第一章　一元函数微分学

1.1　导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

   A　$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B　$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

   C　$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D　$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

Solution

2. (2001, 数一) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

   (A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

   (C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

Solution

3. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$, 则

   (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

   (C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

Solution

1.2 导数与微分的计算

4. (1997, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = A$($A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

Solution

5. (2012, 数三) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x<1 \end{cases}$,$y = f(f(x))$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

Solution

6. (2007, 数二) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定。设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$

Solution

7. (2003, 数一、数二) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。
   (i) 将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程
   (ii) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解

Solution

8. (2008, 数二) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solution

9. (2015, 数二) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$__

Solution

1.3 导数应用-切线与法线

10. (2000, 数二) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

Solution

11. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为__

Solution

12. (1997, 数一) 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为__

Solution

1.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

Solution

14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Solution

1.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线 $\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是

$(A)\ \dfrac{\sqrt{10}}{50}$ $(B)\ \dfrac{\sqrt{10}}{100}$ $(C)\ 10\sqrt{10}$ $(D)\ 5\sqrt{10}$

Solution

1.6 导数应用-极值与最值

Remark

函数的极值的充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$ 则有

$$f''(x)\begin{cases} >0 & x_0\text{是极小值} \\ <0 & x_0\text{是极大值} \end{cases}$$

(充分 3) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)(x_0)=0,f^{(n)}}(x_0)\neq 0$, 且 n 是大于 2 的偶数则有

$$f^{(n)}(x_0)\begin{cases} >0 & x_0\text{是极小值} \\ <0 & x_0\text{是极大值} \end{cases}$$

17. (2000, 数二) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 且 $f'(0)=0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点$(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

Solution

有题设知 $f''(0) = 0$, 对等式两边求导有 $f^{(3)}(0) = 1 \neq 0$ 由拐点充分条件可知,$(0, f(0))$ 为函数的拐点

18. (2010, 数一、数二) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值

Solution

求导有

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

令 $f'(x) = 0$ 有 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$ 并且无其余根, 带入可知

$x = \pm 1, f(\pm 1) = 0$ 为极小值点,$x = 0, f(0) = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$ 为极大值点

19. (2014, 数二) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值

Solution

比较简单, 答案为极小值为 $y(-1) = 0$, 极大值为 $y(1) = 1$

1.7 导数应用-凹凸性与拐点

Remark

拐点也有三个充分条件

(充分 1) $f(x)$ 连续, 且 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右去心邻域内 异号

(充分 2) $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ 则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数拐点

(充分 3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)(x_0)=0, f^{(n)}}(x_0) \neq 0$, 且 n 是大于 3 的奇数则有 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点

20. (2011, 数一) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1, 0)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(3, 0)$ (D) $(4, 0)$

Solution

直接用高中的穿针引线法画图就可以

1.8 导数应用-证明不等式

Remark

通常优先考虑单调性, 较难的题会结合微分中值定理 (通常是拉格朗日/柯西/泰勒)

21. (2017, 数一、数三) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(A) $f(1) > f(-1)$ (B) $f(1) < f(-1)$ (C) $|f(1)| > |f(-1)|$ (D) $|f(1)| < |f(-1)|$

Solution

这道题的辅助函数比较好想, 显然 $F(x) = \frac{1}{2}f^2(x)$, 由题设知 $F'(x) > 0$ 恒成立, 故 $F(x)$ 单调递增即 $F(1) > F(-1) \implies f^(2)(1) > f^(2)(-1) \implies |f(1)| > |f(-1)|$

22. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a) = 0$,$f'(x) > 0$,$f''(x) > 0$。设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$。

Solution

这道题的几何直观非常明显, 证明也不算很难.

由题可知切线方程为 $y = f'(b)(x - b) + f(b)$ 令 $y = 0$ 有 $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

$$
\begin{aligned}
& a < b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b \\
& \Leftarrow 0 < \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a \\
& \Leftarrow 0 < f(b) < f'(b)(b - a)
\end{aligned}
$$

由 $f(a) = 0$ 和拉格朗日中值定理有 $f(b) = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), a < \xi < b$, 又 $f''(x) > 0$ 故 $f'(\xi) < f'(b)$ 故 $f(b) < f'(b)(b - a)$ 从而原不等式成立

1.9 导数应用-求方程的根

23. (2015, 数二) 已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数。

Solution

这道题也比较简单, 感觉是高中题现在考研已经不太可能出了

$f'(x)=(2x-1)\sqrt{1+x^2}$, 显然只有唯一根 $f'(1/2)=0$ 又 $f(1)=0$ 故 $f(1/2)<0$ 又 $f(-1)>0$ 故 f(x) 在 $(-1,1/2)$ 上必然还有唯一根, 故 $f(x)$ 在 R 上仅有两根

1.10 微分中值定理证明题

Remark

证明含有一个 ξ 的等式

如果不含导数, 通常使用单调性 + 零点存在定理

如果包含导数, 通常需要构建辅助函数并使用费马引理/罗尔定理

构建辅助函数中比较困难的题目, 可以采用积分还原法做, 其基本思路为

(1) 将 ξ 都改写成 x, 变形做不定积分去掉导数

(2) 改写 $C=0$, 移项构建辅助函数

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$。证明:

(i) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(ii) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

Solution

(1) 显然构建 $F(x)=f(x)-x$, 有 $F(1)=F(0)=0$ 由 roller Th 可知 $\exists\xi\in(0,1), F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=1$

(2) 由 $f(x)$ 是可导的奇函数容易得知 $f'(x)$ 偶函数

(方法一) 构建 $G(x)=f'(x)+f(x)-x$, 则 $G(-1)=f'(1)=G(1)$ 由 roller Th 有...

(方法二) 构建 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$, 则由第一问有 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$ 带入 $G(x)$, 再由 roller Th 也可以得到答案

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(1)=0$, 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

Solution

这道题很难通过观察法得到辅助函数, 考虑使用积分还原法

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-(2+\frac{1}{x})$$
$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int-(2+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

即

$$\ln|f(x)|+\ln x+\ln e^{2x}-\ln|C|=0$$

化简且令 C=0 后有

$$xe^{2x}f(x)=0$$

故辅助函数 $G(x)=xe^{2x}f(x)$, 又 $G(1)=G(0)$ 由 roller Th 可知原等式成立

Remark

类型二证明含有两个点的等式

若要求的是两个相异的点, 则分区间讨论 (具体看下题 1)

若并不要求两个相异的点, 则可能需要一次拉格朗日一次柯西 (具体见下题 2)

27. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,f(1)=1$。证明:

(i) 存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$;

(ii) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$。

Solution

对于 (1) 这种题目不应该从正面突破, 而应该先假设.

假设 $\exists\xi_1\in(0,c),\xi_2(c,1)$ 有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{f}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$$

带入题设条件 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2 \implies c=\frac{1}{2}$

以上分析均不需要写在试卷上

由 lagrange Th$\exists\xi_1\in(0,1/2),\xi_2(1/2,1)$ 有....

(2) 由 lagrange Th 可知 $\exists\xi\in(0,1),f'(\xi)=f(1)-f(0)=1$ 题目要求的为

$$f'(\xi)=\frac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$$

考虑柯西中值定理, 左侧分式实际是

$$\frac{f^2(1)-f^2(0)}{1^2-0^2}=\frac{f'(\eta)f(\eta)}{\eta}=1=f'(\xi)$$

Remark

类型三证明含有高阶导数的等式或不等式

基本就是 Taylor 的题, 当然有时也可以通过多次拉格朗日求出来.

这种问题的关键点在于如何寻找展开点, 基本思路就是谁信息多展开谁, 例如端点, 极值点, 最值点, 零点等等

28. (2019, 数二) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)dx=1$。证明:

(i) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(ii) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

Solution

这道题算是比较难的题目, 当然不是最难的最难的那道比较像数学分析的题

(方法一) (1) 由积分中值定理可知 $\exists f(c)=1$ 又 $f(1)=f(c)=1$ 由 roller Th 可知 $\exists\xi,f'(\xi)=0$

(2) 要证明 $f''(\eta)<-2$ 只需证明对于 $F(x)=f(x)+x^2,\exists\eta,F''(x)<0$ 分别在区间 (0,c)(c,1) 上使用 lagrange Th 有

$$F(c)-F(0)=F'(\xi_1)c=1+c^2,\xi_1\in(0,c)$$

$$F(1)-F(c)=F'(\xi_2)(1-c)=1-c^2,\xi_2\in(c,1)$$

再在区间 (ξ_1,ξ_2) 使用 lagrange Th 有

$$F'(\xi_2)-F'(\xi_1)=F''(\eta)(\xi_2-\xi_1),\eta\in(\xi_1,\xi_2)$$

将 $F'(\xi_1),F'(\xi_2)$ 带入上式, 有

$$F''(\eta)=\frac{c-1}{c(\xi_2-\xi_1)}<0$$

故原不等式成立

(方法二) (1) 由题设知在区间 (0,1) 内必然存在最值, 且 $f(\xi)>1$, 由费马引理可知 $f'(\xi)=0$

(2) 在 $x=\xi$ 处进行 Taylor 展开有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2$$

带入 $x=0$ 点有

$$0=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}\xi^2 \implies f''(\eta)=-\frac{2f(\xi)}{\xi^2}<-2$$