

第一章 二维随机变量

1.1 联合分布函数的计算

Remark. (联合分布函数的性质)

- (1) $0 \leq F(x, y) \leq 1, -\infty < x < +\infty, F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
- (2) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 均单调不减
- (2) $F(x, y)$ 关于 x 和 y 均右连续
- (4) $P\{a < X \leq b, c < Y \leq d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim B(1, p), Y \sim E(\lambda)$, 则 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution. 由 X 和 Y 相互独立, 则有 $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), X$ 的概率分布如下:

X	0	1
P	$1-p$	p

则 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

而 $Y \sim E(\lambda)$, 故

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} (1-p)(1-e^{-\lambda y}), & 0 \leq x < 1, y > 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & x \geq 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

1.2 二维离散型随机变量分布的计算

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从参数为 p 的几何分布。

(a) 求在 $X + Y = n (n \geq 2)$ 的条件下, X 的条件概率分布;

(b) 求 $P\{X + Y \geq n\} (n \geq 2)$.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned} P\{X + Y = n\} & \xrightarrow{\text{几何分布从 1 开始}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X = k, Y = n - k\} \\ & \xrightarrow{\text{独立性}} \sum_{k=1}^{n-1} P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p \cdot (1-p)^{n-k-1}p \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2}p^2 \\ & = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2 \end{aligned}$$

在 $X + Y = n$ 的条件下, X 的条件概率为

$$\begin{aligned} P\{X = k \mid X + Y = n\} & = \frac{P\{X = k, Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ & = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ & = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$ 这个范围千万别忘了!

(2)

$$\begin{aligned}
P\{X+Y \geq n\} &= P\{X+Y = n\} + P\{X+Y = n+1\} + \dots \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} P\{X+Y = k\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (k-1)p^2(1-p)^{k-2}
\end{aligned}$$

不妨先计算级数 $\sum_{k=n}^{\infty} (k-1)x^{k-2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} (k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=n}^{\infty} (x^{k-1})' \\
&= \left(\frac{\sum_{n=k}^{\infty} x^k}{x} \right)' \\
&= \frac{(n-1)x^{n-2}(1-x) + x^{n-1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

故当 $x = 1-p$ 的时有

$$\begin{aligned}
P\{X+Y \geq n\} &= p^2 \frac{(n-1)(1-p)^{n-2}p + (1-p)^{n-1}}{p^2} \\
&= (1-p)^{n-2}(np - 2p + 1)
\end{aligned}$$

□

1.3 二维连续型随机变量分布的计算

Remark. 主要内容

联合概率密度的性质

$$(1) f(x, y) \geq 0, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty ;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 ;$$

$$(3) P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy ;$$

$$(4) \text{ 在 } f(x, y) \text{ 的连续点处有 } \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) .$$

边缘概率密度

(1) (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

(2) (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

条件概率密度

(1) 在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

(2) 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

3. (2010, 数一、三) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

Solution.

(方法一正常求) 首先通过规范性求出参数 A

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &\stackrel{\text{Poisson 积分}}{=} A\pi = 1 \implies A = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

则在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率为

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y | x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2} \end{aligned}$$

(方法二, 通过二维正态分布) 形如 $f(x, y) = Ae^{ax^2+bx+cy^2}$ 的函数如果是概率密度, 则其一定是某个二维正态的概率密度函数, 故

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$$

通过下一节讲的确定系数的办法, 可以很快的确定

$$(X, Y) \sim N(0, 0; \frac{1}{2}, 1; \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{故 } A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

□

4. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(x, 1)$ 。

- (a) 求 (X, Y) 的联合概率密度;
- (b) 求 (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;
- (c) 求 $P\{X + Y > 1\}$.

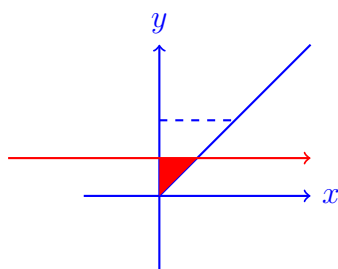
Solution.

(1) 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

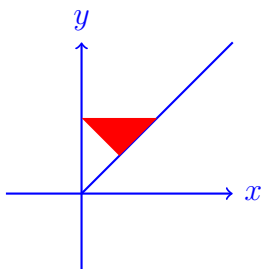
$$\text{故 } f(x, y) = f_{Y|X}(y | x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 通过概率密度求边缘密度的时候, 需要画出 x - y 图, 并且确定要求的那个参数的范围, 比如说这里是 $y \in (0, 1)$, 让后再从 $[0, 1]$ 上面去做偏积分, 具体如图所示



$$f_Y(y) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 根据性质 (3) 有 $P\{X + Y > 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y)dxdy$ 此时 x - y 的可行范围为



$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{1/2}^1 dy \int_{1-y}^y \frac{1}{1-x} dx \\
 &= \int_{1/2}^1 [\ln y - \ln(1-y)] dy \\
 &= [y \ln y - (1-y) \ln(1-y)] \Big|_{1/2}^1 \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

□

1.4 关于二维正态分布

Remark. 二维正态分布的性质 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则

- (1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 反之不成立 (独立的时候反之成立);
- (2) X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关 ($\rho = 0$);
- (3) $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$; 特别地, 若 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$;
- (4) 若 $U = aX + bY, V = cX + dY$, 即 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 则 (U, V) 服从二维正态分布 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

5. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 2; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 且 $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 (a, b) 可以为

- (A) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Solution. 由性质 (3) 可知 $aX + bY \sim N$, 而由正态分布的对称性可知, $\mu = 1 \Rightarrow a + 2b = 1$ 故选择 (D)

□

6. (2020, 数三) 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 则下列随机变量服从标准正态分布且与 X 相互独立的是

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

Solution. 这道题选择出来并不困难, 但要证明其与 X 相互独立还是有点说法的.

第一步, 先求 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的标准化

由性质三可知 $X+Y \sim N(0, 3)$, $X-Y \sim N(0, 7)$, 故 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$; $\frac{\sqrt{7}}{7}(X-Y) \sim N(0, 1)$;

这里其时就已经可以选出答案喽

第二步证明独立性

考虑 $(X+Y, X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

由性质 (4) 可知, $(X+Y, X)$ 服从二维正态分布, 由性质 (2) 可知, 只需要证明二者的相关系数为 0 即可, 证明二者独立.

□

7. (2022, 数一) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 在 $X = x$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim N(x, 1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution.

(方法一传统方法计算)

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

问题转换为求 EXY, DY , 由题设可知, 在 $X = x$ 的条件下, Y 的概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$$

故 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}}$$

故 y 的边缘分布函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$$

即 $Y \sim N(0, 2)$, 故 $EY = 0, DY = 2$ 而 EXY 根据方差的定义可以计算

TODO: 计算 EXY

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy = 1$$

故 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 通过二维正态参数的结论直接求出 ρ , 由上述可知 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$, 对比二维正态概率密度的公式

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\}$$

容易得出 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 2; \frac{\sqrt{2}}{2})$, 具体如总结所示. □

总结

对于形如 $Ae^{-ax^2+bxy+cy^2}$ 的式子, 若其是概率密度, 则必然是某个二维正态的概率密度 (由规范性) 且满足

(1) $b^2 = 4\rho^2 a^2 c^2 \implies \rho^2 = \frac{b^2}{4a^2 c^2}$

(2) ρ 的符号与 xy 系数的符号一致

1.5 求二维离散型随机变量函数的分布

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布.

Solution. 这道题是参数可加性的直接考察, 可以先证明一下

$$\begin{aligned}
 P\{Z = n\} &= P\{X + Y = n\} \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{X = k, Y = n - k\} \\
 &\stackrel{\text{独立性}}{=} \sum_{k=0}^n P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
 &\stackrel{\text{上下同乘}k!}{=} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &\stackrel{\text{二项式定理}}{=} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

□

参数可加性

当 X, Y 独立的时候

$$(1) X \sim B(m, p), Y \sim B(n, p) \implies X + Y \sim B(n + m, p)$$

$$(2) X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \implies X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$(3) X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \implies X + Y \sim (\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$(4) X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), \implies X + Y \sim \chi^2(n + m)$$

$$(5) X \sim E(\lambda_1), Y \sim E(\lambda_2) \implies \min(X, Y) \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$$

1.6 求二维连续型随机变量函数的分布

Remark. 问题描述

设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 求 $Z = g(X, Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

分布函数法

(1) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\}$.

(2) 求 $Z = g(X, Y)$ 在 (X, Y) 的正概率密度区域的值域 (α, β) , 讨论 z .

$z < \alpha$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $\alpha \leq z < \beta$ 时, $F_Z(z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$;

当 $z \geq \beta$ 时, $F_Z(z) = 1$.

(3) Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

卷积公式

(1) 设 $Z = aX + bY$, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|b|} f\left(x, \frac{z-ax}{b}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} f\left(\frac{z-by}{a}, y\right) dy$;

(2) 设 $Z = XY$, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$;

(3) 设 $Z = \frac{Y}{X}$, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx$;

(4) 设 $Z = \frac{X}{Y}$, 则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求:

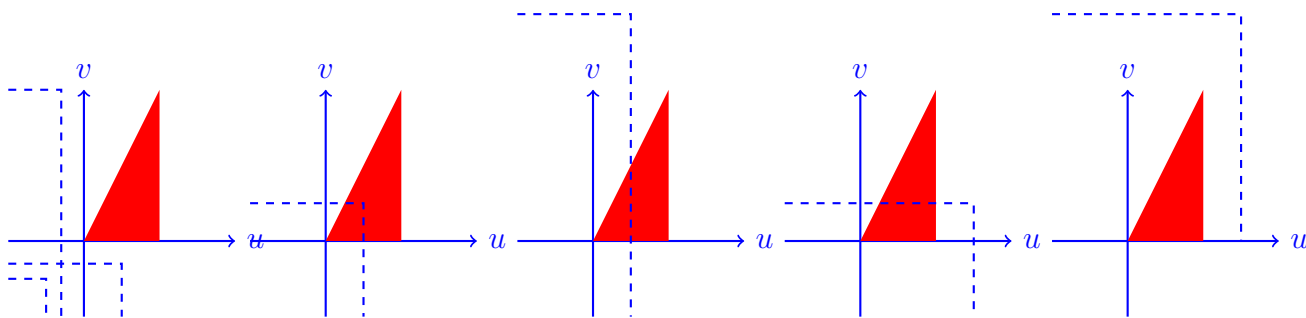
(a) (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$;

(b) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(c) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(d) $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}, P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\}$;

(e) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.



Solution.

(1) 由定义可知 $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$, 其中 x, y 的可行域如下图所示, 分为五个部分故

$$F(x, y) = \begin{cases} \int_0^y dv \int_{\frac{v}{2}}^x du, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ \int_0^x du \int_0^{2u} dv, & 0 < x < 1, y \geq 2x \\ \int_0^y dv \int_{\frac{v}{2}}^1 du, & x > 1, 0 < y < 2 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^2}{4} - xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ x^2, & 0 < x < 1, y \geq 2x \\ y - \frac{y^2}{4}, & x > 1, 0 < y < 2 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由定义可知

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 当 $0 < x < 1$ 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 < y < 2$ 在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(4) 对于 $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}$ 可以采用条件概率公式,

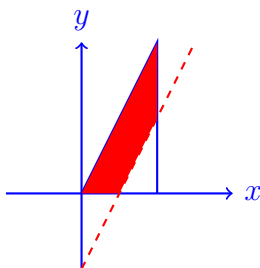
$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{\iint_{y \leq \frac{1}{2}, x \leq \frac{1}{2}} f(x, y) dx dy}{\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx} = \frac{3}{4}$$

而对于 $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\}$ 则不能采用条件概率公式, 因为 $P\{X = \frac{1}{2}\} = 0$ 不能做分母, 此时就体现出来条件概率的用处

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y | x) dy$$

将 $X = \frac{1}{2}$ 带入, 求出该条件概率为 $\frac{1}{2}$

(5) 方法一: 分布函数法



$F_Z(z) = P\{2X - Y \geq Z\} = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy$, 绘制 $y \geq 2x - z$, 讨论截距, 如图所示, 其结果如下

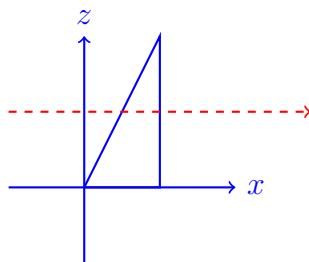
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

方法二: 卷积公式

由卷积公式有 $f_Z(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx$, 此时把 $f(x, y)$ 中的 y 全部转换为 z 并确定 z 的取值范围即

$$f(x, 2x - z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x \implies 0 < x < 1, 0 < z < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

此时再对 x 进行偏积分即可, 绘制 $x - z$ 图像, 首先确认 z 的范围, 再从 z 上对 x 进行积分



如图, 最终

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 \leq z < 2; \\ 0, & \end{cases}$$

□

1.7 求一离散一连续随机变量函数的分布

10. (2020, 数一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$ 。

- (1) 求 (X_1, Y) 的联合分布函数 (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示);
- (2) 证明 Y 服从标准正态分布。

Solution. 一离散加一连续的基本方法就是”全概率公式 + 独立性”

(1)

$$\begin{aligned} F(X_1, Y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} \\ &\stackrel{\text{全概率公式}}{=} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y, X_3 = 0\} + P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y, X_3 = 1\} \\ &\stackrel{\text{独立性}}{=} P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq y\}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq \min(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

(2) 方法一, 通过 Y 的分布函数确定

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} \\ &= (\text{和 (1) 完全一致省去}) \dots \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

方法二, 直接求边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(X, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = F(+\infty, Y)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$$

故 $Y \sim N(0, 1)$

□