姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 14 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 14 日

目录

第一章　函数极限连续

1.1　函数的性态

Remark. (有界性的判定)

(1) 连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界

(2) 连续函数在开区间 (a,b) 上只需要判断端点处的左右极限，若 $\lim_{x\to a^+}\neq\infty$ 且 $\lim_{x\to b^-}\neq\infty$，则连续函数在该区间内有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内有界.

Proof: $\forall x\in(a,b)$, 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi$

$$f(x)-f(\frac{a+b}{2})=f'(\xi)(x-\frac{a+b}{2})$$
$$|f(x)|\leq|f'(\xi)|\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\left|f(\frac{a+b}{2})\right|$$
$$|f(x)|\leq\frac{b-a}{2}|f'(\xi)|+\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\leq M$$

1. 下列函数无界的是

A　$f(x)=\frac{1}{x}\sin x, x\in(0,+\infty)$　　B　$f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$

C　$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$　　D　$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt, x\in(0,2022)$

Solution.

(A) $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 均为有限值, 故 A 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(B) $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}=1$ 均为有限值, 故 B 在区间 $(0,+\infty)$ 有界

(C) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}=0$ 在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间 $(0,+\infty)$ 无界

(D) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^x 1dt = 0$, $\lim_{x\to 2022^-} f(x) = \int_0^{2022} \frac{\sin t}{t}dt =$ 有限值 故 D 在区间 $(0, 2022)$ 有界 □

无穷 VS 无界

无界 只有有一个子列趋于无穷即可

无穷 任意子列均趋于无穷.

例如 A 选项, 当 $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}, f(x_n) = 2n\pi + \pi/2, n \to \infty, f(x_n) \to \infty$; 当 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, f(x_n) = 0$, $n \to \infty$, $f(x_n) \to 0$ 不为无穷大, 仅仅是无界.

Remark. (导函数与原函数的奇偶性与周期性)

连续奇函数的所有原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 都是偶函数

连续偶函数仅有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数

连续周期函数的原函数为周期函数 $\iff \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$

2. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

A $\int_0^x f(t^2)dt$ B $\int_0^x f^2(t)dt$

C $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$ D $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$

Solution. 这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令 $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt = -\int_0^x f(t^2)dt = -F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t)dt = -\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C) $t[f(t) - f(-t)]$ 是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D) $t[f(t) + f(-t)]$ 是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数 □

1.2 极限的概念

Definition 1.2.1 (函数极限的定义). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时，必有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

3. (2014, 数三) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

$$(A)|a_n| > \frac{|a|}{2} \qquad (B)|a_n| < \frac{|a|}{2} \qquad (C)a_n > a - \frac{1}{n} \qquad (D)a_n < a + \frac{1}{n}$$

Solution. 令 $\epsilon = |a|/2$, 则 $|a_n - a| < |a|/2 \geq ||a_n| - |a||$ 即

$$|a|/2 < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$$

对于 CD 考虑当

$a_n = a - \frac{2}{n}$ 和 $a_n = a + \frac{2}{n}$ 简单来说 $\forall \epsilon$ 这里面的 ϵ 与 n 是无关的. □

1.3 函数极限的计算

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分的那么明显, 目标都是往最简单 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\cdot}{\infty}$ 模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

Remark. (类型一 $\frac{0}{0}$ 型)

4. (2000, 数二) 若 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

Solution. 这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了. $\sin 6x = 6x - 36x^2 + o(x^3)$, 带入题目极限有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=36$$

□

5. (2002, 数二) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解, 则当 $x\to 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不等于 (B)等于 1 (C)等于 2 (D)等于 3

Solution. 由微分方程和 $y(0)=y'(0)=0$ 可知 $y''(0)=1$, 则 $y(x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

□

Remark. (类型二 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x} &= \lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-x}{x^2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Remark. (类型三 $0 \cdot \infty$ 型)

7. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)\ln\left(1+e^{1/x}\right)$

Solution. □

Remark. (类型四 $\infty - \infty$ 型)

8. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(x^3 \ln\frac{x+1}{x-1} - 2x^2\right)$

Solution.

□

Remark. (类型五 0^0 与 ∞^0 型)

9. (2010, 数三) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/x}-1\right)^{1/\ln x}$

Solution.

□

Remark. (类型六 1^∞ 型)

10. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{1/x}$ $(a>0, n\in\mathbb{N})$

Solution. □

1.4 已知极限反求参数

Remark. (方法)

11. (1998, 数二) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ (c\neq 0)$

Solution.

□

1.5 无穷小阶的比较

Remark. (方法)

12. (2002, 数二) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$。证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

Solution.

□

13. (2006, 数二) 试确定 A, B, C 的值, 使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

Solution.

$\square$

14. (2013, 数二、数三) 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值。

Solution.

□

1.6 数列极限的计算

Remark. (方法)

(1) 单调有界准则 (三步走, 先确定单调性, 在确定有界性, 最后解方程求极限)
确定单调性, 可以考虑作差/做商/求导

(2) 压缩映射原理

(3) 夹逼准则

(4) 定积分的定义 (n 项和/n 项积)

15. (2011, 数一、数二)

(i) 证明：对任意正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(ii) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

Solution. (1) 是基本不等式的证明, 考虑拉格朗日中值即可

(2) 考研大题, 特别是分成几个小问的题目, 都需要合理利用前面的结论
考虑 $a_{n+1}-a_n$ 有

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+n/1) < 0$$

即 $\{a_n\}$ 单调递减, 考虑其有界性

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1/2+1/3+\ldots+1/n-\ln(n) \\ &< \ln(1+1)+\ln(1+1/2)+\ldots+\ln(1+n/1)-\ln(n) \\ &= \ln(n+1)-\ln(n) > 0 \end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界, 故由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

□

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0$,$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ $(n=1,2,\cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

Solution. 这道题的难度在于如何处理条件. 考虑1 的妙用. 有

$$
\begin{aligned}
e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n}-1}{x} &= \frac{e^{x_n}-e^0}{1} \\
&= e^{\xi}, \xi \in (0, x_n)
\end{aligned}
$$

而由于 e^x 是单调递增的函数则必然有 $\xi = x_{n+1}$ 即 $0 < x_{n+1} < x_n$ 从而单调递减有下界. 此时 $\{x_n\}$ 极限存在.

不妨设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 问题转换为求方程 $ae^a = e^a - 1$ 的解的问题. 显然 $a = 0$ 是其一个根. 考虑函数 $f(x) = e^x(1-x) - 1$ 其导数为 $-xe^x$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递减故 $x = a$ 是 $f(x)$ 唯一零点, 即 $a = 0$ 是唯一解. 故

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$$

□

常见的等价代换有

1: $e^0, \sin(\pi/2), \cos(0), \ln(e)$ 具体情况还得看题目, 题目有啥用啥替换

0: $\sin(0), \cos(pi/2), \ln(1)$

17. (2019, 数一、数三) 设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$。

(i) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ $(n = 2, 3, \cdots)$

(ii) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Solution. 这道题第一问比较重要, 第二问比较简单

(1) 方法一:

可以直接求出 a_n 的值, 令 $x = \sin(t)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{华里士公式}}{=\!=\!=} \frac{1}{n+2}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \text{当 n 时偶数的时候}
\end{aligned}
$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi/2}{2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

当 n 为奇数的时候同理可得

(1) 方法二:

也可以考虑分部积分法

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\left[x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\mid_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x^{n-1}\right] \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)x^{n-2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n \\
&\implies a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}
$$

(2)

由 (1) 可知

$$
\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} < 1
$$

当 $n\to\infty$ 由夹逼准则可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ □

18. (2017, 数一、数二、数三) 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Solution. 这是最普通的定积分的定义的应用

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \\
&\xlongequal{\text{定积分定义}} \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

□

1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则常数 a,b 满足

A $a<0,b<0$ B $a>0,b>0$ C $a\leq 0,b>0$ D $a\geq 0,b<0$

Solution.

□