第一章　矩阵

- 矩阵
  - 基本运算　$A+B$　kA　AB　A^T
  - 逆
    - 定义
    - 性质
    - 求法
      - 定义法
      - 初等变换法
      - 伴随矩阵法
      - 分块矩阵法
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$
      - $\Longleftrightarrow$ $r(A)=n$
      - $\Longleftrightarrow$ A的列 (行) 向量组线性无关
      - $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$只有零解
      - $\Longleftrightarrow$ 非齐次方程组$Ax=b$有唯一解
      - $\Longleftrightarrow$ A的特征值均不为零
  - 秩
    - 定义
    - 性质
    - 求法

- 矩阵
  - 伴随矩阵
    - 定义
    - 性质
  - 初等变换与初等矩阵
    - 定义
    - 性质
    - 应用
      - 求矩阵的逆
      - 求矩阵的秩
      - 线性表示
      - 求极大线性无关组
      - 解线性方程组
      - 求二次型的标准型
  - 分块矩阵

1.1 求高次幂

Remark. 基本方法

(1) 若 $r(A)=1$, 则 $A^n=tr(A)^{n-1}A$, 关键点在于 $r(A)=1 \implies A=\alpha\beta^T$

(2) 若 A 可以分解为 $E+B$, 且 B 是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{则} B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3=\mathbf{0}$$

$A^n=C_n^nE+C_n^1B+C_n^2B^2$

(3) 分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, A^n=\begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$ 则 $A=P\Lambda P^{-1}$,

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=Pdiag(\lambda_1^n,\dots,\lambda_n^n)P^{-1}$$

1. 设 A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA=O$, 且 $r(B)>1$, 则 $A^n=$____.

Solution. 由 $BA=0$ 知 $r(A)+r(B)\le n$, 又 $r(B)>1, r(A)\ge 1$ 所以 $1\le r(A)\le 1$, $\Longrightarrow$ $r(A)=1$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n=tr(A)^{n-1}\alpha\beta^T=9^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

□

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 则 $A^n=$______________.

Solution. $A=2E+B$,$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3=\mathbf{0}$, 则

$$A^n=2^nE+2^{n-1}nB+2^{n-3}n(n-1)B^2$$

□

3. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵,$B=P^{-1}AP$, 则 $(B+E)^{100}=$____

Solution. $r(A)=1, A^2=tr(A)\cdot A=-2A$ 即 $A^2+2A=\mathbf{0}, (A+E)^2=E$, 由题 $(B+E)^{100}=(P^{-1}AP+E)^{100}=(P^{-1}AP+P^{-1}EP)^{100}=(P^{-1}(A+E)P)^{100}=E$ □

1.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

   (A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C)$A + E$ 可逆 (D)$A - 3E$ 可逆

   Solution. 利用特征值, 由题设可知对于 A 的任意特征值有

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \text{或} \lambda = 2$$

   故 B,C,D 的特征值分别是

$$\lambda_B : \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}, \lambda_C \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}, \lambda_D \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

   由可逆的充分条件可知 BCD 均可逆 □

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,a, b 为非零常数. 证明:

   (1) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

   (2) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

   Solution. (1)

$$\begin{aligned} AB &= aA + bB \\ A(B - aE) - bB &= 0 \\ (A - bE)(B - aE) &= abE \implies (A - bE), (B - aE)\text{可逆} \\ (B - aE)(A - bE) &= abE \\ BA &= aA + bB = AB \end{aligned}$$

   (2)

$$\begin{aligned} A^2 + aAB &= E \\ A(A + aE) &= E \implies (A + aE)A = E \implies AB = BA \end{aligned}$$

□

总结

$$(1)A_{n\times n}B_{n\times n}=E \implies \begin{cases} \text{可逆} \\ \text{求逆}, B=A^{-1}, A=B^{-1} \\ \text{满足交换律}, AB=BA \end{cases}$$

$$(2)AB\ \text{可交换的充分条件} \begin{cases} B=f(A), A^{-1}, A^{*} \\ AB=aA+bB(a,b\neq 0) \\ A^2+aAB=E,(a\neq 0) \end{cases}$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3=O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$, 求 X.

Solution. (1) 由 $A^3=0 \implies \lambda^3=0 \implies \lambda_i=0$ 又 $tr(A)=\sum_{i=0}^{3}\lambda_i$ 故 $a=0$

(2)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= X(E-A^2)-AX(E-A^2) \\ &= (E-A)X(E-A^2)=E \end{aligned}$$

有 $E-A, E-A^2$ 均可逆 (用特征值) 故

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$$

通过初等行变换化为行最简型有

$$\begin{aligned} (E-A-A^2 \mid E) &\xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid (E-A-A^2)^{-1}) \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

□

1.3 秩的计算与证明

Remark. 秩

秩的定义:$\exists r$ 阶子式非零且 $\forall r+1$ 阶子式均为零

秩的性质

(1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $r(A)<\min\{m,n\}$

(2) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

(3) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

(4) $\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A\mid B)\leq r(A)+r(B)$

(5) $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$

(6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,P 为 m 阶可逆矩阵,Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 若 $r(A)=n$ 则 $r(AB)=r(B)$, 若 $r(A)=m$ 则 $r(CA)=r(C)$

左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times s$ 阶矩阵,$AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A,B 为 n 阶矩阵,(XY) 表示分块矩阵, 则:

A $r(A\ AB)=r(A)$

B $r(A\ BA)=r(A)$

C $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$

D $r(A\ B)=r(A^TB^T)$

Solution. (方法一) 由性质 4, 联立的秩大于等于每一个有

$$r\left[A(E,B)\right]\geq r(A)$$

由性质 3, 乘积的秩小于等于每一个有

$$r\left[A(E,B)\right]\leq r(A)$$

故 A 选项正确

易错点,B 选项为啥不能写成

$$r\left[(E+B)A\right]$$

其中 $(E+B)_{n\times 2n}, A_{n\times 2}$ 列 $\neq$ 行无法乘

(方法二)

$$r(A, AB) = r\left[A(E, B)\right]$$

其中 (E, B) 显然行满秩, 由性质 7 右乘行满列则秩不变, 即

$$r(A, AB) = r(A)$$

(方法三)

$$AB = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{11}\alpha_1 + \ldots + b_{n1}\alpha_n, \ldots, b_{1n}\alpha_1 + \ldots + b_{nn}\alpha_n)$$

即 AB 的列向量可以由 A 的列向量线性表示, 故由极大无关组的定义有

$$r(A, AB) = r(A)$$

(方法四) 广义初等变化 (分块矩阵)

$$(A, AB) = (A, O)\begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} \implies r(A, AB) = r(A, O) = r(A)$$

□

8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A-E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A+E) + r(A-E) = n$.

Solution. 证明第二个, 第一个和第二个基本一致. 由 $A^2 = E$ 有 $(A+E)(A-E) = 0$ 故

$$r(A+E) + r(A-E) \leq n$$

又

$$r(A+E) + r(A-E) = r(A+E) + r(E-A) \geq r(2E) = n$$

因此 $r(A+E) + r(A-E) = n$ □

若 A 的二次方程有两个互异根, 则因式分解后, 秩的和为 n

1.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

(1) $AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(5) $(A^T)^* = (A^*)^T$

(6) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(8) $r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D)6

Solution. 由题设有

$$(1,\ldots,1)\,A = 2(1,\ldots,1)$$

两边同时右乘 A^* 即

$$(1,\ldots,1)A^* = 3(1,\ldots,1)$$

故 A^* 的各列元素之和均为 3 □

各行/列元素之和

(各行元素之和为 λ) 通过右乘列向量即

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\text{为}A\text{的特征值为}\lambda\text{的特征向量}$$

(各列元素之和为 λ) 通过做成行向量即

$$(1,\ldots,1)\,A=\lambda\,(1,\ldots,1)$$

10. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

(1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$;

(2) $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

Solution. 这道题的结论比较重要 第一个充要条件通过定义即可证明即

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&\ldots&A_{n1}\\ \vdots&\ldots&\vdots\\ A_{1n}&\ldots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&a_{n1}\\ \vdots&\ldots&\vdots\\ a_{1n}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}=A^T$$

下面证明第二个充要条件.

右推左, 由于 $AA^T=E$ 且 $|A|=1$ 则

$$A^*=|A|\,A^{-1}=A^{-1}=A^T$$

左推右, 由 $A^*=A^T$ 则 $|A^*|=|A|^{n-1}=\left|A^T\right|=|A|$ 从而 $|A|=0,1,-1$

由于 $A\neq O$, 不妨设 $a_11\neq 0$, 按第一行展开有

$$|A|=a_{11}A_{11}+\ldots a_{1n}A_{1n}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2>0\implies|A|=1$$

又

$$AA^T=AA^*=|A|\,E=E$$

□

1.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

(1) $|E(i,j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$

(2) $E(i,j)^T = E(i,j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$

(3) $E(i,j)^{-1} = E(i,j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k)^{-1}) = E(ij(-k))$

(4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵

(5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 则:

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 的 B^*

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$

(D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

Solution. 有题设有

$$E(1,2)A = B$$

即

$$\begin{aligned} B^* &= A^* \left[E(1,2)\right]^* \\ &= A^* \left|E(1,2)\right| E^{-1}(1,2) \\ &= -A^* E(1,2) \end{aligned}$$

即交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$ □