

姜晓千 2023 年强化班笔记

数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 5 日

相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 5 日

目录

第一章 补充知识-概率论	1
1.1 配对问题	1
1.2 几个概率的不等式	2
1.3 轮流射击模型	3
1.4 补充: 随机变量的矩	4
1.5 Poisson 分布的一个性质, 与 Poisson 定理	4
1.6 二维随机变量的换元法	4

第一章 补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计 茆诗松

(2) 做题总结

1.1 配对问题

问题描述: 在一个有 n 个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

Solution. (配对问题)

设 A_i 为事件: 第 i 个人自己抽到自己的礼物, $i = 1, 2, \dots, n$ 所求概率为

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

...

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} P(A_i A_{i+1} A_{i+2}) \\
 &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\
 &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$, 上述概率由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

□

1.2 几个概率的不等式

1. $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$
2. $P(A_1 A_2 \dots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)$ (Boole 不等式)
3. $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

Proof. 相关证明如下:

(1) 由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \implies P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于 $n = 2$, 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于 $n = k$ 个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) - (k-1)$$

考虑 $n = k+1$ 个事件 $A_1 A_2 \dots A_{k+1}$, 不妨令 $B = A_1 A_2 \dots A_k$, 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}) = P(B A_{k+1}) \geq P(B) + P(A_{k+1}) - 1 \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1}) - (k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由 $P(A) \geq P(AB), P(B) \geq P(AB)$, 则 $P(A)P(B) \geq P(AB)^2$, 则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB))$$

令 $x = P(AB)$, 则 $f(x) = x(1-x)$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 取得 $f(x)_{\max} = \frac{1}{4}$ 即

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

由于 $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, 即 $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$ 则

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - P(A) + P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(\bar{B}) \leq \frac{1}{4}$$

即

$$P(AB) - P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

1.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为 α , 乙命中的概率为 β . **甲先射**, 谁先设中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

Solution.

(方法一) 记事件 A_i 为第 i 次射中目标, $i = 1, 2, \dots$, 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \dots$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2 \dots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{乙获胜}) &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \dots \\ &= \beta(1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1 - \alpha)(1 - \beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

□

1.4 补充: 随机变量的矩

设 (X, Y) 是二维随机变量, 如果 $E(X^k Y^l)$ 存在, 则称 $E(X^k), (k = 1, 2, \dots)$ 为 X 的 k 阶原点矩; 称 $E(X - EX)^k, k = (2, 3, \dots)$ 为 X 的 k 阶中心矩; 称 $E(X^k Y^l), (k, l = 1, 2, \dots)$ 为 X 与 Y 的 $k + l$ 阶混合原点矩; 称 $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l], (k, l = 1, 2, \dots)$ 为 X, Y 的 $k + l$ 阶混合中心矩

1.5 Poisson 分布的一个性质, 与 Poisson 定理

参考错题-概率论-李正元全书-2(原数例题 1.23)

若 $X \sim P(\lambda)$, 其中的某些部分 (或者优秀, 或者糟糕, 或者其他) 独立的产生, 其产生的概率为 α , 则 Y 表示产生这些特殊事件的次数, 将会服从 $P(\lambda\alpha)$

Poisson 定理, 对于 $X \sim B(n, p)$ 当 n 很大, p 很小的时候, 可以近似的认为 $X \sim P(np)$

1.6 二维随机变量的换元法

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f_{X,Y}(x, y)$ 变化 T 为:

$$\begin{cases} U = g_1(X, Y) \\ V = g_2(X, Y) \end{cases}$$

如果 T 可逆 (即存在逆变化 T^{-1}), 则 (U, V) 的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|$$

其中 J 是 Jacobian 行列式即

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

例如:

若 $U=X+Y, V=X-Y, f(x, y) = e^{-(x+y)}, (x, y > 0)$

$$X = \frac{U+V}{2}, Y = \frac{U-V}{2}, |\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

则 $f(u, v) = e^{-(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-u}$ 其中 u, v 的范围有变换确定, 例如 $u > 0$ 但 v 取决于 x, y 的关系