错题集

Weary Bird

2025 年 8 月 9 日

梅花引·荆溪阻雪

白鸥问我泊孤舟，是身留，是心留？心若留时，何事锁眉头？风拍小帘灯晕舞，对闲影，冷清清，忆旧游。

旧游旧游今在否？花外楼，柳下舟。梦也梦也，梦不到，寒水空流。漠漠黄云，湿透木棉裘。都道无人愁似我，今夜雪，有梅花，似我愁。

2025 年 8 月 9 日

目录

第一章　高等数学

1.1　极限与连续

1. $\star$ 设函数 $f(x)=\cos(\sin x), g(x)=\sin(\cos x)$ 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 ( )

   A.$f(x)$ 单调递增,$g(x)$ 单调递减　　B.$f(x)$ 单调递减,$g(x)$ 单调递增

   C.$f(x),g(x)$ 均单调递减　　D.$f(x),g(x)$ 均单调递增

2. $\star\star$ 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性

3. $\star\star$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $a<c<d<b$ 证明: 在 (a,b) 内必定存在一点 ξ 使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$, 其中 m,n 为任意给定的自然数

4. $\star\star$ 设 $x_1=\sqrt{a}(a>0), x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求出其值.

5. $\star\star\star$ 设 $x_1=a\geq 0, y_1=b\geq 0, a\leq b, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\ldots)$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

6. $\star\star$ 设 $\{x_n\}$ 为数列, 则下列数据结论正确的是 ( )

   ① 若 $\{\arctan x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ② 若 $\{\arctan x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ③ 若 $x_n\in[-1,1]$, 且 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   ④ 若 $x_n\in[-1,1]$, 且 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   A.①②　　B.③④　　C.①③　　D.②④

7. $\star$ 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}$=____

8. $\star$ 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$=____

9. ⋆⋆ 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{a[x]+\dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=b$ 则 a=___,b=___

10. ⋆ 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

11. ⋆⋆⋆ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$ 证明

    (I) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$

    (II) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{n})(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$

12. ⋆⋆⋆⋆(2011. 数一)

    (I) 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

    (II) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在

1.2 一元函数微分学/积分学 (除证明题)/多元函数微分学

1. ⋆ 设 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 均存在, 则下列结论正确的是 ( )

    A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在　　B. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

    C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在　　D. $f(x,y)$ 在去心邻域 (x_0,y_0) 内有定义

2. ⋆ 设 $z=(1+xy)^y$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{1,1}=$ ___

3. ⋆⋆ 设 $\begin{cases}y=f(x,t)\\F(x,y,t)=0\end{cases}$ f,F 有一阶连续偏导数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

4. ⋆⋆ 设 $y=f(x,t),t=t(x,t)$ 由方程 $G(x,y,t)=0$ 确定,f,G 可微, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

5. ⋆ 设 $z=z(x,y)$ 有方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=$ ____

6. ⋆ 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $P(2,1,4)$ 处的且平面方程为 ___ 法线方程 ___

7. ⋆ 求 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值

8. ⋆⋆ 求双曲线 $xy=4$ 与直线 $2x+y=1$ 之间的最短距离

1.3 空间解析几何/多元函数积分学

1. ⋆ 设向量 $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,0,2),\vec{c}=(0,k,-3)$ 共面, 则 $k=$ ___

2. ⋆⋆ 设非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 满足 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 于 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ 的模相等, 则必有 ( )

   A.$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ B.$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ C.$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$ D.$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

3. ⋆⋆ 直线 $L_1:\begin{cases}x-1=0\\ y=z\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y=0\\ z+2=0\end{cases}$ 的距离 $d=$___

4. ⋆⋆ 设 α,β 均为单位向量, 其夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 则 $\alpha+2\beta$ 与 $3\alpha+\beta$ 为邻边的平行四边形的面积为 ___

5. ⋆⋆ 设 α,β 是非零常向量, 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 且 $|\beta|=2$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\alpha+x\beta|-|\alpha|}{x}=$___

6. ⋆ 求平行于平面 $x+y+z=9$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

7. ⋆ 设平面 π 过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi_1:x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 求平面 π 的方程

8. ⋆ 求与直线 $L_1:x+2=3-y=z+1$ 与 $L_2:\dfrac{x+4}{2}=y=\dfrac{z-4}{3}$ 都垂直相交的直线方程

9. ⋆ 求直线 $L_1:\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{0}$ 与 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=z$ 的公垂线方程

10. ⋆⋆ 求直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{1}$ 绕直线 $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ 旋转一周所得到的曲面方程

1.4 常微分方程

1.5 无穷级数

1.6 证明题

第二章　线性代数

2.1　行列式, 矩阵, 向量

2.2　线性方程组

2.3　矩阵特征值与特征向量, 二次型

第三章　概率论

3.1　事件与概率, 随机变量及其分布

1. 每箱产品有 10 件, 其中次品数从 0 到 2 是等可能的, 开箱检验时, 从中任取一件, 如果检验为次品, 则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差, 一件正品被误判为次品的概率为 2%, 一件次品被误判为正品的概率为 10%. 试求:

(I) 随机检验一箱产品, 它能通过验收的概率 p;

(II) 检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 q.

Solution

(1) 设 $B=\{$任取一件为正品$\}$,$A=\{$一箱产品能通过验收$\}$ 则由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})$$

而其中

$$P(A\mid B)=1-0.02=0.98, P(A\mid \bar{B})=1-0.1=0.9$$

代入全概率公式有 $p=P(A)=1+0.88P(B)$, 为求 $P(B)$, 记 C_i 为每箱中包含 i 件次品, 且 C_0,C_1,C_2 为完备事件组, 再由全概率公式可以求出

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(C_i)P(B\mid C_i)=0.9$$

故 $P(A)=0.892$

(2)$q=P\{X/10\geq 0.9\}=P\{X\geq 9\}=P\{X=9\}+P\{X=10\}\approx 0.705$

2. 一条自动生产线生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, n=0,1,2,\cdots$. 假设产品的优质品率为 $p\,(0<p<1)$. 如果各件产品是否为优质品相互独立.

(I) 计算生产线在两次故障间共生产 k 件 $(k=0,1,2,\cdots)$ 优质品的概率;

(II) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品, 求它共生产 m 件产品的概率.

Solution

(1) 不妨令

$B_k=\{$两次故障公生产了 k 件优质品$\}$,$A_n=\{$两次故障间总共生产了 n 件产品$\}$, 显然 $A_0,A_1,\ldots$ 构成了一个完备事件组, 故利用全概率公式有

$$\begin{aligned}
P(B_k)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)\\
&\xlongequal{\text{前 k-1 次不可能产生 k 件优质品}}\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)\\
&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda p}\\
&\xlongequal{\text{Possion 分布}}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

(2) 当 $m<k$ 的时候,$P(A_m\mid B_k)=0$, 当 $m\geq k$,

$$\begin{aligned}
P(A_m\mid B_k)&=\frac{P(A_m)P(B_k\mid A_m)}{P(B_k)}\\
&=\frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q},m\in(k,k+1,\ldots)
\end{aligned}$$

总结

关于全概率公式与贝叶斯公式的总结

这种问题的关键在于寻找一个合适的完备事件组, 当问题涉及" 原因推结果/结果推原因" 大概率要用贝叶斯公式 (条件概率是贝叶斯的特殊情况)

3. 甲、乙二人轮流投篮, 游戏规则规定为甲先开始, 且甲每轮只投一次, 而乙每轮连续投两次, 先投中者为胜. 设甲、乙每次投篮的命中率分别是 p 与 0.5, 则 $p=$___ 时, 甲、乙胜负概率相同.

Solution

这道题和笔记中的交替射击模型一致, 记 $A=\{$甲获胜$\}$, $B=\{$乙获胜$\}$, 则由题意有

$$P(A)=p+(1-p)(1-0.5)(1-0.5)P(A)\implies P(A)=\frac{p}{1-0.25(1-p)}$$

再由题意可知, 要使得甲乙获胜概率一致, 则 $P(A) = P(B) = 0.5 \implies p = \dfrac{3}{7}$

4. (非离散非连续的概率) 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, 且 $P\{X = 0\} = \dfrac{1}{4}$, 已知当 $X \neq 0$ 的时候,X 在其他取值范围内满足均匀分布, 求 X 的分布函数 $F_X(x)$.

Solution

由题意有 $P\{|X| \leq 1\} = 1, P\{X = 0\} = \dfrac{1}{4} \implies P\{X \neq= 0\} = \dfrac{3}{4}$, 又因为区间长度为 2, 有

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{3}{8}(x+1), & -1 <= x < 0 \\ \dfrac{3x+5}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \geq 1 \end{cases}$$

5. 设有四个编号分别为 $1, 2, 3, 4$ 的盒子和三只球，现将每个球随机地放入四个盒子，记 X 为至少有一只球的盒子的最小号码.

(1) 求 X 的分布律;

(2) 若当 $X = k$ 的时候, 随机变量在 $[0, k]$ 上服从均匀分布, 求 $P\{Y \leq 2\}$;

Solution

(1) 由题有 $P\{X = 1\} = \dfrac{C_3^1 3^2 + C_3^2 3 + C_3^3}{4^3} = \dfrac{37}{64}$ 解释: 总共有 4^3 种方案, 若 1 是最小的有球的盒子, 则其中可以有 $1, 2, 3$ 三种可能,$C_3^1 3^2$ 表示选择一个球加入 1 号盒子, 其余两个球可以从剩余 3 个盒子中随机选择两个放入. 同理可以求出 X=2,3,4, 故有

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{37}{64} & \dfrac{19}{64} & \dfrac{7}{64} & \dfrac{1}{61} \end{pmatrix}$$

(2) 由全概率公式 $P\{Y \leq 2\} = \sum_{i=1}^{4} P\{Y \leq 2 \mid X = k\} = \dfrac{367}{384}$

6. 有一根长为 L 的木棒, 将其任意折成三段, 记事件 $A = \{$中间一段为三段中的最长者$\}$, 则 $P(A) =$ ____

Solution

7. 设甲乙两人独立对同一目标进行一次设计, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 ____

Solution

8. 已知 10 部手机中有 7 个合格品和 3 个次品, 每次任取一个作测试, 测试后不放回, 直到将 3 个次品都找到为止, 则需要测试 7 次的概率为 ____

Solution

9. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 发生奇数次的概率为 ____

Solution

(方法一) 首先考虑第 n 次试验,A 发生奇数次的情况有两种.(1) 前 n-1 次成功率偶数次, 第 n 次成功;(2) 前 n-1 次成功了奇数次, 第 n 次失败了. 则不发令 A_k = {第 k 次试验成功}, $P(A_k) = p; B_k$ = {k 次实验中成功奇数次}, 记 $P(B_k) = p_k$, 则有

$$B_n = B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n$$

显然 $B_{n-1}\bar{A}_n$ 与 $\overline{B_{n-1}}A_n$ 互斥, 则有

$$p_n = P(B_{n-1}\bar{A}_n + \overline{B_{n-1}}A_n) = P(B_{n-1}\bar{A}_n) + P(\overline{B_{n-1}}A_n)$$

又由于伯努利试验的独立性, 有

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= P(B_{n-1})P(\bar{A}) + P(\overline{B_{n-1}})P(A_n) \\
&= (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) \\
&= p + (1-2p)p_{n-1}
\end{aligned}$$

有递推关系式, 可以得到

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)[p_{n-1} - \frac{1}{2}] \xlongequal{\text{等比数列}} -\frac{(1-2p)^n}{2}$$

(方法二) 利用奇偶 设 $X \sim B(n,p)$, 则 $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^(n-k), k=0,1,2,...$

若 n 为偶数则

$$\begin{aligned} P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+...+P(X=n-1) \\ &= C_n^1(1-p)^{n-1}+C_n^3p^3(1-p)^{n-3}+...+C_n^{n-1}p^{n-1}(1-p) \\ P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+...+P(X=n) \\ &= C_n^0p^0(1-p)^n+...+C_n^np^n(1-p)^0 \end{aligned}$$

且 $P(X=odd)+P(X=even)=1$, 有注意到

$$\begin{aligned} P(X=odd) &= P(X=1)+P(X=3)+...+P(X=n-1) \\ &= -C_n^1(p-1)^{n-1}-C_n^3p^3(p-1)^{n-3}-...-C_n^{n-1}p^{n-1}(p-1) \\ P(X=even) &= P(X=0)+P(X=2)+...+P(X=n) \\ &= C_n^0p^0(p-1)^n+...+C_n^np^n(p-1)^0 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} P(X=even)-P(X=odd) &= C_n^0p^0(p-1)^n+C_n^1p^1(p-1)^{n-1}+...+C_n^np^n(p-1)^0 \\ &\xlongequal{\text{二项式定理}} (2p-1)^n \end{aligned}$$

则 $2P(X=odd)=1-(2p-1)^n \implies P(X=odd)=\dfrac{1-(2p-1)^n}{2}$

同理当 n 为奇数的时候, 上述也成立, 故 $P(X=\text{奇数})=\dfrac{1-(2p-1)^n}{2}$

(方法三) 设 $X \sim B(n,p)$，则 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$,$k=0,1,2,...$

令 $Y=\frac{1}{2}[1+(-1)^X]$，当 X 为奇数时，$Y=0$；当 X 为偶数时，$Y=1$

于是原问题转换为求 $P(X\text{为奇数})=P(Y=0)$ 注意到 $E[Y]=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=P(Y=1)=1-P(Y=0)$，故只需要求 $E[Y]$

$$\begin{aligned} EY = E(\frac{1}{2}[1+(-1)^X]) &= \frac{1}{2}+E(-1)^X \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kp^k(1-p)^{n-k} \\ \xlongequal{\text{逆用二项式定理}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n \end{aligned}$$

故 $P(Y=0)=1-P(Y=1)=\dfrac{1-(1-2p)^n}{2}$

10. 设甲盒中有 4 个红球和 2 个白球, 乙盒中有 2 个红球和 4 个白球, 掷一枚均匀的硬币, 若正面出现, 则从甲盒中任取一球, 若反面出现, 则从乙盒中任取一球, 设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

(I) 若前两次都取得红球, 求第三次也取得红球的概率;

(II) 若前两次都取得红球, 求红球都来自甲盒的概率.

Solution

设 $A_i = \{$第 i 次取得红球$\}(i = 1, 2, 3)$, $B_i = \{$第 j 次投掷银币出现正面$\}(j = 1, 2, 3)$

(1) 显然 A_i 与 B_j 之间是相互独立的, 所求概率为

$$P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = P(A_3) = P(A_1)$$

$$P(A_1) \xlongequal{\text{全概率公式}} P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid \bar{B}_1)P(\bar{B}_1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

(2) 由于两次试验都是独立重复的所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的

则 $P(A_1B_1) = P(A_2B_2) = P(B_1)P(A_1 \mid P(B_1)) = \dfrac{1}{3}$

则所求概率为

$$P(B_1B_2 \mid A_1A_2) = \frac{P(B_1B_2A_1A_2)}{P(A_1A_2)} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9}$$

11. (考的可能性比较低) 设一批产品中有 15% 的次品, 进行独立重复抽样检验, 若抽取 20 个样品, 则抽出的 20 个样品中, 可能性最大的次品数是多少? 并求其概率.

Solution

设 20 次抽取其中出现次品的次数为 X, 其显然满足 $X \sim B(20, 0.15)$, 不妨假设当 $X = k$ 的时候物品的可能性最大, 则有 $P(X = k) \geq P(X = k-1), P(X = k) \geq P(X = k+1)$ 即

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^{k}0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k-1)}0.15^{k-1}0.85^{(21-k)}} \geq 1$$

与

$$\frac{C_{20}^{k}0.15^{k}0.85^{(20-k)}}{C_{20}^{(k+1)}0.15^{k+1}0.85^{(19-k)}} \geq 1$$

得到如下结果

$$\begin{cases} 300 - 15k + 15 \geq 85k \\ 85k + 85 \geq 300 - 15k \end{cases}$$

即 $2.15 \leq k \leq 3.15$ 故 $k = 3$, 其概率为 $P(X = 3) = C_{20}^{3} 0.15^{3} 0.85^{17}$

12. 设自动机床在任意时长为 t 的时间间隔内发生故障的此时为 X 服从参数为 λ_t 的泊松分布,Y 表示相继两次故障之间的时间间隔, 则当 $t > 0$ 时,$P\{Y > t\} =$ ____

Solution

是一个文字游戏, 所谓 $P\{Y > t\}$ 转换为 X 的话其实就是在 t 时间内没有发生故障,$P\{X = 0\} = \frac{\lambda_t^0}{0!} e^{-\lambda_t} = e^{-\lambda_t}$

13. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0, (x_0, y_0)$ 为分布函数曲线 $y = F(x)$ 的拐点, 则 $x_0 =$ ____, $y_0 =$ ____

Solution

这道题本身并没啥, 但要注意题目,y_0 是 $F(x_0)$ 而不是 $f(x_0)$, 答案是 $\mu, \frac{1}{2}$

14. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{a}{k!} e^{-2}, k = 0, 1, 2 \ldots$ 则常数 $a =$ ____

Solution

这道题由两个解法, 需要注意对比泊松分布时候系数的确定

(方法一) 由规范性有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{k!} e^{-2} = 1 = \Longrightarrow a = e$$

(方法二) 有泊松分布有

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

注意到 $\lambda = -1$ 的时候与题设要求接近, 故有 $ae^{-2} = e^{-1} \implies a = e$

15. 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$,X 在区间 (a, b) 内取值的概率最大, 其中 $a > 0$ 则 $\sigma^2 =$ ____

Solution

这道题还真实蛮奇怪的, 有题可知所求概率为

$$P\{a/\sigma < X < b/\sigma\} = \Phi(b/\sigma) - \Phi(a/\sigma)$$

不妨记

$$f(\sigma) = \Phi(b/\sigma) - \Phi(a/\sigma)$$

问题等效为去上面函数的最值问题.

$$f'(\sigma) = \frac{a}{\sigma^2}\phi(a/\sigma) - \frac{b}{\sigma^2}\phi(b/\sigma)$$

令 $f'(\sigma) = 0$, 则有 $be^{-(b^2/(2\sigma^2))} = ae^{-(a^2/(2\sigma^2))}$ 两边取对数, 可以得到

$$\sigma^2 = \frac{a^2 - b^2}{2(\ln a - \ln b)}$$

当 $\sigma^2 >$ 所求值的时候 $f'(\sigma) > 0$ 反之则有 $f'(\sigma) < 0$ 故所求值即为最大值

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{a^2 - b^2}{2(\ln a - \ln b)}}$$

3.2 多维随机变量

3.3 数字特征

3.4 后三章

第四章 真题与模拟题

备注

▲ 表示难度, 越多越难 ♦ 表示计算量, 越多计算量越大

4.1 数学真题一网打尽

1. ▲▲ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

Solution

显然是一道夹逼定理的题目, 但有几点需要注意.

$$\text{原式} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \xlongequal{n\to\infty} \int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$$

放大这一方向是比较好想的, 重点在于缩小.

$$\text{原式} > \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \xlongequal{n\to\infty} \int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \sin\pi x = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\text{原式} = \frac{2}{\pi}$$

2. ▲▲ 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续, 则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (\ )$

A. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2n}$

B. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$ **D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$

解法一 正面突破

这道题显然是考察定积分的定义, 但考察的比较细节.

i 其中 (A)(B) 选项是将区间进行 n 等分的划分, 且取的是区间重点, 如何得知呢? 考虑端点 $0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}$ 而

$$\frac{k-1}{n}=\frac{2k-2}{2n}<\frac{2k-1}{2n}<\frac{2k}{2n}=\frac{k}{n}$$

故由定积分的定义, 此时有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n})\cdot\frac{1}{n}$$

ii 其中 (C)(D) 是将区间进行 $2n$ 等分的划分, 取的分别是左/右端点, 这并不影响定积分形式, 应该为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n})\cdot\frac{1}{2n}$$

解法二 选择题不客气!

取 $f(x)=1$ 则 $\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$, 对应的选项可以直接计算, 结果为

(A) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\neq 1$

(B) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}=1$

(C) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{1}{n}=2\neq 1$

(D) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{2}{n}=4\neq 1$

定积分的定义

定积分的定义有如下几个要点

(1) 将区间 $[a,b]$ 划分为 n 个区域, 其中记

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

记自区间长度即模为

$$\lambda = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \Delta_n\}$$

(2) 在每个子区间上取任意一点 ξ_i 取其函数值 $f(\xi_i)$, 则 Riemann 和为

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当 $\lambda \to 0$ 时, 若 S 极限存在, 且分割方式与 ξ_i 无关, 则称该极限为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分, 如下

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

3. ▲(1999.2)$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x (n = 1, 2, \ldots)$, 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减且非负的连续函数证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在

Solution

先证明单调性, 作差有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}} f(n+1) - f(\xi), \xi \in (n, n+1) \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减故 $a_{n+1} - a_n < 0 \implies$ 原数列单调递减.

再证明有界性由于

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

原式化为

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] + f(n)$$

由于 $f(x)$ 非负且单调递减, 容易直到 $f(k) > \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$ 故原式一定有

$$原式 \geq 0$$

即原数列单调递减有下界, 故原数列收敛.

4. (2011-12) ▲▲

(1) 证明: 对于任意的正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n$ 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

拉氏中值 + 单调有界证明

(1) 令 $f(x) = \ln(1+x)$ 则

$$\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 1 = f'(\xi)\cdot\frac{1}{n}, \xi \in (0, \frac{1}{n})$$

即

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{1+\xi} < 1$$

综上有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

(2) 首先证明其单调, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$$

即原数列单调递减, 只需证明其有下界即可. 考虑

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - lnn \\
&> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ldots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\
&= \ln(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n+1}{n}) - \ln n \\
&= \ln(n+1) - \ln n > 0
\end{aligned}$$

故原数列单调递减有下界, 即其极限值存在.

积分放缩法

由积分保号性, 若需证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只需证明 $f(x) > g(x)$

(1) 考虑如下操作

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{n}$$
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\mathrm{d}x$$

显然在 $(n, n+1)$ 上有 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$, 故原不等式得证

(2) 证明单调性, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x < 0$$

证明有下界有

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x > 0$$

有没有很眼熟, 没错, 正是上一题 (1999.2) 的所考察的证明!

故原数列单调递减有下界, 其极限存在.

收敛级数

(1) 不等式最基本的方法应该想到构建函数, 证明单调性. 不妨令 $x = \frac{1}{n}$, 原不等式等价于证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0,1)$$

令 $f(x) = x - \ln(1+x)$ 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$, 故 $f'(x)$ 单调递增, 即 $f(x) > f(0) = 0$, 同理可证明左边不等式.

(2) 基于如下结论

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \text{存在} \iff \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)\text{收敛}}$$

由于

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

故数列 $\{a_n\}$ 与技术 $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$ 同敛散.

由于 $|a_n - a_{n-1}| = \left|\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|$ 做 Taylor 展开有

$$\begin{aligned}|a_n - a_{n-1}| &= \left|\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right]\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right| \sim \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法可知原级数绝对收敛, 故而原级数收敛. 从而数列极限存在

5. (2012-2) ▲

(1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1(n > 1, n \in \mathbf{N})$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内仅有一个实根

(2) 记 (I) 中的实根为 x_n 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出此极限

Solution

(1) 令 $f(x) = x^n + \ldots + x - 1, f'(x) = nx^{n-1} + \ldots + 2x + 1 > 0$ 故 f(x) 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增, 又有

$$\begin{cases} f(1) = n - 1 > 0 \\ f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0 \end{cases}$$

由零点存在定理可知, 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上仅有唯一零点

(2) 考虑 $f(x)_{n+1} = x^{n+1} + x^n + \ldots + x - 1$ 由 (1) 可知

$$\begin{cases} f(x_n)_{n+1} = x_n^{n+1} > 0 \\ f(\frac{1}{2})_{n+1} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \end{cases}$$

故在区间 $(\frac{1}{2}, x_n)$ 中有唯一零点 x_{n+1} 因此有

$$\frac{1}{2} < x_{n+1} < x_n$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界故极限存在.

不妨令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 带入 $f(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{1 - x_n} = 1$$

即

$$\frac{a-0}{1-a} = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

6. ▲(2013.2) 设函数 $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小值

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < 1$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限

Solution

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}(x > 0)$ 有 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减, 在 $(1,+\infty)$ 上递增, 故 $f(1) = 1$ 为 $f(x)$ 的最小值

(2) 由题设有

$$\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 = \ln e$$

有 $\ln x$ 单调, 故 $0 < x_n < e$ 又由于 (1) 可知 $1 = f(1) < f(x_n) \implies x_{n+1} < x_n$ 故原数列单调递减有下界故其极限存在, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 有题设有

$$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$$

又因为

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$$

故 $a = 1$ 即

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1}$$

7. ▲ 设对任意的 x, 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$( )

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

Solution

对于 A,B 选项, 不妨取 $f(x)=g(x)=\varphi(x)=x$ 但是 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 不存在

对于 C 选项, 不妨取 $f(x)=g(x)=\varphi(x)=1$, 此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

夹逼定理

原式形式

$$n\text{充分大时}, \begin{cases} \varphi(n)\le f(n)\le g(n) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=A \end{cases} \implies \lim_{n\to\infty} f(n)=A$$

考虑题设的 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 则有

$$0\le f(x)-\varphi(x)\le g(x)-\varphi(x) \implies \lim_{n\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$$

也可以看出 $f(x)$ 的极限与 $\varphi(x)$ 有关, 若 $\varphi(x)$ 存在则 $f(x)$ 极限也存在否则不存在.

8. ▲(2007-12) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n)(n=1,2,\ldots)$ 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

拉格朗日中值定理

存在 $\xi_n\in(n,n+1), u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)$ 进而有 $u_{n+1}=u_n+f'(\xi_n)$, 由于 $f''(x)>0 \implies f'(x)$ 单调递增, 此时有

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n+f'(\xi_n) \\ &= u_{n-1}+f'(\xi_{n-1})+f'(\xi_n) \\ &\ldots \\ &= u_1+\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \\ &> u_1+nf'(\xi_i)=u_1+n(u_2-u_1) \end{aligned}$$

显然当 $u_2>u_1$ 当 $n\to\infty, u_n>+\infty$ 显然极限不存在.

选择题不客气

对于选项 A,$f(x)=\dfrac{1}{x}-x$

对于选项 B,$f(x)=\dfrac{1}{x}$

对于选项 C,$f(x)=x^2$

级数

由于 $u_{n+1}-u_n=f'(\xi_n)>f'(\xi_i)=u_2-u_1>0$ 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}-u_n\neq 0$ 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 极限不存在, 由定义有其部分和不存在, 即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}-u_1$$

进而可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $a\neq 0$ 则当 n 充分大的时候, 有 ( )

A. $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$ **B.** $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$ **C.** $a_n>a-\dfrac{1}{n}$ **D.** $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

10. 设有数列 $\{x_n\}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$ 则 ( )

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

11. 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\ldots)$ 则 $\{a_n\}$( )

A. 有最大值与最小值 **B.** 有最大值无最小值

C. 有最小值无最大值 **D.** 无最大值与最小值

12. ♦♦ 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$

(1) 求 $\mathrm{d}z$

(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

13.

4.2 超越 (11-25 年)

4.3 共创 (22,23,24) 年

4.4　25 年模拟卷 (百来套)