Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área de Ingeniería en Computadores
CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Profesor: Dr. Pablo Alvarado Moya
II Semestre 2018
Examen final

Nombre: Juan Pablo Brenes Coto   Carné: 2014088353

Problema 1

1.1. **Considerando el sistema amortiguado de masa resorte con ecuación**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1}$$

encuentre la función de fuerza $F(x, v, t)$.

Sabiendo que la aceleración corresponde a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \tag{2}$$

y que la velocidad corresponde a:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{3}$$

La función de fuerza se puede despejar directamente de la ecuación del sistema, ya que por la segunda ley de Newton se sabe que el termino $m\frac{d^2x}{dt^2}$ corresponde a la fuerza, por lo tanto despejando se obtiene:

$$F(x, v, t) = -bv(t) - kx(t) \tag{4}$$

1.2. **Implemente el método de Euler en el archivo *edosys.m* para el caso del sistema amortiguado de masa resorte.**

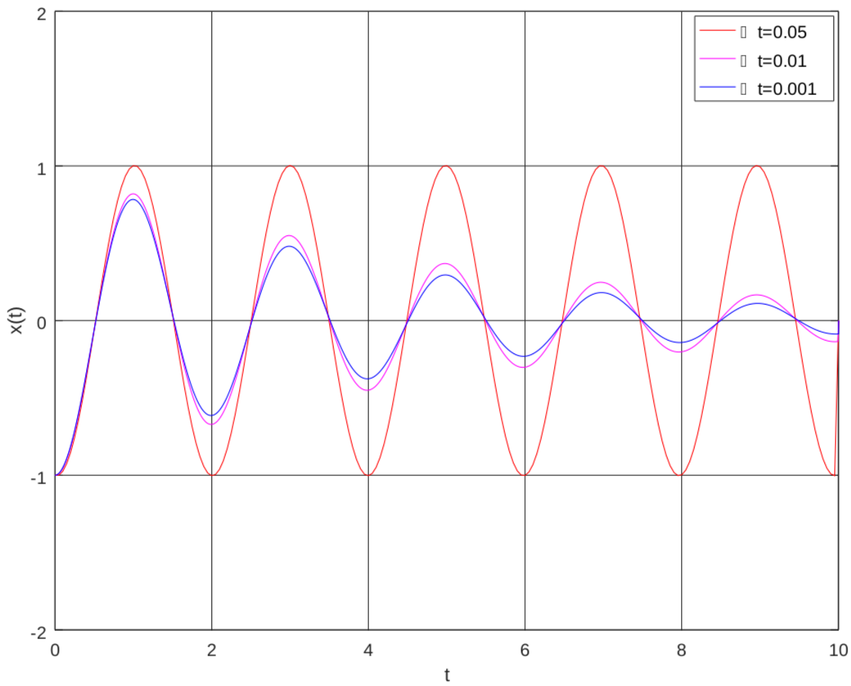

Figura 1: Solución del sistema amortiguado de masa resorte por medio del método de Euler

1.3. **Para el sistema en 1 indique a que corresponden las funciones $g(x, v, t)$ y $h(x, v, t)$**

Las funciones $g(x, v, t)$ y $h(x, v, t)$ corresponden a las funciones de velocidad y aceleración de la partícula respectivamente. La expresión para la función h se obtiene directamente de la ecuación del sistema al despejar la aceleración

$$h(x, v, t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{bv(t)}{m} - \frac{kx(t)}{m} \tag{5}$$

La expresión para la función g se obtiene despejando la velocidad del sistema y sustituyendo la aceleración utilizando la segunda ley de Newton $a = \dfrac{F}{m}$

$$g(x, v, t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{F(x, v, t)}{b} - \frac{kx(t)}{b} \tag{6}$$

La función $F(x, v, t)$ corresponde a la función de fuerza (4) calculada en el punto 1

1.4. Utilice el método de RK para solucionar el mismo sistema de ecuaciones en el archivo *edosys.m*

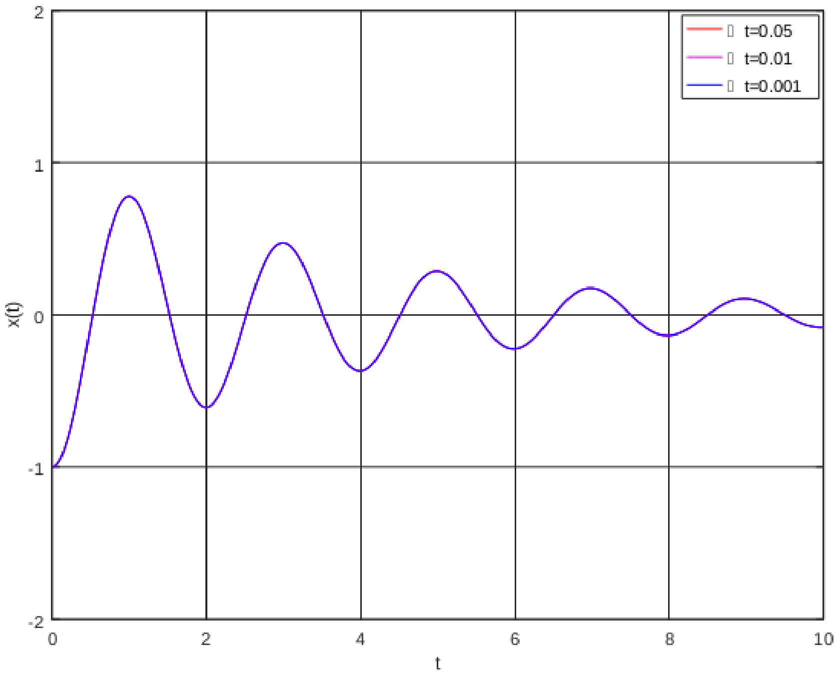

Figura 2: Solución del sistema amortiguado de masa resorte por medio del método Runge-Kutta de cuarto orden

1.5. Explique que comportamiento tienen las soluciones ante los distintos tamaños de paso y los dos métodos implementados

Observando las Figuras 1 y 2 correspondientes a la solución del sistema amortiguado de masa resorte por medio de los métodos de Euler y Runge-Kutta respectivamente, se puede comprobar que el método de Euler es menos estable y su error depende del tamaño de paso h utilizado; a menor tamaño de paso, se tiene un menor error y una mejor aproximación de la solución, por lo tanto, para obtener buenas aproximaciones se deben utilizar tamaños de paso pequeños, lo que aumenta la descretización y por ende, el tiempo de ejecución del algoritmo.

Por otro, se puede observar que el método de Runge-Kutta presenta una mayor estabilidad numérica, convergiendo a la solución del sistema con todos los diferentes tamaños de paso utilizados; esta mayor estabilidad se obtiene al precio de una mayor cantidad de operaciones a realizar en cada iteración del algoritmo, sin embargo, esto se ve compensado en cierta medida debido al hecho de que no es necesaria la utilización de tamaños de paso muy pequeños para obtener una buena aproximación.

Problema 2

2.1. **Explique detalladamente como debe modificarse el método optimizado descrito en el curso para el cálculo de las segundas derivadas $f''(t_i)$ en cada uno de los puntos t_i dados.**

El método descrito en el curso parte del hecho que las segundas derivadas se pueden interpolar por medio de polinomios de Lagrange

$$f_i'' = f_i''(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{7}$$

Para luego de cierta manipulación matemática, llegar a la expresión:

$$\begin{aligned}(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ = 6\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 6\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\end{aligned} \tag{8}$$

la cual solamente tiene como incógnitas a $f''(x_{i-1})$ y $f''(x_i)$. Por lo tanto, planteando el sistema ecuaciones lineales para calcular los valores de las segundas derivadas se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_0 & 2(x_2 - x_0) & x_2 - x_1 & & & \\ & x_2 - x_1 & 2(x_3 - x_1) & x_3 - x_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & x_{n-1} - x_{n-2} & 2(x_n - x_{n-2}) & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''(x_0) \\ f''(x_1) \\ \vdots \\ f''(x_n) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - 6\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ 6\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - 6\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \vdots \\ 6\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - 6\frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

El sistema planteado anteriormente posee $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas, la forma típica de solucionar este problema es seleccionar arbitrariamente que las segundas derivadas en los puntos entremos se anulan. Sin embargo, para el problema de la interpolación para una curva cerrada, estas derivadas no pueden anularse; ya que se deben interpolar puntos que se encuentran fuera del intervalo de puntos dados, para que la curva cierre suavemente.

Por lo tanto, para solucionar el problema se establecen las condiciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 & f''(x_{n+1}) &= f''(x_0) \\ x_{0-1} &= x_n & f''(x_{0-1}) &= f''(x_n) \end{aligned} \tag{10}$$

Lo anterior establece que el punto siguiente al punto final, corresponde al punto inicial, mientras que el punto anterior al inicial, corresponde al punto final; lo mismo aplica para las segundas derivadas en dichos puntos. De esta manera se crea un subintervalo entre x_n y x_0 que permite cerrar la curva suavemente.

2.2. Plantee el sistema de ecuaciones lineales a resolver, para encontrar las segundas derivadas.

El sistema de ecuaciones lineales a resolver para obtener los valores de las segundas derivadas, es similar al sistema mostrado en (9), con la diferencia que deben aplicarse las condiciones establecidas en (10). De este manera, el sistema a resolver corresponde a

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-x_n) & x_1-x_0 & & & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & 2(x_2-x_0) & x_2-x_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & x_i-x_{i-1} & 2(x_{i+1}-x_{i-1}) & x_{i+1}-x_i & \\ x_{n+1}-x_n & & & (x_n-x_{n-1}) & 2(x_{n+1}-x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{''}(x_0) \\ f^{''}(x_1) \\ \vdots \\ f^{''}(x_{n-1}) \\ f^{''}(x_n) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - 6\dfrac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n} \\ 6\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - 6\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ \vdots \\ 6\dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} - 6\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

el cual cuenta con n ecuaciones y n incógnitas. Como se estableció en las condiciones en (10) para que la curva cierre suavemente, cuando $i = 0$, el coeficiente $x_i - x_{i-1} = x_0 - x_n$ se multiplica por $f^{''}(x_n)$ ya que $f^{''}(x_{0-1}) = f^{''}(x_n)$. De igual forma, cuando $i = n$, el coeficiente $x_{i+1} - x_i = x_0 - x_n$ se multiplica por $f^{''}(x_0)$ ya que $f^{''}(x_{n+1}) = f^{''}(x_0)$.

2.3. Indique si este sistema aún puede o no utilizar el algoritmo de Thomas para ser resuelto.

Como se puede observar en el sistema (11), luego de modificarse con las condiciones expuestas en (10); el sistema resultante ya no es tridiagonal, debido a la presencia de términos diferentes de cero en las esquinas superior derecha e inferior izquierda de la matriz de coeficientes. Por lo tanto, el sistema no puede ser resulto por medio del algoritmo de Thomas.

2.4. **Implemente la función** $interpole(t, f, ts)$ **en el mismo archivo *spline2d.m*, que recibe como entrada los puntos de soporte** t_i **en el vector *t*, los valores de la función** $f(t_i)$ **en el vector *f*, y los valores *ts* en donde se quiere encontrar el valor de la función interpolada.**

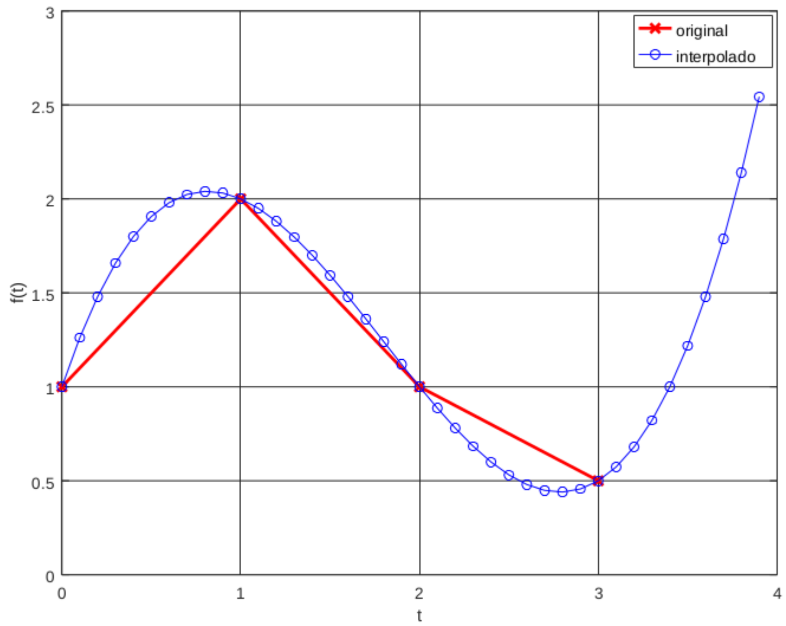

Figura 3: Resultado de interpolación simple cerrada

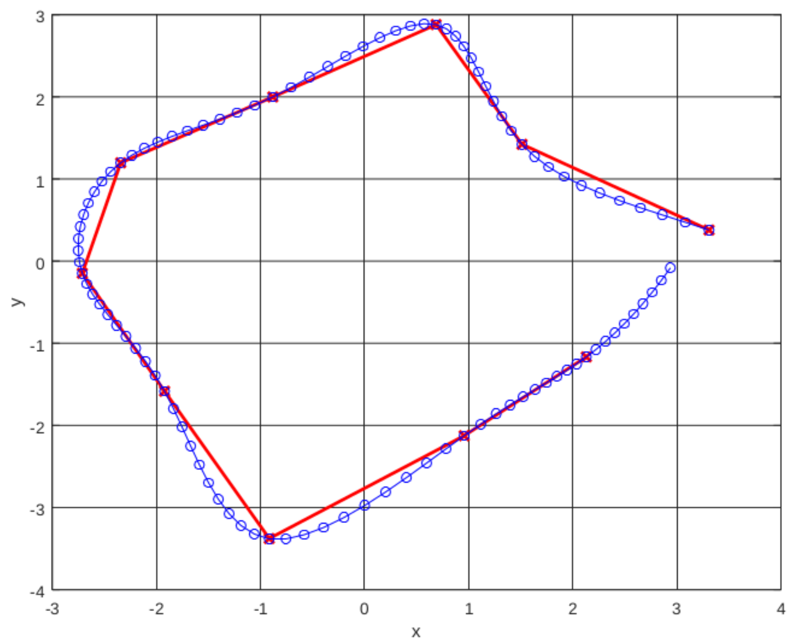

Figura 4: Resultado de interpolación 2D cerrada