第一章　特征值与特征向量

- 特征值与特征向量
  - 特征值与特征向量
    - 定义　$A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq 0)$
    - 性质
    - 特征方程法,
      - $|A-\lambda E|$
      - $(A-\lambda E)\,x=0$
  - 相似矩阵
    - 定义,　$B=P^{-1}AP$
    - 性质
  - 相似对角化
    - 定义　$P^{-1}AP=\Lambda$
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
      - $\Longleftrightarrow$ k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - 充分条件
      - A有n个不同的特征值
      - A为是实对称矩阵
  - 实对称矩阵
    - 特征值均为实数
    - 不同特征值的特征向量正交
    - k重特征值有k个线性无关的特征向量
    - A可正交相似对角化, 即存在正交矩阵Q, 使得$Q^{-1}AQ=A^TAQ=\Lambda$

1.1 特征值与特征向量的计算

特征值与特征值向量的性质

(1) 不同特征值的特征向量线性无关

(2) 不同特征值的特征向量之和不是特征向量

(3) k重特征值有k个线性无关的特征向量

(4) 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ 则 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A), \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$

推论 1 上, 下, 主对角矩阵特征值为主对角线元素

推论 2 $aA + bE(a \neq 0)$ 不可逆时,$\lambda = -\frac{b}{a}$ 必然为 A 的一个特征值

(5) 若 $r(A) = 1$ 则 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 是 n 维非零列向量, 则 A 的特征值为

$$\lambda_1 = tr(A) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

当 $tr(A) \neq 0$ 时,$\lambda_1 = tr(A), \alpha_1 = \alpha, \lambda_2 \dots, \lambda_n = 0$, 其特征向量解 $\beta^T x = 0$ 其线性无关的解即为特征向量 $\alpha_2 \dots \alpha_n$

当 $tr(A) = 0$ 时 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ 此时只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

综上秩为 1 矩阵能相似对角化 $\iff$ $tr(A) \neq 0$

(6) 设 α 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征值向量则, 有

A	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α	???	$P^{-1}\alpha$

$f(A)$ 可以推广为 $+/-, kA, A^n, A^{-1}, A^*$

求特征值与特征值向量

(1) 利用特征的定义 ($A\alpha = \lambda\alpha(\alpha \neq 0)$) 或性质 (上述六条)

(2) 特征方程组法 (两大步)

(1) $|A - \lambda E| = 0$ 可以求出 A 的 n 个特征值

(2) $(A - \lambda_i E)x = 0$, 可以解出特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量 ($n - r(A - \lambda_i E)$ 个)

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量。

特征方程法

令 $|A-\lambda E|=0 \implies \begin{vmatrix}-2-\lambda&1&&1\\0&2-\lambda&0&0\\0&0&2-\lambda&0\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(2-\lambda)^3=0$ 即

$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

当 $\lambda_1=-2$ 时候, 解 $(A+2E)x=0 \implies \alpha_1=(-1,1,1,1)^T$

当 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ 时, 解 $(A-2E)x=0$ 解出其线性无关的特征向量为

$$\alpha_2=(1,1,0,0)^T,\alpha_3=(1,0,1,0)^T,\alpha_4=(1,0,0,1)^T$$

分解为秩为 1

可以将 A 分解为

$$A=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1,-1)+2E$$

由性质 5 和 6 可以立即确认 A 的特征值为 $\lambda_1=tr(B)+2,\lambda_2=\ldots=\lambda_4=0+2$ 且 $\alpha_1=\alpha$ 其余特征向量解 $\beta x=0$ 结果和上面一样.

2. (2003, 数一) 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=P^{-1}A^*P$ 求 $B+2E$ 的特征值与特征向量。

特征方程法

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda^2)=0$ 可知 $\lambda_1=7,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=7$ 解 $(A-7E)x=0$ 可以解出 $\alpha_1=(1,1,1)^T$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解 $(A-2E)x=0$ 可以解出线性无关的特征向量为 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$

分解为秩为 1

可以将 A 分解为

$$A=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}(1,1,1)+E$$

根据性质 5,6 容易得出和上述一样的答案.

$A^*\ldots,1,\ldots,\alpha_1$

$A^*\ldots,7,\ldots,\alpha_2,\alpha_3$

$B\ldots,1,\ldots,P^{-1}\alpha_1=(0,1,1)^T$

$B\ldots,7,\ldots,P^{-1}\alpha_2=(1,-1,0)^T,P^{-1}\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

此时求解上述三个特征向量也有三种不同的解法

(1) 直接求 p^{-1}

(2) 联立 $(P\mid\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

(3) 观察题设可知 P 是初等矩阵之积, 且很容易写出即

$$P=E(23(1))E(1,2)\implies P^{-1}=E(1,2)E(23(-1))$$

这个方法需要观察题目, 不是很通用; 虽然所有可逆矩阵都可以分解为初等矩阵, 但并非所有都好写出来.

$B+2E,\ldots,3,\ldots,P^{-1}\alpha_1=(0,1,1)^T$

$B+2E,\ldots,9,\ldots,P^{-1}\alpha_2=(1,-1,0)^T,P^{-1}\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 A 的特征值与特征向量。

转圈化简

解特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ -1 & 4-\lambda & -2\\ 1 & -2 & a-\lambda\end{vmatrix}=0$ 这种三阶的行列, 当然可以直接展开那样比较难算. 由于考研不会故意恶心人, 大部分都可以提公因数. 依据此, 对行列式按顺 (逆) 时间, 选择不含 λ 的数, 化简其余不含 λ 的数, 产生 λ 式子的公因数

因此上式可以化简为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 4-2\lambda & 2\\ -1 & 2-\lambda & -2\\ 1 & 0 & a-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[\lambda^2-(a+3)\lambda+3a-6\right]$$

此时讨论二重根的值, 若 $\lambda=2$ 不是其二重根, 对于后面那个二次式必然有 $\Delta=0\implies(a+3)^2+24>0$ 矛盾

故 $\lambda=2$ 只能是二重根, 此时可解出 $a=8$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=9$ 分别解

$$\begin{cases}(A-2E)x=0\\ (A-9E)x=0\end{cases}\implies\begin{cases}\alpha_1=(2,1,0)^T\\ \alpha_2=(1,3,-7)^T\end{cases}$$

4. 设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2=O$，则 A 的线性无关的特征向量的个数是

A.0　B.1　C.2　D.3

Solution

由 $A^2=O$ 且 $A\neq O$ 可知 $r(A)=1$, 设 A 的任意特征值为 λ 满足 $\lambda^2=0$ 故 A 的特征值只能是 0 求解 $(A-0E)x=0$ 的基础解系中包含解的个数为 $3-r(A)=3-1=2$ 故 A 的线性无关的特征向量的个数是 2

5. 设 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，其中 α,β 为 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=\dfrac{1}{3}$，证明:

(I) 0 为 A 的特征值;

(II) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 为 A 的特征向量;

(III) A 可相似对角化。

Solution

(1) 由于 $r(A)=r(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\le 2\le 3 \implies |A|=0$ 从而可知必然有一个特征值为 0

(2) 由于 α,β 为三阶单位矩阵, 从而有 $\begin{cases}\alpha^T\alpha=\beta^T\beta=1\\ \alpha^T\beta=\beta^T\alpha=\dfrac{1}{3}\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha\ne\beta\\ \alpha\ne-\beta\end{cases}$ 矩阵 A 右乘 α,β 有

$$A\alpha=\alpha\beta^T\alpha+\beta\alpha^T\alpha=\frac{1}{3}\alpha+\beta \tag{1}$$
$$A\beta=\frac{1}{3}\beta+\alpha \tag{2}$$

(1)+(2) 有 $A(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{3}(\alpha+\beta)$

(1)-(2) 有 $A(\alpha-\beta)=-\dfrac{2}{3}(\alpha-\beta)$

从而由特征值的定义可知 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 为 A 的特征值 $\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}$ 的特征值向量.

(3) 由于三阶矩阵至多有 3 个特征值, 从而 A 有三个不同的特征值向量 $(0,\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3})$, 从而 A 可相似对角化

也可以通过 $A^T=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)^T=A$ 可知 A 为实对称矩阵, 从而 A 可相似对角化.

1.2 相似的判定与计算

相似的性质

(1) 若 $A\sim B$, 则 A,B 具有相同的行列式, 秩, 特征方程, 特征值与迹

(2) 若 $A\sim B$, 则 $f(A)\sim f(B), A^{-1}\sim B^{-1}, AB\sim BA(|A\ne 0|), A^T\sim B^T, A^*\sim B^*$

(3) 若 $A\sim B, B\sim C$ 则 $A\sim C$

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ 矩阵 B,A 相似, 则 $r(B-A)+r(B-3E)=$ ____

Solution

由 $A \sim B$ 可知 $B-E \sim A-E, B-3E \sim A-3E$ 从而可知 $r(B-E)+r(B-3E) = r(A-E)+r(A-3E) = 3+2 = 5$

2. 设 n 阶矩阵 A, B 相似, 满足 $A^2 = 2E$, 则 $|AB + A - B - E| =$ ___

化简正常做

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= |A(B+E) - (B+E)| \\
&= |(A-E)|\,|(B+E)| \\
&\xlongequal{A\sim B} |(A-E)(A+E)| \\
&= |E| = 1
\end{aligned}$$

特殊值

不妨令 $B = A$, 则原式为 $\left|A^2 - E\right| = 1$

3. (2019, 数一、二、三) 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y 的值;

(II) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$。

Solution

(1) 由 $A \sim B$ 可知 $|A| = |B|$ 从而由 $-2(-2x+4) = -2y$ 又 $tr(A) = tr(B)$ 联立可以解出 $x = 3, y = 2$

(2)A, B 的特征值为 $(2, -1, -2)$ 从而可知 A, B 必然能相似对角化, 从而由

$$P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = P_2^{-1}BP_2$$

从而可知 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$ 从而可知题设的 $P = P_1P_2^{-1}$

用特征值求特征值向量

当 $\lambda_1=2$ 时 $(A-2E)X=0$ 可知 $\alpha_1=(1,-2,0)^T$

当 $\lambda_1=-1$ 时 $(A+E)X=0$ 可知 $\alpha_1=(-2,1,0)^T$

当 $\lambda_1=-2$ 时 $(A+2E)X=0$ 可知 $\alpha_1=(1,-2,-4)^T$

同理可以求出 B 的特征向量为 $\begin{cases}\beta_1=(1,0,0)^T\\ \beta_2=(1,-2,0)^T\\ \beta_3=(0,0,1)^T\end{cases}$ 从而 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$(P_1\mid P_2)\to(E\mid P)$$

从而 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}$

分块矩阵法

由 $P^{-1}AP=B$ 可知 $AP=PB$ 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 从而有

$$\begin{aligned}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\\&=(2\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,-2\alpha_3)\end{aligned}$$

从而问题转换为

$$\begin{cases}A\alpha_1=2\alpha_1\\A\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2\\A\alpha_3=-2\alpha_3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(A-2E)\alpha_1=0\\(A+E)\alpha_2=\alpha_1\\(A+2E)\alpha_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_1=(1,-2,0)^T\\\alpha_2=(1,-1,0)^T\\\alpha_3=(1,-2,4)^T\end{cases}$$

1.3　相似对角化的判定与计算

方法

(1) 定义: $P^{-1}AP = \Lambda$

(2) 充分条件: 1∘ 具有 n 个不同的特征值 2∘ A 是实对称矩阵

(3) 充要条件: 1∘ 具有 n 个线性无关的特征向量 2∘ k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量

1. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。若 $P = (\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$ 则 $P^{-1}AP =$ ______________。

Solution

$k\alpha$ 仍然是同一特征值的特征向量, 从而 $2\alpha_3$ 仍然是特征值 -2 的特征值向量, 从而

$$P^{-1}AP = (\alpha_1, \alpha 3, \alpha_2)^T A(\alpha_1, \alpha 3, \alpha_2) = \Lambda(1, -2, 3)$$

注意特征值间的对应关系

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明 A 可相似对角化。

Solution

设 A 的任意特征值 λ, 由题设可知 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 从而有 $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$;

且由题设有 $(A - 2E)(A - E) = 0 \implies r(A - 2E) + r(A - E) \le n$ 又 $r(A - E) + r(2E - A) \ge r(E) = n$ 从而可知 $r(A - E) + r(A - 2E) = n$, 从而对于 $\lambda_i = 1$ 解 $(A - E)X = O$;

对于 $\lambda_j = 2$ 解 $(A - 2E)X = 0$ 其基础解系中含有线性无关的特征向量分别为 $n - r(A - E)$ 与 $n - r(A - 2E)$ 从而 $2n - r(A - E) - r(A - 2E) = n$ 个线性无关的特征向量从而 A 可相似对角化.

3. (2020, 数一、二、三) 设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 为非零向量且不是 A 的特征向量。

(I) 证明 P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵。

Solution

(1) 若 P 不可逆, 则 $\exists k$ 使得 $A\alpha = k\alpha, \alpha \neq 0$ 故 α 是 A 的特征向量, 这与题设矛盾, 从而 P 可逆.

(2)

$$\begin{aligned} P^{-1}A(\alpha, A\alpha) &= P^{-1}(A\alpha, A^2\alpha) \\ &= P^{-1}(A\alpha, 6\alpha - A\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而可知 $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 只需要求解特征方程 $|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda) - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$ 从而 B 具有两个不同的特征向量, 从而 B 可相似对角化. 故而 A 可相似对角化.

1.4 实对称矩阵的计算

方法

(1) 实对称的性质

(2) 正交相似对角化 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

(3) 求正交矩阵 Q

- ∘1 求 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
- ∘2 求 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
- ∘3 将不同特征值的特征向量分别 (斯密特正交化) 三阶矩阵通常使用知二求一/知一求二转换为 $Q = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$

<u>斯密特正交化</u>

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 \\
&\vdots \\
\beta_i &= \alpha_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\beta_j)}{\beta_j,\beta_j}\beta_j
\end{aligned}$$

上述求的 β_i 仅是正交化的结果, 还需要单位化即 $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{||\beta_i||}$

(4) 求实对称矩阵 A

∘1 可逆矩阵 P, $P^{-1}AP = \Lambda \implies A = P\Lambda P^{-1}$

∘2 正交矩阵 Q $Q^TAQ = \Lambda, |Q| = \pm 1, A = Q\Lambda Q^T$

∘3 分解定理

$$\begin{aligned}
A = Q\Lambda Q^T &= (\gamma_1,\dots,\gamma_n)\Lambda\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots \\ \gamma_n^T\end{pmatrix} \\
&= (\lambda_1\gamma_1,\dots,\lambda_n\gamma_n)\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots \\ \gamma_n^T\end{pmatrix} \\
&= \lambda_1\gamma_1\gamma_1^T + \dots + \lambda_n\gamma_n\gamma_n^T
\end{aligned}$$

特别的当 $r(A) = 1$ 时候 $A = tr(A)\gamma_1\gamma_1^T$

1. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O, n$ 阶矩阵 B 满足 $B^2 + B = E$ 且 $r(AB) = 2$ 则 $|A + 2E| =$ ___

Solution

由 $B^2+B-E=0$ 可知 B 可逆, 从而有 $r(AB)=r(A)=2$, 设 A 的任意特征值为 λ, 从而由题设可知 $\lambda^2+\lambda=0$ 即 $\lambda=0$ 或者 $\lambda=-1$ 从而可知 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ 从而可知 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\ldots=\lambda_n=2$ 从而 $|A+2E|=2^{n-2}$

2. (2010, 数二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$ 正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q。

Solution

设 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ 为 A 的特征值 λ_1 的特征向量, 从而有 $A\gamma_1=\lambda_1\gamma_1$, 可以解出 $\begin{cases}\lambda_1=2\\a=-1\end{cases}$ 因此矩阵 A 为 $\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$ 解特征方程 $|A-\lambda E|=0\implies-(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$ 从而可知 A 的特征值为 $(2,-4,5)$ 分别求解三个齐次方程

$$\begin{cases}(A+4E)X=0\\(A-5E)X=0\\(A-2E)X=0\end{cases}\implies\begin{cases}\alpha_1=(1,-1,1)^T\\\alpha_2=(-1,0,1)^T\\\alpha_3=(1,-1,1)^T\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\\\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T\\\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\end{cases}$$

从而可知 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$

其实也可以不求解三个齐次方程, 求出两个后可以通过向量积求另一个, 比如说已知 γ_1,γ_2, 有

$$\gamma_3=\gamma_1\times\gamma_2$$

3. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2=E$,$A+E$ 的各行元素之和均为零，且 $r(A+E)=2$。

 (I) 求 A 的特征值与特征向量;

 (II) 求矩阵 A。

Solution

(1) 设 λ 为任意特征值, 从而有 $\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1$, 当 $\lambda = -1$ 时候齐次方程 $(A+E)X = 0$ 的基础解系中包含解的个数为 $n - r(A+E) = 1$ 从而可知 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

又有题设的行元素之和均为零可知,

$$(A+E)(1,1,1)^T = 0(1,1,1)^T$$

可知 $\alpha_1 = (1,1,1)$ 设 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 (x_1, x_2, x_3) 则

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

线性无关的特征值向量为 $\alpha_2 = (-1,1,0)^T, \alpha_3 = (-1,0,1)^T$

可逆矩阵

由 (1) 可知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), P^{-1}AP = \Lambda$ 从而可以求出

$$A = P\Lambda P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

正交矩阵

可以采用知一求二, 不妨设 $\alpha_2 = (a,b,0)^T, \alpha_3 = (-b,a,c)^T$ 保证正交性. 又因为 $\alpha_1 \cdots \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 = 0$ 可以解出 $a = -1, b = 1, c = 2$ 然后单位化有

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \\ \gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T \\ \gamma_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2) \end{cases}$$

从而可知 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 又 $Q^TAQ = \Lambda(-1,1,1)$ 则 $A = Q\Lambda Q^T$ 一样可求出

$$A = P\Lambda P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$