考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 31 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 31 日

目录

第一章　多元函数积分学

三维向量

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$

数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

性质 1 判断空间向量垂直 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a\perp b$

性质 2 求空间两直线的夹角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$

向量积 $a\times b=|a||b|\sin\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

性质 1 判断空间直线平行 $\vec{a}\times\vec{b}=0 \iff a\parallel b$

性质 2 求平面四边形的面积 $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

混合积 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

性质 1 判断三个向量是否共面 共面 $\iff (\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$

性质 2 平行六面体的体积 $V=\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$

直线与平面

(一) 平面

平面的点法式 假设平面过点 (x_0, y_0, z_0) 且该平面的法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 则平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的一般式 将点法式展开

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

平面的截距式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

其中 a, b, c 分别是该平面与 x, y, z 轴的截距

点到平面的距离公式 假设平面外一点 (x_0, y_0, z_0) 到平面的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(直线)

直线的点向式 假设直线过点 (x_0, y_0, z_0) 且该直线的方向向量为 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 则该直线的直线方程为

$$\frac{x_0 - x}{l} = \frac{y_0 - y}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

直线的参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

直线的一般式 (两平面的交线)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$$

平面束方程 过某一直线的所有平面的方程 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 其中 λ, μ 不同时为 0,(...) 即该直线一般式的两平面方程

曲面与曲线

假设直线外一点 (x_0, y_0, z_0) 其到直线的距离为

$$d = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

平面与直线的关系基本只需要考察 $\vec{n}$ 和 $\vec{s}$ 的关系即可

旋转曲面

假设曲线 $L = \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转而来的旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 = x^2(z) + y^2(z)$$

求旋转曲面的问题, 捉住旋转过程中的不变量进行处理, 例如绕 z 轴旋转, 则旋转曲面上的点到 z 轴的距离和 z 坐标都与原来曲线的点一致即

$$P_0 = \begin{cases} x_0 = x(z_0) \\ y_0 = y(z_0) \end{cases} ; P = \begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

消去 z_0 即可得到答案

常见曲面的类型

$$\begin{cases} \text{球面} & x^2 + y^2 + c^2 = R^2 \\ \text{圆柱面} & x^2 + y^2 = R^2 \\ \text{椭球面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{抛物面} & \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z(p > 0) \\ \text{圆锥面} & z = a\sqrt{x^2 + y^2}\text{上圆锥面} \\ \text{单叶双曲面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{双叶双曲面} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

曲面与曲线

与线代考点的综合题 二次型的特征值的正负对应图像的情况

$$\begin{cases} \text{三正}, & \text{球/椭球} \\ \text{两正}, & \text{圆锥} \\ \text{两正一负}, & \text{单叶双曲面} \\ \text{两负一正}, & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

投影曲线, 往 xoy 面的投影曲线只需要消去 z 即可

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 z}} \begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

曲面的法向量与切平面

若曲面是显示给出的即 $F(x,y,z)=0$ 则其法向量为

$$\vec{n}=\{F_x',F_y',F_z'\}$$

若曲面的是隐式给出的即 $z=z(x,y)$ 则其法向量为

$$\vec{n}=\{-z_x',-z_y',1\}$$

切平面方程为

$$F_x'(x-x_0)+F_y'(y-y_0)+F'z(z-z_0)=0$$

曲线的切向量

若曲线是以参数式给出即 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 则其切向量为

$$\tau=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

若以两曲面的交线形式给出, 即 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 此时切向量为

$$\tau=\vec{n_1}\times\vec{n_2}, \text{其中 } n_1,n_2 \text{ 分别为两曲面的法向量}$$

方向导数与三度

方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{x_0,y_0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

其中 α 为与 x 轴正方向的夹角,β 为与 y 轴正方向的夹角 t 是趋于 0^+

若 $f(x,y)$ 可微分, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f'_x\cos\alpha + f'y\cos\beta = gr\vec{a}d\ f\cdot\vec{l_0}$$

梯度, 散度, 旋度

$$\begin{aligned}
gr\vec{a}d\ f &= (\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\cdot(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\\
div\vec{A} &= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\\
ro\vec{t}\ A &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

方向导数沿梯度方向取得最大值, 沿梯度反方向取得最小值, 值为

$$\pm\left|gr\vec{a}d\ f\right| = \pm\left|(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\right|$$

三度之间的关系, 要求二阶偏导连续

$$\begin{aligned}
&div\ gr\vec{a}d\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
&r\vec{o}tgr\vec{a}d\ f = \vec{0}\\
&divr\vec{o}t = 0
\end{aligned}$$

1.1 三重积分的计算

Remark. 三重积分

(三重积分的定义) 三维物体的质量

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

三重积分的性质 (8 条)

线性, 区域可加性, 比较定理, 中值定理, 估值定理, 轮换对称性, 奇偶性, 形心公式

若函数图像关于 xoy 平面对称

$$\iiint_{\Omega}=\begin{cases}2\iiint_{\Omega'}f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

直接坐标计算 (两种)

$$\begin{cases}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{先二后一, 截面法}\\ \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x)}^{z_2(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}z, & \text{先一后二, 投影法}\end{cases}$$

柱坐标 (x,y 转换为极坐标)

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\\ \mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$$

球坐标

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\\ \mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

其中 θ 是与 x 轴正方向的夹角,φ 是与 z 轴正反向的夹角

1. (2013, 数一) 设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

   (I) 求曲面 Σ 的方程;

   (II) 求 Ω 的形心坐标.

Solution. (1) 有题设可知直线方程为 $\begin{cases}z=1-x\\ z=y\end{cases}$ 原直线上一点 P_0 满足 $\begin{cases}x_0=1-z_0\\ y_0=z_0\end{cases}$

旋转曲面上一点 P 满足 $\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$ 带入直线方程消去 (x_0,y_0,z_0) 有曲面方程为

$$x^2+y^2=2z^2-2z+1$$

(2) 对于三重积分以及后面的积分, 最大的误区可能就是上来二话不说先画图, 然后发现图画不出来就不会做. 其实完全没必要画图观察曲面方程, 容易发现其关于 xoz, yoz 平面对称, 故 $\bar{x}=\bar{y}=0$ 由形心公式有

$$\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mathrm{d}V}$$

由题设条件 $z\in[0,2]$ 已经提示了该用截面法喽, 从而有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \mathrm{d}V &= \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \pi\cdot\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{10}{3}\pi \\ \iiint_\Omega z\mathrm{d}V &= \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \pi\cdot\left(2z^3-2z^2+z\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{14}{3}\pi\end{aligned}$$

综上形心坐标为

$$\boxed{(0,0,\tfrac{7}{5})}$$

□

2. (2019, 数一) 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

Solution. 这个图像张啥样, 其实也一定都不重要. 只要能把握其在某一二维平面的投影即可, 观察曲面表达式, 显然其关于 yoz 平面堆成故 $\bar{x}=0$, 而由形心公式可知要求 3 个

三重积分, 分别做吧

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V &= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi(1-z)^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{3}\pi \\
\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V &= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi z(1-z)^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{12}\pi \\
\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}V &= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi z(1-z)^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{12}\pi
\end{aligned}
$$

综上, 该区域的形心为

$$\boxed{(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})}$$

□

1.2 第一类曲线积分的计算

Remark. 一类线

定义

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是弧微分

一类线的性质 (8 条)

线性, 区域可加性, 比较定理, 中值定理, 估值定理, 轮换对称性, 奇偶性, 形心公式

计算公式, 曲线方程带入

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t, & \text{参数方程} \\ \displaystyle\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x, & \text{直接坐标} \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta, & \text{极坐标} \end{cases}$$

3. (2018, 数一) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xyds =$

Solution. 这道题是比较显然的轮换对称性的题目

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{3}\oint_L (xy+yz+xz)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{6}\oint_L \left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right] \\ &\xlongequal{\text{曲线方程带入}} -\frac{1}{6}\oint_L \mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

□

4. 设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=(x+3y)^2+\int_L f(x,y)ds$, 其中 L 为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$, 求曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$.

Solution. 不妨设 $A = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 同时对等式两边同时求一类线有

$$\begin{aligned}
A &= \int_L \left[(x+3y)^2 + A\right] \mathrm{d}s \\
&= A\pi + \int_L (x+3y)^2 \mathrm{d}s \\
&= A\pi + \int_L (x^2+6xy+9y^2)\mathrm{d}s \\
&= (1+A)\pi + 8\int_L y^2 \mathrm{d}s \\
&= (1+A)\pi + 8\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \\
&= (5+A)\pi \implies A = \frac{5\pi}{1-\pi}
\end{aligned}$$

计算过程中优先考虑使用性质化简, 而非直接套公式 □

> 对于曲线/曲面/定积分/二重积分/三重积分, 它在某区域内积分后就是一个数, 变限积分和不定积分仍然是一个函数.

1.3 第二类曲线积分的计算

Remark. 二类线

二类线的定义: 沿曲线做功

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]$$

其中 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cdot\cos\alpha, \mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cdot\cos\beta$, 其中 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为切向量的单位向量

性质 (3 条)

线性, 区域可加性, 方向性

$$\int_L = -\int_{L}' , L\text{和}L'\text{方向相反}$$

计算方式 (两种)

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t, & \text{参数方程} \\ \displaystyle\int_a^b \left[P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)\right]\mathrm{d}x, & \text{直角坐标} \end{cases}$$

注意此时 $\alpha \to \beta, a \to b$ 均为起点指向终点, 和大小无关

格林公式 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成,L 取正向,$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分与路径无关 (四个充分条件) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通闭区域 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\\
&\iff D\text{内任意曲线}L, \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0\\
&\iff D\text{任意两点}A,B, \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\text{与路径无关}\\
&\iff \exists u(x,y), \mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y, \text{且}u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

曲线方程带入

曲线积分基本定理

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 内连续,$u(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$, 则区域 D 内任意两点 A,B 曲线积分 $\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 且 $\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(B) - u(A)$

5. (2021, 数一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

(I) 求 $I(D_1)$ 的值;

(II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

Solution. (1) 由二重积分的几何意义, 使得 $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ 始终成立的区域即为积分最大的区域, 即

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

此时积分为

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (4 - r^2) r\mathrm{d}r = 8\pi$$

(2) 显然 $(0,0,0)$ 点是被积函数的奇点, 此时考虑挖去该点, 即设

$$L' : x^2 + 4y^2 = 1, \text{取顺时针}$$

此时有

$$I=\oint_{\partial D_1+L'}-\oint_{L'}$$

对于前一个积分, 用 Green 公式有

$$\oint_{\partial D_1+L'}=\iint_{D_1/D_{L'}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

对于后一个积分, 先将曲线方程带入表达式后有

$$\begin{aligned}\oint_{L'}&=\oint_{L'}(ex+y)\,\mathrm{d}x+(4ey-x)\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{格林公式}}-\iint_{D_{L'}}(-1-1)=2S_{D_{L'}}=\pi\end{aligned}$$

故

$$I=0-\pi=-\pi$$

□

6. (2011, 数一) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$

Solution. 这种问题仅有三种解法, 推荐解法 3, 但三种解法都需要掌握.

(解法一 公式法) 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=\sin t+\cos t\end{cases}$ 由于从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 故 $t:0\to 2\pi$, 此时原积分等于

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\left\{[\cos t(\sin t+\cos t)(-\sin t)]+\cos^2 t+\frac{\sin^2 t}{2}(\cos t-\sin t)\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta=\pi\end{aligned}$$

(解法二 斯托克斯公式) 注意斯托克斯公式一般转换为一类面来做 (公式法)

曲面法向量为 $\vec{n}=(-Z_x',-Z_y',1)=(-1,-1,1)$ 其单位向量为 $\vec{n_0}=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 此时

由斯托克斯公式有

$$\oint_L = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma (y - x - 1)\mathrm{d}S$$

$$\xlongequal{\text{公式法}} -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (y + x - 1)\sqrt{1+1+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi$$

(解法三 转换为平面二类型) 由 $z = x + y$ 消去原曲线积分中的所有 z, 注意 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

此时积分转换为其中 $L' : x^2 + y^2 = 1$ 取逆时针方向

$$I = \oint_{L'} (x^2 + xy + \frac{y^2}{2})\mathrm{d}x + (x + \frac{y^2}{2})\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}} \iint_D (1 - x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$$

□

1.4　第一类曲面积分的计算

Remark. 一类面

一类面的定义

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

性质 (8 条)

线性, 区域可加性, 比较定理, 中值定理, 估值定理, 轮换对称性, 奇偶性, 形心公式

计算公式 (一投, 二代)

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (Z_x')^2 + (Z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲面方程带入

7. (2010, 数一) 设 P 为椭球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点，若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直，求 P 点的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS,$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

Solution. 一类面的难点肯定在于如何求出该平面, 计算都是小意思用公式就可以.

S 在点 P 处的切平面, 其法向量为 $\vec{n_1}=(F'_x,F'_y,F'_z=2x,2y-z,2z-y)$ 而 xoy 面的法向量为 $\vec{n_2}=(0,0,1)$ 由题设知 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ 即 $2z-y=0$ 带入 S 的方程化简有, 曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ y=2z \end{cases}$$

即一个椭球柱与平面的交线, 将曲线往 xoy 面投影, 其区域为 $D_{xy}:\{(x,y)\mid x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(Z'_x)^2+(Z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

原积分由公式法等于

$$I=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$$

□

1.5 第二类曲面积分的计算

Remark. 二类面

二类面的定义: 流量

$$\begin{aligned}&\iint_{\sum}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}S\cdot\cos\alpha$ 其余类似, 而 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为平面 $\sum$ 的法向量的单位向量

性质 (3 条)

线性, 区域可加性, 方向性

计算公式 (三合一投影法)

$$\begin{aligned}&\iint_{\sum}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\pm(P(x,y),Q(x,y),R(x,y))\cdot(-Z'_x,-Z'_y,1)\\ &=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-Z'_x)+Q(x,y,z(x,y))(-Z'_y)+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

上侧为正, 下侧为负

高斯公式 设闭区域 Ω 由分片光滑的曲面 $\sum$ 围成,$\sum$ 取外侧,P,Q,R 在其上有一阶连续偏导数, 则

$$\oiint_{\sum} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

曲面方程带入

斯托克斯公式 设 P,Q,R 在曲面 $\sum$ 围成的区域 Ω 内有一阶连续偏导数,$\sum$ 的边界曲线 L 的方向与 $\sum$ 所取的法向量满足右手法则, 则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\sum}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

即将三维的二类线转换为一类面或者二类面来做

8. (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

Solution. 显然点 $(0,0,0)$ 是被积函数的奇点, 需要挖去这一个点, 不妨设

$$\sum_1 : x^2+y^2+z^2=1, \text{取外侧}$$

记

$$\Omega:\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\geq 1, 2x^2+2y^2+z^2\leq 4\right\}$$
$$\Omega_1:\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$$

此时原积分等于

$$I=\iint_{\sum+\sum_1}-\iint_{\sum_1}$$

其中

$$\iint_{\sum+\sum_1}\overset{\text{高斯定理}}{=\!=\!=\!=}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=0$$

对于第二个积分, 先带入 $\sum_1$ 的曲面方程此时有

$$\begin{aligned}\iint_{\sum_1} &= \iint_{\sum_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_{\Omega_1} 3\mathrm{d}V \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

综上有

$$I = 0 + 4\pi = 4\pi$$

□

9. 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{ax dydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

Solution. 发现这个曲面不是封闭的, 立刻补上, 即设

$$\sum_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ z = 0 \end{cases} \text{, 取下侧}$$

注意, 虽然被积函数在 (0,0,0) 处貌似是奇点, 但注意到可以通过带入曲线方程消去分母, 就不需要挖点了

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{a}\iint_{\sum} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a}\left(\iint_{\sum+\sum_1} - \iint_{\sum_1}\right)\end{aligned}$$

记 $\sum_1, \sum$ 围成的区域为 Ω, 则有

$$\iint_{\sum+\sum_1} = -\iiint_{\Omega} = -\iiint_{\Omega} [a + 2(z+a)]\,\mathrm{d}V = -\frac{3}{2}\pi a^4$$

记 $D_{xy} : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$ 则有

$$\iint_{\sum_1} \xlongequal{\text{公式}} -\iint_{D_{xy}} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi a^4$$

综上有

$$I = -\frac{\pi a^3}{2}$$

□

10. (2020, 数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leq x^2+y^2\leq 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution. 因为 $f(xy)$ 仅连续, 高斯的条件为封闭外侧, 偏导连续, 只能使用三合一投影法

记区域 $D_{xy}:\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

$$\begin{aligned}I=&-\iint_{D_{xy}}\left([xf(xy)+2x-y]\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right.\\&+[yf(xy)+2y+x]\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\&\left.+\left[\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}\right]\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{14}{3}\pi\end{aligned}$$

□