考研数学笔记

以姜晓千强化课讲义为底本

Weary Bird

2025 年 7 月 26 日

相见欢·林花谢了春红

林花谢了春红，太匆匆。无奈朝来寒雨晚来风。胭脂泪，相留醉，几时重。自是人生长恨水长东。

2025 年 7 月 26 日

目录

第一章　多元函数微分学

1.1　多元函数的概念

Remark. 多元函数微分学的概念

<u>可微的概念</u> 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义, 且其全增量可以写成

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 其中 A,B 为不依赖于 $\Delta x,\Delta y$, 而仅与 x_0,y_0 有关, 则其在 (x_0,y_0) 可微

<u>全微分</u> 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 则其全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y \xlongequal{\text{可微的必要条件}} f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

<u>可微的必要条件</u> 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 $f(x,y)$ 在该点连续, 且两个偏导数都存在

<u>可微的充分条件</u> 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在, 且作为二元函数在该点连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

1. 例 1 求下列重极限:

   (1)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} \quad (\alpha\geq0,\beta\geq0)$;

   (2)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

   (3)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

   ***Solution*.** (1) 即总结

   (2) 重极限也满足极限的四则运算故

$$原式 = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^3y}{x^2+y^2} - \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

由结论可知 原式 $=0$

(3)

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}=0$$

□

求重极限的技巧

若需要计算重极限, 考虑极坐标换元通常比较简单. 对于形如

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2}$$

只需要做极坐标换元即可

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^{\alpha+\beta}\cos^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\theta}{r^2},(\theta\in[0,2\pi])\\&=\begin{cases}0, & \alpha+\beta-2>0\\ 不存在, & \alpha+\beta-2\le 0\end{cases}\end{aligned}$$

2. (2012, 数一) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

Solution. (方法一) 证明 B 选项正确

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\exists, 且 f(x,y) 连续 \implies f(0,0)=0$$

脱极限号有

$$f(x,y)=o(\rho)$$

由可微的定义有

$$f(x,y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\rho)$$

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

(方法二) 特殊值证明 ACD 不正确

对于 A 选项, 当 $f(x)=|x|+|y|$ 不可微

对于 CD 选项, 当 $f(x,y)=C\neq 0$ 的时候, 极限不存在 □

3. (2012, 数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

则 $dz|_{(0,1)}=$

Solution. (方法一) 和上面的题目比较相似, 由题设可知 $f(0,1)=1$, 脱极限号有

$$f(x,y)-2x+y-2=o(\rho)$$

由可微的定义有

$$f(x,y)-1=2x-(y-1)+o(\rho)=2\Delta x-\Delta+o(\rho)$$

即

$$d\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$$

(方法二) 特殊值令 $f(x,y)=2x-y+2$, 可以直接求出 $d\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ □

1.2　多元复合函数求偏导数与全微分

Remark. 本质是计算题, 仔细计算即可. 注意点

(一) 链式法则

(二) 一阶全微分形式不变性

(三) 二阶混合偏导数若连续则相等

4. (2021, 数一、数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$, $f(x,x^2)=2x^2\ln x$

则 $df(1,1)=$

$(A)\ dx+dy$　$(B)\ dx-dy$　$(C)\ dy$　　$(D)\ \mathrm{d}y$

Solution. 第一个等式两边同时对 x 求导有

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1)$$

令 $x=0$ 则

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$$

同理, 第二个等式两边同时对 x 求导有

$$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x$$

令 $x=1$ 则

$$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可以解出

$$\begin{cases} f_1'1,1=0 \\ f_2'1,1=1 \end{cases}$$

故 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$ □

5. (2011, 数一、数二) 设 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$。

Solution.

□

1.3 多元隐函数求偏导数与全微分

6. (2005, 数一) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

   (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z = z(x,y)$

   (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$z = z(x,y)$

   (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y = y(x,z)$和$z = z(x,y)$

   (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$y = y(x,z)$

   Solution.

□

7. (1999, 数一) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$。

Solution.

□

1.4 变量代换化简偏微分方程

8. (2010, 数二) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

***Solution*.**

□

1.5 求无条件极值

Remark. 两个方法

(一) 多元函数微分学的定义

$$\begin{cases} \text{是极值, 一般使用保号性证明} \\ \text{不是极值, 一般取不同路径} \end{cases}$$

(二)$AC-B^2$ 判别法, 若 $f'_x=f'_y=0$且其二阶偏导数存在, 记

$$\begin{cases} A=f''_{xx} \\ B=f''_{xy} \\ C=f''_{yy} \end{cases} \Longrightarrow AC-B^2 \begin{cases} >0, & \begin{cases} A>0, & \text{极小值} \\ A<0, & \text{极大值} \end{cases} \\ <0, & \text{不是} \\ =0, & \text{判别法失效, 无法判断} \end{cases}$$

9. (2003, 数一) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$$

则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

Solution.

□

10. (2004, 数一) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

Solution.

□

1.6 求条件极值 (边界最值)

Remark. (方法一)lagrange 乘数法

构造辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\phi(x,y)$ 然后求解

$$\begin{cases} L'_x=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \\ L'_x=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}=0 \\ L'_\lambda=\phi(x,y)=0 \end{cases}$$

所有满足上述方程的解 (x,y,λ) 中的 (x,y) 都有可能是条件极值,, 对于不封闭曲线要和端点比较.

(方法二) 解 $\phi(x,y)=0 \implies y=y(x)$ 带入 $f(x,y)$ 转换为一元函数

(方法三) 极坐标变化

(方法四) 均值不等式, 柯西不等式

对于两个整数 a 和 b, 均值不等式为

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

柯西不等式的实数形式, 对于任意实数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 和 $b_1,b_2\dots,b_n$ 有

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_i\right)^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

11. (2006, 数一、数二、数三) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$。已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

Solution.

□

12. (2013, 数二) 求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

    Solution.

□

1.7 闭区域最值

Remark. 闭区域最值分两步做

(一) 求内部驻点

(二) 求边界的条件极值

13. (2014, 数二) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

(A) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

(B) $u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

(C) $u(x,y)$的最大值在D的内部取得, 最小值在D的边界上取得

(D) $u(x,y)$的最小值在D的内部取得, 最大值在D的边界上取得

Solution.

□

14. (2005, 数二) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 且 $f(1, 1) = 2$, 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y)|x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

Solution.

□