Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área de Ingeniería en Computadores
CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Profesor: Dr. Pablo Alvarado Moya
I Semestre, 2018
Examen Final

Total de Puntos:	44
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________________ Carné: ______________

Instrucciones:

- Resuelva el examen en forma ordenada y clara.
- No olvide indicar su nombre y carné en todos los archivos entregados.
- En todas las preguntas y problemas debe indicarse algún procedimiento o justificación clara para llegar a la solución.
- Se recomienda el uso de su procesador o levantador de textos preferido (OpenOffice, LibreOffice, LaTeX, etc.), pero debe entregar sus respuestas en formato PDF. Si lo desea, puede escribir sus soluciones a mano y entregarlas escaneadas en el archivo PDF.
- ¡Documente y estructure bien su código!
- Debe subir su código de solución en el tecDigital. Utilice archivos comprimidos (.zip, .rar, o .tar.gz) nombrados con *examen_nombre_apellido* (ej. *examen_juan_perez.tar.gz*).
- Todo archivo que sea parte de su solución debe incluir un encabezado con su nombre y número de carné.
- Es permitido discutir el examen y posibles caminos de solución con otros estudiantes, sin embargo, la solución debe ser realizada y presentada individualmente. Soluciones muy similares o idénticas serán calificadas con cero.
- El no cumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Problema 1	de 13
Problema 2	de 15
Problema 3	de 16

Problemas

Problema 1 Regresión y optimización $\boxed{\textbf{13 Pts}}$

En este problema, usted utilizará una técnica de optimización, para encontrar la curva de mejor ajuste a una serie de datos bidimensionales.

Tenemos una matriz de datos `X`, que tiene en cada una de sus columnas un vector bidimensional, es decir, la matrix `X` es de tamaño $2 \times m$, con m el número de datos disponibles. La primer componente de cada vector corresponde a la coordenada x y la segunda componente a la coordenada y.

Queremos encontrar la curva de mejor ajuste dada por

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

Para ello, vamos a definir como función de error a minimizar como

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2 \tag{1.2}$$

Esta función de error mide para todos los datos disponibles $[x_i, y_i]^T$ la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor conocido y_i y el valor predicho por (1.1), en términos de los parámetros a, b, c.

El objetivo de este problema es, utilizando la regla Δ vista en clase, encontrar los parámetros a, b y c que minimizan (1.2), y así encontrar la curva de mejor ajuste.

Utilice para su solucion el archivo `regopt.m` entregado con el enunciado. No olvide completar allí su nombre y carné. Ese archivo ya carga los datos en la matriz $\underline{\mathbf{X}}$ que usted necesita.

1.1. Grafique los puntos bidimensionales utilizando GNU/Octave. $\boxed{\text{1 Pt}}$

1.2. Implemente la función de error. Debe seguir la interfaz especificada en el archivo brindado. $\boxed{\text{2 Pts}}$

1.3. Utilizando las técnicas de diferenciación numérica vistas en clase, calcule el gradiente $\boxed{\text{2 Pts}}$

$$\nabla f(a, b, c) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \end{bmatrix}$$

Note que el gradiente debe ser un vector columna.

Justifique su elección de técnica de diferenciación numérica. Debe seguir la interfaz especificada en el archivo brindado.

1.4. Implemente un ciclo para encontrar, utilizando la regla Δ (también conocida como descenso de gradiente) los valores de a, b y c que minimizan $f(a, b, c)$. $\boxed{\text{3 Pts}}$

Para esto, usted debe elegir un criterio de convergencia adecuado, que use el parámetro de tolerancia brindado como argumento en la interfaz dada en `regopt.m`.

Observe que la convergencia depende fuertemente del tamaño de paso λ que usted elija. Encuentre un valor que no tome muchas iteraciones en llegar al mínimo y que no conduzca a divergencia u oscilaciones.

Este es el principio de optimización utilizado en algoritmos de redes neuronales, y se considera una forma de hacer regresión por medio de *aprendizaje automático*.

La función de optimización no solo debe devolver el valor de parámetros óptimo (que minimiza la función de error), sino todos los pasos intermedios, así como los errores estimados en cada paso.

Nota: Usted debe observar el valor de los gradientes para poder elegir un valor con sentido.

1.5. Encuentre cuál es el conjunto de parámetros a, b y c óptimo. 1 Pt

1.6. Grafique el error en función del número de iteración en su proceso de optimización. Etiquete los ejes. 1 Pt

1.7. Grafique en el invervalo de $x \in [-2, 2]$ sobre la figura del punto 1.1 lo siguiente: 3 Pts

1. la curva asociada al punto de partida en color negro
2. las curvas asociadas a cada paso intermedio del proceso de optimización en color cian
3. la curva asociada al conjunto óptimo de parámetros en color rojo.

La figura 1.1 ilustra un ejemplo del resultado esperado en este punto.

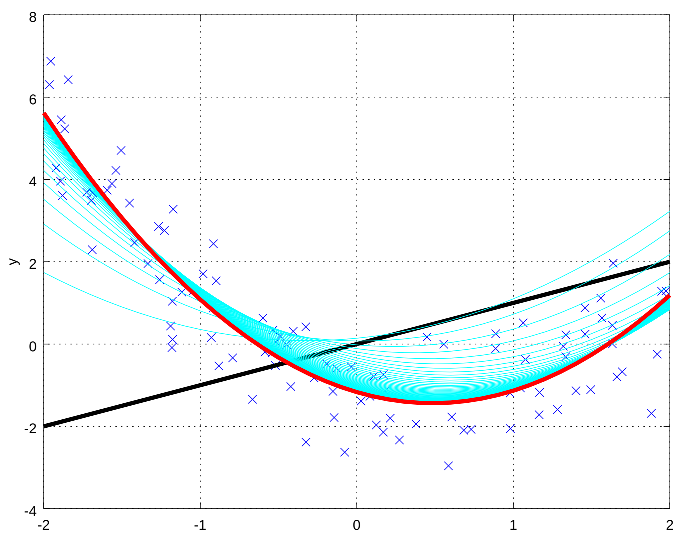

Figura 1.1: Ejemplo de resultado de curva de mejor ajuste y pasos intermedios.

Problema 2 Descomposición de valores singulares **15 Pts**

Se desea estimar la posición tridimensional de un objeto en un espacio, en el cual se han instalado n emisores en posiciones $\underline{\mathbf{e}}_i$ conocidas, con $i = 1 \ldots n$. El objeto tiene instalados sensores que indican la distancia a cada emisor.

Para este problema concreto se cuenta con 5 emisores. Se simulará además tener 3 o 4 emisores ignorando dos o uno de los 5 emisores disponibles, respectivamente.

En este problema se utilizará la descomposición de valores sigulares (DVS) para poder resolver sistemas sub- o sobredeterminados.

Nótese que si solo se tienen tres emisores $\underline{\mathbf{e}}_i$ (con $i = 1, 2$ ó 3) y las distancias d_i del objeto a cada uno de ellos, entonces existen dos posibles soluciones. Para entender por qué, note que todos los puntos a distancia d_i del emisor $\underline{\mathbf{e}}_i$ conforman una esfera de radio d_i centrada en $\underline{\mathbf{e}}_i$. Si se consideran solo dos emisores, entonces las posibles posiciones que satisfacen las distancias conocidas corresponden a la intersección de las dos esferas; esto es, a un círculo. Si se agrega el tercer emisor, entonces su esfera cortará al círculo en uno o dos puntos. Con cuatro o más emisores, todas las esferas se intersecarán en un único punto.

Debido a errores de redondeo en las representaciones numéricas y ruido en las mediciones de distancia, las soluciones no son necesariamente exactas.

Supóngase que la posición del i-ésimo emisor es $\underline{\mathbf{e}}_i = [e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}]^T$ y que está a distancia d_i del objeto, que se encuentra en $\underline{\mathbf{p}} = [x, y, z]^T$. Entonces, se debe cumplir:

$$\|\underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{e}}_i\|_2^2 = d_i^2$$

lo que es equivalente a

$$(x - e_{ix})^2 + (y - e_{iy})^2 + (z - e_{iz})^2 = d_i^2 \quad .$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$(x^2 - 2xe_{ix} + e_{ix}^2) + (y^2 - 2ye_{iy} + e_{iy}^2) + (z^2 - 2ze_{iz} + e_{iy}^2) = d_i^2 \quad .$$

Reagrupando y utilizando notación matricial se cumple entonces para el i-ésimo emisor

$$\begin{bmatrix} 1 & -2e_{ix} & -2e_{iy} & -2e_{iz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_i\|_2^2 \end{bmatrix}$$

Nótese que tuvo que recurrirse a un planteo "especial" del vector solución, para poder expresar el problema con una expresión lineal: el primer elemento del vector solución es igual al cuadrado de la magnitud del vector tridimensional conformado por los últimos tres elementos $[x, y, z]^T$.

Para n emisores, se plantea el sistema de ecuaciones $\mathbf{M}\underline{\hat{\mathbf{p}}} = \underline{\mathbf{b}}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2e_{1x} & -2e_{1y} & -2e_{1z} \\ 1 & -2e_{2x} & -2e_{2y} & -2e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2e_{nx} & -2e_{ny} & -2e_{nz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{\mathbf{p}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_1\|_2^2 \\ d_2^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_2\|_2^2 \\ \vdots \\ d_n^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_n\|_2^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} \tag{2.1}$$

que tiene solución exacta solo si el rango de $\mathbf{M}$ es cuatro. Debido a que las distancias tienen error, es posible que exista espacio nulo para $\mathbf{M}$.

Para el caso particular con $n = 3$ el sistema está subdeterminado y rango de la matriz $\mathbf{M}$ es a lo sumo 3, y por tanto la nulidad de $\mathbf{M}$ es 1 o más. Asumiendo que la nulidad es 1 (lo que ocurre si los emisores no están sobre una línea recta), entonces, si $\underline{\mathbf{n}}$ es el vector que engendra el espacio nulo, las soluciones del sistema son

$$\underline{\tilde{\mathbf{p}}} = \underline{\hat{\mathbf{p}}} + \lambda\underline{\mathbf{n}}$$

donde $\underline{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{M}^\dagger\underline{\mathbf{b}}$, y $\mathbf{M}^\dagger$ es la seudoinversa de $\mathbf{M}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea

$$\underline{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{bmatrix}\tilde{p}_1\\ \tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{p}_1\\ \hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{\mathbf{p}}}} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\\ n_4\end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{n}}} = \begin{bmatrix}\hat{p}_1 + \lambda n_1\\ \hat{x} + \lambda n_2\\ \hat{y} + \lambda n_3\\ \hat{z} + \lambda n_4\end{bmatrix}$$

De todas esas posibles soluciones se buscan solo aquellas que satisfacen

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2\\ \hat{p}_1 + \lambda n_1 &= (\hat{x} + \lambda n_2)^2 + (\hat{y} + \lambda n_3)^2 + (\hat{z} + \lambda n_4)^2\end{aligned}$$

Con esto, se plantea una ecuación cuadrática de la forma

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2.2}$$

donde a, b y c se plantean en términos de $\hat{p}_1$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, y n_i, con $i = 1 \ldots 4$.

Se adjunta con el enunciado un artículo científico de A. Norrdine, con más detalles de esta técnica.

En el archivo `posfromdist.m` se cargan en la matriz `D` las distancias desde 5 emisores al objeto que se desea rastrear, en donde cada columna de la matriz contiene la distancia a un emisor, y cada fila corresponde a un instante de tiempo específico.

Además, se cargan en las columnas de la matriz `E` las posiciones de los 5 emisores.

En este problema usted implementará la función `calcPosition`, que estima la posición del objeto a partir de las distancias

2.1. Construya la matriz $\mathbf{M}$ de (2.1). 1 Pt

Debe considerar que `dim` contiene el número de sensores a utilizar.

2.2. Construya el vector $\underline{\mathbf{b}}$ de (2.1). 2 Pts

2.3. Utilizando la descomposición de valores singulares (función `svd`) calcule la matriz seudo-inversa de $\mathbf{M}$. 3 Pts

Note que las matrices de salida de `svd` en `octave` pueden tener otros tamaños a los revisados en clase, por lo que usted debe restaurar los tamaños correctos para poder calcular la matriz seudo-inversa como se vió en clase. Para este punto puede emplear la función `resize`.

Puede utilizar la función `pinv` para invertir la matriz diagonal de valores singulares y para verificar que su seudo-inversión es correcta.

2.4. Calcule la solución particular $\underline{\hat{\mathbf{p}}}$. $\boxed{\text{1 Pt}}$

2.5. Para el caso en que solo hayan 3 emisores, encuentre las dos posibles soluciones. Note que esto requiere encontrar el vector que engendra el espacio nulo. $\boxed{\text{5 Pts}}$

El argumento `option` permite seleccionar cuál de las dos posiciones estimadas se debe retornar. Si `option` es 1, entonces se debe usar "+" en la cuadrática, y de otro modo se debe usar "−".

2.6. Para el caso con 4 o más emisores, estime la posición del objeto. $\boxed{\text{1 Pt}}$

2.7. Verifique que las posiciones calculadas para la trayectoria descrita a través de las distancias efectivamente se encuentran a esas distancias. $\boxed{\text{2 Pts}}$

Para ello, implemente la función `calcDistances`, que calcula la distancia a cada emisor, dada la posición del objeto.

Problema 3 Análisis de Componentes Principales $\boxed{\textbf{16 Pts}}$

En este problema usted deberá calcular los componentes principales de un conjunto de datos, utilizando GNU/Octave.

Debe completar el archivo de GNU/Octave `pca.m` con su solución, incluyendo las explicaciones necesarias en comentarios. Respete allí los comentarios que identifican cada punto de este problema, y no olvide completar su nombre y carné allí.

El archivo `pcadata.dat` contiene la matriz `X`, que a su vez contiene los datos tridimensionales en cada columna. En el archivo `pca.m` ya está listo el código que se encarga de leer dicha matriz.

3.1. Grafique los puntos tridimensionales almacenados en `X` con "$\times$" azules. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.2. Indique cómo se calcula matemáticamente el punto medio de los datos, y utilice GNU/Octave para determinarlo. Recuerde que los datos son tridimensionales y se encuentran en las columnas de `X`. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.3. Muestre en la misma gráfica de 3.1 el punto medio con un círculo rojo. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.4. Determine una nueva matriz $\bar{\mathbf{X}}$ con datos de media cero. Grafique en otra figura dichos datos con "$\times$" azules. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.5. Indique cómo se calcula matemáticamente la matriz de covarianza $\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}}$ de los datos $\bar{\mathbf{X}}$, y determine dicha matriz utilizando GNU/Octave. $\boxed{\text{2 Pts}}$

3.6. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza utilizando GNU/Octave $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.7. Reordene la matriz de eigenvalores y eigenvectores, de manera que sea conveniente para realizar el análisis de componentes principales. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.8. Indique explícitamente cuáles son los ejes principales y qué varianza tienen los datos en esos ejes. $\boxed{\text{2 Pts}}$

3.9. Calcule la proyección de los datos en un plano engendrado por los dos primeros ejes principales. Grafique los puntos proyectados sobre el plano en una figura aparte. $\boxed{\text{2 Pts}}$

3.10. Reconstruya a partir de los puntos bidimensionales obtenidos con la proyección anterior, los puntos tridimensionales correspondientes en el espacio original, donde están los datos de entrada originales cargados del archivo. Grafique las reconstrucciones en una nueva figura, junto a los datos originales de entrada. Use "$\times$" azules para los datos originales y cuadrados magenta para los datos reconstruidos. $\boxed{\text{4 Pts}}$