

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 24 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 24 日

目录

第一章 二重积分	1
1.1 二重积分的概念	1
1.2 交换积分次序	3
1.3 二重积分的计算	6
1.4 其他题型	12

第一章 二重积分

1.1 二重积分的概念

1. (2010, 数一、数二) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$
- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$
- (C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

Solution.

□

2. (2016, 数三) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i = 1, 2, 3)$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}, \text{ 则}$$

$$(A) J_1 < J_2 < J_3 \quad (B) J_3 < J_1 < J_2$$

$$(C) J_2 < J_3 < J_1 \quad (D) J_2 < J_1 < J_3$$

Solution.



1.2 交换积分次序

3. (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

Solution.

□

4. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ _____

Solution.

□

5. 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r, \theta) dr$ 的积分次序。

Solution.

□

1.3 二重积分的计算

6. (2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$

Solution.

□

7. 计算 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 。

Solution.

□

8. (2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dx dy$ 。

Solution.

□

9. (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$ 。

Solution.

□

10. (2014, 数二、数三) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

Solution.

□

11. (2019, 数二) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

Solution.



1.4 其他题型

12. (2010, 数二) 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$
其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

Solution.

□

13. (2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$
其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

Solution.

