

□

1.6 求条件极值 (边界最值)

Remark. (方法一)lagrange 乘数法

构造辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$ 然后求解

$$\begin{cases} L'_x=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \\ L'_x=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ L'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法的关键在于乘非零因子消去 λ 所有满足上述方程的解 (x,y,λ) 中的 (x,y) 都有可能是条件极值,对于不封闭曲线要和端点比较.

(方法二) 解 $\varphi(x,y)=0 \implies y=y(x)$ 带入 $f(x,y)$ 转换为一元函数

(方法三) 极坐标变化

(方法四) 均值不等式, 柯西不等式

对于两个整数 a 和 b, 均值不等式为

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

柯西不等式的实数形式, 对于任意实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和 $b_1,b_2\ldots,b_n$ 有

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_i\right)^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

11. (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

Solution. 使用拉格朗日乘数法, 令 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 则

$$L'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \tag{1}$$

$$L'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \tag{2}$$

$$L'_\lambda=\varphi=0 \tag{3}$$

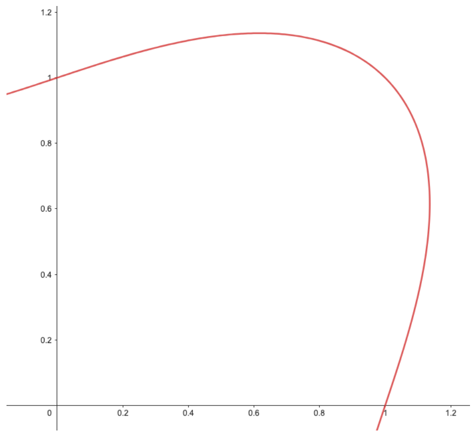
拉格朗日乘数法的关键在于乘非零因子消去 λ, 由题设可知 $\varphi'_y\neq 0$ 通过 (2) 式可以求出 $\lambda=-\dfrac{f'_y}{\varphi'_y}$, 代入 (1) 式有

$$f'_x-\frac{f'_y}{\varphi'_y}\cdot\varphi'_x=0$$

考虑选项, 只有当 $f'_x\neq 0$ 的时候可以确定 $f'_y\neq 0,\varphi_x\neq 0$ □

12. (2013, 数二) 求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

Solution. 边界条件的函数图像如下



这题的关键在于转换目标函数若考虑题设其目标函数为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 显然根号不好做, 此时需要将目标函数做等价变化即求 x^2+y^2 的条件极值, 则设拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$$

分别对 x, y, λ 求导有

$$L'_x = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0 \tag{1}$$

$$L'_y = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0 \tag{2}$$

$$L'_\lambda = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \tag{3}$$

$x \geq 0, y \geq 0$ 可知 $3x^2 - y \neq 0, 3y^2 - x \neq 0$, 将 $(1) \times (3y^2 - x) - (2) \times (3x^2 - y)$ 有

$$-x^2 + 3xy^2 - 3x^2y + y^2 = 0 \implies (y + x + 3xy)(y - x) = 0$$

即 $y + x + 3xy = 0$或$y = x$ 由于 $x \geq 0, y \geq 0$ 故 $y + x + 3xy = 0$ 不合理舍去, 将 $y = x$ 带入 (3) 式有 $2x^3 - x^2 - 1 = 0 \implies (1.1)$ 由于曲线不封闭, 需要考虑曲线端点即 $(0,1)(1,0)$ 比较可知曲线上距离原点的最大/最小距离为

$$\begin{cases} \text{最大值} d\big|_{(1,1)} = \sqrt{2} \\ \text{最小值} d\big|_{(0,1)} = d\big|_{(1,0)} = 1 \end{cases}$$

□

1.7 闭区域最值

Remark. 闭区域最值分两步做

(一) 求内部驻点

(二) 求边界的条件极值

12. (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

(A) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

(B) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

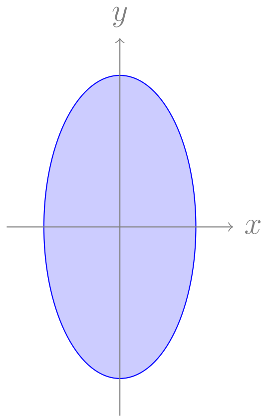
(C) $u(x,y)$的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得

(D) $u(x,y)$的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得

Solution. 若$A = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \geq 0 \implies C = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \leq 0$ 且仅当 $A = 0$ 时 $C = 0$, 有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = B \neq 0$ 由此可知 $AC - B^2 < 0$, 同理当 $A = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} < 0$, 亦有 $AC - B^2 < 0$ 故 $u(x,y)$ 在区域内部无极值点, 有由于连续函数在有界闭区间必然有最大/最小值, 此时 $u(x,y)$ 的最值均在边界取得. □

13. (2005, 数二) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$, 且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution. 由题设全微分可以求出 $z=x^2-y^2+2$, 这种题第一步先求区域内最值, 在求条件极值, 区域图像如下所示



令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 即 $\begin{cases}2x=0\\2y=0\end{cases}\implies x=y=0$ 故在内部仅有唯一驻点 $(0,0)$, 且 $z\big|_{(0,0)}=2$

求条件极值

(方法一) 设拉格朗日函数为 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1)$ 分别对 x,y,λ 求导有

$$L'_x=2x+2x\lambda=0 \tag{1}$$
$$L'_y=2y+2y\lambda=0 \tag{2}$$
$$L'_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \tag{1.1}$$

此时有

$$\begin{cases}x=0,\quad y=\pm2, f(0,\pm2)=-2\\ y=0,\quad x=\pm1 f(\pm1,0)=3\end{cases}$$

而当 $x\ne 0$或$y\ne 0$ 时候与题设矛盾, 综上可知闭区间最值为

$$\begin{cases}\text{最小值}d\big|_{0,\pm2}=-2\\ \text{最大值}d\big|_{\pm1,0}=3\end{cases}$$

(方法二) 有题设可知 $y^2=4(1-x^2)$ 带入 $f(x,y)\implies f(x)=x^2-4(1-x^2)+2=5x^2-2, x\in[-1,1]$ 显然当 $x=0, f_{min}(x)=-2; x=\pm1, f(x)=3$

(方法三) 令 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \cos\theta \end{cases}$ 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$, 此时 $f(\theta) = \cos^2\theta - 4\sin^2\theta + 2 = 3 - 5\cos^2\theta$

容易得出 $f_{max} = 3; f_{min} = -2$ $\square$