

第一章 矩阵

1.1 求高次幂

1. 设 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶矩阵, 满足 $BA = O$, 且 $r(B) > 1$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution.



2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution.



3. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ P 为 3 阶可逆矩阵, $B = P^{-1}AP$, 则 $(B + E)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$

Solution.



1.2 逆的判定与计算

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则下列结论不正确的是:

- (A) A 可逆 (B) $A - E$ 可逆 (C) $A + E$ 可逆 (D) $A - 3E$ 可逆

Solution.



5. 设 A, B 为 n 阶矩阵, a, b 为非零常数. 证明:

(a) 若 $AB = aA + bB$, 则 $AB = BA$;

(b) 若 $A^2 + aAB = E$, 则 $AB = BA$.

Solution.



6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 满足 $A^3 = O$.

(a) 求 a 的值;

(b) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 求 X .

Solution.

1.3 秩的计算与证明

Remark. 秩的性质

- (1) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $r(A) < \min\{m, n\}$
- (2) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- (3) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (4) $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A \mid B) \leq r(A) + r(B)$
- (5) $r(A) = r(kA) (k \neq 0)$
- (6) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$
- (7) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 若 $r(A) = n$ 则 $r(AB) = r(B)$, 若 $r(A) = m$ 则 $r(CA) = r(C)$
- (8) $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
- (9) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

7. (2018, 数一、二、三) 设 A, B 为 n 阶矩阵, (XY) 表示分块矩阵, 则:

- (a) $r(A \mid AB) = r(A)$
- (b) $r(A \mid BA) = r(A)$
- (c) $r(A \mid B) = \max\{r(A), r(B)\}$
- (d) $r(A \mid B) = r(A^T B^T)$

Solution.



8. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $r(A) + r(A - E) = n$.

(II) 若 $A^2 = E$, 则 $r(A + E) + r(A - E) = n$.

Solution.



1.4 关于伴随矩阵

Remark. 伴随矩阵的性质

$$(1) \quad AA^* = A^*A = |A| \xrightarrow{|A| \neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad A^* = |A| A^{-1}$$

$$(2) \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

$$(3) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$(4) \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(5) \quad (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$(6) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$(7) \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$(8) \quad r(A) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

9. 设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和均为 2, 且 $|A| = 6$, 则 A^* 的各列元素之和均为:

- (A) 2 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) 6

Solution.



10. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n(n \geq 3)$ 阶非零矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

(a) $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = 1$;

(b) $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A^* = -A^T \Leftrightarrow AA^T = E$ 且 $|A| = -1$.

Solution.



1.5 初等变换与初等矩阵

Remark. 初等变换与初等矩阵的性质

- (1) $|E(i, j)| = -1, |E(i(k))| = k, |E(ij(k))| = 1$
- (2) $E(i, j)^T = E(i, j), E(i(k))^T = E(i(k)), E(ij(k))^T = E(ji(k))$
- (3) $E(i, j)^{-1} = E(i, j), E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$
- (4) 初等行 (列) 变换相当于左 (乘) 对应的初等矩阵
- (5) 可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

11. (2005, 数一、二) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B , 则:

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 B^*
- (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行, 得 B^*
- (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列, 得 $-B^*$
- (D) 交换 A 的第 1 行与第 2 行, 得 $-B^*$

Solution.



12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $(P^{-1})^{2023}A(Q^T)^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Solution.

