Métodos para encontrar raíces de polinomios.

Juan Pablo Brenes Coto, Pablo José Bustamante Mora, Emilly Sancho Murillo.
juanp1995@gmail.com pablex.bumo@gmail.com emilysancho@gmail.com
Área académica de Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

***Resumen*—En este artículo se describen y comparan resultados de los métodos Muller y Jenkins-Traub. Utilizando herramientas como la deflación y ténicas como el pulido para el cálculo de las raíces de un polinomio.**

I. Introducción

Conforme el número de avances tecnológicos va en aumento, así también el número de fenómenos físicos que pueden ser abstraídos mediante formulación matemática y que permiten un mayor entendimiento del universo; una manera de observar esta formulación es mediante el uso de polinomio. Ahora, como es de esperarse, dichos polinomios generalmente no resultan sencillos de plasmar puesto que manejan una gran cantidad de variables y/o una gran cantidad de datos.Gracias a la tecnología, el manejo de estas expresiones se ha facilitado bastante, pero la búsqueda por la optimización continua, ya que se tienen una gama de métodos para hallar las raíces de los polinomios, mas no son igual de eficientes.

Por lo que surge la pregunta de cuál método es el mejor para implementar. En el presente documento se comparara el rendimiento de dos métodos para hallar las raíces de un polinomio: el Muller y el Jenkins-Traub. Se discute su funcionamiento, su implementación y se demuestran los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se llegaron.

II. Antecedentes

El estudio del análisis numérico conlleva de varias décadas atrás, por lo que los dos métodos que se desarrollan en el presente documento se pueden encontrar, con lujo de detalles, en las referencias al final del mismo. La descripción del método Müller se encuentra tanto en [1] como en [2], el Jenkins-Traub se puede encontrar en [4] y por último la deflación - técnica que se desarrollará más adelante, se especifica en [1] y [3].

III. Propuesta

III-A. *Deflación polinomial*

Una herramienta utilizada para la evaluación iterativa de los polinomios es la deflación, cuyo funcionamiento general consiste en tomar una raíz del polinomio en cuestión y disminuir el orden del mismo realizando una división polinomial por dicha raíz. El cociente resultante de dicha división se utiliza como el nuevo polinomio para continuar con la búsqueda de nuevas raíces. El objetivo de este método es reducir la complejidad del algoritmo de búsqueda de raíces, al utilizar cada vez un polinomio de menor de grado.

El método de deflación introduce errores de redondeo debido a que las raíces encontradas son aproximaciones de las raíces verdaderas, por esta razón se utiliza la técnica de pulido de raíces. Esta técnica consiste en, luego de encontrar una nueva aproximación de una raíz, y deflacionar el polinomio; se utiliza dicha raíz como nuevo punto para iniciar nuevamente el algoritmo de búsqueda de raíces utilizado, sin embargo, utilizando el polinomio original y no el cociente resultante de la deflación.

III-B. *Método de Muller*

Este método generaliza el método de la secante, al utilizar interpolación cuadrática en lugar interpolación lineal. Requiere de un punto inicial x_i en el cual iniciar la búsqueda, más dos aproximaciones x_{i-2}, x_{i-1} anteriores de la raíz, de esta manera se calculan los coeficientes de la parábola que pasa por estos tres puntos:

$$q = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \tag{1}$$

$$A = qP(x_i) - q(1+q)P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2}) \tag{2}$$

$$B = (2q+1)P(x_i - (1+q)^2P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2})) \tag{3}$$

$$C = (1+q)P(x_i) \tag{4}$$

Con los coeficientes de la parábola, se encuentra la intersección de esta con el eje x; aproximando de esta manera la raíz del polinomio:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}} \tag{5}$$

La formula cuadrática alternativa se utiliza para evitar errores de redondeo.

III-C. *Método Jenkins-Traub*

El método de Jenkins-Traub posee bastante complejidad debido a que su diagrama de flujo presenta varias ramificaciones y saltos a partes específicas del mismo. Asimismo su fundamento matemático es bastante importante para la ejecuciónón del programa.

Inicialmente es imperativo encontrar la raíz más pequeña que tenga el polinomio, puesto que el método encuentra las raíces en orden creciente. Con cada raíz, se deflaciona el polinomio y se vuelve a iterar hasta que el grado del mismo sea 2 o menor. En caso de ser dos, se hallan las raíces de manera directa.

Para asegurar que el valor encontrado corresponda verdaderamente a la raíz, se realizan dos pruebas de exactitud: la recurrencia escalar y la técnica de mínimos cuadrados - que vela por la precisión de los valores encontrados -. De no pasar dichas pruebas se realizan desplazamientos en el polinomio - tanto para la izquierda como para la derecha - para encontrar la raíz, cuyo valor sería el número encontrado al realizar el desplazamiento menos la magnitud del desplazamiento mismo.

IV. Resultados

IV-A. Método de Muller

Polinomio	x_i	x_{i+1}	Iteraciones
$x^3 + 1$	1	-1.0000	1
$-5x^4 + 2.5x^2 + x$	1	0.0000 1.6667	2
$x^2 - x - 6$	1	-2.0000 3.0000	1

Tabla I
Raíces aproximadas utilizando el método de Muller para polinomios de coeficientes reales. Se retornan solo las raíces reales.

Polinomio	x_i	x_{i+1}	Iteraciones
$x^3 + 1$	$1 + 2i$	$0.5000 + 0.8660i$ $-1.0000 + -0.0000i$ $0.5000 - 0.8660i$	14 2 1
$-5x^4 + 2.5x^2 + x$	$1 + 2i$	$0.0000 + 0.0000i$ $-0.4282 + 0.2239i$ $0.8564 + 0.0000i$ $-0.4282 - 0.2239i$	24 11 3 2
$x^2 - x - 6$	$1 + 2i$	$-2.0000 + 0.0000$ $3.0000 + 0.0000$	1

Tabla II
Raíces aproximadas utilizando el método de Muller para polinomios de coeficientes reales. Se retornan todas las raíces.

Polinomio	x_i	x_{i+1}	Iteraciones
$x^4 + (5 + 2i)x^2$ $+1.5x + (1.5 + 2i)$	$0 + 0i$	$-0.3811 + 0.7197i$ $-0.2219 + 2.1378i$ $0.0617 - 0.6164i$ $0.5413 - 2.2412i$	8 9 3 1
$(2 + i)x^3 + (5 - 5i)x^2$ $+2x - 1$	$0 + 0i$	$-0.4113 - 0.2946i$ $-0.8461 + 3.2343i$ $0.2574 + 0.0602$	7 11 2
$(3 + 2i)x^2 + 2$	$0 + 0i$	$0.1274 + 07850i$ $-0.1274 - 0.7850i$	2

Tabla III
Raíces aproximadas utilizando el método de Muller para polinomios de coeficientes complejos. Se retornan todas las raíces.

V. Conclusiones

- El método de Jenkins-Traub requiere un alto nivel de modularización, esto debido a la alta cantidad de saltos que hay en el programa.
- Es recomendable utilizar vectores o arreglos para el almacenamiento de los datos en el método de Jenkins-Traub. Se requieren muchos valores y acceder a ellos de una manera indexada facilita bastante el trabajo.
- La complejidad del método de Muller se encuentra en el manejo de la aritmética compleja que puede surgir durante el algoritmo, ya que este método encuentra todas las raíces de un polinomio; tanto reales como complejas.
- Al implementar el método de Muller, es importante analizar las condiciones que se utilizan para determinar la convergencia de las raíces; ya que el algoritmo puede converger a valores que no necesariamente son raíces del polinomio, especialmente al encontrar raíces complejas.
- Se sugiere implementar el pulido en la técnica, para asegurar que las raíces obtenidas son las más adecuadas para el problema en cuestión.

Referencias

[1] William H. Press, Saul A. Teukolsky, “Numerical Recipes in C”, segunda edición, Cambridge University Press, 2002.

[2] Numerical Analysis, R.L. Burden, J.D. Faires, PWS Publishing Company, Boston 1993. http://kilyos.ee.bilkent.edu.tr/~microwave/programs/utilities/numeric1/infoMuller.htm.

[3] Alvarado.P(2018). https://tecdigital.tec.ac.cr/dotlrn/classes/IDC/CE3102/S-2-2018.CA.CE3102.1/file-storage/#/56413520/lec06.pdf

[4] An algorithm for an Automatic General Polynomial Solver, M.A. Jenkins, J.F. Traub, Standford 1970. http://posner.library.cmu.edu/Collections/traub62/box00009/fld00014/bdl0002/doc0001/doc_9b14f2b1.pdf.