第一章 向量

1.1 知识体系

$$\boxed{\text{向量}} = \begin{cases} \boxed{\text{基本运算}} \begin{cases} \alpha + \beta \\ k\alpha \\ [\alpha, \beta] \end{cases} \\ \boxed{\text{线性表示}} \begin{cases} \boxed{\text{定义}} \quad \beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s \\ \boxed{\text{充要条件}} \begin{cases} \text{非其次线性方程组}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T = \beta\text{有解} \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \mid \beta) \end{cases} \\ \boxed{\text{求法}} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \mid \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形矩阵} \end{cases} \\ \boxed{\text{线性相关}} \begin{cases} \boxed{\text{定义}} \\ \boxed{\text{充要条件}} \begin{cases} \text{至少有一个向量可以由其余向量线性表示} \\ \text{齐次线性方程组}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T = 0\text{有非零解} \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < s \end{cases} \\ \boxed{\text{充分条件}} \end{cases} \\ \boxed{\text{线性无关}} \begin{cases} \boxed{\text{定义}} \\ \boxed{\text{充要条件}} \begin{cases} \text{任意向量都不可以由其余向量线性表示} \\ \text{齐次线性方程组}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T = 0\text{只有零解} \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s \end{cases} \\ \boxed{\text{充分条件}} \end{cases} \\ \boxed{\text{极大无关组与向量组的秩}} \begin{cases} \boxed{\text{定义}} \\ \boxed{\text{求法}} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯形} \end{cases} \end{cases}$$

1.2 线性表示的判定与计算

1. 设向量组 α, β, γ 与数 k, l, m 满足 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ $(km \neq 0)$，则

   (A) α, β 与 α, γ 等价

   (B) α, β 与 β, γ 等价

   (C) α, γ 与 β, γ 等价

   (D) α 与 γ 等价

   Solution.

□

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1,2,0)^T$, $\alpha_2 = (1,a+2,-3a)^T$, $\alpha_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$, $\beta = (1,3,-3)^T$。当 a,b 为何值时,

   (I) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

   (II) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式;

   (III) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

   Solution.

□

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1,1,4)^T$, $\alpha_2 = (1,0,4)^T$, $\alpha_3 = (1,2,a^2+3)^T$；向量组 (II) $\beta_1 = (1,1,a+3)^T$, $\beta_2 = (0,2,1-a)^T$, $\beta_3 = (1,3,a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价，求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

Solution.

□

1.3 线性相关与线性无关的判定

4. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 则对任意常数 k, l, $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

   (A) 必要非充分条件

   (B) 充分非必要条件

   (C) 充分必要条件

   (D) 既非充分又非必要条件

   ***Solution*.**

□

5. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0$, $A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

   Solution.

□

6. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交，证明 β_1, β_2 线性相关。

   Solution.

□

1.4 极大线性无关组的判定与计算

7. 设 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (3,2,-1,a+2)^T$, $\alpha_4 = (-2,-6,10,a)^T$。

   (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

   (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha = (4,1,6,10)^T$ 由其线性表示。

   Solution.

□

8. 证明:

(I) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$;

(II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$。

Solution.

□

1.5 向量空间 (数一专题)

Remark. 向量空间

过度矩阵

由基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)C$ 即 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$

坐标转换公式

设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中的坐标为 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 在基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 中的坐标为 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ 则坐标转换公式为 $x=Cy$

8. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。
   (a) (I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基:
   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

   Solution.

$\square$