

第一章 事件与概率论

1.1 事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的集合
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

事件的运算律

- | | | |
|-----|-----|------------------------------------------------------------------------------|
| (1) | 交换律 | $A \cup B = B \cup A, AB = BA$ |
| (2) | 结合律 | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$ |
| (3) | 分配律 | $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$ |
| (4) | 摩根律 | $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ |
| (5) | 吸收律 | $A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$ |

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = 1$, 则

(A) $A \cup B = \Omega$ (B) $AB = \emptyset$ (C) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ (D) $P(A - B) = 0$

Solution

由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$

注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确

对于 (C) 选项 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1$ 正确

对于 (D) 选项, 由减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$

总结

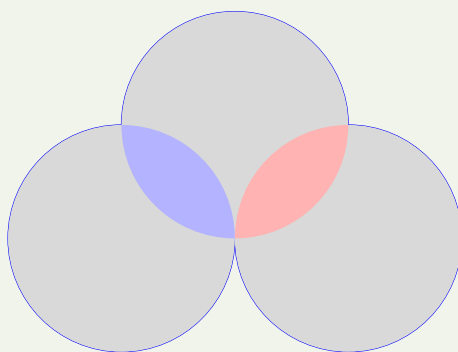
- (1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件
 (2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件
 这两个结论考虑连续型随机变量即可

2. (2020, 数一、三) 设 A, B, C 为随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 只有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$

Solution

这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

3. 设随机事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$ _____

Solution

根据结论, 有 A, B 互斥, 则 $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$

Corollary

若 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 A, B 必然对立

$$AB = \bar{A}\bar{B}$$

$$\iff AB \cup \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B$$

$$\iff (A \cup \bar{A})B = \bar{A}(\bar{B} \cup B)$$

$$\iff B = \bar{A}$$

4. 设随机事件 A, B, C 两两独立, 满足 $ABC = \emptyset$, 且 $P(A) = P(B) = P(C)$, A, B, C 至少有一个发生的概率为 $\frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$

Solution

由题意有 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 由加法公式与独立性有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$$

由 $P(A) = P(B) = P(C)$, 上式化为 $3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$ 或 $P(A) = \frac{3}{4}$, 显然 $P(A) \neq \frac{3}{4} > P(A \cup B \cup C)$, 故 $P(A) = \frac{1}{4}$

5. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A|B) + P(B|A)$ 的最大值为 ____, 最小值为 ____.

Solution

关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于 $[0, 1]$ 之间, 事件 AB 的和事件不可能小于单独 A, B 发生概率之和, 事件 AB 的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq \min(P(A), P(B)) \leq P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)$$

1.2 三大概型的计算

三大概率模型

1. 经典概型 – 有限个等可能的样本点, 排列组合问题
 2. 几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等
 3. 伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为 p , 不成功的概率为 $(1 - p)$
6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

Solution

(古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{3^4} = \frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序.

7. 在区间 $(0, a)$ 中随机地取两个数, 则两数之积小于 $\frac{a^2}{4}$ 的概率为

Solution

(几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4} \cdot a + \int_{\frac{a}{4}}^a \frac{a^2}{4x} dx}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为 p , 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

Solution

失败零次 $-p^5$, 失败一次 $-\binom{1}{5}p^4(1-p)p$, 失败两次 $-\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$
故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5 + \binom{1}{5}p^4(1-p)p + \binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

1.3 三大概率公式的计算

Remark

三大概率公式

1. 条件概率公式 $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
推论

$$P(AB) = P(B)P(A | B)$$

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) \dots P(A_n | A_1, \dots, A_{n-1})$$

2. 全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$

3. 贝叶斯公式
$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}$$

若称 $P(B_j)$ 为 B_j 的先验概率, 称 $P(B_j | A)$ 为 B_j 的后验概率. 则贝叶斯公式专门用于计算后验概率的公式.

9. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A \cup B) = 0.6, P(B | \bar{A}) = 0.2$, 则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

Solution

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6, P(B | \bar{A}) = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = 0.2$$

联立有

$$\frac{0.6 - P(A)}{1 - P(A)} = 0.2$$

, 则 $P(A) = 0.5$

10. (2018, 数一) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, 满足 $BC = \emptyset$, 且

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution

$$\begin{aligned} P(AC | AB \cup C) &= \frac{P(AC)}{P(AB \cup C)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(AB) + P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4} + P(C)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

则 $P(C) = \frac{1}{4}$

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

(1) 求乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

用概率计算

(1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于 $P(X = k) = \frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3}$

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\text{则所求数学期望 } EX = \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^3 P(X = k)P(A | x = k) \\ &= \frac{1}{20} \times 0 + \frac{9}{20} \times \frac{1}{6} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

使用超几何分布

(1) $X \sim H(N, M, n)$, $N = 6, M = 3, n = 3$, 则 $EX = \frac{nM}{N} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^3 P(X = k)P(A | x = k) \\ &= \sum_{k=0}^3 P(X = k) \frac{k}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^3 P(X = k)k \\ &= \frac{1}{6} EX \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

1.4 事件独立的判定

事件独立的充要条件

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff P(A|\bar{B}) = P(A) \iff P(A|B) = P(A|\bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1)$$

$$\iff A \text{ 与 } \bar{B}, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } B, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1$$

12. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 则

- (A) 若 $A \supset B$, 则 A, B 一定不相互独立
- (B) 若 $B \supset A$, 则 A, B 一定不相互独立
- (C) 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定不相互独立
- (D) 若 $A = \bar{B}$, 则 A, B 一定不相互独立

Solution

(A)(B)(C) 考虑 \emptyset 则都不对

(D) 由于 A 不是必然事件, 则 B 不是不可能事件, 则 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 根据下面的总结 A, B 一定不独立

总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

A, B 互不相容, 则 A, B 一定不独立

A, B 独立, 则 A, B 一定不互不相容

13. 设 A, B, C 为随机事件, A 与 B 相互独立, 且 $P(C) = 0$, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

- 1. 相互独立
- 2. 两两独立, 但不一定相互独立
- 3. 不一定两两独立
- 4. 一定不两两独立

Solution

由 $P(C) = 0$ 知 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立.

两两独立与相互独立

$$\text{相互独立} \left\{ \begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array} \right\} \quad \text{两两独立}$$