第一章　函数极限连续

1.1　函数的性态

有界性的判定

(1) 连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界

(2) 连续函数在开区间 (a,b) 上只需要判断端点处的左右极限, 若 $\lim\limits_{x\to a^+} \neq \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-} \neq \infty$, 则连续函数在该区间内有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内有界.

Proof: $\forall x \in (a,b)$, 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi$

$$f(x) - f(\frac{a+b}{2}) = f'(\xi)(x - \frac{a+b}{2})$$
$$|f(x)| \le |f'(\xi)| \left| x - \frac{a+b}{2} \right| + \left| f(\frac{a+b}{2}) \right|$$
$$|f(x)| \le \frac{b-a}{2} |f'(\xi)| + \left| f(\frac{a+b}{2}) \right| \le M$$

1. 下列函数无界的是

A　$f(x) = \frac{1}{x}\sin x, x \in (0,+\infty)$　　B　$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$

C　$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$　　D　$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, x \in (0, 2022)$

Solution

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ 均为有限值, 故 A 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(B) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$ 均为有限值, 故 B 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ 在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间 $(0,+\infty)$ 无界

(D) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x 1dt=0$, $\lim\limits_{x\to2022^-} f(x)=\int_0^{2022}\frac{\sin t}{t}dt=$ 有限值 故 D 在区间 $(0,2022)$ 有界

无穷 VS 无界

无界 只有有一个子列趋于无穷即可

无穷 任意子列均趋于无穷.

例如 A 选项, 当 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}, f(x_n)=2n\pi+\pi/2, n\to\infty, f(x_n)\to\infty$; 当 $x_n=\frac{1}{2n\pi}, f(x_n)=0, n\to\infty, f(x_n)\to0$ 不为无穷大, 仅仅是无界.

导函数与原函数的奇偶性与周期性

1. 连续奇函数的所有原函数 $\int_0^x f(t)dt+C$ 都是偶函数
2. 连续偶函数仅有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数
3. 连续周期函数的原函数为周期函数 $\Longleftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$

2. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

A $\int_0^x f(t^2)dt$ B $\int_0^x f^2(t)dt$

C $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$ D $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

Solution

这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令 $F(x)=\int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t^2)dt=-\int_0^x f(t^2)dt=-F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x)=\int_0^{-x} f^2(t)dt=-\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C) $t[f(t)-f(-t)]$ 是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D) $t[f(t)+f(-t)]$ 是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数

1.2 极限的概念

函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时，必有

$$|f(x)-A|<\epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

3. (2014, 数三) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 且 $a\neq 0$, 则当 n 充分大时有

$$(A)|a_n|>\frac{|a|}{2} \qquad (B)|a_n|<\frac{|a|}{2} \qquad (C)a_n>a-\frac{1}{n} \qquad (D)a_n<a+\frac{1}{n}$$

Solution

令 $\epsilon=|a|/2$, 则 $|a_n-a|<|a|/2\geq ||a_n|-|a||$ 即

$$|a|/2<|a_n|<\frac{3|a|}{2}$$

对于 CD 考虑当

$a_n=a-\dfrac{2}{n}$ 和 $a_n=a+\dfrac{2}{n}$ 简单来说 $\forall\epsilon$ 这里面的 ϵ 与 n 是无关的.

1.3 函数极限的计算

Remark

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分, 目标都是往最简单 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\cdot}{\infty}$ 模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

4. (2000, 数二) 若 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

   (A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

Solution

这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了.

$\sin 6x = 6x - 36x^2 + o(x^3)$, 带入题目极限有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x + xf(x) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6x + xf(x)}{x^3} = 36$$

5. (2002, 数二) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \to 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

   (A)不等于 (B)等于 1 (C)等于 2 (D)等于 3

Solution

由微分方程和 $y(0) = y'(0) = 0$ 可知 $y''(0) = 1$, 则 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \left[t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t\right] dt}{x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \left[t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t\right] dt}{x} &= \lim_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1 - x}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1+x)\ln\left(1+e^{1/x}\right)$

Solution

8. 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x^3 \ln\dfrac{x+1}{x-1} - 2x^2\right)$

Solution

9. (2010, 数三) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^{1/x}-1\right)^{1/\ln x}$

Solution

10. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{a^x + a^{2x} + \cdots + a^{nx}}{n}\right)^{1/x} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$

Solution

1.4 已知极限反求参数

11. (1998, 数二) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c\,(c \neq 0)$

Solution

1.5 无穷小阶的比较

12. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$。证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \to 0$ 时,$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

Solution

13. (2006, 数二) 试确定 A, B, C 的值, 使得 $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

Solution

14. (2013, 数二、数三) 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值。

Solution

1.6 数列极限的计算

方法

(1) 单调有界准则 (三步走, 先确定单调性, 在确定有界性, 最后解方程求极限)
确定单调性, 可以考虑作差/做商/求导

(2) 压缩映射原理

∘1 先猜出极限 x^*

∘2 证明递推式 $\left|x_{n+1}^* - x_n^*\right| \leq k\left|x_n^*\right|$ 其中 $k < 1$

(3) 夹逼准则

(4) 定积分的定义 (n 项和/n 项积)

15. (2011, 数一、数二)

(i) 证明：对任意正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(ii) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

Solution

(1) 是基本不等式的证明, 考虑拉格朗日中值即可

(2) 考研大题, 特别是分成几个小问的题目, 都需要合理利用前面的结论
考虑 $a_{n+1} - a_n$ 有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + n/1) < 0$$

即 $\{a_n\}$ 单调递减, 考虑其有界性

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln(n) \\ &< \ln(1+1) + \ln(1+1/2) + \ldots + \ln(1+n/1) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) > 0 \end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界, 故由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0$,$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

Solution

这道题的难度在于如何处理条件. 考虑1 的妙用. 有

$$\begin{aligned} e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x} &= \frac{e^{x_n} - e^0}{1} \\ &= e^{\xi}, \xi \in (0, x_n) \end{aligned}$$

而由于 e^x 是单调递增的函数则必然有 $\xi = x_{n+1}$ 即 $0 < x_{n+1} < x_n$ 从而单调递减有下界. 此时 $\{x_n\}$ 极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 问题转换为求方程 $ae^a = e^a - 1$ 的解的问题. 显然 $a = 0$ 是其一个根. 考虑函数 $f(x) = e^x(1-x) - 1$ 其导数为 $-xe^x$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递减故 $x = a$ 是 $f(x)$ 唯一零点, 即 $a = 0$ 是唯一解. 故

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$$

常见的等价代换有

1: $e^0, \sin(\pi/2), \cos(0), \ln(e)$ 具体情况还得看题目, 题目有啥用啥替换

0: $\sin(0), \cos(pi/2), \ln(1)$

17. (2019, 数一、数三) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$。

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}\ (n = 2, 3, \cdots)$

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Solution

这道题第一问比较重要, 第二问比较简单

(1) 方法一:

可以直接求出 a_n 的值, 令 $x = \sin(t)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{华里士公式}} \frac{1}{n+2}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \text{当 n 时偶数的时候} \\
a_{n-2} &= \frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi/2}{2} \\
a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}
$$

当 n 为奇数的时候同理可得

(1) 方法二:

也可以考虑分部积分法

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\left[x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\mid_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x^{n-1}\right] \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)x^{n-2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n \\
&\implies a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}
$$

(2)

由 (1) 可知

$$
\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} < 1
$$

当 $n \to \infty$ 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

18. (2017, 数一、数二、数三) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Solution

这是最普通的定积分的定义的应用

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \\
&\xlongequal{\text{定积分定义}} \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, 则常数 a,b 满足

A $a<0,b<0$ B $a>0,b>0$ C $a\le 0,b>0$ D $a\ge 0,b<0$

Solution