第一章　统计初步

1.1　求统计量的抽样分布

Remark. 统计的三大分布

χ^2 分布的定义

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 均服从 $N(0,1)$ 称 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 特别的若 $X \sim N(0,1)$, 则 $\chi^2 \sim \chi^2(1)$

χ^2 分布的性质

(1) 参数可加性　　设 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立, 且 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n), \chi_2^2 \sim \chi^2(m)$ 则 $\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n+m)$

(2) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 则 $E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$

F 分布的定义

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 称 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 n_1, n_2 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

F 分布的性质

(1) 设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

(2) $F_{1-\alpha}(n_2, n_1) = \frac{1}{F_\alpha(n_1, n_2)}$

t 分布的定义　　设随机变量 X 和 Y 相互独立,$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 则称 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T \sim t(n)$

t 分布的性质

(1) 设 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1,n), \frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

(2) $t_{1-\alpha}(n) = -t_{alpha}(n)$

Remark. 单正态总体与双正态总体

单正态总体

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差, 则

(1) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 即 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/sqrtn} \sim t(n-1)$

双正态总体

设总体 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, 总体 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right), X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本且相互独立, 样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 , 则

(4) $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(5) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-1\right)$;

(6) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时, $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1+n_2-2\right)$, 其中 $S_\omega=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n)$,$Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$, 则 $P\{Y>c^2\}=$

$$(A)\ \alpha \quad (B)\ 1-\alpha \quad (C)\ 2\alpha \quad (D)\ 1-2\alpha$$

Solution.

□

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

Solution.

□

1.2 求统计量的数字特征

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(nX_j - \sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] =$$

Solution.

□

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2。

   (1) 求 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$ 的分布

   (2) 求 $E[(\bar{X}^2 S^2)^2]$;

   Solution.

□