第一章　向量

1.1　知识体系

$$
\boxed{\text{向量}}\begin{cases}
\boxed{\text{基本运算}}\begin{cases}\alpha+\beta\\ k\alpha\\ [\alpha,\beta]\end{cases}\\
\boxed{\text{线性表示}}\begin{cases}\boxed{\text{定义}}\quad \beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s\\ \boxed{\text{充要条件}}\begin{cases}\text{非其次线性方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=\beta\text{有解}\\ r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\mid\beta)\end{cases}\\ \boxed{\text{求法}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\mid\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行最简形矩阵}\end{cases}\\
\boxed{\text{线性相关}}\begin{cases}\boxed{\text{定义}}\\ \boxed{\text{充要条件}}\begin{cases}\text{至少有一个向量可以由其余向量线性表示}\\ \text{齐次线性方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T=0\text{有非零解}\\ r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)<s\end{cases}\\ \boxed{\text{充分条件}}\end{cases}
\end{cases}
$$

- 向量
  - 线性无关
    - 定义
    - 充要条件
      - 任意向量都不可以由其余向量线性表示
      - 齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)(x_1,x_2,\dots,x_s)^T=0$只有零解
      - $r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=s$
    - 充分条件
  - 极大无关组与向量组的秩
    - 定义
    - 求法$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$行阶梯形

1.2 线性表示的判定与计算

线性表示的判定与计算

(题型一 判断)

(I) 线性表示的定义 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_s\alpha_s$

(II) 秩 $r(\alpha_1,\dots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\dots,\alpha_s\mid\beta)$

(题型二 计算)

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_s,\mid\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行最简型}$$

(题型三 向量组等价)

(I) 向量组等价的定义 向量组 I,II 可以相互线性表示

(II) 三秩相等 $r(I)=r(I,II)=r(II)$

1. 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $k\alpha+l\beta+m\gamma=0\ (km\neq0)$，则

   (A) α,β 与 α,γ 等价

   (B) α,β 与 β,γ 等价

   (C) α,γ 与 β,γ 等价

   (D) α 与 γ 等价

Solution

由于 $km \neq 0$ 则有 $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{k}(l\beta + m\gamma) \\ \gamma = -\dfrac{1}{k}(l\beta + k\alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} \beta,\gamma \to \alpha \\ \beta,\alpha \to \gamma \end{cases}$ 又因为 $(\beta,\gamma) \to \beta,(\beta,\alpha) \to \beta$ 是显然的, 故 $(\alpha,\beta) \to (\beta,\gamma)$

2. (2004, 数三) 设 $\alpha_1 = (1,2,0)^T$, $\alpha_2 = (1,a+2,-3a)^T$, $\alpha_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$, $\beta = (1,3,-3)^T$。当 a,b 为何值时,

   (I) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

   (II) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式;

   (III) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

Solution

数字矩阵多半带参数, 关键就是讨论这个参数的范围. 记 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 联立有

$$(A \mid \beta) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a \neq 0$ 的时候

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) < r(A \mid \beta)$ 即 β 不可以有 α_i 表示

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时有

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} 1-\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a} \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) = r(A \mid \beta)$ 故 β 可由 α_i 唯一表示即

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$$

(3) 当 $a \neq 0, a \neq b$ 时有

$$(A \mid \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 β 可由 α_i 无穷多表示, 即

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + (k+\frac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}$$

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1,1,4)^T$, $\alpha_2 = (1,0,4)^T$, $\alpha_3 = (1,2,a^2+3)^T$; 向量组 (II) $\beta_1 = (1,1,a+3)^T$, $\beta_2 = (0,2,1-a)^T$, $\beta_3 = (1,3,a^2+3)^T$。若向量组 (I) 与 (II) 等价, 求 a 的值，并将 β_3 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

Solution

数字矩阵直接用三秩相等即可 $r(I) = r(I,II) = r(II)$ 要分两部分令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$(A \mid B) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right) B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

当 $a = 1$ 的时候 $r(I) = r(I,II) = r(II) = 2$ 此时线性组等价

$$(A \mid \beta_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (k-2)\alpha_2 + k\alpha_3$

当 $a^2 \neq 1$ 的时候 $r(I) = r(I,II) = r(II) = 3$ 此时线性组等价

$$(A \mid \beta_3) \to \begin{pmatrix} & 1 \\ E & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

此时 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

1.3 线性相关与线性无关的判定

相关/无关的判定

(方法一 用定义)

(方法二 用秩)

1. (2014, 数一、二、三) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，则对任意常数 k,l，$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

   (A) 必要非充分条件

   (B) 充分非必要条件

   (C) 充分必要条件

   (D) 既非充分又非必要条件

Solution

证明充分性, 取 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=O$ 显然证明不了 α_i 无关

证明必要性

(方法一 用定义证明) 由线性无关的定义, 只需证明 $\forall k,l,\exists k_1,k_2$

$$k_1(\alpha_1+k\alpha_3)+k_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$$

即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+(k_1k+l)\alpha_3=0$$

由 α_i 线性无关有 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_1k+l=0 \end{cases}$

(方法二 用秩)

$$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$$

记 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 又 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 线性无关, 故 $r(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=r(C)=2$

2. 设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 n 维列向量，满足 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0, A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2$, $A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

Solution

3. 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 β_1, β_2 两两正交，证明 β_1, β_2 线性相关。

Solution

1.4 极大线性无关组的判定与计算

1. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, a + 2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, a)^T$。

   (I) 当 a 为何值时，该向量组线性相关，并求其一个极大线性无关组；

   (II) 当 a 为何值时，该向量组线性无关，并将 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 由其线性表示。

Solution

2. 证明:

   (I) 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;

   (II) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$。

Solution

1.5 向量空间 (数一专题)

Remark

向量空间

过度矩阵

由基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)C$

即 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

坐标转换公式

设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中的坐标为 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 在基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 中的坐标为 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ 则坐标转换公式为 $x=Cy$

1. (2015, 数一) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

   (a) (I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基:

   (b) (II) 当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求所有的 ξ。

Solution