考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 8 月 2 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 8 月 2 日

目录

第一章　补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计　　茆诗松

(2) 做题总结

1.1　配对问题

问题描述: 在一个有 n 个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

Solution

(配对问题)

设 A_i 为事件: 第 i 个人自己抽到自己的礼物,$i = 1, 2, \ldots, n$ 所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n} \\
&P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \ldots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)} \\
&P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \ldots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \\
&\ldots \\
&P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} P(A_i A_{i+1} A_{i+2}) \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$, 上述概率由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

1.2 几个概率的不等式

1. $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$
2. $P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$ (Boole 不等式)
3. $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

证明. 相关证明如下:

(1) 由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \implies P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于 n = 2, 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于 $n = k$ 个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) - (k-1)$$

考虑 $n = k + 1$ 个事件 $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$, 不妨令 $B = A_1 A_2 \ldots A_k$, 则

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}) = P(BA_{k+1}) \geq P(B) + P(A_{k+1}) - 1 \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{k+1}) - (k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由 $P(A) \geq P(AB), P(B) \geq P(AB)$, 则 $P(A)P(B) \geq P(AB)^2$, 则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB))$$

令 $x = P(AB)$, 则 $f(x) = x(1-x)$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 取得 $f(x)_{max} = \frac{1}{4}$ 即

$$P(AB) - P(A)P(B) \le \frac{1}{4}$$

由于 $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, 即 $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$ 则

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - P(A) + P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(\bar{B}) \le \frac{1}{4}$$

即

$$P(AB) - P(A)P(B) \ge \frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

1.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为 α, 乙命中的概率为 β. 甲先射, 谁先设中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

Solution

(方法一) 记事件 A_i 为第 i 次射中目标,$i = 1, 2, \ldots$, 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup \ldots.$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2 \ldots \\ &= \alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i \\ &= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{乙获胜}) &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \ldots \\ &= \beta(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i \\ &= \frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(\alpha-1)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$

1.4 补充: 随机变量的矩

设 (X,Y) 是二维随机变量, 如果 $E(X^kY^l)$ 存在, 则称 $E(X^k),(k=1,2\ldots)$ 为 X 的 k 阶原点矩; 称 $E(X-EX)^k, k=(2,3,\ldots)$ 为 X 的 k 阶中心矩; 称 $E(X^kY^l),(k,l=1,2,\ldots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩; 称 $E[(X-EX)^k(Y_EY)^l,(k,l=1,2,\ldots)]$ 为 X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩

1.5 Poisson 分布的一个性质, 与 Poisson 定理

参考错题-概率论-李正元全书-2(原数例题 1.23)

若 $X \sim P(\lambda)$, 其中的某些部分 (或者优秀, 或者糟糕, 或者其他) 独立的产生, 其产生的概率为 α, 则 Y 表示产生这些特殊事件的次数, 将会服从 $P(\lambda\alpha)$

Poisson 定理, 对于 $X \sim B(n,p)$ 当 n 很大,p 很小的时候, 可以近似的认为 $X \sim P(np)$

1.6 二维随机变量的换元法

设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f_{X,Y}(x,y)$ 变化 T 为:

$$\begin{cases} U = g_1(X,Y) \\ V = g_2(X,Y) \end{cases}$$

如果 T 可逆 (即存在逆变化 T^{-1}), 则 (U,V) 的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|$$

其中 J 是 Jacobian 行列式即

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}$$

例如:

若 $U = X + Y, V = X - Y$,$f(x, y) = e^{-(x+y)}, (x, y > 0)$

$$X = \frac{U+V}{2}, Y = \frac{U-V}{2}, |\mathbf{J}| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}$$

则 $f(u, v) = e^{-(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-u}$ 其中 u, v 的范围由变换确定, 例如 $u > 0$ 但 v 取决于 x, y 的关系