# 第一章　统计初步

## 1.1　求统计量的抽样分布

**Reamrk**

样本均值与方差

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} nX_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$E\bar{X} = \mu, D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}, ES^2 = \sigma^2$来自同一总体的样本均值与方差是独立的

有偏估计量 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 其 $ES_n^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

统计的三大分布

$\chi^2$ 分布的定义

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 均服从 $N(0,1)$ 称 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 $n$ 的 $\chi^2$ 分布, 记 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 特别的若 $X \sim N(0,1)$, 则 $\chi^2 \sim \chi^2(1)$

$\chi^2$ 分布的性质

(1) 参数可加性　设 $\chi_1^2$ 与 $\chi_2^2$ 相互独立, 且 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n), \chi_2^2 \sim \chi^2(m)$ 则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n+m)$

(2) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 则 $E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$

$F$ 分布的定义

设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 且 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 称 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 $n_1, n_2$ 的 $F$ 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

$F$ 分布的性质

(1) 设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

(2) $F_{1-\alpha}(n_2, n_1) = \frac{1}{F_\alpha(n_1, n_2)}$

$t$ 分布的定义　设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立,$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 则称 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 $n$ 的 $t$ 分布, 记作 $T \sim t(n)$

$t$ 分布的性质

(1) 设 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1,n), \frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

(2) $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

**Reamrk**

单正态总体与双正态总体

单正态总体

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\bar{X}$ 与 $S^2$ 分别为样本均值与样本方差, 则

(1) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 即 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\bar{X}$ 与 $S^2$ 相互独立

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

双正态总体

设总体 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ , 总体 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ , $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自总体 $X$ 与 $Y$ 的简单随机样本且相互独立, 样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$ , 样本方差分别为 $S_1^2, S_2^2$ , 则

(4) $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(5) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$ ;

(6) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$ , 其中 $S_\omega = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$ .

1. (2013, 数一) 设随机变量 $X \sim t(n)$,$Y \sim F(1,n)$。给定 $\alpha(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 $c$ 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

$$(A)\,\alpha \quad (B)\,1-\alpha \quad (C)\,2\alpha \quad (D)\,1-2\alpha$$

**Solution**

这道题考察的是 $t$ 分布的对称性, 由题有

$$Y=\frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n)} \qquad X=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

则有 $X^2=Y$, 所求概率就变成 $P\{X^2>c^2\}$ 由 t 分布的对称性有 $P\{X^2>c^2\}=2\alpha$

**总结**

正态分布与 t 分布具有相似的概率密度图像,F 分布与 $\chi^2$ 分布也有类似的图像.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$,$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$, 求 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

**Solution**

这种题就是一步一步反推, 注意凑题目要求的结果即可

$Y_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{6})$ 同理 $Y_2\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{3})$

由 $Y_1,Y_2$ 独立, 知道 $Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2}) \implies \frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

又有 $\frac{2s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$, 故

$$\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\sigma^2/2}\sqrt{\frac{2s^2}{\sigma^2}/2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{s}\sim t(2)$$

## 1.2　求统计量的数字特征

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]=$$

**Solution**

这道题就是个凑系数化简, 过程省去 原式 $=n^3(n-1)\mu\sigma^2$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 $S^2$。

(1) 求 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$ 的分布

(2) 求 $E[(\bar{X}^2S^2)^2]$;

**Solution**

(1) 和例题 3 一致, 过程省去 $\frac{9\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,8)$

(2) 对于这种高幂次的一般都需要考虑用 $\chi^2$ 的结论

$$\begin{aligned} E\left[(\bar{X}^2S^2)^2\right] &= E\bar{X}^4 \cdot ES^4 \\ &= \left[D\bar{X}^2 + (E\bar{X}^2)^2\right]\left[DS^2 + (ES^2)^2\right] \\ &= \frac{5}{107}\sigma^8 \end{aligned}$$

又 $\frac{9\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \implies D\bar{X}^2 = \frac{2\sigma^4}{81}$ 同理有 $DS^2 = \frac{\sigma^4}{4}$