

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 24 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 24 日

目录

第一章 多元函数积分学	1
1.1 三重积分的计算	1
1.2 第一类曲线积分的计算	3
1.3 第二类曲线积分的计算	5
1.4 第一类曲面积分的计算	7
1.5 第二类曲面积分的计算	8

第一章 多元函数积分学

1.1 三重积分的计算

1. (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω .
- (I) 求曲面 Σ 的方程;
- (II) 求 Ω 的形心坐标.

Solution.

□

2. (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

Solution.



1.2 第一类曲线积分的计算

3. (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$

Solution.

□

4. 设连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = (x + 3y)^2 + \int_L f(x, y) ds$, 其中 L 为曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 求曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$.

Solution.

□

1.3 第二类曲线积分的计算

5. (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分域记为 D_1 .

(I) 求 $I(D_1)$ 的值;

(II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

Solution.

□

6. (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xzdx + xdy + \frac{y^2}{2}dz =$

Solution.

□

1.4 第一类曲面积分的计算

7. (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直, 求 P 点的轨迹 C , 并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

Solution.



1.5 第二类曲面积分的计算

8. (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

Solution.

□

9. 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

Solution.

□

10. (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]dydz + [yf(xy) + 2y + x]dzdx + [zf(xy) + z]dxdy.$$

Solution.

