

# 姜晓千 2023 年强化班笔记

## 数学笔记

Weary Bird

2025 年 7 月 4 日

# 相见欢 · 林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 4 日

# 目录

<b>第一章 函数极限连续</b>	<b>1</b>
1.1 函数的性态 . . . . .	1
1.2 极限的概念 . . . . .	2
1.3 函数极限的计算 . . . . .	3
1.4 已知极限反求参数 . . . . .	5
1.5 无穷小阶的比较 . . . . .	5
1.6 数列极限的计算 . . . . .	6
1.7 间断点的判定 . . . . .	6
<b>第二章 一元函数微分学</b>	<b>7</b>
2.1 导数与微分的概念 . . . . .	7
2.2 导数与微分的计算 . . . . .	8
2.3 导数应用-切线与法线 . . . . .	9
2.4 导数应用-渐近线 . . . . .	10
2.5 导数应用-曲率 . . . . .	10
2.6 导数应用-极值与最值 . . . . .	11
2.7 导数应用-凹凸性与拐点 . . . . .	11
2.8 导数应用-证明不等式 . . . . .	11
2.9 导数应用-求方程的根 . . . . .	12
2.10 微分中值定理证明题 . . . . .	12
<b>第三章 一元函数积分学</b>	<b>14</b>
3.1 定积分的概念 . . . . .	14
3.2 不定积分的计算 . . . . .	14

3.3	定积分的计算	15
3.4	反常积分的计算	15
3.5	反常积分敛散性的判定	15
3.6	变限积分函数	16
3.7	定积分应用求面积	16
3.8	定积分应用求体积	17
3.9	定积分应用求弧长	17
3.10	定积分应用求侧面积	17
3.11	一定积分物理应用	17
3.12	二证明含有积分的等式或不等式	18
<b>第四章</b>	<b>常微分方程</b>	<b>19</b>
4.1	一阶微分方程的解法	19
4.2	二阶常系数线性微分方程	21
4.3	高阶常系数线性齐次微分方程	21
4.4	二阶可降阶微分方程	22
4.5	欧拉方程	22
4.6	变量代换求解二阶变系数线性微分方程	22
4.7	微分方程综合题	22
<b>第五章</b>	<b>多元函数微分学</b>	<b>24</b>
5.1	多元函数的概念	24
5.2	多元复合函数求偏导数与全微分	25
5.3	多元隐函数求偏导数与全微分	25
5.4	变量代换化简偏微分方程	26
5.5	求无条件极值	26
5.6	求条件极值 (边界最值)	27
<b>第六章</b>	<b>二重积分</b>	<b>28</b>
6.1	二重积分的概念	28
6.2	交换积分次序	29
6.3	二重积分的计算	29

6.4 其他题型 . . . . .	30
<b>第七章 无穷级数</b>	<b>31</b>
7.1 数项级数敛散性的判定 . . . . .	31
7.2 交错级数 . . . . .	31
7.3 任意项级数 . . . . .	31
7.4 幂级数求收敛半径与收敛域 . . . . .	32
7.5 幂级数求和 . . . . .	32
7.6 幂级数展开 . . . . .	33
7.7 无穷级数证明题 . . . . .	33
7.8 傅里叶级数 . . . . .	34
<b>第八章 多元函数积分学</b>	<b>35</b>
8.1 三重积分的计算 . . . . .	35
8.2 第一类曲线积分的计算 . . . . .	35
8.3 第二类曲线积分的计算 . . . . .	36
8.4 第一类曲面积分的计算 . . . . .	36
8.5 第二类曲面积分的计算 . . . . .	36
<b>第九章 行列式</b>	<b>38</b>
9.1 数字行列式的计算 . . . . .	40
9.2 代数余子式求和 . . . . .	45
9.3 抽象行列式的计算 . . . . .	47
<b>第十章 矩阵</b>	<b>51</b>
10.1 求高次幂 . . . . .	51
10.2 逆的判定与计算 . . . . .	52
10.3 秩的计算与证明 . . . . .	55
10.4 关于伴随矩阵 . . . . .	57
10.5 初等变换与初等矩阵 . . . . .	59
<b>第十一章 向量</b>	<b>62</b>
11.1 线性表示的判定与计算 . . . . .	62

11.2 线性相关与线性无关的判定 . . . . .	63
11.3 极大线性无关组的判定与计算 . . . . .	63
11.4 向量空间 (数一专题) . . . . .	64
<b>第十二章 线性方程组</b>	<b>65</b>
12.1 解的判定 . . . . .	65
12.2 求齐次线性方程组的基础解系与通解 . . . . .	65
12.3 求非齐次线性方程组的通解 . . . . .	66
12.4 解矩阵方程 . . . . .	67
12.5 公共解的判定与计算 . . . . .	68
<b>第十三章 特征值与特征向量</b>	<b>70</b>
13.1 特征值与特征向量的计算 . . . . .	70
13.2 相似的判定与计算 . . . . .	71
13.3 相似对角化的判定与计算 . . . . .	72
13.4 实对称矩阵的计算 . . . . .	72
<b>第十四章 二次型</b>	<b>74</b>
14.1 求二次型的标准形 . . . . .	74
14.2 合同的判定 . . . . .	75
14.3 二次型正定与正定矩阵的判定 . . . . .	76
<b>第十五章 事件与概率论</b>	<b>77</b>
15.1 事件的关系、运算与概率的性质 . . . . .	77
15.2 三大概型的计算 . . . . .	79
15.3 三大概率公式的计算 . . . . .	80
15.4 事件独立的判定 . . . . .	82
<b>第十六章 一维随机变量</b>	<b>84</b>
16.1 分布函数的判定与计算 . . . . .	84
16.2 概率密度的判定与计算 . . . . .	86
16.3 关于八大分布 . . . . .	88
16.4 求一维连续型随机变量函数的分布 . . . . .	93

<b>第十七章 二维随机变量</b>	<b>96</b>
17.1 联合分布函数的计算 . . . . .	96
17.2 二维离散型随机变量分布的计算 . . . . .	97
17.3 二维连续型随机变量分布的计算 . . . . .	98
17.4 关于二维正态分布 . . . . .	101
17.5 求二维离散型随机变量函数的分布 . . . . .	104
17.6 求二维连续型随机变量函数的分布 . . . . .	105
17.7 求一离散一连续随机变量函数的分布 . . . . .	108
<b>第十八章 数字特征</b>	<b>110</b>
18.1 期望与方差的计算 . . . . .	110
18.2 协方差的计算 . . . . .	115
18.3 相关系数的计算 . . . . .	117
18.4 相关与独立的判定 . . . . .	118
<b>第十九章 大数定律与中心极限定理</b>	<b>121</b>
<b>第二十章 统计初步</b>	<b>123</b>
20.1 求统计量的抽样分布 . . . . .	123
20.2 求统计量的数字特征 . . . . .	125
<b>第二十一章 参数估计</b>	<b>126</b>
21.1 求矩估计与最大似然估计 . . . . .	126
21.2 估计量的评价标准 . . . . .	128
21.3 区间估计与假设检验 . . . . .	130
<b>第二十二章 补充知识-高等数学</b>	<b>131</b>
<b>第二十三章 补充知识-线性代数</b>	<b>132</b>
<b>第二十四章 补充知识-概率论</b>	<b>133</b>
24.1 配对问题 . . . . .	133
24.2 几个概率的不等式 . . . . .	134
24.3 轮流射击模型 . . . . .	135

24.4 补充: 随机变量的矩 . . . . .	136
---------------------------	-----



# 第一章 函数极限连续

## 1.1 函数的性态

**Remark.** (有界性的判定)

连续函数在闭区间  $[a, b]$  上必然有界

连续函数在开区间  $(a, b)$  上只需要判断端点处的左右极限, 若  $\lim_{x \rightarrow a^+} \neq \infty$  且  $\lim_{x \rightarrow b^-} \neq \infty$ , 则连续函数在该区间内有界.

1. 下列函数无界的是

- (A)  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x, x \in (0, +\infty)$
- (B)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$
- (C)  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$
- (D)  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, x \in (0, 2022)$

*Solution.*

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$  均为有限值, 故 A 在区间  $(0, +\infty)$  有界

(B)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$  均为有限值, 故 B 在区间  $(0, +\infty)$  有界

(C)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$  在 0 点的极限不为有限值, 故 C 在区间  $(0, +\infty)$  无界

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x 1 dt = 0, \lim_{x \rightarrow 2022^-} f(x) = \int_0^{2022} \frac{\sin t}{t} dt = \text{有限值}$  故 D 在区间  $(0, 2022)$  有界 □

**Remark.** (导函数与原函数的奇偶性与周期性)

连续奇函数的所有原函数  $\int_0^x f(t)dt + C$  都是偶函数

连续偶函数仅有一个原函数  $\int_0^x f(t)dt$  为奇函数

2. (2002, 数二) 设函数  $f(x)$  连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

- (A)  $\int_0^x f(t^2)dt$   
 (B)  $\int_0^x f^2(t)dt$   
 (C)  $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$   
 (D)  $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$

**Solution.** 这种题可以采用奇偶性的定义直接去做, 如下面选项 A,B 的解法, 也可以按照上述的函数奇偶性的性质判断

(A) 令  $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt = -\int_0^x f(t^2)dt = -F(x)$$

则 A 选项是奇函数

(B)

$$F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t)dt = -\int_0^x f^2(-t)dt$$

推导不出 B 的奇偶性

(C)  $t[f(t) - f(-t)]$  是一个偶函数, 故 C 选项是一个奇函数

(D)  $t[f(t) + f(-t)]$  是一个奇函数, 故 D 选项是一个偶函数

□

## 1.2 极限的概念

**Definition 1.2.1** (函数极限的定义). 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义。若存在常数  $A$ , 使得对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时, 必有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x$  趋近于  $x_0$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0).$$

3. (2014, 数三) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时有

$$(A) |a_n| > \frac{|a|}{2} \quad (B) |a_n| < \frac{|a|}{2} \quad (C) a_n > a - \frac{1}{n} \quad (D) a_n < a + \frac{1}{n}$$

**Solution.** 由数列极限的定义可知当  $n$  充分大的时候有  $|a_n - a| < \epsilon$

考虑选项 C,D, 令  $\epsilon = \frac{1}{n}$  则  $|a_n - a| < \frac{1}{n} \implies a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$

□

## 1.3 函数极限的计算

这一个题型基本上是计算能力的考察, 对于常见未定式其实也没必要区分的那么明显, 目标都是往最简单  $\frac{0}{0}$  或者  $\frac{\infty}{\infty}$  模型上面靠, 辅助以 Taylor 公式, 拉格朗日中值定理结合夹逼准则来做就可以.

**Remark.** (类型一  $\frac{0}{0}$  型)

4. (2000, 数二) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$  为

$$(A) 0 \quad (B) 6 \quad (C) 36 \quad (D) \infty$$

**Solution.** 这个题第一次见可能想不到, 但做多了就一个套路用 Taylor 就是了.

$\sin 6x = 6x - 36x^2 + o(x^3)$ , 带入题目极限有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = 36$$

□

5. (2002, 数二) 设  $y = y(x)$  是二阶常系数微分方程  $y'' + py' + qy = e^{3x}$  满足初始条件  $y(0) = y'(0) = 0$  的特解, 则当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$  的极限
- (A) 不等于 (B) 等于 1 (C) 等于 2 (D) 等于 3

**Solution.** 由微分方程和  $y(0) = y'(0) = 0$  可知  $y''(0) = 1$ , 则  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

□

**Remark.** (类型二  $\frac{\infty}{\infty}$  型)

6. (2014, 数一、数二、数三) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

**Remark.** (类型三  $0 \cdot \infty$  型)

7. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) \ln(1+e^{1/x})$

**Solution.**

□

**Remark.** (类型四  $\infty - \infty$  型)

8. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2)$

**Solution.** 【详解】

□

**Remark.** (类型五  $0^0$  与  $\infty^0$  型)

9. (2010, 数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{1/x} - 1)^{1/\ln x}$

**Solution.** 【详解】

□

**Remark.** (类型六  $1^\infty$  型)

10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + a^{2x} + \cdots + a^{nx}}{n} \right)^{1/x} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$

**Solution.**

□

## 1.4 已知极限反求参数

**Remark.** (方法)

11. (1998, 数二) 确定常数  $a, b, c$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0)$

**Solution.** 【详解】

□

## 1.5 无穷小阶的比较

**Remark.** (方法)

12. (2002, 数二) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内具有二阶连续导数, 且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$ . 证明: 存在唯一的一组实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使得当  $h \rightarrow 0$  时,  $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$  是比  $h^2$  高阶的无穷小。

**Solution.** 【详解】

□

13. (2006, 数二) 试确定  $A, B, C$  的值, 使得  $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$ , 其中  $o(x^3)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x^3$  高阶的无穷小量。

**Solution.** 【详解】

□

14. (2013, 数二、数三) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小, 求  $n$  与  $a$  的值。

**Solution.** 【详解】

□

## 1.6 数列极限的计算

**Remark.** (方法)

15. (2011, 数一、数二)

(i) 证明: 对任意正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ (ii) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ), 证明数列  $\{a_n\}$  收敛。**Solution.** 【详解】

□

16. (2018, 数一、数二、数三) 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  ( $n = 1, 2, \cdots$ )。证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。**Solution.** 【详解】

□

17. (2019, 数一、数三) 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$  ( $n = 0, 1, 2, \cdots$ )。(i) 证明数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$  ( $n = 2, 3, \cdots$ )(ii) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ **Solution.** 【详解】

□

18. (2017, 数一、数二、数三) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ **Solution.** 【详解】

□

## 1.7 间断点的判定

19. (2000, 数二) 设函数  $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , 则常数  $a, b$  满足(A)  $a < 0, b < 0$  (B)  $a > 0, b > 0$ (C)  $a \leq 0, b > 0$  (D)  $a \geq 0, b < 0$ **Solution.** 【详解】

□

## 第二章 一元函数微分学

### 2.1 导数与微分的概念

1. (2000, 数三) 设函数  $f(x)$  在点  $x = a$  处可导, 则函数  $|f(x)|$  在点  $x = a$  处不可导的充分条件是

(A)  $f(a) = 0$  且  $f'(a) = 0$

(B)  $f(a) = 0$  且  $f'(a) \neq 0$

(C)  $f(a) > 0$  且  $f'(a) > 0$

(D)  $f(a) < 0$  且  $f'(a) < 0$

*Solution.* 【详解】

□

2. (2001, 数一) 设  $f(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导的充要条件为

(A)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$  存在

(B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$  存在

(C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$  存在

(D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$  存在

*Solution.* 【详解】

□

3. (2016, 数一) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$ , 则

(A)  $x = 0$  是  $f(x)$  的第一类间断点

(B)  $x = 0$  是  $f(x)$  的第二类间断点

(C)  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续但不可导

(D)  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导

**Solution.** 【详解】

□

## 2.2 导数与微分的计算

**Remark** (类型一分段函数求导).

4. (1997, 数一、数二) 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  ( $A$  为常数), 求  $\varphi'(x)$ , 并讨论  $\varphi'(x)$  在  $x = 0$  处的连续性。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型二复合函数求导).

5. (2012, 数三) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$ ,  $y = f(f(x))$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e}$

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型三隐函数求导).

6. (2007, 数二) 已知函数  $f(u)$  具有二阶导数, 且  $f'(0) = 1$ , 函数  $y = y(x)$  由方程  $y - xe^{y-1} = 1$  所确定. 设  $z = f(\ln y - \sin x)$ , 求  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$  和  $\left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0}$

**Solution.** 【详解】

□



**Remark** (类型四反函数求导).

7. (2003, 数一、数二) 设函数  $y = y(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $y' \neq 0, x = x(y)$  是  $y = y(x)$  的反函数。

(i) 将  $x = x(y)$  所满足的微分方程  $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$  变换为  $y = y(x)$  满足的微分方程

(ii) 求变换后的微分方程满足初始条件  $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$  的解

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型五参数方程求导).

8. (2008, 数二) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) du \end{cases}$$
 确定, 其中  $x(t)$  是初

值问题 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$$
 的解, 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型六高阶导数).

9. (2015, 数二) 函数  $f(x) = x^2 \cdot 2^x$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

**Solution.** 【详解】

□

## 2.3 导数应用-切线与法线

**Remark** (类型一直角坐标表示的曲线).

10. (2000, 数二) 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x = 0$  的某个邻域内满足关系式  $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x$  高阶的无穷小, 且  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型二参数方程表示的曲线).

11. 曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$  在  $(0, 0)$  处的切线方程为\_\_

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型三极坐标表示的曲线).

12. (1997, 数一) 对数螺线  $r = e^\theta$  在点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  处切线的直角坐标方程为\_\_

**Solution.** 【详解】

□

## 2.4 导数应用-渐近线

13. (2014, 数一、数二、数三) 下列曲线中有渐近线的是

$$\begin{aligned} (A) \ y = x + \sin x \quad (B) \ y = x^2 + \sin x \\ (C) \ y = x + \sin \frac{1}{x} \quad (D) \ y = x^2 + \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**Solution.** 【详解】

□

14. (2007, 数一、数二、数三) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  渐近线的条数为

$$(A) \ 0 \quad (B) \ 1 \quad (C) \ 2 \quad (D) \ 3$$

**Solution.** 【详解】

□

## 2.5 导数应用-曲率

15. (2014, 数二) 曲线  $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$  对应于  $t = 1$  的点处的曲率半径是
- $$(A) \ \frac{\sqrt{10}}{50} \quad (B) \ \frac{\sqrt{10}}{100} \quad (C) \ 10\sqrt{10} \quad (D) \ 5\sqrt{10}$$

**Solution.** 【详解】

□

## 2.6 导数应用-极值与最值

17. (2000, 数二) 设函数  $f(x)$  满足关系式  $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ , 且  $f'(0) = 0$ , 则

- (A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值
- (B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值
- (C) 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点
- (D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值, 点  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

*Solution.* 【详解】

□

18. (2010, 数一、数二) 求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值

*Solution.* 【详解】

□

19. (2014, 数二) 已知函数  $y = y(x)$  满足微分方程  $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ , 且  $y(2) = 0$ , 求  $y(x)$  的极大值与极小值

*Solution.* 【详解】

□

## 2.7 导数应用-凹凸性与拐点

20. (2011, 数一) 曲线  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$  的拐点是

- (A)  $(1, 0)$  (B)  $(2, 0)$  (C)  $(3, 0)$  (D)  $(4, 0)$

*Solution.* 【详解】

□

## 2.8 导数应用-证明不等式

21. (2017, 数一、数三) 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(x)f'(x) > 0$ , 则

- (A)  $f(1) > f(-1)$  (B)  $f(1) < f(-1)$   
(C)  $|f(1)| > |f(-1)|$  (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$

*Solution.* 【详解】

□

22. (2015, 数二) 已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上具有二阶导数,  $f(a) = 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 。设  $b > a$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线与  $x$  轴的交点是  $(x_0, 0)$ , 证明  $a < x_0 < b$ 。

*Solution.* 【详解】

□

## 2.9 导数应用-求方程的根

23. (2003, 数二) 讨论曲线  $y = 4 \ln x + k$  与  $y = 4x + \ln^4 x$  的交点个数。

*Solution.* 【详解】

□

24. (2015, 数二) 已知函数  $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$ , 求  $f(x)$  零点的个数。

*Solution.* 【详解】

□

## 2.10 微分中值定理证明题

**Remark** (类型一证明含有一个点的等式)。

25. (2013, 数一、数二) 设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ 。证明:

- (i) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ ;  
(ii) 存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

*Solution.* 【详解】

□

26. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $f(1) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $(2\xi + 1)f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

*Solution.* 【详解】

□

**Remark** (类型二证明含有两个点的等式).

27. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。证明:

(i) 存在两个不同的点  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$ ;

(ii) 存在  $\xi, \eta \in (0, 1)$ , 使得  $\eta f'(\xi) = f(\eta) f'(\eta)$ 。

*Solution.* 【详解】

□

**Remark** (类型三证明含有高阶导数的等式或不等式).

28. (2019, 数二) 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$ 。证明:

(i) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ;

(ii) 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ 。

*Solution.* 【详解】

□

## 第三章 一元函数积分学

### 3.1 定积分的概念

1. 例 1 (2007, 数一、数二、数三) 如图, 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3,-2],[2,3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2,0],[0,2]$  的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则下列结论正确的是:

$$(A) F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$$

*Solution.* 【详解】

□

2. 例 2 (2009, 数三) 使不等式  $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$  成立的  $x$  的范围是

$$(A) (0, 1) \quad (B) \left(1, \frac{\pi}{2}\right) \quad (C) \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad (D) (\pi, +\infty)$$

*Solution.* 【详解】

□

3. 例 3 (2003, 数二) 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$ , 则

$$(A) I_1 > I_2 > 1 \quad (B) 1 > I_1 > I_2$$

$$(C) I_2 > I_1 > 1 \quad (D) 1 > I_2 > I_1$$

*Solution.* 【详解】

□

### 3.2 不定积分的计算

4. 例 5 (2009, 数二、数三) 计算不定积分  $\int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}} dx (x > 0)$

*Solution.* 【详解】

□

5. 例 6 求  $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$

*Solution.* 【详解】

□

### 3.3 定积分的计算

6. 例 7 (2013, 数一) 计算  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ , 其中  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

*Solution.* 【详解】

□

7. 例 8 求下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$$

*Solution.* 【详解】

□

8. 例 9 求  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

*Solution.* 【详解】

□

### 3.4 反常积分的计算

9. 例 10 (1998, 数二) 计算积分 (题目内容缺失)

*Solution.* 【详解】

□

### 3.5 反常积分敛散性的判定

10. 例 11 (2016, 数一) 若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛, 则

$$(A) \ a < 1 \ b > 1$$

$$(B) \ a > 1 \ b > 1$$

$$(C) \ a < 1 \ a + b > 1$$

$$(D) \ a > 1 \ a + b > 1$$

**Solution.** 【详解】

□

11. 例 12 (2010, 数一、数二) 设  $m, n$  均为正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性

(A)  $m$ (B)  $n$ (C)  $m, n$ (D)  $m, n$ **Solution.** 【详解】

□

### 3.6 变限积分函数

12. 例 13 (2013, 数二) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则

(A)  $x = \pi$   $F(x)$ (B)  $x = \pi$   $F(x)$ (C)  $F(x)$   $x = \pi$ (D)  $F(x)$   $x = \pi$ **Solution.** 【详解】

□

13. 例 14 (2016, 数二) 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 3\pi]$  上连续, 在  $(0, 3\pi)$  内是函数的一个原函数, 且  $f(0) = 0$ .

(i) 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上的平均值;(ii) 证明  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  内存在唯一零点.**Solution.** 【详解】

□

### 3.7 定积分应用求面积

14. 例 15 (2019, 数一、数二、数三) 求曲线  $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$  与  $x$  轴之间图形的面积.

**Solution.** 【详解】

□



### 3.8 定积分应用求体积

15. 例 16 (2003, 数一) 过原点作曲线  $y = \ln x$  的切线, 该切线与曲线  $y = \ln x$  及  $x$  轴围成平面图形  $D$ .

(i) 求  $D$  的面积  $A$ ;

(ii) 求  $D$  绕直线  $x = e$  旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .

**Solution.** 【详解】

□

16. 例 17 (2014, 数二) 已知函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ , 且  $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$ , 求曲线  $f(x, y) = 0$  所围图形绕直线  $y = -1$  旋转所成旋转体的体积.

**Solution.** 【详解】

□

### 3.9 定积分应用求弧长

17. 例 18 求心形线  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 的全长.

**Solution.** 【详解】

□

### 3.10 定积分应用求侧面积

18. 例 19 (2016, 数二) 设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与  $x = \cos^3 t$  围成的平面区域, 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

**Solution.** 【详解】

□

### 3.11 一定积分物理应用

19. 例 20 (2020, 数二) 设边长为  $2a$  等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 设重力加速度为  $g$ , 水密度为  $\rho$ , 则该平板一侧所受的水压力为

**Solution.** 【详解】

□

### 3.12 二证明含有积分的等式或不等式

20. 例 21 (2000, 数二) 设函数  $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$ .

(i) 当  $n$  为正整数, 且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 证明  $2n \leq S(x) < 2(n+1)$ ;

(ii) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$

**Solution.** 【详解】

□

21. 例 22 (2014, 数二、数三) 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加,  $0 \leq g(x) \leq 1$ . 证明:

(i)  $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$ ;

(ii)  $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$ .

**Solution.** 【详解】

□

## 第四章 常微分方程

1. 例 1 (1998, 数一、数二) 已知函数  $y = y(x)$  在任意点  $x$  处的增量  $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ , 其中  $\alpha$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小,  $y(0) = \pi$ , 则  $y(1)$  等于

(A)  $2\pi$  (B)  $\pi$  (C)  $e^{\frac{\pi}{4}}$  (D)  $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

*Solution.* 【详解】

□

2. 例 2 (2002, 数二) 已知函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导,  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$$

求  $f(x)$ 。

*Solution.* 【详解】

□

### 4.1 一阶微分方程的解法

**Remark** (类型一可分离变量).

3. 例 3 (1999, 数二) 求初值问题

$$\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 & (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

*Solution.* 【详解】

□

**Remark** (类型二一阶齐次).

4. 例 4 (2010, 数二、数三) 设  $y_1, y_2$  是一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解。若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解, 则

$$(A) \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2} \quad (C) \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$$

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型三一阶线性).

5. 例 5 (2018, 数一) 已知微分方程  $y' + y = f(x)$ , 其中  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续函数。
- (i) 若  $f(x) = x$ , 求方程的通解;
- (ii) 若  $f(x)$  是周期为  $T$  的函数, 证明: 方程存在唯一的以  $T$  为周期的解。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型四伯努利方程 (数一掌握)).

6. 例 6 求解微分方程  $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$ 。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型五全微分方程 (数一掌握)).

7. 例 7 求解下列微分方程:

$$(1) (2xe^y + 3x^2 - 1)dx + (x^2e^y - 2y)dy = 0;$$

$$(2) \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

**Solution.** 【详解】

□

## 4.2 二阶常系数线性微分方程

8. 例 8 (2017, 数二) 微分方程  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$  的特解可设为  $y^* =$

- (A)  $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$   
 (B)  $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$   
 (C)  $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$   
 (D)  $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

**Solution.** 【详解】

□

9. 例 9 (2015, 数一) 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$  是二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解, 则

- (A)  $a = -3, b = 2, c = -1$   
 (B)  $a = 3, b = 2, c = -1$   
 (C)  $a = -3, b = 2, c = 1$   
 (D)  $a = 3, b = 2, c = 1$

**Solution.** 【详解】

□

10. 例 10 (2016, 数二) 已知  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$  的两个解。若  $u(-1) = e, u(0) = -1$ , 求  $u(x)$ , 并写出该微分方程的通解。

**Solution.** 【详解】

□

11. 例 11 (2016, 数一) 设函数  $y(x)$  满足方程  $y'' + 2y' + ky = 0$ , 其中  $0 < k < 1$ 。

- (i) 证明反常积分  $\int_0^{+\infty} y(x)dx$  收敛;  
 (ii) 若  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ , 求  $\int_0^{+\infty} y(x)dx$  的值。

**Solution.** 【详解】

□

## 4.3 高阶常系数线性齐次微分方程

12. 例 12 求解微分方程  $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 4.4 二阶可降阶微分方程

**Remark** (方法数一、数二掌握数三大纲不要求).

13. 例 13 求微分方程  $y''(x + y'^2) = y'$  满足初始条件  $y(1) = y'(1) = 1$  的特解。

*Solution.* 【详解】

□

## 4.5 欧拉方程

**Remark** (方法数一掌握数二、数三大纲不要求).

14. 例 14 求解微分方程  $x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin \ln x$ 。

*Solution.* 【详解】

□

## 4.6 变量代换求解二阶变系数线性微分方程

17. 例 17 (2005, 数二) 用变量代换  $x = \cos t (0 < t < \pi)$  化简微分方程  $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ , 并求其满足  $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$  的特解。

*Solution.* 【详解】

□

## 4.7 微分方程综合题

**Remark** (类型一综合导数应用).

18. 例 18 (2001, 数二) 设  $L$  是一条平面曲线, 其上任意一点  $P(x, y) (x > 0)$  到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在  $y$  轴上的截距, 且  $L$  经过点  $(\frac{1}{2}, 0)$ 。求曲线  $L$  的方程。

*Solution.* 【详解】

□

**Remark** (类型二综合定积分应用).

19. 例 19 (2009, 数三) 设曲线  $y = f(x)$ , 其中  $f(x)$  是可导函数, 且  $f(x) > 0$ . 已知曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = 0, x = 1$  及  $x = t (t > 1)$  所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的  $\pi t$  倍, 求该曲线的方程。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型三综合变限积分).

20. 例 20 (2016, 数三) 设函数  $f(x)$  连续, 且满足  $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$ , 求  $f(x)$ 。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型四综合多元复合函数).

21. 例 21 (2014, 数一、数二、数三) 设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z = f(e^x \cos y)$  满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ , 求  $f(u)$  的表达式。

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型五综合重积分).

22. 例 22 (2011, 数三) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有连续导数,  $f(0) = 1$ , 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$$

其中  $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t - x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$ , 求  $f(x)$  的表达式。

**Solution.** 【详解】

□

## 第五章 多元函数微分学

### 5.1 多元函数的概念

1. 例 1 求下列重极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0);$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2};$$

*Solution.* 【详解】

□

2. 例 2 (2012, 数一) 如果函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在, 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微

(B) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微

(C) 若  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在

(D) 若  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在

*Solution.* 【详解】

□

3. 例 3 (2012, 数三) 设连续函数  $z = f(x, y)$  满足

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$$

则  $dz|_{(0,1)} =$

*Solution.* 【详解】

□



## 5.2 多元复合函数求偏导数与全微分

4. 例 4 (2021, 数一、数二、数三) 设函数  $f(x, y)$  可微, 且

$$f(x+1, e^x) = x(x+1)^2,$$

$$f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$$

则  $df(1, 1) =$

$$(A) \, dx + dy \quad (B) \, dx - dy \quad (C) \, dy$$

**Solution.** 【详解】

□

5. 例 5 (2011, 数一、数二) 设  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 函数  $g(x)$  可导, 且在  $x = 1$  处取得极值  $g(1) = 1$ , 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1}$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 5.3 多元隐函数求偏导数与全微分

6. 例 6 (2005, 数一) 设有三元方程  $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$ , 根据隐函数存在定理, 存在点  $(0, 1, 1)$  的一个邻域, 在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $z = z(x, y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$  和  $z = z(x, y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $y = y(x, z)$

**Solution.** 【详解】

□

7. 例 7 (1999, 数一) 设  $y = y(x), z = z(x)$  是由方程  $z = xf(x+y)$  和  $F(x, y, z) = 0$  所确定的函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求  $\frac{dz}{dx}$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 5.4 变量代换化简偏微分方程

8. 例 8 (2010, 数二) 设函数  $u = f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定  $a, b$  的值, 使等式在变换  $\xi = x + ay, \eta = x + by$  下简化为  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 5.5 求无条件极值

9. 例 9 (2003, 数一) 已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

则

- (A) 点  $(0, 0)$  不是  $f(x, y)$  的极值点
- (B) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极大值点
- (C) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点
- (D) 根据所给条件无法判别点  $(0, 0)$  是否为  $f(x, y)$  的极值点

**Solution.** 【详解】

□

10. 例 10 (2004, 数一) 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值。

**Solution.** 【详解】

□

## 5.6 求条件极值 (边界最值)

11. 例 11 (2006, 数一、数二、数三) 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ 。已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(B) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

**Solution.** 【详解】

□

12. 例 12 (2013, 数二) 求曲线  $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$  上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

**Solution.** 【详解】

□

13. 例 13 (2014, 数二) 设函数  $u(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 在  $D$  的内部具有二阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$  及  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 则

(A)  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的边界上取得

(B)  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的内部取得

(C)  $u(x, y)$  的最大值在  $D$  的内部取得, 最小值在  $D$  的边界上取得

(D)  $u(x, y)$  的最小值在  $D$  的内部取得, 最大值在  $D$  的边界上取得

**Solution.** 【详解】

□

14. 例 14 (2005, 数二) 已知函数  $z = f(x, y)$  的全微分  $dz = 2x dx - 2y dy$ , 且  $f(1, 1) = 2$ , 求  $f(x, y)$  在椭圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$  上的最大值和最小值。

**Solution.** 【详解】

□

## 第六章 二重积分

### 6.1 二重积分的概念

1. 例 1 (2010, 数一、数二)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$$

$$\begin{aligned} (A) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy \quad (B) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy \\ (C) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy \quad (D) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy \end{aligned}$$

**Solution.** 【详解】

□

2. 例 2 (2016, 数三) 设  $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$ , 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

则

$$(A) J_1 < J_2 < J_3 \quad (B) J_3 < J_1 < J_2$$

$$(C) J_2 < J_3 < J_1 \quad (D) J_2 < J_1 < J_3$$

**Solution.** 【详解】

□

## 6.2 交换积分次序

3. 例 3 (2001, 数一) 交换二次积分的积分次序:

$$\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$$

**Solution.** 【详解】

□

4. 例 5 交换  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r, \theta) dr$  的积分次序。

**Solution.** 【详解】

□

## 6.3 二重积分的计算

6. 例 6 (2011, 数一、数二) 已知函数  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且  $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$

**Solution.** 【详解】

□

7. 例 7 计算  $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 。

**Solution.** 【详解】

□

8. 例 8 (2018, 数二) 设平面区域  $D$  由曲线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  与  $x$  轴围成, 计算二重积分  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ 。

**Solution.** 【详解】

□

9. 例 9 (2007, 数二、数三) 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$ 。

*Solution.* 【详解】

□

10. 例 10 (2014, 数二、数三) 设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

*Solution.* 【详解】

□

11. 例 11 (2019, 数二) 已知平面区域  $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$ , 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

*Solution.* 【详解】

□

## 6.4 其他题型

13. 例 12 (2010, 数二) 计算二重积分  $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$ , 其中 (题目描述不完整)

*Solution.* 【详解】

□

14. 例 13 (2009, 数二、数三) 计算二重积分  $\iint_D (x - y) dx dy$ , 其中

$$D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$$

*Solution.* 【详解】

□

## 第七章 无穷级数

### 7.1 数项级数敛散性的判定

1. 例 1 (2015, 数三) 下列级数中发散的是

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad (C) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

*Solution.* 【详解】

□

2. 例 2 (2017, 数三) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin \frac{1}{n} - k \ln(1 - \frac{1}{n})]$  收敛, 则  $k =$

$$(A) 1 \quad (B) 2 \quad (C) -1 \quad (D) -2$$

*Solution.* 【详解】

□

### 7.2 交错级数

3. 例 3 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln n} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

*Solution.* 【详解】

□

### 7.3 任意项级数

4. 例 4 (2002, 数一) 设  $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

$$(A) \quad (B) \quad (C) \quad (D)$$

**Solution.** 【详解】

□

5. 例 5 (2019, 数三) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$  条件收敛, 则

$$\begin{aligned} (A) \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ 条件收敛} & \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ 绝对收敛} \\ (C) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ 收敛} & \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ 发散} \end{aligned}$$

**Solution.** 【详解】

□

## 7.4 幂级数求收敛半径与收敛域

6. 例 6 (2015, 数一) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x = \sqrt{3}$  与  $x = 3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$  的

$$(A) \quad , \quad (B) \quad ,$$

$$(C) \quad , \quad (D) \quad ,$$

**Solution.** 【详解】

□

7. 例 7 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1} x^n$  的收敛域.**Solution.** 【详解】

□

## 7.5 幂级数求和

8. 例 8 (2005, 数一) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$  的收敛区间与和函数  $f(x)$ .**Solution.** 【详解】

□

9. 例 9 (2012, 数一) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.**Solution.** 【详解】

□

10. 例 10 (2004, 数三) 设级数  $\frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的和函数为  $S(x)$ . 求:



- (i)  $S(x)$  所满足的一阶微分方程;  
 (ii)  $S(x)$  的表达式.

**Solution.** 【详解】

□

## 7.6 幂级数展开

11. 例 11 (2007, 数三) 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$  展开成  $x-1$  的幂级数, 并指出其收敛区间.

**Solution.** 【详解】

□

12. 例 12 将函数  $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$  在  $x=1$  处展开成幂级数.

**Solution.** 【详解】

□

## 7.7 无穷级数证明题

13. 例 13 (2016, 数一) 已知函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ . 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ . 证明:

- (i) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  绝对收敛;  
 (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$ .

**Solution.** 【详解】

□

14. 例 14 (2014, 数一) 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

- (i) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;  
 (ii) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛.

**Solution.** 【详解】

□

## 7.8 傅里叶级数

15. 例 15 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

则其以  $2\pi$  为周期的傅里叶级数在  $x = \pi$  收敛于?, 在  $x = 2\pi$  收敛于?.

**Solution.** 【详解】由狄利克雷收敛定理知,  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期的傅里叶级数在  $x = \pi$  收敛于

$$S(\pi) = \frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

在  $x = 2\pi$  收敛于

$$S(2\pi) = S(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

□

16. 例 16 将  $f(x) = 1 - x^2, 0 \leq x \leq \pi$ , 展开成余弦级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  的和.

**Solution.** 【详解】对  $f(x) = 1 - x^2$  进行偶延拓, 由  $f(x) = 1 - x^2$  为偶函数, 知  $b_n = 0$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = 2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \right) \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

令  $x = 0$ , 代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

□

## 第八章 多元函数积分学

### 8.1 三重积分的计算

1. 例 1 (2013, 数一) 设直线  $L$  过  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$  两点, 将  $L$  绕  $z$  轴旋转一周得到曲面  $\Sigma$ ,  $\Sigma$  与平面  $z = 0, z = 2$  所围成的立体为  $\Omega$ .

(I) 求曲面  $\Sigma$  的方程;

(II) 求  $\Omega$  的形心坐标.

*Solution.* 【详解】

□

2. 例 2 (2019, 数一) 设  $\Omega$  是由锥面  $x^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2 (0 \leq z \leq 1)$  与平面  $z = 0$  围成的锥体, 求  $\Omega$  的形心坐标.

*Solution.* 【详解】

□

### 8.2 第一类曲线积分的计算

3. 例 3 (2018, 数一) 设  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 则  $\oint_L xy ds =$

*Solution.* 【详解】

□

4. 例 4 设连续函数  $f(x, y)$  满足  $f(x, y) = (x + 3y)^2 + \int_L f(x, y) ds$ , 其中  $L$  为曲线  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , 求曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$ .

*Solution.* 【详解】

□

### 8.3 第二类曲线积分的计算

**Remark** (类型一平面第二类曲线积分).

5. 例 5 (2021, 数一) 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是有界单连通闭区域,  $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$  取得最大值的积分域记为  $D_1$ .

(I) 求  $I(D_1)$  的值;

(II) 计算  $\oint_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$ , 其中  $\partial D_1$  是  $D_1$  的正向边界.

**Solution.** 【详解】

□

**Remark** (类型二空间第二类曲线积分).

6. 例 6 (2011, 数一) 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $z = x + y$  的交线, 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分  $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$

**Solution.** 【详解】

□

### 8.4 第一类曲面积分的计算

**Remark** (方法).

7. 例 7 (2010, 数一) 设  $P$  为椭球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$  上的动点, 若  $S$  在点  $P$  的切平面与  $xOy$  面垂直, 求  $P$  点的轨迹  $C$ , 并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS,$$

其中  $\Sigma$  是椭球面  $S$  位于曲线  $C$  上方的部分.

**Solution.** 【详解】

□

### 8.5 第二类曲面积分的计算

**Remark** (方法).

8. 例 8 (2009, 数一) 计算曲面积分

$$I = \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中  $\Sigma$  是曲面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  的外侧.

**Solution.** 【详解】

□

9. 例 9 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于零的常数.

**Solution.** 【详解】

□

10. 例 10 (2020, 数一) 设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ) 的下侧,  $f(x)$  为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]dydz + [yf(xy) + 2y + x]dzdx + [zf(xy) + z]dxdy.$$

**Solution.** 【详解】

□

## 第九章 行列式

行列式的主要内容	行列式的概念	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义 } n! \text{项不同行不同列元素乘积的代数和} \\ \text{性质} \end{array} \right.$
	重要行列式	$\left\{ \begin{array}{l} \text{上 (或下) 三角, 主对角矩阵} \\ \text{副对角行列式} \\ \text{ab 型行列式} \\ \text{拉普拉斯展开式} \\ \text{范德蒙行列式} \end{array} \right.$
	展开定理	$\left\{ \begin{array}{l} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases}  A , & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases}  A , & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{array} \right.$
	行列式的公式	$\left\{ \begin{array}{l}  KA  = K^n  A  \\  AB  =  A   B  \\  A^T  =  A  \\  A^{-1}  =  A ^{-1} \\  A^*  =  A ^{n-1} \\ \text{设 } A \text{ 的特征值为 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \text{ 则 }  A  = \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ \text{若 } A \text{ 与 } B \text{ 相似, 则 }  A  =  B  \end{array} \right.$
	Cramer 法则	$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$

拉普拉斯展开式 (上, 下三角分块行列式的结论)

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A) \det(D)$$

对于一般分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

若  $B$  可逆, 则有如下结论

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

## 9.1 数字行列式的计算

**Remark.** 基本方法

- (1) 利用行列式的性质 (5 条) 来化简
- (2) 要么出现重要行列式 (5 组)
- (3) 要么展开定理 (0 比较多时候)

1. 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程  $f(x) = 0$  根的个数为 \_\_\_\_\_**Solution.** 第一列乘  $-1$  加到其他列

$$f(x) \xrightarrow{\text{第一列乘}-1 \text{ 加到其他列上面去}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & 4-3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二列加到第四列}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{拉普拉斯型}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= [(x-2) - (2x-2)][-6(x-2) + (x-7)] = 15x(x-1)$$

则  $x = 0$  或  $x = 1$ 

□



## 2. 利用范德蒙行列式计算

$$\text{范德蒙行列式 } V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

*Solution.*

$$\begin{aligned} \text{原式} & \xrightarrow{\text{第一列乘以 } (a+b+c) \text{ 加到第三列}} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 + ac + ab + bc \\ b & b^2 & a^2 + ac + ab + bc \\ c & c^2 & a^2 + ac + ab + bc \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{第二列乘-1 加到最后一列, 提取公因式, 并交换}} (ab + ac + bc) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ & = (ac + bc + ab)(b - a)(c - a)(c - b) \end{aligned}$$

□

3. 设  $x_1 x_2 x_3 x_4 \neq 0$ , 则

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 \\ a_2 a_1 & x_2 + a_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & x_3 + a_3^2 & a_3 a_4 \\ a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & x_4 + a_4^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**Solution.** 考虑加边法, 为该行列式增加一行一列, 变成如下行列式

$$\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 + a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 \\ a_2 & a_2 a_1 & x_2 + a_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 \\ a_3 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & x_3 + a_3^2 & a_3 a_4 \\ a_4 & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & x_4 + a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{将第一行分别乘以 } -a_1, -a_2, \dots, \text{分别加到第 } 2, 3, \dots \text{ 列} \\ \hline \hline \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{从下往上消, 分别乘以 } \frac{a_i}{x_i}, \text{加到第一行} \\ \hline \hline \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (x_1 x_2 x_3 x_4) \left( 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{a_i^2}{x_i} \right)$$

□

## 爪型行列式

关键在于化简掉一条爪子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 4. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

*Solution.*

(方法一) 递推法

$$D_1 = \alpha + \beta$$

$$D_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

...

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$

...

$$= \beta^{n-1}(D_2 - D_1) = \beta^n$$

$$D_n = \beta^n + \alpha D_{n-1} = \beta^n + \alpha(\beta^{n-1} + \alpha D_{n-2})$$

...

$$= \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \cdots + \alpha^n$$

(方法二) 数学归纳法

$$\text{if } \alpha = \beta, D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2, \text{ assume, } D_{n-1} = n\alpha^{n-1}$$

$$\text{then } D_n = D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = (n+1)\alpha^n$$

$$\text{when } \alpha \neq \beta, D_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, D_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta},$$

$$\text{Assume, } D_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ then,}$$

$$D_n = \dots = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

(方法三) 二阶差分方程

$$D_n - (\alpha + \beta)D_{n-1} + \alpha\beta D_{n-2} = 0$$

$$D_{n+2} - (\alpha + \beta)D_{n+1} + \alpha\beta D_n = 0$$

类似于二阶微分方程解特征方程

$$r^2 - (\alpha + \beta)r + \alpha\beta = 0$$

$$r_1 = \alpha \quad r_2 = \beta$$

差分方程的关键  $r^n$  代换  $e^{rx}$

如果  $\alpha = \beta$

$$D_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n, D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2$$

$$\text{得到 } C_1 = C_2 = 1, D_n = (n+1)\alpha^n$$

如果  $\alpha \neq \beta$

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \text{ 由 } D_1 = 2\alpha, D_2 = 3\alpha^2$$

$$C_1 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, C_2 = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}$$

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

□

**Corollary 9.1.1.** 如下行列式有和例题 4 完全相等的性质

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \alpha = \beta \\ \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

## 9.2 代数余子式求和

**Remark.** 代数余子式求和的基本办法

- (1) 代数余子式的定义 (求一个的时候使用)
- (2) 展开定理 (求一行或者一列的时候使用)
- (3) 利用伴随矩阵的定义 (求全部代数余子式的时候使用)

5. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则  $A_{41} + A_{42} + A_{43} =$  \_\_\_\_\_,  $A_{44} + A_{45} =$  \_\_\_\_\_

*Solution.*

(方法一) 利用展开定理构建新的矩阵来计算

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{44} + A_{45} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

但这样  $|A| = 27$  的条件就没用到

(方法二)

直接对第四行使用展开定理, 则

$$|A| = A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2A_{44} + 2A_{45} = 27$$

直接对第二行使用展开定理, 则

$$|A| = 2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + A_{44} + A_{45} = 0$$

相当于解  $A + 2B = 27, 2A + B = 0$ , 容易计算  $A_{41} + A_{42} + A_{43} = -9, A_{44} + A_{45} = 18$   $\square$

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则  $|A|$  的所有代数余子式的和为\_\_\_\_\_

**Solution.** 对于求所有代数余子, 基本都是考察  $A^*$  的定义, 即

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

又由于  $A^* = |A| A^{-1}$ , 对于这道题

$$|A| = (-1)^{(n+1)} n!$$

$A^{-1}$  可以通过分块矩阵来求

$$\begin{aligned} |A|A^{-1} &= |A| \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ \hline n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)^{-1} \\ &= |A| \left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n} \\ \hline \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}) & 0 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{n}|A| \\ \hline \text{diag}(|A|, \frac{|A|}{2}, \dots, \frac{|A|}{n-1}) & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

则所有代数余子式之和为

$$(-1)^{(n+1)} n! \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

□

## 9.3 抽象行列式的计算

**Remark.** 抽象行列式的计算方法

- (1) 通过行列式的性质
- (2) 行列式的公式 (7 个)

7. (2005, 数一、二) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量,  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$ . 若  $|A| = 1$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$

*Solution.*

(方法一利用性质)

$$\begin{aligned} B &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3) \\ &= 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3) \\ &= 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned}$$

$$|B| = 2|A| = 2$$

(方法二分块矩阵)

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = |A|(2-1)(3-1)(3-2) = 2$$

□

8. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha, \beta$  为  $n$  维列向量. 若  $|A| = a$ ,  $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$ , 则  $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} =$

*Solution.* 这道题的关键在于巧妙构建行列式的和

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \alpha + 0 \\ \beta^T & b + c - b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c - b \end{vmatrix} \\ &= |A|(c - b) = a(c - b) \end{aligned}$$

□



9. 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $B = 2 \begin{pmatrix} (2A)^{-1} - (2A)^* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  若  $|A| = -1$ , 则  $|B| =$  \_\_\_\_\_

**Solution.** 这道题比较纯粹就是行列式公式的应用

$$\begin{aligned} |B| &= 2^4 |A| \cdot |(2A)^{-1} - (2A)^*| \\ &= 2^4 |A| \cdot \left| \frac{1}{2} A^{-1} - 2A^* \right| \\ &= 2^4 \left| \frac{1}{2} E - 2|A| \right| = 100 \end{aligned}$$

□

10. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ ,  $A \neq E$ , 证明  $|A| = 0$

#### 易错点

由  $|A|^2 = |A| \implies |A| = 1$  或  $= 0$ , 又  $A \neq E \implies |A| \neq 1$ , 故  $|A| = 0$  注意矩阵不等关系是无法推出行列式的不等关系的, 矩阵式数表只要顺序不同就不一样, 但不是一样的矩阵其行列式完全有可能相等.

等于 1 的矩阵并非只能是  $E$

**Solution.**

(方法一, 反证法) 若  $|A| \neq 0$ , 则  $A$  可逆, 对于等式  $A^2 = A$  两边同乘  $A^{-1}$ , 则  $A = E$  与题设矛盾, 故  $|A| \neq 0$

(方法二, 秩) 由于  $A(A - E) = 0 \implies r(A) + r(A - E) \leq n$ , 又  $A \neq E, r(A - E) \geq 1$ , 故  $r(A) \leq n$ , 故  $|A| = 0$

(方法三, 方程组) 由于  $A(A - E) = 0$ , 且  $A \neq E$  可知方程  $AX = 0$  有非零解即  $(A - E) \quad$ , 故  $r(A) < n, |A| = 0$

(方法四, 特征值与特征向量) 由于  $A(A - E) = 0, A \neq E$ , 取  $A - E$  的非零列向量  $\beta \neq 0, A\beta = 0$  故由特征值与特征值向量的定义,  $A$  有特征值 0, 而  $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0$  □

## 总结

若  $AB = 0$  有如下结论

- (1)  $r(A) + r(B) \leq n$
- (2)  $B$  的列向量均为方程  $AX = 0$  的解
- (3) 若  $A_{n \times n}$ , 则  $B$  的非零列向量均为  $A$  的特征值为 0 的特征向量

## 第十章 矩阵

### 10.1 求高次幂

**Remark.** 基本方法

(1) 若  $r(A) = 1$ , 则  $A^n = \text{tr}(A)^{n-1}A$ , 关键点在于  $r(A) = 1 \implies A = \alpha\beta^T$

(2) 若  $A$  可以分解为  $E + B$ , 且  $B$  是类似于如下形式 (非零元素仅在对角线的上方或下方) 的矩阵则有如下结论.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \mathbf{0}$$

$$A^n = C_n^n E + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

(3) 分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}$$

(4) 相似对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \text{ 则 } A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) P^{-1}$$

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B$  为 3 阶矩阵, 满足  $BA = O$ , 且  $r(B) > 1$ , 则  $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Solution.** 由  $BA = O$  知  $r(A) + r(B) \leq n$ , 又  $r(B) > 1, r(A) \geq 1$  所以  $1 \leq r(A) \leq$

$$1, \implies r(A) = 1,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, -1, 2)$$

$$A^n = \text{tr}(A)^{n-1} \alpha \beta^T = 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

□

2. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  则  $A^n =$  \_\_\_\_\_.

**Solution.**  $A = 2E + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \mathbf{0}$ , 则

$$A^n = 2^n E + 2^{n-1} n B + 2^{n-3} n(n-1) B^2$$

□

3. 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$   $P$  为 3 阶可逆矩阵,  $B = P^{-1}AP$ , 则  $(B + E)^{100} =$  \_\_\_\_\_

**Solution.**  $r(A) = 1, A^2 = \text{tr}(A) \cdot A = -2A$  即  $A^2 + 2A = \mathbf{0}, (A + E)^2 = E$ , 由题  
 $(B + E)^{100} = (P^{-1}AP + E)^{100} = (P^{-1}AP + P^{-1}EP)^{100} = (P^{-1}(A + E)P)^{100} = E$  □

## 10.2 逆的判定与计算

4. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = 2A$ , 则下列结论不正确的是:

(A)  $A$  可逆      (B)  $A - E$  可逆      (C)  $A + E$  可逆      (D)  $A - 3E$  可逆

**Solution.**

□

5. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $a, b$  为非零常数. 证明:

(a) 若  $AB = aA + bB$ , 则  $AB = BA$ ;

(b) 若  $A^2 + aAB = E$ , 则  $AB = BA$ .

*Solution.*

□

## 总结

$$\begin{aligned}
 (1) A_{n \times n} B_{n \times n} = E &\implies \begin{cases} \text{可逆} \\ \text{求逆, } B = A^{-1}, A = B^{-1} \\ \text{满足交换律, } AB = BA \end{cases} \\
 (2) AB \text{ 可交换的充分条件} &\begin{cases} B = f(A), A^{-1}, A^* \\ AB = aA + bB (a, b \neq 0) \\ A^2 + aAB = E, (a \neq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. 设  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  满足  $A^3 = O$ .

(a) 求  $a$  的值;

(b) 若矩阵  $X$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 求  $X$ .

*Solution.*

□

## 10.3 秩的计算与证明

### Remark. 秩

秩的定义:  $\exists r$  阶子式非零且  $\forall r+1$  阶子式均为零

秩的性质

- (1) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 则  $r(A) < \min\{m, n\}$
- (2)  $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- (3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (4)  $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A \mid B) \leq r(A) + r(B)$
- (5)  $r(A) = r(kA) (k \neq 0)$
- (6) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $P$  为  $m$  阶可逆矩阵,  $Q$  为  $n$  阶可逆矩阵, 则  $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$
- (7) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 若  $r(A) = n$  则  $r(AB) = r(B)$ , 若  $r(A) = m$  则  $r(CA) = r(C)$   
左乘列满秩, 右乘行满秩, 秩不变
- (8)  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
- (9) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  为  $n \times s$  阶矩阵,  $AB = 0$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $(XY)$  表示分块矩阵, 则:

- (a)  $r(A \mid AB) = r(A)$
- (b)  $r(A \mid BA) = r(A)$
- (c)  $r(A \mid B) = \max\{r(A), r(B)\}$
- (d)  $r(A \mid B) = r(A^T B^T)$

*Solution.*

□

8. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明:

(1) 若  $A^2 = A$ , 则  $r(A) + r(A - E) = n$ .

(II) 若  $A^2 = E$ , 则  $r(A + E) + r(A - E) = n$ .

*Solution.*



□

## 10.4 关于伴随矩阵

**Remark.** 伴随矩阵的性质

$$(1) \quad AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A| \neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, A^* = |A| A^{-1}$$

$$(2) \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

$$(3) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$(4) \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(5) \quad (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$(6) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$(7) \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$(8) \quad r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

9. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的各列元素之和均为 2, 且  $|A| = 6$ , 则  $A^*$  的各列元素之和均为:

(A) 2      (B)  $\frac{1}{3}$       (C) 3      (D) 6

*Solution.*

□

10. 设  $A = (a_{ij})$  为  $n(n \geq 3)$  阶非零矩阵,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 证明:

(a)  $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = 1$ ;

(b)  $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$  且  $|A| = -1$ .

*Solution.*



## 10.5 初等变换与初等矩阵

**Remark.** 初等变换与初等矩阵的性质

- (1)  $|E(i, j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$
- (2)  $E(i, j)^T = E(i, j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$
- (3)  $E(i, j)^{-1} = E(i, j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$
- (4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵
- (5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设  $A$  为  $n(n \geq 2)$  阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得到矩阵  $B$ , 则:

- (A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列, 得  $B^*$
- (B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行, 得  $B^*$
- (C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列, 得  $-B^*$
- (D) 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行, 得  $-B^*$

**Solution.**

□

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

□

# 第十一章 向量

## 11.1 线性表示的判定与计算

1. 设向量组  $\alpha, \beta, \gamma$  与数  $k, l, m$  满足  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  ( $km \neq 0$ ), 则

- (a) (A)  $\alpha, \beta$  与  $\alpha, \gamma$  等价
- (b) (B)  $\alpha, \beta$  与  $\beta, \gamma$  等价
- (c) (C)  $\alpha, \gamma$  与  $\beta, \gamma$  等价
- (d) (D)  $\alpha$  与  $\gamma$  等价

*Solution.* 【详解】

□

2. (2004, 数三) 设  $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, a + 2, -3a)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, -b - 2, a + 2b)^T$ ,  $\beta = (1, 3, -3)^T$ 。当  $a, b$  为何值时,

- (a) (II)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  唯一地线性表示, 并求出表示式;
- (b) (III)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式。

*Solution.* 【详解】

□

3. (2019, 数二、三) 设向量组 (I)  $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 4)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$ ; 向量组 (II)  $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T$ ,  $\beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T$ ,  $\beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$ 。若向量组 (I) 与 (II) 等价, 求  $a$  的值, 并将  $\beta_3$  由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

*Solution.* 【详解】

□

## 11.2 线性相关与线性无关的判定

3. (2014, 数一、二、三) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量, 则对任意常数  $k, l$ ,  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的

- (a) (A) 必要非充分条件  
(b) (B) 充分非必要条件  
(c) (C) 充分必要条件  
(d) (D) 既非充分又非必要条件

**Solution.** 【详解】

□

4. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为  $n$  维列向量, 满足  $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 \neq 0, A^2\alpha_2 = \alpha_1 + A\alpha_2, A^2\alpha_3 = \alpha_2 + A\alpha_3$ , 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

**Solution.** 【详解】

□

5. 设 4 维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 与 4 维列向量  $\beta_1, \beta_2$  两两正交, 证明  $\beta_1, \beta_2$  线性相关。

**Solution.** 【详解】

□

## 11.3 极大线性无关组的判定与计算

6. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, a+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, a)^T$ 。

- (a) (I) 当  $a$  为何值时, 该向量组线性相关, 并求其一个极大线性无关组;  
(b) (II) 当  $a$  为何值时, 该向量组线性无关, 并将  $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$  由其线性表示。

**Solution.** 【详解】

□

7. 证明:

- (a) (I) 设  $A, B$  为  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ ;  
(b) (II) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵, 则  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 11.4 向量空间 (数一专题)

8. (2015, 数一) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $R^3$  的一个基,  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$ ,  $\beta_2 = 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ 。

(a) (I) 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $R^3$  的一个基:

(b) (II) 当  $k$  为何值时, 存在非零向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同, 并求所有的  $\xi$ 。

*Solution.* 【详解】

□



## 第十二章 线性方程组

### 12.1 解的判定

1. (2001, 数三) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha$  为  $n$  维列向量, 且  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ , 则线性方程组
- (a) (A)  $Ax = \alpha$  有无穷多解
  - (b) (B)  $Ax = \alpha$  有唯一解
  - (c) (C)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  只有零解
  - (d) (D)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  有非零解

**Solution.** 【详解】

□

2. 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 且  $r(A) = m < n$ , 则下列结论不正确的是
- (a) (A) 线性方程组  $A^T x = 0$  只有零解
  - (b) (B) 线性方程组  $A^T A x = 0$  有非零解
  - (c) (C)  $\forall b$ , 线性方程组  $A^T x = b$  有唯一解
  - (d) (D)  $\forall b$ , 线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解

**Solution.** 【详解】

□

### 12.2 求齐次线性方程组的基础解系与通解

2. (2011, 数一, 二) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  为 4 阶矩阵,  $(1, 0, 1, 0)^T$  为线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则  $A^* x = 0$  的基础解系可为

(a) (A)  $\alpha_1, \alpha_2$

(b) (B)  $\alpha_1, \alpha_3$

(c) (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(d) (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

**Solution.** 【详解】

□

3. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵  $A$  的第 1 行为  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为零,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$  满足  $AB = O$ , 求线性方程组  $Ax = 0$  的通解。

**Solution.** 【详解】

□

4. (2002, 数三) 设线性方程组

$$ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0$$

$$bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0$$

$$\vdots$$

$$bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0$$

其中  $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$ 。当  $a, b$  为何值时, 方程组只有零解、有非零解, 当方程组有非零解时, 求其通解。

**Solution.** 【详解】

□

## 12.3 求非齐次线性方程组的通解

5. 设  $A$  为 4 阶矩阵,  $k$  为任意常数,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的三个解, 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** 【详解】

□

6. (2017, 数一、三、三) 设 3 阶矩阵  $A = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$  有三个不同的特征值, 其中  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

(a) (I) 证明  $r(A) = 2$ ;

(b) (II) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求线性方程组  $Ax = \beta$  的通解。

**Solution.** 【详解】

□

7. (I) 求  $\lambda, a$  的值;

8. (II) 求方程组  $Ax = b$  的通解。

**Solution.** 【详解】

□

9. (I)  $\eta$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的特解, 证明:

(a) (II)  $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$  线性无关;

(b) (III)  $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$  为  $Ax = b$  所有解的极大线性无关组。

**Solution.** 【详解】

□

## 12.4 解矩阵方程

9. 矩阵方程解的判定

$$AX = B \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A) < r(A|B)$$

$$AX = B \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow r(A) = r(A|B) = n$$

$$AX = B \text{ 有无穷多解} \Leftrightarrow r(A) = r(A|B) < n$$

10. 矩阵方程的求法对  $(A|B)$  作初等行变换, 化为行最简形矩阵, 得矩阵  $X$ 。

11. (例 4.10) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

矩阵  $X$  满足  $AX + E = A^{2022} + 2X$ , 求矩阵  $X$ 。

*Solution.* 【详解】

□

12. (例 4.11) (2014, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) (I) 求线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系;(b) (II) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ 。*Solution.* 【详解】

□

## 12.5 公共解的判定与计算

12. (2007, 数三) 设线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$(II) x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解。*Solution.* 【详解】

□

13. 设齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为  $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$ 

(a) (1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(b) (2) 当  $a$  为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解, 并求所有非零公共解。

*Solution.* 【详解】

□

14. (2005, 数三) 设线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与 (II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求  $a, b, c$  的值。

*Solution.* 【详解】

□

# 第十三章 特征值与特征向量

## 13.1 特征值与特征向量的计算

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求  $A$  的特征值与特征向量。

*Solution.* 【详解】

□

2. (2003, 数一) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}A^*P$$

求  $B + 2E$  的特征值与特征向量。

*Solution.* 【详解】

□

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求  $A$  的特征值与特征向量。

*Solution.* 【详解】

□

4. 设 3 阶非零矩阵  $A$  满足  $A^2 = O$ , 则  $A$  的线性无关的特征向量的个数是

(a) (A) 0

(b) (B) 1

(c) (C) 2

(d) (D) 3

*Solution.* 【详解】

□

5. 设  $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$ , 其中  $\alpha, \beta$  为 3 维单位列向量, 且  $\alpha^T\beta = \frac{1}{3}$ , 证明:

(a) (I) 0 为  $A$  的特征值;

(b) (II)  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  为  $A$  的特征向量;

(c) (III)  $A$  可相似对角化。

*Solution.* 【详解】

□

## 13.2 相似的判定与计算

6. (2019, 数一、二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(I) 求  $x, y$  的值; (II) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ 。

*Solution.* 【详解】

□

7. 设  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 满足  $A^2 = 2E$ , 则  $|AB + A - B - E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

*Solution.* 【详解】

□

### 13.3 相似对角化的判定与计算

8. (2005, 数一、二) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 3, -2, 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。若

$$P = (\alpha_1, 2\alpha_2, -\alpha_3)$$

则  $P^{-1}AP =$  \_\_\_\_\_。

**Solution.** 【详解】

□

9. 设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2E = O$ , 证明  $A$  可相似对角化。

**Solution.** 【详解】

□

10. (2020, 数一、二、三) 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  为非零向量且不是  $A$  的特征向量。

(a) (I) 证明  $P$  为可逆矩阵;

(b) (II) 若  $A^2\alpha + 6A\alpha - 10\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵。

**Solution.** 【详解】

□

### 13.4 实对称矩阵的计算

11. (2010, 数二、三) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ 4 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q$  为对角矩阵。若  $Q$  的第 1 列为  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)^T$ , 求  $a, Q$ 。

**Solution.** 【详解】

□

12. 设 3 阶实对称矩阵  $A$  满足  $A^2 + A = O$ ,  $A$  的各行元素之和均为零, 且  $r(A) = 2$ 。



- (a) (I) 求  $A$  的特征值与特征向量；  
(b) (II) 求矩阵  $A$ 。

*Solution.* 【详解】

□

## 第十四章 二次型

### 14.1 求二次型的标准形

1. (2016, 数二、三) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

- (a)  $a > 1$
- (b)  $a < -1$
- (c)  $-1 < a < 1$
- (d)  $a = 1$  或  $a = -1$

**Solution.** 【详解】

□

2. (2022, 数一) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_ix_j$ 。

- (a) 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  对应的矩阵;
- (b) 求正交变换  $x = Qy$ , 将  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形;
- (c) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解。

**Solution.** 【详解】

□

3. (2020, 数一、三) 设二次型  $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  经正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  化为二次型  $g(y_1, y_2) = y_1^2 + by_2^2$ , 其中  $b \geq 0$ 。

- (a) 求  $a, b$  的值;
- (b) 求正交矩阵  $Q$ 。

**Solution.** 【详解】

□

## 14.2 合同的判定

4. (2008, 数二、三) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 与  $A$  合同的矩阵是

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Solution.** 【详解】

□

5. 设  $A, B$  为  $n$  阶实对称可逆矩阵, 则存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得

(a)  $PAP = B$ ;

(b)  $P^{-1}ABP = BA$ ;

(c)  $P^{-1}AP = B$ ;

(d)  $P^TAP = B$ 。

成立的个数是

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

**Solution.** 【详解】

□

### 14.3 二次型正定与正定矩阵的判定

6. (2017, 数一、二、三) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵, 且  $r(A) = n$ , 则下列结论

- (a)  $A^T A$  与单位矩阵等价;
- (b)  $A^T A$  与对角矩阵相似;
- (c)  $A^T A$  与单位矩阵合同;
- (d)  $A^T A$  正定。

正确的个数是

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

*Solution.* 【详解】

□

7. 证明:

- (a) 设  $A$  为  $n$  阶正定矩阵,  $B$  为  $n$  阶反对称矩阵, 则  $A - B^2$  为正定矩阵;
- (b) 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 且  $r(A + B) = n$ , 则  $A^T A + B^T B$  为正定矩阵。

*Solution.* 【详解】

□

# 第十五章 事件与概率论

## 15.1 事件的关系、运算与概率的性质

1. 事件: 样本点的集合
2. 事件的关系 (3+1): 包含, 互斥, 对立 + 独立
3. 事件的运算 (3 个): 交, 并, 补

**Remark.** (事件的运算律)

- (1) 交换律  $A \cup B = B \cup A, AB = BA$
- (2) 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$
- (3) 分配律  $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$
- (4) 摩根律  $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (5) 吸收律  $A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$

1. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = 1$ , 则

$$(A) A \cup B = \Omega \quad (B) AB = \emptyset \quad (C) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 \quad (D) P(A - B) = 0$$

**Solution.** 由加法公式  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \implies P(AB) = 0$

注意由概率并不能推断事件, 所以 (A)(B) 均不正确

对于 (C) 选项  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1$  正确

对于 (D) 选项, 由减法公式  $P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$

□

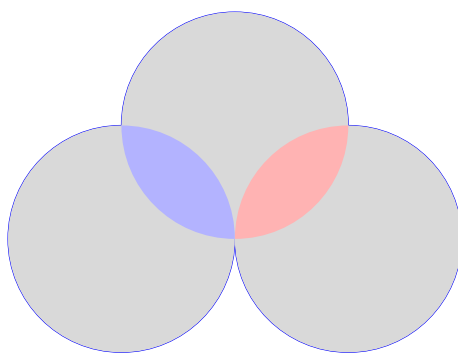
## 总结

- (1) 必然事件发生的概率为 1, 但概率为一的事件不一定是必然事件  
 (2) 不可能事件发生的概率为 0, 但概率为零的事件不一定是不可能事件  
 这两个结论考虑**连续型随机变量**即可

2. (2020, 数一、三) 设  $A, B, C$  为随机事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ , 则  $A, B, C$  只有一个事件发生的概率为

(A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{5}{12}$

**Solution.** 这种题一般考虑 Venn 图, 比用公式展开简单很多



则只有一个事件发生的概率为  $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) \times 2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$  □

3. 设随机事件  $A, B$  满足  $AB = \bar{A}\bar{B}$ , 且  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 则  $P(A|\bar{B}) + P(B|\bar{A}) =$  \_\_\_\_\_

**Solution.** 根据结论, 有  $A, B$  互斥, 则  $P(A|\bar{B}) = P(B|\bar{A}) = 1$  □

**Corollary 15.1.1.** 若  $AB = \bar{A}\bar{B}$ , 则  $A, B$  必然对立

**Proof.**

$$\begin{aligned}
 AB &= \bar{A}\bar{B} \\
 \iff AB \cup \bar{A}\bar{B} &= \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \\
 \iff (A \cup \bar{A})B &= \bar{A}(\bar{B} \cup B) \\
 \iff B &= \bar{A}
 \end{aligned}$$

□

4. 设随机事件  $A, B, C$  两两独立, 满足  $ABC = \emptyset$ , 且  $P(A) = P(B) = P(C)$ ,  $A, B, C$  至少有一个发生的概率为  $\frac{9}{16}$ , 则  $P(A) =$

**Solution.** 由题意有  $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$ , 由加法公式与独立性有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)$$

由  $P(A) = P(B) = P(C)$ , 上式化为  $3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \implies P(A) = \frac{1}{4}$  或  $P(A) = \frac{3}{4}$ , 显然  $P(A) \neq \frac{3}{4} > P(A \cup B \cup C)$ , 故  $P(A) = \frac{1}{4}$   $\square$

5. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(A|B) + P(B|A)$  的最大值为 \_\_\_\_\_, 最小值为 \_\_\_\_\_.

**Solution.** 关于概率的不等式基于如下事实, 对于任意一个概率其值均位于  $[0, 1]$  之间, 事件  $AB$  的和事件不可能小于单独  $A, B$  发生概率之和, 事件  $AB$  的积事件不可能大于任意一个事件单独发生的概率.

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq \min(P(A), P(B)) \leq P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)$$

$\square$

## 15.2 三大概型的计算

**Remark.** 三大概率模型

经典概型 – 有限个等可能的样本点, 排列组合问题

几何概型 – 使用几何参数度量概率, 比如说长度, 面积, 体积等

伯努利概型 – 独立重复试验每次成功的概率为  $p$ , 不成功的概率为  $(1 - p)$

6. (2016, 数三) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰好为 4 的概率为

**Solution.** (古典概型)

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{3}}{3^4} = \frac{2}{9}$$

首先从 3 个颜色中选择一个为第四次抽的颜色, 再从剩下两个颜色中选择一个为出现两次的颜色, 在选择该颜色抽出的次序.  $\square$

7. 在区间  $(0, a)$  中随机地取两个数, 则两数之积小于  $\frac{a^2}{4}$  的概率为

**Solution.** (几何概型)

$$\frac{\frac{a}{4} \cdot a + \int_{\frac{a}{4}}^a \frac{a^2}{4x} dx}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

□

8. 设独立重复的试验每次成功的概率为  $p$ , 则第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

**Solution.** 失败零次  $-p^5$ , 失败一次  $-\binom{1}{5}p^4(1-p)p$ , 失败两次  $-\binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$

故第 5 次成功之前至多 2 次失败的概率为

$$p^5 + \binom{1}{5}p^4(1-p)p + \binom{2}{6}p^4(1-p)^2p$$

□

### 15.3 三大概率公式的计算

**Remark.** 三大概率公式

条件概率公式  $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

推论  $P(AB) = P(B)P(A | B)$ ,  $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | P(A_1))P(A_3 | P(A_1 A_2)) \dots$

全概率公式  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$

贝叶斯公式  $P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$

若称  $P(B_j)$  为  $B_j$  的先验概率, 称  $P(B_j | A)$  为  $B_j$  的后验概率. 则贝叶斯公式专门用于计算后验概率的公式.

9. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(A \cup B) = 0.6, P(B | \bar{A}) = 0.2$ , 则  $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

**Solution.**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6, P(B | \bar{A}) = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = 0.2$$

联立有

$$\frac{0.6 - P(A)}{1 - P(A)} = 0.2$$

, 则  $P(A) = 0.5$

□



10. (2018, 数一) 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立,  $A$  与  $C$  相互独立, 满足  $BC = \emptyset$ , 且

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(AC|AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则  $P(C) =$ \_\_\_\_\_.

*Solution.*

$$\begin{aligned} P(AC|AB \cup C) &= \frac{P(AC)}{P(AB \cup C)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(AB) + P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4} + P(C)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

则  $P(C) = \frac{1}{4}$

□

11. (2003, 数一) 设甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱,

- (1) 求乙箱中次品件数  $X$  的数学期望;
- (2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

*Solution.* (作为小题来考还可以)

方法一: 用概率

- (1) 对于数字特征的题目, 先求概率分布再说, 由于  $P(X = k) = \frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3}$

$X$	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

则所求数学期望  $EX = \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^3 P(X = k)P(A | x = k) \\ &= \frac{1}{20} \times 0 + \frac{9}{20} \times \frac{1}{6} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

方法二: 超几何分布

(1)  $X \sim H(N, M, n), N = 6, M = 3, n = 3$ , 则  $EX = \frac{nM}{N} = \frac{3}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \sum_{k=0}^3 P(X = k)P(A | x = k) \\
 &= \sum_{k=0}^3 P(X = k)\frac{k}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^3 P(X = k)k \\
 &= \frac{1}{6} EX \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

□

## 15.4 事件独立的判定

**Remark.** (事件独立的充要条件)

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$\iff P(A | B) = P(A)$$

$$\iff P(A | \bar{B}) = P(A) \iff P(A | B) = P(A | \bar{B}) \quad (0 < P(B) < 1)$$

$$\iff A \text{ 与 } \bar{B}, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } B, \text{ 或 } \bar{A} \text{ 与 } \bar{B} \text{ 相互独立}$$

$$\iff P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1, \quad 0 < P(B) < 1$$

12. 设  $A, B$  为随机事件, 且  $0 < P(A) < 1$ , 则

- (A) 若  $A \supset B$ , 则  $A, B$  一定不相互独立
- (B) 若  $B \supset A$ , 则  $A, B$  一定不相互独立
- (C) 若  $AB = \emptyset$ , 则  $A, B$  一定不相互独立
- (D) 若  $A = \bar{B}$ , 则  $A, B$  一定不相互独立

**Solution.** (A)(B)(C) 考虑  $\emptyset$  则都不对

(D) 由于  $A$  不是必然事件, 则  $B$  不是不可能事件, 则  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 根据下面的总结  $A, B$  一定不独立  $\square$

### 总结

(1) 概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立

特别的, 不可能事件与必然事件与任意事件独立

(2) 设  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ ,

$A, B$  互不相容, 则  $A, B$  一定不独立

$A, B$  独立, 则  $A, B$  一定不互不相容

13. 设  $A, B, C$  为随机事件,  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(C) = 0$ , 则  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

(A) 相互独立 (B) 两两独立, 但不一定相互独立

(C) 不一定两两独立 (D) 一定不两两独立

**Solution.** 由  $P(C) = 0$  知  $A, B, C$  相互独立, 则  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  也相互独立.  $\square$

### 两两独立与相互独立

$$\text{相互独立} \left\{ \begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array} \right\} \quad \text{两两独立}$$

# 第十六章 一维随机变量

## 16.1 分布函数的判定与计算

**Remark.** (分布函数的性质)

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

(2) (单调不减) 当  $x_1 < x_2$  时,  $F(x_1) \leq F(x_2)$

(3) (右连续)  $F(x+0) = F(x)$

上面三个性质为分布函数的定义, 只要满足上述性质的函数一定是某一个概率分布的分布函数

(4)  $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

(5)  $P\{X < x\} = F(x-0), P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$

$$P\{a \leq x \leq b\} = P\{x \leq b\} - P\{x < a\} = F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a < x < b\} = P\{x < b\} - P\{x \leq a\} = F(b-0) - F(a)$$

1. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $a, b$  为任意常数, 则下列一定不是分布函数的是

(A)  $F(ax+b)$  (B)  $F(ax^2+b)$  (C)  $F(ax^3+b)$  (D)  $1-F(-x)$

### 总结

对于  $F(ax+b), F(ax^3+b), \dots$  只要  $a > 0$  则这些函数都是分布函数

对于  $F(a^2x+b), F(a^4+b), \dots$  都一定不是分布函数

对于  $G(x) = 1 - F(-x)$

若  $X$  是连续性随机变量则是, 否则不是 ( $F(x)$  不满足左连续, 则  $G(x)$  不满足右连续)

2. 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则  $X$  的分布函数  $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P\{-2 < X < \frac{1}{4}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

(方法一 变限积分)

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 < x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

根据  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , 有

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \int_{-1}^x (1+t) dt, & -1 < x < 0 \\ \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\{-2 < X < \frac{1}{4}\} &= F(\frac{1}{4}) - F(-2) \\ &= \int_{-2}^{\frac{1}{4}} f(x) dx \\ &= \frac{23}{32} \end{aligned}$$

(方法二定积分)

$$\int f(x)dx = \begin{cases} C_1, & x < -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + C_2, & -1 \leq x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_3, & 0 \leq x < 1 \\ C_4, & x \geq 1 \end{cases}$$

由分布函数的定义

$$\begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

□

## 16.2 概率密度的判定与计算

**Remark.** (概率密度的性质)

(1)  $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

上面两条性质为概率密度的定义, 任何满足上面的函数都是某个概率的概率密度函数

(3)  $P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$

推广  $P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$

(4) 在  $f(x)$  连续点处有  $F'(x) = f(x)$

3. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x)$ , 则下列必为概率密度的是

(A)  $f(-x+1)$  (B)  $f(2x-1)$  (C)  $f(-2x+1)$  (D)  $f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

**Solution.** 由于  $f(x)$  已经满足非负性, 故选项的非负性都不需要考虑, 只需要考虑正则性就可以.

(A)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+1)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$

$$(B) \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$$

$$(C) \int_{-\infty}^{+\infty} f(-2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$$

$$(D) \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1}{2}-1\right)dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 2$$

□

## 总结

 $f(ax+b)$  为概率密度  $\iff |a|=1$ 

4. (2011, 数一、三) 设  $F_1(x), F_2(x)$  为分布函数, 对应的概率密度  $f_1(x), f_2(x)$  为连续函数, 则下列必为概率密度的是

$$(A) f_1(x)f_2(x) \quad (B) 2f_2(x)F_1(x) \quad (C) f_1(x)F_2(x) \quad (D) f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

## 总结

## (1) 线性组合

 $af_1(x) + bf_2(x), a > 0, b > 0$  为概率密度  $\iff a + b = 1$ 
 $aF_1(x) + bF_2(x), a > 0, b > 0$  为分布函数  $\iff a + b = 1$ 

## (2) 乘积

 $F_1F_2$  一定是分布函数

 $f_1f_2$  不一定是概率论密度

## (3) 混搭

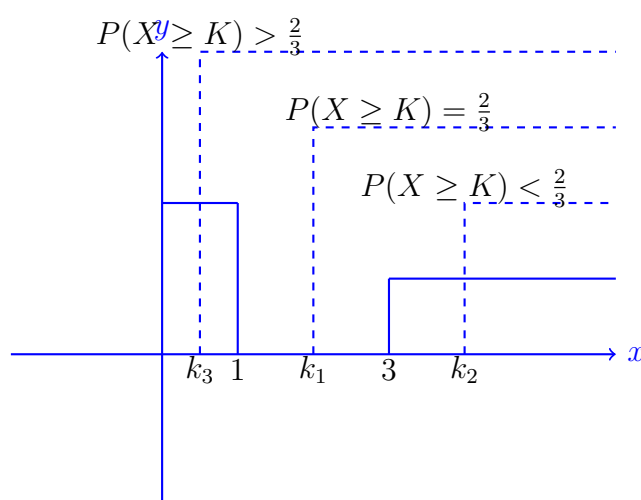
 $f_1F_2 + f_2F_1, 2f_1F_1, 2f_2F_2$  是概率密度, 其余都不是.

5. (2000, 三) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若  $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$ , 则  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**Solution.** 如图所示, 当且仅当  $1 \leq k \leq 3$  时候  $P(X \geq k) = \frac{2}{3}$  □



## 16.3 关于八大分布

**Remark.** (八大分布的概率分布与数字特征)

(1) 0-1 分布,  $X \sim B(1, p)$   $\frac{X}{P} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline & 1-p & p \end{array}$ ,  $EX = p$ ,  $DX = p(1-p)$

(2) 二项分布,  $X \sim B(n, p)$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, EX = np, DX = np(1-p)$$

(3) 泊松分布,  $X \sim P(\lambda)$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots, EX = \lambda, DX = \lambda$$

(4) 几何分布,  $X \sim G(p)$

$$P = \{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, EX = \frac{1}{p}, DX = \frac{1-p}{p^2}$$



(5) 超几何分布,  $X \sim H(N, M, n)$

$$P = \{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, \dots, \min(n, M), EX = \frac{nM}{N}$$

(6) 均匀分布  $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}, EX = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(7) 指数分布  $X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0, F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, EX = \frac{1}{\lambda}, DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

(8) 一般正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $EX = \mu, DX = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, F(\mu) = \frac{1}{2}, F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{标准正态分布 } X \sim N(0, 1) \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

正态分布的标准化若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .

### 拓展-负二项分布

在一系列独立重复的伯努利试验 (每次试验只有“成功”或“失败”两种结果, 成功概率为  $p$ ) 中, 达到  $r$  次成功所需的试验总次数  $X$  服从负二项分布。

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \dots, \quad EX = \frac{r}{p}, \quad DX = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

6. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = k\} = C \frac{\lambda^k}{k!}, k = 1, 2, \dots$ , 则  $C =$ \_\_\_\_\_.

**Solution.**

(方法一: 级数) 由概率的规范性可知  $\sum_{k=1}^{\infty} C \frac{\lambda^k}{k!} = 1$ , 由于  $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ , 故  $C(e^\lambda - 1) = 1$ , 故  $C = \frac{1}{e^\lambda - 1}$

(方法二: 泊松分布) 考虑泊松分布  $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots$  □

7. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = A e^{-\frac{x^2}{2} + Bx}$ , 且  $EX = DX$ , 则  $A =$ \_\_\_\_,  $B =$ \_\_\_\_\_.

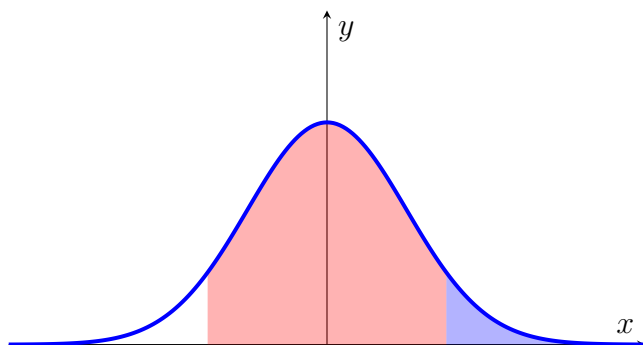
**Solution.**  $f(x) = A e^{\frac{B^2}{2}} e^{-\frac{(x-B)^2}{2}} \sim N(1, B^2)$ , 又  $D(x) = E(x)$  故  $B^2 = 1$ , 对比正态分布的概率密度函数有  $A e^{\frac{B^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  故  $A = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  □

## 总结

形如  $f(x) = Ae^{ax^2+bx+c}$ ,  $a < 0$  一定可以化成某一个正态分布的概率密度.

8. (2004, 数一、三) 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 对给定的  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , 数  $u_\alpha$  满足  $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$ . 若  $P\{|X| < x\} = \alpha$ , 则  $x$  等于

(A)  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  (B)  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  (C)  $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$  (D)  $u_{1-\alpha}$



**Solution.** 如图所示,  $x$  右侧的面积为  $\frac{1-\alpha}{2}$  故  $x$  是  $\frac{1-\alpha}{2}$  上侧分位点

□

9. 设随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 且  $P\{2 < X < 4\} = 0.3$ , 则  $P\{X < 0\} =$ \_\_\_\_\_.

**Solution.** 正态分布的基本套路就是遇事不决标准化  $P\{2 < X < 4\} = P\{0 < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{2}{\sigma}\} = 0.3$ , 故  $P\{X < 0\} = P\{\frac{X-2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\} = \frac{1}{2} - 0.3 = 0.2$

□

10. 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\mu < 0)$ ,  $F(x)$  为其分布函数,  $a$  为任意常数, 则

(A)  $F(a) + F(-a) > 1$  (B)  $F(a) + F(-a) = 1$   
(C)  $F(a) + F(-a) < 1$  (D)  $F(\mu + a) + F(\mu - a) = \frac{1}{2}$

**Solution.** 这道题是比较隐晦的考察了正态分布的对称性, 具体直接看总结. 但要注意先标准化再套结论!

□

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \begin{cases} 1, & a + b = 1 \\ < 1, & a + b < 1 \\ > 1, & a + b > 1 \end{cases}$$

11. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 均服从参数为 1 的指数分布, 则  $P\{1 < \max\{X, Y\} < 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

$$\begin{aligned} P\{1 < \max\{X, Y\} < 2\} &= P\{\max\{X, Y\} < 2\} - P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} \\ &= P\{X < 2, Y < 2\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\ &\stackrel{\text{由独立性}}{=} P\{X < 2\}P\{Y < 2\} - P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} \\ &= (1 - e^{-2})^2 - (1 - e^{-1})^2 \end{aligned}$$

□

12. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 则  $P\{1 < \min\{X, Y\} < 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

$$\begin{aligned} P\{1 < \min\{X, Y\} < 2\} &= P\{\min\{X, Y\} > 1\} - P\{\min\{X, Y\} \geq 2\} \\ &= P\{X > 1\}P\{Y > 1\} - P\{X \geq 2\}P\{Y \geq 2\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

### 总结

对于  $\min$  和  $\max$  问题基本按照如下思路:

$$\begin{aligned} P\{a < \min(X_1, X_2, \dots, X_n) < b\} \\ &= P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > a\} - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq b\} \\ \\ P\{a < \max(X_1, X_2, \dots, X_n) < b\} \\ &= P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < b\} - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq a\} \end{aligned}$$

13. (2013, 数一) 设随机变量  $Y \sim E(1), a > 0$ , 则  $P\{Y \leq a + 1 | Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Solution.** 由指数分布的无记忆性, 有  $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = P\{0 < Y < 1\} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$   $\square$

14. 设随机变量  $X \sim G(p)$ ,  $m, n$  为正整数, 则  $P\{X > m+n | X > m\}$

- (A) 与  $m$  无关, 与  $n$  有关, 且随  $n$  的增大而减少
- (B) 与  $m$  无关, 与  $n$  有关, 且随  $n$  的增大而增大
- (C) 与  $n$  无关, 与  $m$  有关, 且随  $m$  的增大而减少
- (D) 与  $n$  无关, 与  $m$  有关, 且随  $m$  的增大而增大

**Solution.** 由几何分布的无记忆性, 有  $P\{X > m+n | X > m\} = P\{X > n\} = \sum_{i=n+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$ , 故随着  $n$  增大概率反而减少  $\square$

### 总结

指数分布与几何分布具有无记忆性

$$X \sim E(\lambda)$$

$$P\{x > s+t | x > s\} = P\{x > t\}$$

$$P\{x < s+t | x > s\} = P\{0 < x < t\}$$

$$X \sim G(p)$$

$$P\{x > n+m | x > m\} = P\{x > n\}$$

$$P\{x = n+m | x = m\} = P\{x = n\} = p(1-p)^{n-1}$$

## 16.4 求一维连续型随机变量函数的分布

**Remark. 【方法】**

设随机变量  $X$  的概率密度为  $f_X(x)$ , 求  $Y = g(X)$  的分布.

**分布函数法**

(1) 设  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y)$ , 则  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$ .

(2) 求  $Y = g(X)$  在  $X$  的正概率密度区间的值域  $(\alpha, \beta)$ , 讨论  $y$ .

当  $y < \alpha$  时,  $F_Y(y) = 0$ ;

当  $\alpha \leq y < \beta$  时,  $F_Y(y) = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$ ;

当  $y \geq \beta$  时,  $F_Y(y) = 1$ .

(3) 若  $Y$  为连续型随机变量, 则  $Y$  的概率密度为  $f_Y(y) = F'_Y(y)$ .

**公式法**

设  $y = g(x)$  在  $X$  的正概率密度区间单调, 值域为  $(\alpha, \beta)$ , 反函数为  $x = h(y)$ , 则  $Y$  的概率密度为

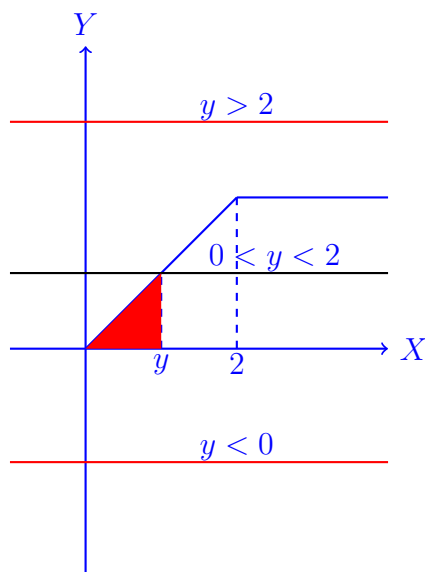
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若  $y = g(x)$  在  $X$  的正概率密度区间  $[a, b]$  分段严格单调, 则分段运用公式法, 然后将概率密度相加.

15. 设随机变量  $X \sim E(\lambda)$ , 则  $Y = \min\{X, 2\}$  的分布函数

- (A) 为连续函数      (B) 为阶梯函数  
(C) 至少有两个间断点      (D) 恰好有一个间断点

**Solution.** 这是一道比较简单的题目, 主要是用于演示所谓**图像法讨论**  $y$  的具体操作, 注意画的是  $X - Y$  图像



故  $F_Y(y) = \min\{X, 2\} < y$ , 当  $y < 0$  时候  $F_Y(y) = 0$ ,  $y \geq 2$ ,  $F_Y(y) = 1$ , 当  $0 \leq y < 2$  时候, 有  $\int_0^y f(x)dx = 1 - e^{-\lambda y}$ , 综上

$$F_Y = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

容易发现  $F(2-0) \neq 1$  故存在一个跳跃间断点

□

$$16. \text{ 设随机变量 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

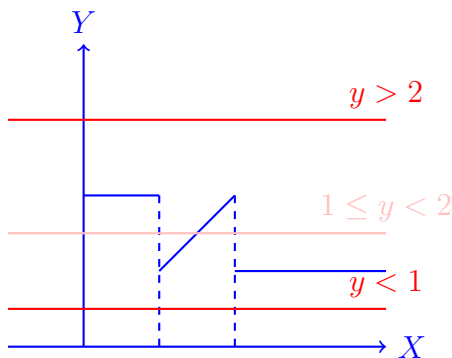
(a) 求  $Y$  的分布函数;

(b) 求  $P\{X \leq Y\}$ .

**Solution.** 带参数的概率密度第一步就应该根据正则性把这个参数求出来.

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \implies a = 9$$

然后和上一题一样画  $X - Y$  图像, 求  $F_Y(y)$ , 注意分区域就是.



当  $y < 1$ ,  $F_Y(y) = 0$ ;  $y > 2$ ,  $F_Y(y) = 1$

$$1 \leq y < 2, F_Y(y) = \int_1^y f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \frac{y^3}{27} + \frac{2}{3}$$

□

17. (2021, 数一、三) 在区间  $(0, 2)$  上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为  $X$ , 较长一段的长度记为  $Y$ 。

(a) 求  $X$  的概率密度;

(b) 求  $Z = \frac{Y}{X}$  的概率密度;

(c) 求  $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ 。

**Solution.** 有题设容易得到  $X \sim U(0, 1)$ ,  $Y = 2 - X$

$$(1) \text{ 则 } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2)  $Z = \frac{Y}{X} = \frac{2}{X} - 1$ , 显然  $Z$  关于  $X$  是单调的, 可以用公式法直接求出  $f_Z(z)$ , 即

$$f_Z(z) = 1 \cdot \frac{2}{(y+1)^2} = \frac{2}{(y+1)^2}, z \in (1, +\infty)$$

(3)

$$E(Z) = \int_1^{\infty} z f_Z(z) dz = 2 \ln 2 - 1$$

或者也可以用

$$E\left(\frac{2}{x} - 1\right) = \int_0^1 \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx = 2 \ln(2) - 1$$

□

## 第十七章 二维随机变量

### 17.1 联合分布函数的计算

**Remark.** (联合分布函数的性质)

- (1)  $0 \leq F(x, y) \leq 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
- (2)  $F(x, y)$  关于  $x$  和  $y$  均单调不减
- (2)  $F(x, y)$  关于  $x$  和  $y$  均右连续
- (4)  $P\{a < X \leq b, c < Y \leq d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

1. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim B(1, p), Y \sim E(\lambda)$ , 则  $(X, Y)$  的联合分布函数  $F(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Solution.** 由  $X$  和  $Y$  相互独立, 则有  $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), X$  的概率分布如下:

$X$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

则  $X$  的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



而  $Y \sim E(\lambda)$ , 故

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} (1-p)(1-e^{-\lambda y}), & 0 \leq x < 1, y > 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & x \geq 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

## 17.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 均服从参数为  $p$  的几何分布。

(a) 求在  $X + Y = n (n \geq 2)$  的条件下,  $X$  的条件概率分布;

(b) 求  $P\{X + Y \geq n\} (n \geq 2)$ .

*Solution.*

(1)

$$\begin{aligned} P\{X + Y = n\} &\stackrel{\text{几何分布从 1 开始}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X = k, Y = n - k\} \\ &\stackrel{\text{独立性}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p \cdot (1-p)^{n-k-1}p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2}p^2 \\ &= (n-1)(1-p)^{n-2}p^2 \end{aligned}$$

在  $X + Y = n$  的条件下,  $X$  的条件概率为

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{P\{X = k, Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$  这个范围千万别忘喽!

(2)

$$\begin{aligned}
 P\{X+Y \geq n\} &= P\{X+Y = n\} + P\{X+Y = n+1\} + \dots \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} P\{X+Y = k\} \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} (k-1)p^2(1-p)^{k-2}
 \end{aligned}$$

不妨先计算级数  $\sum_{k=n}^{\infty} (k-1)x^{k-2}$ 

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{\infty} (k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=n}^{\infty} (x^{k-1})' \\
 &= \left( \frac{\sum_{n=k}^{\infty} 1}{x} \right)' \\
 &= \frac{(n-1)x^{n-2}(1-x) + x^{n-1}}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

故当  $x = 1-p$  的时有

$$\begin{aligned}
 P\{X+Y \geq n\} &= p^2 \frac{(n-1)(1-p)^{n-2}p + (1-p)^{n-1}}{p^2} \\
 &= (1-p)^{n-2}(np - 2p + 1)
 \end{aligned}$$

□

## 17.3 二维连续型随机变量分布的计算

**Remark.** 主要内容

联合概率密度的性质

$$(1) f(x, y) \geq 0, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

$$(3) P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy;$$

$$(4) \text{在 } f(x, y) \text{ 的连续点处有 } \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

边缘概率密度

(1)  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

(2)  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

条件概率密度

(1) 在  $Y = y$  的条件下,  $X$  的条件概率密度  $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

(2) 在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度  $f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

3. (2010, 数一、三) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ .

*Solution.*

(方法一正常求) 首先通过规范性求出参数  $A$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &\stackrel{\text{Poisson 积分}}{=} A\pi = 1 \implies A = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$X$  的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

则在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率为

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y | x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2} \end{aligned}$$

(方法二, 通过二维正态分布) 形如  $f(x, y) = Ae^{ax^2+bx+cy^2}$  的函数如果是概率密度, 则其一定是某个二维正态的概率密度函数, 故

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$$

通过下一节讲的确定系数的办法, 可以很快的确定

$$(X, Y) \sim N(0, 0; \frac{1}{2}, 1; \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{故 } A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

□

4. 设随机变量  $X \sim U(0, 1)$ , 在  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下, 随机变量  $Y \sim U(x, 1)$ 。

- (a) 求  $(X, Y)$  的联合概率密度;
- (b) 求  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y)$ ;
- (c) 求  $P\{X + Y > 1\}$ .

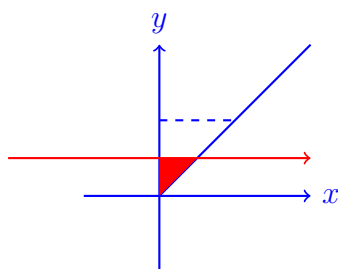
*Solution.*

(1) 在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

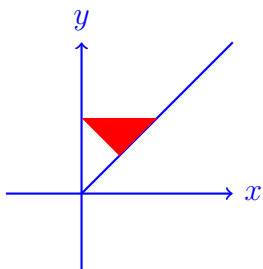
$$\text{故 } f(x, y) = f_{Y|X}(y | x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 通过概率密度求边缘密度的时候, 需要画出  $x$ - $y$  图, 并且确定要求的那个参数的范围, 比如说这里是  $y \in (0, 1)$ , 让后再从  $[0, 1]$  上面去做偏积分, 具体如图所示



$$f_Y(y) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 根据性质 (3) 有  $P\{X + Y > 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y)dxdy$  此时  $x$ - $y$  的可行范围为



$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{1/2}^1 dy \int_{1-y}^y \frac{1}{1-x} dx \\
 &= \int_{1/2}^1 [\ln y - \ln(1-y)] dy \\
 &= [y \ln y - (1-y) \ln(1-y)] \Big|_{1/2}^1 \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

□

## 17.4 关于二维正态分布

**Remark.** 二维正态分布的性质 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ , 则

- (1)  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 反之不成立 (独立的时候反之成立);
- (2)  $X$  与  $Y$  相互独立  $\Leftrightarrow X$  与  $Y$  不相关 ( $\rho = 0$ );
- (3)  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$ ; 特别地, 若  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 则  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ ;
- (4) 若  $U = aX + bY, V = cX + dY$ , 即  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , 则  $(U, V)$  服从二维正态分布  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ .

5. 设二维随机变量  $(X, Y) \sim N(1, 2; 1, 4; -\frac{1}{2})$ , 且  $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$ , 则  $(a, b)$  可以为

- (A)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  (B)  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$  (C)  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

**Solution.** 由性质 (3) 可知  $aX + bY \sim N$ , 而由正态分布的对称性可知,  $\mu = 1 \Rightarrow a + 2b = 1$  故选择 (D)

□

6. (2020, 数三) 设二维随机变量  $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$ , 则下列随机变量服从标准正态分布且与  $X$  相互独立的是

(A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

**Solution.** 这道题选择出来并不困难, 但要证明其与  $X$  相互独立还是有点说法的.

第一步, 先求  $X+Y$  和  $X-Y$  的标准化

由性质三可知  $X+Y \sim N(0, 3)$ ,  $X-Y \sim N(0, 7)$ , 故  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$ ;  $\frac{\sqrt{7}}{7}(X-Y) \sim N(0, 1)$ ;

这里其时就已经可以选出答案喽

第二步证明独立性

考虑  $(X+Y, X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , 且  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

由性质 (4) 可知,  $(X+Y, X)$  服从二维正态分布, 由性质 (2) 可知, 只需要证明二者的相关系数为 0 即可, 证明二者独立.

□

7. (2022, 数一) 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 在  $X = x$  的条件下, 随机变量  $Y \sim N(x, 1)$ , 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为

(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Solution.**

(方法一传统方法计算)

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

问题转换为求  $EXY, DY$ , 由题设可知, 在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$$

故  $(X, Y)$  的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}}$$

故  $y$  的边缘分布函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$$

即  $Y \sim N(0, 2)$ , 故  $EY = 0, DY = 2$  而  $EXY$  根据方差的定义可以计算

TODO: 计算  $EXY$

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy = 1$$

故  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 通过二维正态参数的结论直接求出  $\rho$ , 由上述可知  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$ , 对比二维正态概率密度的公式

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\}$$

容易得出  $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 2; \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 具体如总结所示. □

### 总结

对于形如  $Ae^{-ax^2+bxy+cy^2}$  的式子, 若其是概率密度, 则必然是某个二维正态的概率密度 (由规范性) 且满足

(1)  $b^2 = 4\rho^2 a^2 c^2 \implies \rho^2 = \frac{b^2}{4a^2 c^2}$

(2)  $\rho$  的符号与  $xy$  系数的符号一致

## 17.5 求二维离散型随机变量函数的分布

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ , 求  $Z = X + Y$  的概率分布.

**Solution.** 这道题是参数可加性的直接考察, 可以先证明一下

$$\begin{aligned}
 P\{Z = n\} &= P\{X + Y = n\} \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{X = k, Y = n - k\} \\
 &\stackrel{\text{独立性}}{=} \sum_{k=0}^n P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
 &\stackrel{\text{上下同乘}k!}{=} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &\stackrel{\text{二项式定理}}{=} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

□

## 参数可加性

当  $X, Y$  独立的时候

- (1)  $X \sim B(m, p), Y \sim B(n, p) \implies X + Y \sim B(n + m, p)$
- (2)  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \implies X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$
- (3)  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \implies X + Y \sim (\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- (4)  $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), \implies X + Y \sim \chi^2(n + m)$
- (5)  $X \sim E(\lambda_1), Y \sim E(\lambda_2) \implies \min(X, Y) \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$



## 17.6 求二维连续型随机变量函数的分布

### Remark. 问题描述

设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y)$ , 求  $Z = g(X, Y)$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

### 分布函数法

(1) 设  $Z$  的分布函数为  $F_Z(z)$ , 则  $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\}$ .

(2) 求  $Z = g(X, Y)$  在  $(X, Y)$  的正概率密度区域的值域  $(\alpha, \beta)$ , 讨论  $z$ .

$z < \alpha$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;

当  $\alpha \leq z < \beta$  时,  $F_Z(z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$ ;

当  $z \geq \beta$  时,  $F_Z(z) = 1$ .

(3)  $Z$  的概率密度为  $f_Z(z) = F'_Z(z)$ .

### 卷积公式

(1) 设  $Z = aX + bY$ , 则  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|b|} f\left(x, \frac{z-ax}{b}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} f\left(\frac{z-by}{a}, y\right) dy$ ;

(2) 设  $Z = XY$ , 则  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$ ;

(3) 设  $Z = \frac{Y}{X}$ , 则  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx$ ;

(4) 设  $Z = \frac{X}{Y}$ , 则  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$

9. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  求:

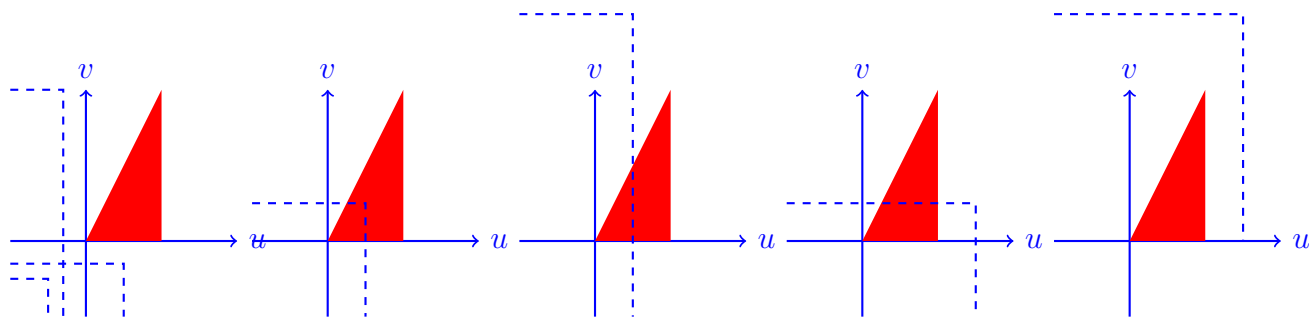
(a)  $(X, Y)$  的联合分布函数  $F(x, y)$ ;

(b)  $(X, Y)$  的边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ ;

(c) 条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ ;

(d)  $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}, P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\}$ ;

(e)  $Z = 2X - Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ .



*Solution.*

(1) 由定义可知  $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$ , 其中  $x, y$  的可行域如下图所示, 分为五个部分故

$$F(x, y) = \begin{cases} \int_0^y dv \int_{\frac{v}{2}}^x du, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ \int_0^x du \int_{2u}^{+\infty} dv, & 0 < x < 1, y \geq 2x \\ \int_0^y dv \int_{\frac{v}{2}}^1 du, & x > 1, 0 < y < 2 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^2}{4} - xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ x^2, & 0 < x < 1, y \geq 2x \\ y - \frac{y^2}{4}, & x > 1, 0 < y < 2 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由定义可知

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 当  $0 < x < 1$  在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当  $0 < y < 2$  在  $Y = y$  的条件下,  $X$  的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(4) 对于  $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}$  可以采用条件概率公式,

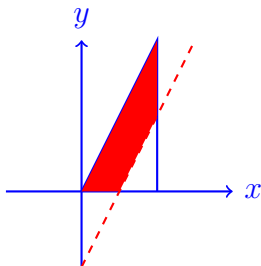
$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{\iint_{y \leq \frac{1}{2}, x \leq \frac{1}{2}} f(x, y) dx dy}{\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx} = \frac{3}{4}$$

而对于  $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\}$  则不能采用条件概率公式, 因为  $P\{X = \frac{1}{2}\} = 0$  不能做分母, 此时就体现出来条件概率的用处

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y | x) dy$$

将  $X = \frac{1}{2}$  带入, 求出该条件概率为  $\frac{1}{2}$

(5) 方法一: 分布函数法



$F_Z(z) = P\{2X - Y \geq Z\} = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy$ , 绘制  $y \geq 2x - z$ , 讨论截距, 如图所示, 其结果如下

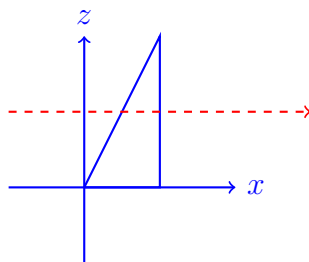
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

方法二: 卷积公式

由卷积公式有  $f_Z(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx$ , 此时把  $f(x, y)$  中的  $y$  全部转换为  $z$  并确定  $z$  的取值范围即

$$f(x, 2x - z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x \implies 0 < x < 1, 0 < z < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

此时再对  $x$  进行偏积分即可, 绘制  $x - z$  图像, 首先确认  $z$  的范围, 再从  $z$  上对  $x$  进行积分



如图, 最终

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 \leq z < 2; \\ 0, & \end{cases}$$

□

## 17.7 求一离散一连续随机变量函数的分布

10. (2020, 数一) 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立,  $X_1$  与  $X_2$  均服从标准正态分布,  $X_3$  的概率分布为  $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$ ,  $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$ 。

(1) 求  $(X_1, Y)$  的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示);

(2) 证明  $Y$  服从标准正态分布。

**Solution.** 一离散加一连续的基本方法就是”全概率公式 + 独立性”

(1)

$$\begin{aligned} F(X_1, Y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} \\ &\stackrel{\text{全概率公式}}{=} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y, X_3 = 0\} + P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y, X_3 = 1\} \\ &\stackrel{\text{独立性}}{=} P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq y\}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq \min(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

(2) 方法一, 通过  $Y$  的分布函数确定

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} \\ &= (\text{和 (1) 完全一致省去}) \dots \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

方法二, 直接求边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$$

故  $Y \sim N(0, 1)$

□

## 第十八章 数字特征

### 18.1 期望与方差的计算

**Remark.** 期望与方差

期望的定义

(1) 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$ , 则  $EX = \sum_i x_i p_i$

推广: 若  $Y = g(X)$  则  $EY = \sum_i g(x_i) p_i$

(2) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x)$  则  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

推广: 若  $Y = g(X)$  则  $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

(3) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率分布为  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$  则

$$EZ = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$$

(4) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y), Z = g(X, Y)$  则

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

特别的  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy, EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy$

期望的性质

(1)  $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

(2)  $EXY = EX \cdot EY \iff X$  与  $Y$  不相关

特别的若  $X$  与  $Y$  相互独立, 由  $EXY = EXEY$

方差的定义

(1)  $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

方差的性质

(1)  $D(aX + c) = a^2 DX$

$$(2) D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y)$$

推论  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \iff X$  与  $Y$  不相关

特别的, 若  $X$  与  $Y$  独立, 则有  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

$$(3) \text{ 若 } X \text{ 与 } Y \text{ 独立, 则 } DXY = DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX$$

1. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty$ , 则  $E[\min\{|X|, 1\}] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

*Solution.*

$$\begin{aligned} E[\min(|X|, 1)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|, 1)f(x)dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \min(|x|, 1)f(x)dx \\ &= 2\left(\int_0^1 xf(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi} \arctan x \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

2. (2016, 数三) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$ , 则  $D(XY) =$

(A) 6      (B) 8      (C) 14      (D) 15

*Solution.*

(方法一) 通过计算方法做

$$\begin{aligned} DXY &= E(XY)^2 - (EXY)^2 \\ &= EX^2 \cdot EY^2 - (EXEY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EXEY)^2 \\ &= 3 \times 5 - 1 = 14 \end{aligned}$$

(方法二) 用结论

$$\begin{aligned} DXY &= DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX \\ &= 8 + 4 + 2 = 14 \end{aligned}$$

□

3. 设随机变量  $X$  与  $Y$  同分布, 则  $E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

**Solution.** 由轮换对称性有

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right) = E\left(\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right) = \frac{1}{2}E\left(\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2}\right) = \frac{1}{2}$$

□

### 总结

若  $X, Y$  同分布, 则  $X, Y$  具有相同的  $F, f, E, D$ , 上题的推广结论

$$\text{若 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 同分布, 则 } E\left(\frac{X_1^2}{X_1^2 + \dots + X_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

4. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ , 且  $P\{X+Y > 0\} = 1 - e^{-1}$ , 则  $E(X+Y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Solution.** 利用参数可加性可知,  $X+Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ , 由  $P\{X+Y > 0\} = 1 - e^{-1} = 1 - P\{X=0\} \implies \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , 则  $E(X+Y)^2 = D(X+Y) + (E(X+Y))^2 = 1 + 1 = 2$  □

5. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim E(\frac{1}{3}), Y \sim E(\frac{1}{6})$ , 若  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$ , 则  $EU = \underline{\hspace{2cm}}, EV = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Solution.**  $EV$  是比较好求的, 由参数可加性有  $V \sim E(\frac{1}{2})$

方法一利用二维概率密度计算:

由  $X, Y$  独立, 知  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ , 则

$$EU = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f(x, y) dx dy = \dots = 7$$

方法二求  $U$  的概率密度:

由  $U = \max(X, Y)$  知  $F_U(u) = F_1 F_2 \implies f_u = f_1 F_2 + F_1 f_2$

$$EU = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_u du = \dots = 7$$

方法三利用性质

$$E(U+V) = E(X+Y) = EX + EY = 3 + 6 = 9$$

$$EV = 2 \implies EU = 7$$

□



## 总结

若  $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$ , 则  $E(U + V) = E(X + Y), E(UV) = E(XY)$

独立同分布随机变量的最大值与最小值的分布函数, 由如下结果

令  $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 则

$$F_Z z = F_{X_1} F_{X_2} \dots F_{X_n}$$

令  $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 则

$$F_Z z = 1 - [(1 - F_{(X_2)})][(1 - F_{(X_2)})] \dots [(1 - F_{(X_n)})]$$

6. (2017, 数一) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $EX =$ \_\_\_\_\_

**Solution.**

(方法一)  $f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ , 则  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2$

(方法二) 考虑  $F(X_1) = 0.5\Phi(x), F(X_2) = 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ , 则由第二章的结论  $aF_1 + bF_2, (a, b > 0, a + b = 1)$  的时候也是分布函数, 故  $EX = \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2 = 0 + \frac{4}{2} = 2$   $\square$

7. 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $E|X| =$ \_\_\_\_\_,  $D|X| =$ \_\_\_\_\_.

**Solution.**

$$\begin{aligned} E|X| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi(x)dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x\phi(x)dx \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D|X| &= E(|X|)^2 - (E|X|)^2 \\ &= EX^2 - (E|X|)^2 \\ &= DX + (EX)^2 - (E|X|)^2 \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$\square$

## 总结

(1) 若  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $E|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, D|X| = 1 - \frac{2}{\pi}$

(2) 若  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , 则  $E|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma, D|X| = (1 - \frac{2}{\pi}) \cdot \sigma^2$

(3) 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $E|X - \mu| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma, D|X| = (1 - \frac{2}{\pi}) \cdot \sigma^2$

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 均服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 求  $E[\max\{X, Y\}], E[\min\{X, Y\}]$ .

**Solution.** 由  $X, Y$  独立, 有  $X - Y \sim N(0, 2\sigma^2), E|X - Y| = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

由下述总结, 可知所求期望为

$$E[\max\{X, Y\}] = \frac{1}{2} [E(X) + E(Y) + E|X - Y|] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E[\min\{X, Y\}] = \frac{1}{2} [E(X) + E(Y) - E|X - Y|] = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

□

## 总结

关于最大值最小值函数的拆法

$$\max\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}$$

$$\min\{X, Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$

9. 设独立重复的射击每次命中的概率为  $p$ ,  $X$  表示第  $n$  次命中时的射击次数, 求  $EX, DX$ .

**Solution.** Pascal 分布 (负二项分布), 关键在于分解随机变量, 设  $X_i$  表示第  $i-1$  次命中到  $i$  命中所需要的射击次数, 则有  $X_1, X_2, \dots$  之间相互独立, 且  $X_i \sim G(p)$ , 对于  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , 故

$$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = \frac{n}{p}$$

$$DX = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

□

10. (2015, 数一、三) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 对  $X$  进行独立的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记  $Y$  为观测次数。

(a) 求  $Y$  的概率分布;

(b) 求  $EY$ .

**Solution.** 不妨令  $p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$

(1)

$$\begin{aligned} P\{Y = k\} &= C_{k-1}^1 p^2 (1-p)^{k-2} \\ &= (k-1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}, k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{k=2}^{\infty} k P\{Y = k\} \\ &= p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) (1-p)^{k-2} \\ &\quad \text{幂级数求和} \dots \\ &= 16 \end{aligned}$$

也可以用 Pascal 分布的结论直接得出  $EX = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$

□

## 18.2 协方差的计算

**Remark.** 协方差

协方差的定义  $Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EX \cdot EY$

协方差的性质

(1)  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X, X) = DX$

(2)  $Cov(aX + bY + c, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$

11. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本. 若  $DX = 4$ , 正整数  $s \leq n, t \leq n$ , 则

$$Cov\left(\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s X_i, \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t X_j\right) =$$

(A)  $4 \max\{s, t\}$

(B)  $4 \min\{s, t\}$

(C)  $\frac{4}{\max\{s, t\}}$

(D)  $\frac{4}{\min\{s, t\}}$

*Solution.*

$$\begin{aligned}\text{Cov}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^s X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^t X_j\right) &= \frac{1}{st}[Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) + \dots \\ &\quad + Cov(X_2, X_1) + \dots + Cov(X_s, X_t)] \\ &= \frac{Cov(X_i, X_i)=DX_i, Cov(X_i, X_j)=0}{st} = \frac{\min(s, t)}{st} \cdot DX \\ &= \frac{4}{\max(s, t)}\end{aligned}$$

来自总体  $X$  的简单随机样本必然是独立同分布的. □

12. (2005, 数三) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值为  $\bar{X}$ . 记  $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$ .

- (1) 求  $Y_i$  的方差  $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$ ;
- (2) 求  $Y_1$  与  $Y_n$  的协方差  $Cov(Y_1, Y_n)$ ;
- (3) 若  $c(Y_1 + Y_n)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量, 求常数  $c$ .

*Solution.*

(1) 方法一:

$$\begin{aligned}DY_i &= D(X_i - \bar{X}) \\ &= DX_i + D\bar{X} - 2Cov(X_i, \bar{X}) \\ &= \frac{E\bar{X}=\mu, D\bar{X}=\sigma^2/n}{st} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2Cov(X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}DY_i &= D\left(\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{j \neq i}^n X_j\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2 - \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_n) &= Cov(X_1, \bar{X}, X_n - \bar{X}) \\
&= Cov(X_1, X_n) - Cov(X_1, \bar{X}) - Cov(X_n - \bar{X}) + D\bar{X} \\
&= \frac{-\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

(3) 由无偏性有  $cE(Y_1 + Y_n)^2 = \sigma^2 \implies c = \frac{\sigma^2}{E(Y_1 + Y_n)^2}$ 

$$\begin{aligned}
E(Y_1 + Y_n)^2 &= D(Y_1 + Y_n) + (EY_1 EY_n)^2 \\
&= DY_1 + DY_n + 2Cov(Y_1, Y_n) + 0 \\
&= \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

故  $c = \frac{n}{2(n-2)}$ 

□

### 18.3 相关系数的计算

**Remark.** 相关系数相关系数的定义  $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 

相关系数的性质

(1)  $|\rho_{XY}| \leq 1$ (2)  $\rho_{XY} = 0 \iff Cov(X, Y) = 0 \iff EXY = EXEY \iff D(X + Y) = DX + DY$ (3)  $\rho_{XY} = 1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 (a > 0); \rho_{XY} = -1 \iff P\{Y = aX + b\} = 1 (a < 0)$ 

13. (2016, 数一) 设试验有三个两两互不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三个结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ 。将试验独立重复地做两次,  $X$  表示两次试验中  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示两次试验中  $A_2$  发生的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为

$$(A) -\frac{1}{2} \quad (B) -\frac{1}{3} \quad (C) \frac{1}{3} \quad (D) \frac{1}{2}$$

**Solution.**

(方法一) 由题意有  $X, Y$  均服从  $B(2, \frac{1}{3})$ , 而  $P\{XY = 1\} = PX = 1, Y = 1 = C_2^1(\frac{1}{3})^2$ , 且  $P\{XY = 0\} = \frac{7}{9}$ , 故  $XY$  的概率分布如下所示

$XY$	0	1
$P$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

故  $EXY = \frac{2}{9}$ , 进而可以求出  $\rho_{XY} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = -\frac{1}{2}$

(方法二) 设  $Z$  为“ $A_3$  在两次试验中发生的次数”

由题意有  $Z \sim B(2, \frac{1}{3})$ ,  $X + Y + Z = 2$  而  $D(X + Y) = DX + DY + 2Cov(X, Y) = \frac{8}{9} + 2Cov(X, Y)$ , 其中  $D(X + Y) = D(2 - Z) = DZ = \frac{4}{9}$ , 故  $Cov(X, Y) = \frac{-2}{9}$

(方法三)

$$\begin{aligned} Cov(X, X + Y + Z) &= DX + Cov(X, Y) + Cov(X, Z) \\ &\stackrel{\text{轮换对称性}}{=} \frac{4}{9} + 2Cov(X, Y) \\ &= Cov(X, 2) = 0 \implies Cov(X, Y) = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

□

14. 设随机变量  $X \sim B(1, \frac{3}{4})$ ,  $Y \sim B(1, \frac{1}{2})$ , 且  $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(a) 求  $(X, Y)$  的联合概率分布;

(b) 求  $P\{Y = 1|X = 1\}$ .

**Solution.** 这道题比较简单, 直接给答案

$X/Y$	0	1	$P_i$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$P_j$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{2}{3}$$

□

## 18.4 相关与独立的判定

**Remark.** 相关与独立性

(1) 一般来说独立是强于不相关的条件, 即 独立  $\implies$  不相关

(2) 对于二维正态分布有 独立  $\iff$  不相关

(3) 对于 0-1 分布有 独立  $\iff$  不相关

**Remark.** 判断是否独立的基本方法

- (1)  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 对于离散型选点, 对于连续型选区间
- (2) 三个充要条件  $\forall(x, y)$  或  $(i, j) F(x, y) = F_X F_Y, f(x, y) = f_X f_Y, P(ij) = P_i P_j$ .
- (3)  $\rho_{XY} \neq 0 \implies X, Y$  不独立

15. 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$  上的均匀分布, 则

- (A)  $X$  与  $Y$  不相关, 也不相互独立      (B)  $X$  与  $Y$  相互独立  
(C)  $X$  与  $Y$  相关      (D)  $X$  与  $Y$  均服从  $U(-a, a)$

**Solution.** 这道题可以记结论, 对于均匀分布若其区域不为  $(a, b) \times (c, d)$  的矩形, 则必然不独立, 其中  $X \in (a, b), Y \in (c, d)$

正常来做的话, 步骤如下

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 0$$

同理根据对称性可知  $EXY = EX = EY = 0$ , 故  $X, Y$  一定不相关, 现在求  $X, Y$  的边缘分布概率密度, 有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \notin (-a, a) \end{cases}$$

同理可以求出

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - y^2}, & y \in (-a, a) \\ 0, & y \notin (-a, a) \end{cases}$$

显然  $f_Y f_X \neq f(x, y)$  故  $X, Y$  不独立. □

16. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$ .

- (a) 求  $X$  的期望与方差;
- (b) 求  $X$  与  $|X|$  的协方差, 问  $X$  与  $|X|$  是否不相关?
- (c) 问  $X$  与  $|X|$  是否相互独立? 并说明理由.

*Solution.*

(1)

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0 \\ EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2 \\ DX &= EX^2 - (EX)^2 = 2 \end{aligned}$$

(2)

$$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X|Xf(x)dx = 0 = EXE|X| \implies \rho_{X|X|} = 0, Cov(X, |X|) = 0$$

(3) 设  $A = \{0 < X < 1\}$ ,  $B = \{|X| < 1\}$ , 故

$$P(AB) = P\{0 < X < 1, |X| < 1\} = P\{0 < X < 1\} = P(A)$$

而  $P(B) < 1$  是显然的, 故  $P(AB) \neq P(A)P(B)$ , 即  $X|X|$  不独立

□



## 第十九章 大数定律与中心极限定理

**Remark.** 三个考点

(1) 切比雪夫不等式

$$P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}, \text{ 或者 } P\{|X - EX| < \epsilon\} > 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$$

(2) 大数定理

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boxed{X_i} \xrightarrow{P} E\boxed{X_i}$$

(3) 中心极限定理

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

1. (2022, 数一) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立同分布,  $\mu_k = E(X_i^k) (k = 1, 2, 3, 4)$ 。由切比雪夫不等式, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 有  $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$

$$(A) \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2} \quad (B) \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2} \quad (C) \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2} \quad (D) \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

**Solution.** 首先需要确定  $E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2)$  是否等于  $\mu_2$  显然, 所以这个式子满足切比雪夫不等式, 故根据切比雪夫不等式有

$$\text{原式} \geq \frac{D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$$

□

2. (2022, 数一) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立同分布,  $X_i$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  依概率收敛于?.

**Solution.** 由大数定理有  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} EX_i^2$ , 又期望的定义有

$$EX_i^2 = 2 \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

□

3. (2020, 数一) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本,  $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$ ,  $\Phi(x)$  表示标准正态分布函数。利用中心极限定理得  $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$  的近似值为

(A)  $1 - \Phi(1)$  (B)  $\Phi(1)$  (C)  $1 - \Phi(0.2)$  (D)  $\Phi(0.2)$

**Solution.** 由中心极限定理有  $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50, 25)$  标准化后所求概率为

$$P\left\{\frac{X-50}{5} \leq 1\right\} \Rightarrow \Phi(1)$$

□

## 第二十章 统计初步

### 20.1 求统计量的抽样分布

**Remark.** 样本均值与方差

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$E\bar{X} = \mu, D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}, ES^2 = \sigma^2$  来自同一总体的样本均值与方差是独立的

有偏估计量  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  其  $ES_n^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

统计的三大分布

$\chi^2$  分布的定义

设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 均服从  $N(0, 1)$  称  $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布, 记  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ , 特别的若  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $\chi^2 \sim \chi^2(1)$

$\chi^2$  分布的性质

- (1) 参数可加性 设  $\chi_1^2$  与  $\chi_2^2$  相互独立, 且  $\chi_1^2 \sim \chi^2(n), \chi_2^2 \sim \chi^2(m)$  则  $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n+m)$
- (2) 设  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$  则  $E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$

$F$  分布的定义

设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ , 称  $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$  服从自由度为  $n_1, n_2$  的  $F$  分布, 记作  $F \sim F(n_1, n_2)$

$F$  分布的性质

- (1) 设  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则  $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- (2)  $F_{1-\alpha}(n_2, n_1) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_1, n_2)}$

$t$  分布的定义 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立,  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ , 则称  $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$  服从自由度为  $n$  的  $t$  分布, 记作  $T \sim t(n)$

$t$  分布的性质

(1) 设  $T \sim t(n)$ , 则  $T^2 \sim F(1, n)$ ,  $\frac{1}{T^2} \sim F(n, 1)$

(2)  $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$

**Remark.** 单正态总体与双正态总体

单正态总体

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  与  $S^2$  分别为样本均值与样本方差, 则

(1)  $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ , 即  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(2)  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$  即  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ , 且  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立

(3)  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

双正态总体

设总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , 总体  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  分别为来自总体  $X$  与  $Y$  的简单随机样本且相互独立, 样本均值分别为  $\bar{X}, \bar{Y}$ , 样本方差分别为  $S_1^2, S_2^2$ , 则

(4)  $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ ;

(5)  $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$ ;

(6) 当  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  时,  $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$ , 其中  $S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$ .

1. (2013, 数一) 设随机变量  $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$ 。给定  $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$ , 常数  $c$  满足  $P\{X > c\} = \alpha$ , 则  $P\{Y > c^2\} =$

(A)  $\alpha$  (B)  $1-\alpha$  (C)  $2\alpha$  (D)  $1-2\alpha$

**Solution.** 这道题考察的是  $t$  分布的对称性, 由题有

$$Y = \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n)} \quad X = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

则有  $X^2 = Y$ , 所求概率就变成  $P\{X^2 > c^2\}$  由  $t$  分布的对称性有  $P\{X^2 > c^2\} = 2\alpha$   $\square$

总结

正态分布与  $t$  分布具有相似的概率密度图像,  $F$  分布与  $\chi^2$  分布也有类似的图像.

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6)$ ,  $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$ ,  $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$ , 求  $\frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$  的分布.

**Solution.** 这种题就是一步一步反推, 注意凑题目要求的结果即可

$$Y_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6}) \text{ 同理 } Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$$

$$\text{由 } Y_1, Y_2 \text{ 独立, 知道 } Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2}) \implies \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$$

又有  $\frac{2s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ , 故

$$\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\sigma^2/2} \sqrt{\frac{2s^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{s} \sim t(2)$$

□

## 20.2 求统计量的数字特征

3. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 则

$$E \left[ \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{j=1}^n \left( nX_j - \sum_{k=1}^n X_k \right)^2 \right] =$$

**Solution.** 这道题就是个凑系数化简, 过程省去 原式  $= n^3(n-1)\mu\sigma^2$

□

4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值为  $\bar{X}$ , 样本方差为  $S^2$ .

(1) 求  $\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$  的分布

(2) 求  $E[(\bar{X}^2 S^2)^2]$ ;

**Solution.**

(1) 和例题 3 一致, 过程省去  $\frac{9\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, 8)$

(2) 对于这种高幂次的一般都需要考虑用  $\chi^2$  的结论

$$\begin{aligned} E[(\bar{X}^2 S^2)^2] &= E\bar{X}^4 \cdot ES^4 \\ &= [D\bar{X}^2 + (E\bar{X}^2)^2] [DS^2 + (ES^2)^2] \\ &= \frac{5}{107} \sigma^8 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{9\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \implies D\bar{X}^2 = \frac{2\sigma^4}{81} \text{ 同理有 } DS^2 = \frac{\sigma^4}{4}$$

□

## 第二十一章 参数估计

### 21.1 求矩估计与最大似然估计

**Remark.** 矩估计与最大似然估计

矩估计

令  $EX^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  或者  $E(X - EX)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, \dots$  得到  $\theta_1, \theta_2 \dots$  的矩估计量

$$\begin{cases} EX = \bar{X}, & \text{一个参数} \\ EX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 & \text{两个参数} \end{cases}$$

最大似然估计

(1) 对样本点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 似然函数为  $L(\theta) \begin{cases} \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \\ \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \end{cases}$

(2) 似然函数两端取对数求导

(3) 令  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$  就可以得到  $\theta$  的最大似然估计值

一个关于规范的小提示, 如果问估计值用小写字母 (样本值), 问估计量用大写字母 (随机变量)

1. (2002, 数一) 设总体  $X$  的概率分布为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$	$1-2\theta$

其中  $0 < \theta < \frac{1}{2}$  为未知参数, 利用总体  $X$  的如下样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求  $\theta$  的矩估计值与最大似然估计值。

*Solution.*

(矩估计) 这道题只有一个参数, 只需要用一阶矩估计  $EX = 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3 - 6\theta = \bar{X}$ , 其中  $\bar{X} = \frac{16}{8} = 2$ , 故  $\theta$  的矩估计值  $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$

(最大似然估计) 对于样本 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 似然估计函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

令  $\frac{d\ln\theta}{d\theta} = 0$  有  $\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12}$  又  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ , 故最终  $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

□

2. (2011, 数一) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 其中  $\mu$  已知,  $\sigma^2 > 0$  未知, 样本均值为  $\bar{X}$ , 样本方差为  $S^2$ 。

(1) 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ ;

(2) 求  $E(\hat{\sigma}^2)$  与  $D(\hat{\sigma}^2)$ 。

**Solution.**

(1) 对于样本  $X_1, \dots, X_n$  其最大似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

注意参数为  $\sigma^2$ , 令  $\frac{d\ln\sigma^2}{d\sigma^2} = 0$ , 有  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$

(2) 这种题优先考虑  $\chi^2$  分布的期望与方差结论, 有题 (1) 有

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \implies \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

故  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$

□

3. (2022, 数一、三) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自期望为  $\theta$  的指数分布总体的简单随机样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  为来自期望为  $2\theta$  的指数分布总体的简单随机样本, 两个样本相互独立。利用  $X_1, X_2, \dots, X_n$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ,

(1) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}$ ;

(2) 求  $D(\hat{\theta})$ 。

**Solution.** 这是双总体, 但基本上和单总体一致, 不要被唬住了哦!

(1) 由题有  $X \sim E(\frac{1}{\theta}), Y \sim E(\frac{1}{2\theta})$ , 故其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

则对于样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , 最大似然估计函数为

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \theta^{-(m+n)} e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m Y_j)}$$

则令  $\frac{d \ln \theta}{d \theta} = 0$ , 有  $\hat{\theta} = \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m Y_j)$

(2)

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= \left(\frac{1}{m+n}\right)^2 D\left(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m Y_j\right) \\ &= \frac{\theta^2}{m+n} \end{aligned}$$

□

## 21.2 估计量的评价标准

**Remark.** 估计量的评价标准

- (1) (无偏性) 设  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的估计量, 若  $E\hat{\theta} = \theta$  则称其为  $\theta$  无偏估计量
- (2) (有效性) 设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  为  $\theta$  的无偏估计, 若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$  则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  更有效
- (3) 设  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的估计量, 若  $\hat{\theta}$  依概率收敛于  $\theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  一致 (相合) 估计量  
一致性的考点在于  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \square \xrightarrow{P} E\square$

4. 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本。

- (1) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}$ ;
- (2) 问  $\hat{\theta}$  是否为  $\theta$  的无偏估计量? 并说明理由。



*Solution.*

(1) 对于样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的最大似然估计函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n 2e^{-2(x_i - \theta)} = 2^n e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}$$

显然  $L(\theta)$  关于  $\theta$  是单调递增的, 则根据最大似然的定义, 应该取使得  $L(\theta)$  最大的值, 而由题目有  $X_1 > \theta, X_2 > \theta, \dots$ , 故  $\hat{\theta} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

(2) 由概率密度函数有  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 故

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

故  $F_{min} = 1 - [1 - F_X(x)]^n$  即

$$F_{min} = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

故

$$f_{min} = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

由期望的定义有

$$E\hat{\theta} = \int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)} = \theta + \frac{1}{2n}$$

□

5. (2010, 数一) 设总体  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P$	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	$\theta^2$

其中参数  $\theta \in (0, 1)$  未知,  $N_i$  表示来自总体  $X$  的简单随机样本 (样本容量为  $n$ ) 中等于  $i$  的个数 ( $i = 1, 2, 3$ ) 求常数  $a_1, a_2, a_3$  使得  $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$  为  $\theta$  的无偏估计量, 并求  $T$  的方差.

**Solution.** 由题可知  $N_i \sim B(n, p)$ , 具体来说有

$$\begin{cases} N_1 \sim B(n, 1 - \theta) \\ N_2 \sim B(n, \theta - \theta^2) \\ N_3 \sim B(n, \theta^2) \end{cases}$$

且有  $N_1 + N_2 + N_3 = n$

故  $ET = \sum_{i=1}^3 a_i EN_i = n[a_1 + (a_2 - a_1)\theta + (a_3 - a_2)\theta^2] = \theta$ , 只需要令

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{n} \\ a_3 = \frac{1}{n} \end{cases}$$

求  $DT = \frac{1}{n^2}D(n - N_1) = \frac{1}{n^2}DN_1 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

□

## 21.3 区间估计与假设检验

## 第二十二章 补充知识-高等数学

补充知识来自于

- (1) 菲砖
- (2) 做题总结

## 第二十三章 补充知识-线性代数

补充知识来自于

(1) 线性代数入门

(2) 做题总结

## 第二十四章 补充知识-概率论

补充知识来自于

(1) 概率论与数理统计 茆诗松

(2) 做题总结

### 24.1 配对问题

问题描述: 在一个有  $n$  个人参加的晚会, 每个人带来一件礼物, 且规定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的  $n$  件礼物中随机抽取一件, 问至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率是多少?

*Solution.* (配对问题)

设  $A_i$  为事件: 第  $i$  个人自己抽到自己的礼物,  $i = 1, 2, \dots, n$  所求概率为

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

...

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

再由概率的加法公式 (容斥原理) 得

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} P(A_i A_{i+1} A_{i+2}) \\
 &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\
 &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 上述概率由  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

□

## 24.2 几个概率的不等式

1.  $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$
2.  $P(A_1 A_2 \dots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)$  (Boole 不等式)
3.  $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

**Proof.** 相关证明如下:

(1) 由于  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \implies P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2) 采用数学归纳法证明, 对于  $n = 2$ , 即不等式 (1) 已经证明, 不妨假设对于  $n = k$  个事件, 不等式成立, 即

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) - (k-1)$$

考虑  $n = k+1$  个事件  $A_1 A_2 \dots A_{k+1}$ , 不妨令  $B = A_1 A_2 \dots A_k$ , 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}) = P(B A_{k+1}) \geq P(B) + P(A_{k+1}) - 1 \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1}) - (k)$$

由数学归纳法可知, 原不等式成立

(3) 由  $P(A) \geq P(AB), P(B) \geq P(AB)$ , 则  $P(A)P(B) \geq P(AB)^2$ , 则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB))$$

令  $x = P(AB)$ , 则  $f(x) = x(1-x)$ , 当  $x = \frac{1}{2}$  时, 取得  $f(x)_{\max} = \frac{1}{4}$  即

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

由于  $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$ , 即  $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$  则

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - P(A) + P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(\bar{B}) \leq \frac{1}{4}$$

即

$$P(AB) - P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$$

综上原不等式成立 □

## 24.3 轮流射击模型

问题描述: 有两名选手比赛设计, 轮流对同一个目标进行射击, 甲命中目标的概率为  $\alpha$ , 乙命中的概率为  $\beta$ . **甲先射**, 谁先命中谁获胜. 问甲乙两人获胜的概率各是多少?

*Solution.*

(方法一) 记事件  $A_i$  为第  $i$  次射中目标,  $i = 1, 2, \dots$ , 因为甲先射, 所以甲获胜可以表示为

$$A_1 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \dots$$

由于事件独立, 则甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{甲获胜}) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha^2 \dots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

同理, 乙获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(\text{乙获胜}) &= (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha)\beta + \dots \\ &= \beta(1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (1-\beta)^i \\ &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

(方法二) 由于射击是独立, 所有有如下条件

$$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1 - \alpha)(1 - \beta)P(\text{甲获胜})$$

前面失败的情况并不影响后续获胜 (无记忆性), 则可以直接解出甲获胜的概念

$$P(\text{甲获胜}) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

$$P(\text{乙获胜}) = 1 - P(\text{甲获胜}) = \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

□

## 24.4 补充: 随机变量的矩

设  $(X, Y)$  是二维随机变量, 如果  $E(X^k Y^l)$  存在, 则称  $E(X^k), (k = 1, 2, \dots)$  为  $X$  的  $k$  阶原点矩; 称  $E(X - EX)^k, k = (2, 3, \dots)$  为  $X$  的  $k$  阶中心矩; 称  $E(X^k Y^l), (k, l = 1, 2, \dots)$  为  $X$  与  $Y$  的  $k + l$  阶混合原点矩; 称  $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l], (k, l = 1, 2, \dots)$  为  $X, Y$  的  $k + l$  阶混合中心矩