

Reducciones de Givens y Householder

Lección 25

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Método de Givens
- 3 Método de Householder

Introducción

- La estrategia óptima para encontrar los eigenvalores y eigenvectores es:
 - 1 reducir la matriz a una forma simple
 - 2 utilizar un proceso iterativo
- Para matrices simétricas, la forma “simple” es tridiagonal

Reducción de Givens

- La reducción de Givens es una modificación del método de Jacobi.
- Reduce la matriz a una forma tridiagonal
- Se puede alcanzar el resultado en un número finito de pasos
- (Recuérdese que el método de Jacobi se itera hasta la convergencia)

Repaso del Método de Jacobi

(1)

- Recuerdese que con el método de Jacobi se calcula el término

$$\theta \equiv \cot 2\phi \equiv \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

a partir del cual se despeja la tangente t de ϕ con

$$t = \frac{\text{signum } \theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$$

.

Repaso del Método de Jacobi

(2)

- El coseno y seno del ángulo ϕ se obtienen con

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$
$$s = tc$$

a partir de los cuales se calcula además

$$\tau = \tan \frac{\phi}{2} \equiv \frac{s}{1 + c}$$

Repaso del Método de Jacobi

(3)

- La matriz transformada con una rotación de Jacobi se modifica con

$$a'_{pq} = 0$$

$$a'_{pp} = a_{pp} - ta_{pq}$$

$$a'_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}$$

$$a'_{rp} = a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp})$$

$$a'_{rq} = a_{rq} + s(a_{rq} - \tau a_{rp}) \quad r \neq p, r \neq q$$

Método de Givens

(1)

- Con el método de Givens se elige un ángulo de rotación para

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$s = tc$$

que ponga a cero un elemento que **no** es ninguno de los cuatro elementos a_{pp} , a_{pq} , a_{qp} o a_{qq} .

- Por ejemplo, \mathbf{P}_{23} elimina a_{31} (y por simetría a_{13}).
- Luego se elige \mathbf{P}_{24} para anular a a_{41}
- En general, se elige la secuencia

$$\mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{24} \dots \mathbf{P}_{2n}; \mathbf{P}_{34}\mathbf{P}_{35} \dots \mathbf{P}_{3n}; \dots; \mathbf{P}_{n-1,n}$$

en donde \mathbf{P}_{jk} anula a $a_{k,j-1}$

Método de Givens

(2)

- El método funciona porque elementos como a'_{rp} y a'_{rq} con $r \neq p$ y $r \neq q$ son combinaciones lineales de los valores anteriores a_{rp} y a_{rq} :

$$a'_{rp} = ca_{rp} - sa_{rq} \quad r \neq p, r \neq q$$

$$a'_{rq} = ca_{rq} + sa_{rp}$$

- Así, si ambos a_{rp} y a_{rq} ya fueron anulados, permanecerán como cero durante el proceso
- Se requieren $n^2/2$ rotaciones y $4n^3/3$ multiplicaciones (sin contar las requeridas para acumular las transformaciones).
- El (siguiente) método de Householder, es tan estable como el de Givens, pero un factor 2 más eficiente, y por tanto se prefiere dicho método.

Método de Householder

(1)

- El algoritmo de Householder reduce una matriz \mathbf{A} simétrica y cuadrada $n \times n$ a forma tridiagonal por medio de $n-2$ transformaciones **ortogonales**.
- Cada transformación elimina la parte requerida de una columna y fila correspondiente.
- El punto de partida es la matriz de Householder \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T$$

donde $\underline{\mathbf{w}}$ es un vector real con $|\underline{\mathbf{w}}|^2 = 1$ y $\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T$ es su producto externo.

- La aplicación de esta matriz a un vector $\underline{\mathbf{x}}$ tiene como efecto su reflexión con respecto a un hiperplano que pasa por el origen

Método de Householder

(2)

- La matriz \mathbf{P} es ortogonal porque

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2 &= (\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T)(\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T) \\ &= \mathbf{I} - 4\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T + 4\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{w}}^T\underline{\mathbf{w}})\underline{\mathbf{w}}^T \\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

- Por lo tanto $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$; además $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ con lo que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ lo que implica **ortogonalidad**.
- Si un vector $\underline{\mathbf{v}}$ es ortogonal a $\underline{\mathbf{w}}$, entonces

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T)\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{Iv}} - 2\underline{\mathbf{w}}\underbrace{(\underline{\mathbf{w}}^T\underline{\mathbf{v}})}_0 = \underline{\mathbf{v}}$$

por lo que $\underline{\mathbf{v}}$ es un eigenvector de \mathbf{P} con eigenvalor 1

Método de Householder

(3)

- Puesto que en un espacio de n dimensiones existen $n - 1$ vectores ortogonales a cualquier vector $\underline{\mathbf{w}}$, entonces el eigenvalor 1 tiene multiplicidad $n - 1$.
- Puesto que

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T \right) \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{Iw}} - 2\underline{\mathbf{w}} \underbrace{(\underline{\mathbf{w}}^T \underline{\mathbf{w}})}_1 = -\underline{\mathbf{w}}$$

entonces -1 también es un eigenvalor

Método de Householder

(4)

- La matriz \mathbf{P} se puede reescribir para cualquier vector $\underline{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H}$$

con el escalar H

$$H = \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{u}}|^2$$

- Supóngase que $\underline{\mathbf{x}}$ es la primera columna de \mathbf{A} . Se elige entonces

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} \mp |\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}}_1$$

con el vector unitario

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$$

(el signo se elegirá posteriormente)

Método de Householder

(5)

- Se cumple entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\underline{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H} \right) \underline{\mathbf{x}} \\
 &= \underline{\mathbf{x}} - \frac{\underline{\mathbf{u}}}{H} (\underline{\mathbf{x}} \mp |\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}}_1)^T \underline{\mathbf{x}} \\
 &= \underline{\mathbf{x}} - \frac{2\underline{\mathbf{u}}(|\underline{\mathbf{x}}|^2 \mp |\underline{\mathbf{x}}|x_1)}{2|\underline{\mathbf{x}}|^2 \mp 2|\underline{\mathbf{x}}|x_1} \\
 &= \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{u}} \\
 &= \pm |\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}}_1
 \end{aligned}$$

- La matriz \mathbf{P} pone en cero todos los elementos de $\underline{\mathbf{x}}$ excepto el primero.

Método de Householder

(6)

- Para reducir la matriz simétrica \mathbf{A} a forma tridiagonal se elige el vector $\underline{\mathbf{x}}$ de la matriz de Householder $^{(n-1)}\mathbf{P}_1$ como los $n-1$ elementos inferiores de la primera columna:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathbf{A} &= \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \hline k & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \end{aligned}$$

$^{(n-1)}\mathbf{P}_1$

irrelevante

irrelevante

- De este modo, los $n-2$ elementos inferiores son anulados.

Método de Householder

(7)

- Aquí se han partido las matrices, con $^{(n-1)}\mathbf{P}_1$ denotando una matriz de Householder de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$, generada solo con los últimos $n-1$ elementos de la primera columna.
- El valor k es \pm la magnitud del vector $\underline{\mathbf{x}} = [a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}]^T$.
- La transformación ortogonal completa es

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PAP} = \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & k & 0 & \dots & 0 \\ \hline k & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

irrelevante

Se ha usado el hecho de que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$

Método de Householder

(8)

- Para la segunda matriz de Householder se elige el vector \underline{x} como los $n-2$ elementos inferiores de la segunda columna:

$$\mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ (n-2)\mathbf{P}_2 \\ \\ \end{array}$$

- El bloque identidad en la esquina superior izquierda asegura que la tridiagonalización alcanzada en el primer paso no se destruya en este paso.
- La matriz de Householder ${}^{(n-2)}\mathbf{P}_2$ de $(n-2)$ -dimensiones crea una fila y columna adicional de la salida tridiagonal.

Método de Householder

(9)

- En vez de realizar explícitamente las multiplicaciones en \mathbf{PAP} , se calcula el vector

$$\underline{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}}}{H}$$

- Así:

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H} \right) = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{u}}^T \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{PAP} = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{u}}^T - \underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{p}}^T + 2K\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T\end{aligned}$$

con el escalar K definido como

$$K = \frac{\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{p}}}{2H}$$

Método de Householder

(10)

- Si se define

$$\underline{\mathbf{q}} \equiv \underline{\mathbf{p}} - K\underline{\mathbf{u}}$$

entonces se tiene

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{q}}\underline{\mathbf{u}}^T - \underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{q}}^T$$

que es la formula fácilmente implementable.

Método de Householder

(11)

- Siguiendo Smith et al. (Biblioteca EISPACK), el algoritmo anterior se implementa pero iniciando con la n -ésima columna, en vez de la primera como se explicó anteriormente.
- En el m -ésimo paso ($m = 1, 2, \dots, n-2$) el vector $\underline{\mathbf{u}}$ tiene la forma

$$\underline{\mathbf{u}}^T = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,i-2}, a_{i,i-1} \pm \sqrt{\sigma}, 0, \dots, 0]$$

donde

$$i \equiv n - m + 1 = n, n-1, \dots, 3$$

y el valor σ (o $|\underline{\mathbf{x}}|^2$ en la notación anterior) es

$$\sigma = a_{i1}^2 + \dots + a_{i,i-1}^2$$

Método de Householder

(12)

- El signo de $\sqrt{\sigma}$ en la definición de $\underline{\mathbf{u}}$ se elige igual al signo de $a_{i,i-1}$ para reducir el error de redondeo.
- Así, las variables por calcular se determinan en el siguiente orden: σ , $\underline{\mathbf{u}}$, H , $\underline{\mathbf{p}}$, K , $\underline{\mathbf{q}}$, $\underline{\mathbf{A}}'$
- En cualquier paso m , la matriz \mathbf{A} es tridiagonal en sus últimas $m - 1$ filas y columnas.
- Los eigenvectores de \mathbf{A} se obtienen aplicando la transformación acumulada \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_{n-2}$$

a los eigenvectores de la matriz tridiagonal obtenida con el método de Householder.

Resumen

- 1 Introducción
- 2 Método de Givens
- 3 Método de Householder

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2018 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica