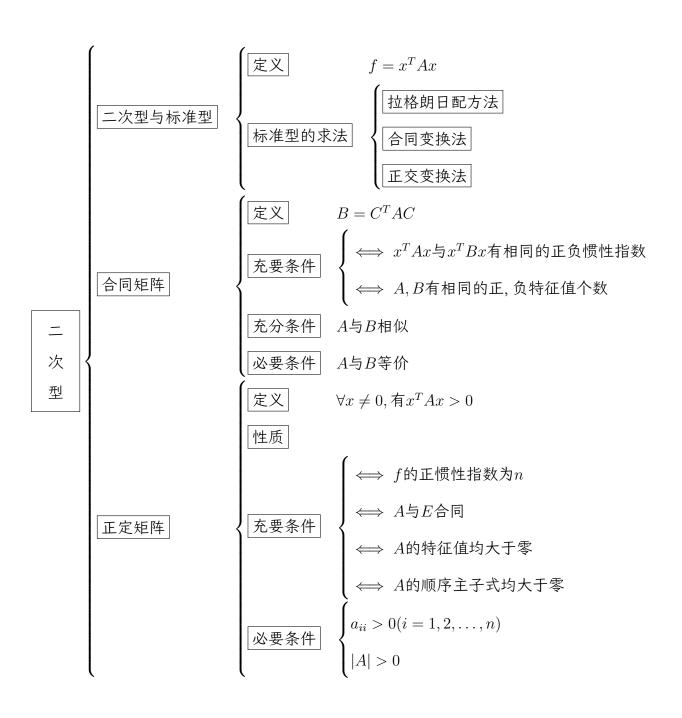
第一章 二次型



1.1 求二次型的标准形

1. (2016, 数二、三) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^1+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2 则

A. a > 1 B. a < -2 C. -2 < a < 1 D. a = 1 或 a = -2

2. (2022, 数一) 设二次型
$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$$
。

- (1) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;
- (2) 求正交变换 x = Qy, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
- (3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

- 3. (2020, 数一、三) 设二次型 $f(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $b\geq 0$ 。
 - (1) 求 a, b 的值;
 - (2) 求正交矩阵Q。

1.2 合同的判定

4. (2008, 数二、三) 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
, 与 A 合同的矩阵是

$$A. \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A. \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 合同的判定 6

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵,则存在 n 阶可逆矩阵 P,使得

$$(I)PA=B \qquad (II)P^{-1}ABP=BA \qquad (III)P^{-1}AP=B \qquad (IV)P^TA^2P=B^2$$
 成立的个数是

1.3 二次型正定与正定矩阵的判定

- 6. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 r(A) = m, 则下列结论
 - (1) $A^T A$ 与单位矩阵等价;
 - (2) $A^T A$ 与对角矩阵相似;
 - (3) $A^T A$ 与单位矩阵合同;
 - (4) A^TA 正定。

正确的个数是

A. 1 B. 2 C.3 D.4

7. 证明:

- (1) 设 A 为 n 阶正定矩阵,B 为 n 阶反对称矩阵,则 $A-B^2$ 为正定矩阵;
- (2) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 r(A+B) = n, 则 $A^TA + B^TB$ 为正定矩阵。