

Optimización unidimensional

Lección 07

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

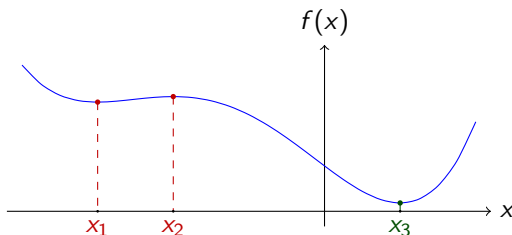
I Semestre 2018

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Métodos cerrados
 - Sección dorada
 - Interpolación parabólica
- 3 Métodos abiertos
 - Método de Newton
- 4 Métodos híbridos
 - Método de Brent

Introducción

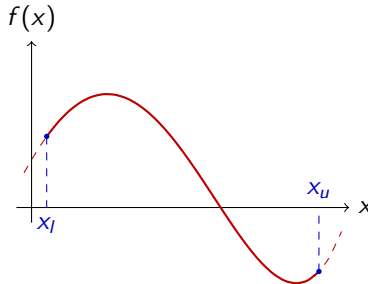
- Optimización es el proceso de encontrar extremos de una función.



- Se distinguen extremos **locales** y **globales**.
- Extremos son **mínimos** o **máximos**.
- Optimizadores unidimensionales son cerrados o abiertos.

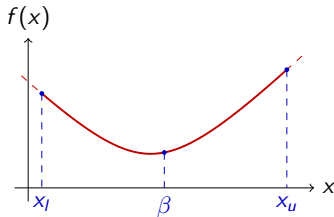
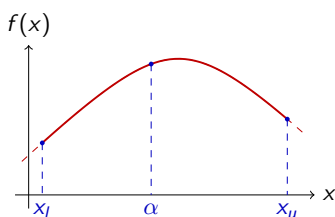
Encerrando una raíz

- Buscando raíces: raíz entre puntos con signos distintos



Encerrando un extremo

- Encerrar extremo: requiere tres puntos



- Si funciones son suaves, extremo encerrado en $[x_l, x_u]$ si
 - Máximo: $f(\alpha) > f(x_l)$ y $f(\alpha) > f(x_u)$
 - Mínimo: $f(\beta) < f(x_l)$ y $f(\beta) < f(x_u)$

Rutina de delimitación

Bracketing

- Sigüientes algoritmos necesitan un estado inicial (tres puntos)
- Algoritmos de delimitación usualmente toman dos valores x
- Con ellos calculan un tercer valor tal que los “bordes” $[x_l, x_u]$ encierran al extremo
- El tercer punto x cumple que la $f(x)$ es mayor (o menor) que $f(x_l)$ y $f(x_u)$.

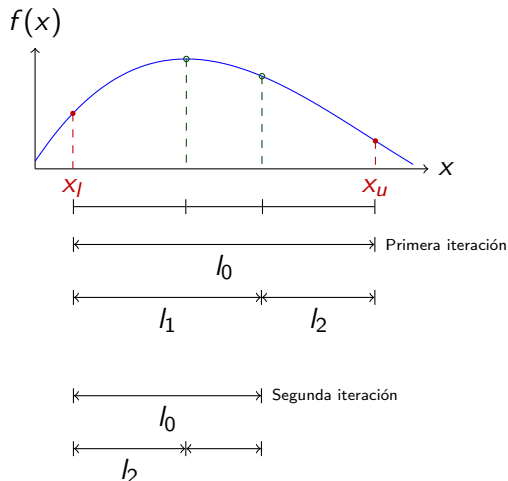
Métodos

- Método cerrado: sección dorada
- Método cerrado: interpolación parabólica
- Método abierto: método de Newton
- Método híbrido: método de Brent

Sección dorada

- Similar a método de bisección
- x_l : límite inferior
- x_u : límite superior
- $[x_l, x_u]$ encierra extremo
- Se necesitan otros dos puntos dentro de intervalo
- Algoritmo selecciona si extremo esta en primeros o segundos 3 puntos
- Elección de puntos intermedios es crítica para eficiencia:
Meta es minimizar número de evaluaciones de función

Búsqueda de secciones doradas



Condiciones:

$$l_0 = l_1 + l_2$$

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_1}$$

y combinando

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Razón áurea

Con $R = l_2/l_1$

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{l_2}{l_1}} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$\frac{1}{1 + R} = R$$

$$R^2 + R - 1 = 0$$

que tiene raíz positiva

$$R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,61803$$

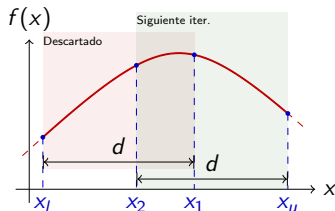
Método numérico

- Ejemplo aquí para máximo (similar para mínimo)
- Tome intervalo inicial $[x_l, x_u]$
- Seleccione dos puntos internos con razón dorada:

$$d = R(x_u - x_l)$$

$$x_1 = x_l + d$$

$$x_2 = x_u - d$$



- Si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces máximo en $[x_2, x_u]$
- Si $f(x_2) > f(x_1)$ entonces máximo en $[x_l, x_1]$
- Nótese que por razón dorada $f(x_1)$ o $f(x_2)$ ¡se reutiliza en siguiente iteración!

Siguiente iteración

- Siguiente iteración debe reasignar puntos:
 - Si se sigue con triada izquierda ($f(x_2) > f(x_1)$)

$$\begin{array}{ll} x_u \leftarrow x_1 & x_l \text{ se mantiene} \\ x_1 \leftarrow x_2 & \text{se reutiliza } x_2! \\ x_2 \leftarrow x_u - R(x_u - x_l) \end{array}$$

- Si se sigue con triada derecha ($f(x_1) > f(x_2)$)

$$\begin{array}{ll} x_l \leftarrow x_2 & x_u \text{ se mantiene} \\ x_2 \leftarrow x_1 & \text{se reutiliza } x_1! \\ x_1 \leftarrow x_l + R(x_u - x_l) \end{array}$$

- En cada iteración intervalo con extremo se reduce al 61,8 %
- En cada iteración de bisección hay reducción al 50 %

Estimación del error

- Peor caso en una iteración: máximo en sección de extremos $x_{l,u}$:

$$\Delta x = (1 - R)(x_u - x_l)$$

- Error se aproxima con tamaño de intervalo, normalizado por el óptimo estimado hasta el momento:

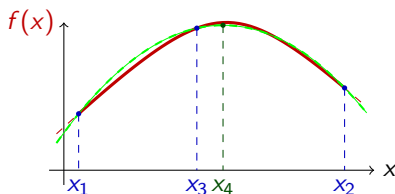
$$\epsilon_a = (1 - R) \left| \frac{x_u - x_l}{x_{opt}} \right| 100 \%$$

Reducción de evaluaciones de función

- Evaluación dorada es parte de otros procesos, por lo que función original será evaluada considerable número de veces.
- Evaluación de funciones a optimizar toma mucho tiempo (resultados de simulaciones, soluciones de sistemas, etc.)

Interpolación parabólica

- Idea: con los 3 puntos disponibles interpolar parábola
- Usar máximo de esa parábola como siguiente aproximación



- Resolviendo resulta en (x_1, x_2, x_3) triada inicial):

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x_1)(x_2^2 - x_3^2) + f(x_2)(x_3^2 - x_1^2) + f(x_3)(x_1^2 - x_2^2)}{f(x_1)(x_2 - x_3) + f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

- Dos estrategias:
 - Usar los puntos en orden secuencial (los últimos 3 siempre)
 - Usar los dos más cercanos al nuevo punto

Método de Newton

- Aproximación de **derivada** de función con series de Taylor:

$$f'(x_{i+1}) = f'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_i) + \dots$$

- Si x_{i+1} es extremo, entonces $f'(x_{i+1}) = 0$ y por tanto

$$f'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_i) = 0$$

$$(x_{i+1} - x_i) = -\frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

- Idéntico a Newton-Raphson, pero aplicado a $f'(x)$
- Puede diverger.
- Debe verificarse signo de segunda derivada para asegurar extremo correcto

Método de Brent

- Idea: combinar sección dorada (segura pero lenta) con interpolación parabólica (rápida pero inestable)
- Si función se comporta mal: use sección dorada
- Si función es suave: use interpolación parabólica
- Combinación de métodos debe:
 - 1 Evitar evaluaciones innecesarias cuando se cambia de método
 - 2 Debe tener cuidado en fase final, con error estimado (cerca de precisión numérica)
 - 3 Debe tener detección robusta de tipo de función para seleccionar el método apropiado

Método de Brent (2)

(1)

- Método necesita
 - Intervalo inicial $[x_l, x_u]$.
 - x mejor extremo hasta el momento
 - w segundo mejor extremo hasta el momento
 - v valor anterior de w
 - u último valor evaluado de la función
- Se intenta interpolación parabólica con $\{x, v, w\}$
- Paso se acepta si
 - 1 extremo cae en intervalo $[x_l, x_u]$
 - 2 paso desde mejor extremo actual x es menos de $\frac{1}{2}$ de paso trasanterior (No se usa paso anterior para no castigar errores aislados)
- Método usa un rango de tolerancia, bajo el cual el algoritmo para o ajusta valores de x para no re-evaluar la función

Resumen

- 1 Introducción
- 2 Métodos cerrados
 - Sección dorada
 - Interpolación parabólica
- 3 Métodos abiertos
 - Método de Newton
- 4 Métodos híbridos
 - Método de Brent

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2018 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica