考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 30 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 30 日

目录

第一章　二重积分

1.1　二重积分的概念

Remark. 二重积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\cdot\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和一元函数的积分定义题目一样, 关键是提出 $\frac{1}{n}$

1. (2010, 数一、数二) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

   $(A)\int_0^1 dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　$(B)\int_0^1 dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

   $(C)\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　$(D)\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

   Solution.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})\left[1+(\frac{j}{n})^2\right]}\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}\\&=\frac{\pi}{4}\ln 2\end{aligned}$$

□

2. (2016, 数三) 设 $J_i=\iint_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3)$, 其中

   $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$,

   $D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{x}\}$,

   $D_3=\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$, 则

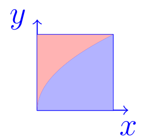
$(A)\ J_1 < J_2 < J_3$ $(B)\ J_3 < J_1 < J_2$

$(C)\ J_2 < J_3 < J_1$ $(D)\ J_2 < J_1 < J_3$

Solution. 显然区域 D_1 满足轮换对称性, 因此有

$$J_1 = \frac{1}{2}\iint_{D_1}\left(\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-x}\right) = 0$$

对于区域 D_2, 可以将 D_1 划分为如下两部分



显然蓝色区域 D_2 等于 $D_1 - D_{2'}$ 其中 $D_{2'}$ 为红色区域即

$$J_2 = \iint_{D_1} - \iint_{D_{2'}} \sqrt{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

不难发现在红色区域 $y > x$ 是显然的, 故 $J_2 > 0$, 同理可以得出 $J_3 < 0$

$$\boxed{J_3 < J_1 < J_2}$$

□

1.2 交换积分次序

3. (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)dx$=____

Solution. 交换积分次序的题目, 注意原函数的积分上下限即可, 画图即可.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

□

4. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) \mathrm{d}x$=____

Solution.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 e^{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-y)e^{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(e-1)
\end{aligned}$$

□

5. 交换 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr$ 的积分次序。

Solution. 极坐标的积分换序,不要按照极坐标做就当成 $x-y$ 做

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{a} \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

□

什么时候要变化积分次序

第一种 - 出现典型的可积不可求的函数如

$$\begin{cases} e^{\pm x^2}, e^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{\ln x} \\ \sin x^2, \sin\frac{1}{x}, \boxed{\frac{\sin x}{x}} \\ \cos x^2, \cos\frac{1}{x}, \boxed{\frac{\cos x}{x}} \end{cases}$$

第二种 - 题目明确要求了要进行积分变换

第三种 - 积分区域和积分顺序显然不符合

第四种 - 题目给的积分正常做会非常难算

1.3 二重积分的计算

Remark.

$$
\text{二重积分的计算}\begin{cases}
\text{直角坐标系}\begin{cases} x\text{型} \\ y\text{型} \end{cases} \\
\text{极坐标} \qquad r\mathrm{d}r \\
\text{性质}\begin{cases} \text{奇偶性} \\ \text{轮换对称性} \end{cases} \\
\text{形心公式 } \iint_D x\mathrm{d}\sigma = \bar{x}S_D, \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \bar{y}S_D \\
\text{平移变换} \\
\text{换元法-雅可比行列式}
\end{cases}
$$

6. (2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y) = 0, f(x,1) = 0, \iint_D f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

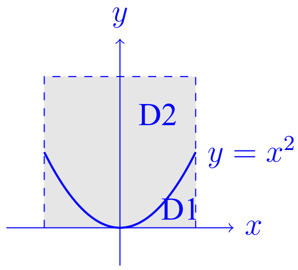
Solution. 有题设可知 $f'_x(x,1) = f'_y(1,y) = 0$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y) \\
&= -\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 xf'(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a
\end{aligned}
$$

□

7. 计算 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, 其中 $D = \{(x,y)| -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$。

Solution. 积分区域如下所示



显然图像关于 x 对称, 且原函数关于 y 是偶数故由对称性可知

$$原式 = 2\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y + 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y$$

$$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

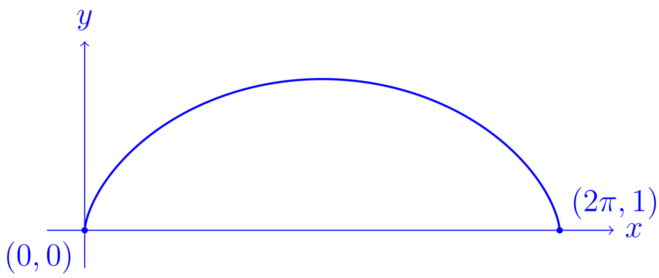
$$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t} \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\mathrm{d}t$$
$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^2\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$$

$$原式 = \boxed{\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}}$$

□

8. (2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x+2y)dxdy$。

Solution. 题设参数方程即摆线 图像如图所示, 关键性质为其关于 $x=\pi$ 对称



由于摆线关于 $x=\pi$ 对称由形心公式有

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\iint_D(\pi+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(\pi+2y)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\left[\pi y(x)+y^2(x)\right]\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x=t-\sin t}\int_0^{2\pi}\left[\pi(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right](1-\cos t)\mathrm{d}t\\
&=3\pi^2+5\pi
\end{aligned}$$

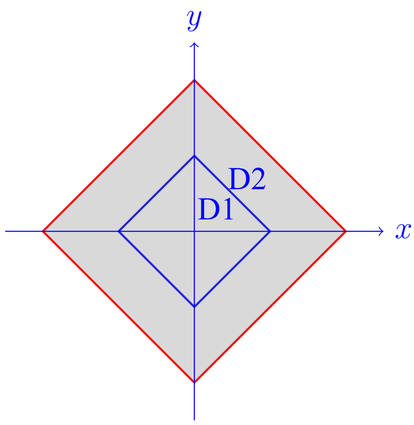
□

9. (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\le 1\\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 2\}$。

Solution. 积分区域如图所示



由奇偶性可知

$$\text{原式}=4(\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

其中

$$\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} \frac{1}{r}r\cdot\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \\
\text{方法一 万能代换} &= \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) \\
\text{方法二 三角公式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc(\theta+\frac{\pi}{4}) - \cot(\theta+\frac{\pi}{4})\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

综上

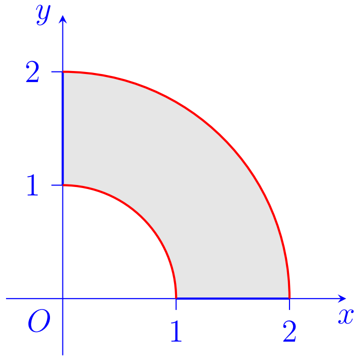
$$\text{原式} = 4(\frac{1}{12} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1))$$

□

10. (2014, 数二、数三) 设平面区域 $D = \{(x,y)|1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution. 积分区域如下所示



(方法一) 转换为极坐标, 此时积分为

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \frac{r\cos\theta\sin(\pi r)}{r(\sin\theta+\cos\theta)} r\cdot\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{-3}{\pi} = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(方法二) 考虑轮换对称性, 此时积分为

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \sin(\pi r)r\cdot\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot(-\frac{3}{\pi}) = -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

□

11. (2019, 数二) 已知平面区域 $D=\{(x,y)||x|\leq y,(x^2+y^2)^3\leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□

1.4 其他题型

12. (2010, 数二) 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$

    其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$

    Solution.

□

13. (2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x-y)dxdy$
其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2, y\geq x\}$.

Solution.

□