第一章　二次型

- 二次型
  - 二次型与标准型
    - 定义　$f = x^T A x$
    - 标准型的求法
      - 拉格朗日配方法
      - 合同变换法
      - 正交变换法
  - 合同矩阵
    - 定义　$B = C^T A C$
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ $x^T Ax$与$x^T Bx$有相同的正负惯性指数
      - $\Longleftrightarrow$ A, B有相同的正, 负特征值个数
    - 充分条件　A与B相似
    - 必要条件　A与B等价
  - 正定矩阵
    - 定义　$\forall x \neq 0$, 有$x^T A x > 0$
    - 性质
    - 充要条件
      - $\Longleftrightarrow$ f的正惯性指数为n
      - $\Longleftrightarrow$ A与E合同
      - $\Longleftrightarrow$ A的特征值均大于零
      - $\Longleftrightarrow$ A的顺序主子式均大于零
    - 必要条件
      - $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$
      - $|A| > 0$

1.1 求二次型的标准形

1. (2016, 数二、三) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^1 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2 则

   A. $a > 1$　　B. $a < -2$　　C.$-2 < a < 1$　　D.$a = 1$ 或 $a = -2$

   Solution.

$\square$

2. (2022, 数一) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$。

   (1) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;

   (2) 求正交变换 $x = Qy$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

   (3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

***Solution*.**

$\square$

3. (2020, 数一、三) 设二次型 $f(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $b\geq 0$。

   (1) 求 a,b 的值;

   (2) 求正交矩阵 Q。

Solution.

□

1.2 合同的判定

4. (2008, 数二、三) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 与 A 合同的矩阵是

A. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Solution.

□

5. 设 A, B 为 n 阶实对称可逆矩阵, 则存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得

   $(I)PA = B$ $(II)P^{-1}ABP = BA$ $(III)P^{-1}AP = B$ $(IV)P^TA^2P = B^2$

   成立的个数是

   A.1 B.2 C.3 D.4

   Solution.

□

1.3 二次型正定与正定矩阵的判定

6. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 且 $r(A) = m$, 则下列结论

   (1) $A^T A$ 与单位矩阵等价;

   (2) $A^T A$ 与对角矩阵相似;

   (3) $A^T A$ 与单位矩阵合同;

   (4) $A^T A$ 正定。

   正确的个数是

   A. 1 B. 2 C.3 D.4

   Solution.

□

7. 证明:

   (1) 设 A 为 n 阶正定矩阵,B 为 n 阶反对称矩阵, 则 $A - B^2$ 为正定矩阵;

   (2) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $r(A + B) = n$, 则 $A^T A + B^T B$ 为正定矩阵。

Solution.

□