考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 29 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 29 日

目录

第一章　多元函数积分学

三维向量

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$

数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

性质 1 判断空间向量垂直 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a\perp b$

性质 2 求空间两直线的夹角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$

向量积 $a\times b=|a||b|\sin\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

性质 1 判断空间直线平行 $\vec{a}\times\vec{b}=0 \iff a\parallel b$

性质 2 求平面四边形的面积 $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

混合积 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

性质 1 判断三个向量是否共面 共面 $\iff (\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$

性质 2 平行六面体的体积 $V=\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$

直线与平面

(一) 平面

平面的点法式 假设平面过点 (x_0, y_0, z_0) 且该平面的法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 则平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的一般式 将点法式展开

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

平面的截距式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

其中 a, b, c 分别是该平面与 x, y, z 轴的截距

点到平面的距离公式 假设平面外一点 (x_0, y_0, z_0) 到平面的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(直线)

直线的点向式 假设直线过点 (x_0, y_0, z_0) 且该直线的方向向量为 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 则该直线的直线方程为

$$\frac{x_0 - x}{l} = \frac{y_0 - y}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

直线的参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

直线的一般式 (两平面的交线)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$$

平面束方程 过某一直线的所有平面的方程 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 其中 λ, μ 不同时为 0,$(\ldots)$ 即该直线一般式的两平面方程

曲面与曲线

假设直线外一点 (x_0, y_0, z_0) 其到直线的距离为

$$d = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

平面与直线的关系基本只需要考察 $\vec{n}$ 和 $\vec{s}$ 的关系即可

旋转曲面

假设曲线 $L = \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转而来的旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 = x^2(z) + y^2(z)$$

求旋转曲面的问题, 捉住旋转过程中的不变量进行处理, 例如绕 z 轴旋转, 则旋转曲面上的点到 z 轴的距离和 z 坐标都与原来曲线的点一致即

$$P_0 = \begin{cases} x_0 = x(z_0) \\ y_0 = y(z_0) \end{cases} ; P = \begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

消去 z_0 即可得到答案

常见曲面的类型

$$\begin{cases} \text{球面} & x^2 + y^2 + c^2 = R^2 \\ \text{圆柱面} & x^2 + y^2 = R^2 \\ \text{椭球面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{抛物面} & \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z(p > 0) \\ \text{圆锥面} & z = a\sqrt{x^2 + y^2}\text{上圆锥面} \\ \text{单叶双曲面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{双叶双曲面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

曲面与曲线

与线代考点的综合题 二次型的特征值的正负对应图像的情况

$$\begin{cases} \text{三正,} & \text{球/椭球} \\ \text{两正,} & \text{圆锥} \\ \text{两正一负,} & \text{单叶双曲面} \\ \text{两负一正,} & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

投影曲线, 往 xoy 面的投影曲线只需要消去 z 即可

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 z}} \begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

曲面的法向量与切平面

若曲面是显示给出的即 $F(x,y,z)=0$ 则其法向量为

$$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}$$

若曲面的是隐式给出的即 $z=z(x,y)$ 则其法向量为

$$\vec{n}=\{-z'_x,-z'_y,1\}$$

切平面方程为

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'z(z-z_0)=0$$

曲线的切向量

若曲线是以参数式给出即 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 则其切向量为

$$\tau=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

若以两曲面的交线形式给出, 即 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 此时切向量为

$$\tau=\vec{n_1}\times\vec{n_2}, \text{其中 } n_1,n_2 \text{ 分别为两曲面的法向量}$$

方向导数与三度

方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{x_0,y_0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

其中 α 为与 x 轴正方向的夹角,β 为与 y 轴正方向的夹角 t 是趋于 0^+

若 $f(x,y)$ 可微分, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f'_x\cos\alpha + f'y\cos\beta = gr\vec{a}d\ f\cdot\vec{l_0}$$

梯度, 散度, 旋度

$$gr\vec{a}d\ f = (\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\cdot(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$ro\vec{t}\ A = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

方向导数沿梯度方向取得最大值, 沿梯度反方向取得最小值, 值为

$$\pm\left|gr\vec{a}d\ f\right| = \pm\left|(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\right|$$

三度之间的关系, 要求二阶偏导连续

$$div\ gr\vec{a}d\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$r\vec{o}tgr\vec{a}d\ f = \vec{0}$$

$$divr\vec{o}t = 0$$

1.1 三重积分的计算

1. (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

   (I) 求曲面 Σ 的方程;

   (II) 求 Ω 的形心坐标.

Solution.

□

2. (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

Solution.

□

1.2 第一类曲线积分的计算

3. (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds =$

Solution.

□

4. 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

Solution.

□

1.3 第二类曲线积分的计算

5. (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

   (I) 求 $I(D_1)$ 的值;

   (II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

Solution.

□

6. (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$

Solution.

□

1.4 第一类曲面积分的计算

7. (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

Solution.

□

1.5 第二类曲面积分的计算

8. (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

Solution.

□

9. 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

Solution.

□

10. (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leq x^2+y^2\leq 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution.

□