姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 24 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 24 日

目录

第一章　无穷级数

1.1　数项级数敛散性的判定

1. (2015, 数三) 下列级数中发散的是

   $(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　$(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   $(C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　$(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

   Solution.

□

2. (2017, 数三) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$

(A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

Solution.

□

1.2 交错级数

3. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln n} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Solution.

□

1.3　任意项级数

4. (2002, 数一) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性根据所给条件不能判定

Solution.

□

5. (2019, 数三) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$条件收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

Solution.

□

1.4 幂级数求收敛半径与收敛域

6. (2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点　　(B) 收敛点, 发散点

(C) 发散点, 收敛点　　(D) 发散点, 发散点

Solution.

□

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$ 的收敛域.

Solution.

□

1.5 幂级数求和

8. (2005, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

Solution.

□

9. (2012, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

Solution.

$\square$

10. (2004, 数三) 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 的和函数为 $S(x)$。求:

    (1) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

    (2) $S(x)$ 的表达式.

    Solution.

□

1.6 幂级数展开

11. 例 11 (2007, 数三) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

Solution.

□

12. 将函数 $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ 在 $x = 1$ 处展开成幂级数.

Solution.

□

1.7 无穷级数证明题

13. (2016, 数一) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$。设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$。证明:

   (i) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$.

   Solution.

□

14. (2014, 数一) 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$,$0 < b_n < \frac{\pi}{2}$,$\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

    (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

    (2) 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

    Solution.

□

1.8 傅里叶级数

15. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x = \pi$ 收敛于?, 在 $x = 2\pi$ 收敛于?.

Solution. 由狄利克雷收敛定理知,$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x = \pi$ 收敛于

$$S(\pi) = \frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

在 $x = 2\pi$ 收敛于

$$S(2\pi) = S(0) = \frac{f(0 - 0) + f(0 + 0)}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

□

16. 将 $f(x) = 1 - x^2, 0 \le x \le \pi$, 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

Solution. 对 $f(x) = 1 - x^2$ 进行偶延拓, 由 $f(x) = 1 - x^2$ 为偶函数, 知 $b_n = 0$。

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - x^2)dx = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right)$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - x^2)\cos nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = 1 - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x = 0$, 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

□