

错题集

数学笔记

Weary Bird

2025 年 6 月 30 日

梅花引·荆溪阻雪

白鸥问我泊孤舟，是身留，是心留？心若留时，何事锁眉头？风拍小帘灯晕舞，对闲影，冷清清，忆旧游。

旧游旧游今在否？花外楼，柳下舟。梦也梦也，梦不到，寒水空流。漠漠黄云，湿透木棉裘。都道无人愁似我，今夜雪，有梅花，似我愁。

2025 年 6 月 30 日

目录

| | |
|-----------------------|----------|
| 第一章 高等数学 | 1 |
| 1.1 660 | 1 |
| 1.2 880 | 1 |
| 1.3 李艳芳 900 | 1 |
| 1.4 张宇题源大全 | 1 |
| 第二章 线性代数 | 2 |
| 2.1 880 | 2 |
| 2.2 李艳芳 900 | 2 |
| 2.3 张宇题源大全 | 2 |
| 第三章 概率论 | 3 |
| 3.1 880 | 3 |
| 3.2 李艳芳 900 | 6 |
| 3.3 张宇题源大全 | 6 |
| 第四章 真题与模拟题 | 7 |
| 4.1 真题分类全刷 | 7 |
| 4.2 数一真题套卷 | 7 |
| 4.3 合工大 | 7 |

第一章 高等数学

1.1 660

1.2 880

1.3 李艳芳 900

1.4 张宇题源大全

第二章 线性代数

2.1 880

2.2 李艳芳 900

2.3 张宇题源大全

第三章 概率论

3.1 880

1. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A = \{\text{中间一段为三段中的最长者}\}$, 则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

Solution.

□

2. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

Solution.

□

3. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

Solution.

□

4. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

Solution.

(方法一) 首先考虑第 n 次试验, A 发生奇数次的情况有两种. (1) 前 $n-1$ 次成功率偶数次, 第 n 次成功; (2) 前 $n-1$ 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 $A_k = \{k\}$, $P(A_k) = p$; $B_k = \{k \text{ 次实验中成功奇数次}\}$, 记 $P(B_k) = p_k$, 则有

$$B_n = B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n = P(B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n) = P(B_{n-1}\bar{A}_n) + P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned}\text{上式} &= P(B_{n-1})P(\bar{A}) + P(\overline{B_{n-1}})P(A_n) \\ &= (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) \\ &= p + (1-2p)p_{n-1}\end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)[p_{n-1} - \frac{1}{2}] \xrightarrow{\text{等比数列}} -\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n, p)$, 则 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots$

若 n 为偶数则

$$\begin{aligned}P(X = \text{odd}) &= P(X = 1) + P(X = 3) + \dots + P(X = n-1) \\ &= C_n^1(1-p)^{n-1} + C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3} + \dots + C_n^{n-1} p^{n-1} (1-p) \\ P(X = \text{even}) &= P(X = 0) + P(X = 2) + \dots + P(X = n) \\ &= C_n^0 p^0 (1-p)^n + \dots + C_n^n p^n (1-p)^0\end{aligned}$$

且 $P(X = \text{odd}) + P(X = \text{even}) = 1$, 有注意到

$$\begin{aligned}P(X = \text{odd}) &= P(X = 1) + P(X = 3) + \dots + P(X = n-1) \\ &= -C_n^1(p-1)^{n-1} - C_n^3 p^3 (p-1)^{n-3} - \dots - C_n^{n-1} p^{n-1} (p-1) \\ P(X = \text{even}) &= P(X = 0) + P(X = 2) + \dots + P(X = n) \\ &= C_n^0 p^0 (p-1)^n + \dots + C_n^n p^n (p-1)^0\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}P(X = \text{even}) - P(X = \text{odd}) &= C_n^0 p^0 (p-1)^n + C_n^1 p^1 (p-1)^{n-1} + \dots + C_n^n p^n (p-1)^0 \\ &\xrightarrow{\text{二项式定理}} (2p-1)^n\end{aligned}$$

$$\text{则 } 2P(X = \text{odd}) = 1 - (2p-1)^n \implies P(X = \text{odd}) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X = \text{奇数}) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X \sim B(n, p)$, 则 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots$

令 $Y = \frac{1}{2}[1 + (-1)^X]$, 当 X 为奇数时, $Y = 0$; 当 X 为偶数时, $Y = 1$

于是原问题转换为求 $P(X \text{ 为奇数}) = P(Y = 0)$ 注意到 $E[Y] = 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) = P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0)$, 故只要求 $E[Y]$

$$\begin{aligned} EY &= E\left(\frac{1}{2}[1 + (-1)^X]\right) = \frac{1}{2} + E(-1)^X \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &\quad \underline{\text{逆用二项式定理}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n \end{aligned}$$

故 $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$ □

5. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

(I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

(II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

Solution. 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取得红球}\} (i = 1, 2, 3), B_i = \{\text{第 } j \text{ 次投掷硬币出现正面}\} (j = 1, 2, 3)$

(1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_3 | A_1 A_2) &= \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} = P(A_3) = P(A_1) \\ P(A_1) &\stackrel{\text{全概率公式}}{=} P(A | B_1)P(B_1) + P(A | \bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 由于两次试验都是独立重复的所以 $A_1 B_1$ 与 $A_2 B_2$ 是相互独立的

则 $P(A_1 B_1) = P(A_2 B_2) = P(B_1)P(A_1 | P(B_1)) = \frac{1}{3}$

则所求概率为

$$P(B_1 B_2 | A_1 A_2) = \frac{P(A_1 A_2 B_1 B_2)}{P(A_1 A_2)} = \frac{\frac{1}{3}^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$$

□

6. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

Solution. 设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X , 其显然满足 $X \sim B(20, 0.15)$, 不妨假设当 $X = k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X = k) \geq P(X = k - 1), P(X = k) \geq P(X = k + 1)$ 即

$$\frac{C_{20}^k 0.15^k 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)} 0.15^{k-1} 0.85^{(21-k)}} \geq 1$$

与

$$\frac{C_{20}^k 0.15^k 0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)} 0.15^{k+1} 0.85^{(19-k)}} \geq 1$$

得到如下结果

$$\begin{cases} 300 - 15k + 15 \geq 85k \\ 85k + 85 \geq 300 - 15k \end{cases}$$

即 $2.15 \leq k \leq 3.15$ 故 $k = 3$, 其概率为 $P(X = 3) = C_{20}^3 0.15^3 0.85^{17}$

□

3.2 李艳芳 900

3.3 张宇题源大全

第四章 真题与模拟题

4.1 真题分类全刷

4.2 数一真题套卷

4.3 合工大