姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 24 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 24 日

目录

第一章　多元函数微分学

1.1　多元函数的概念

1. 例 1 求下列重极限:

   (1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$;

   (2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

   (3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

   Solution.

□

2. (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

   (A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在, 则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微

   (B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在, 则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微

   (C) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在

   (D) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在

   Solution.

□

3. (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

则 $dz|_{(0,1)}=$

Solution.

□

1.2 多元复合函数求偏导数与全微分

4. (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 则 $df(1,1)=$

   $(A)\ dx+dy$ $(B)\ dx-dy$ $(C)\ dy$ $(D)\ \mathrm{d}y$

   Solution.

□

5. (2011, 数一、数二) 设 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution.

□

1.3　多元隐函数求偏导数与全微分

6. (2005, 数一) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

   (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z = z(x,y)$

   (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$z = z(x,y)$

   (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y = y(x,z)$和$z = z(x,y)$

   (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$y = y(x,z)$

   Solution.

□

7. (1999, 数一) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution.

□

1.4 变量代换化简偏微分方程

8. (2010, 数二) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

Solution.

□

1.5 求无条件极值

9. (2003, 数一) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution.

□

10. (2004, 数一) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

Solution.

□

1.6 求条件极值 (边界最值)

11. (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

    (A) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$, 则$f'_y(x_0,y_0)=0$

    (B) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$, 则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

    (C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f'_y(x_0,y_0)=0$

    (D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

    Solution.

□

12. (2013, 数二) 求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

    Solution.

□

13. (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

(A) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

(B) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

(C) $u(x,y)$的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得

(D) $u(x,y)$的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得

Solution.

□

14. (2005, 数二) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 且 $f(1, 1) = 2$, 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y)|x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution.

□