Repaso de álgebra lineal

Lección 09

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Matriz

Matriz de $n \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- n: filas
- m: columnas
- En notación a_{ij} primer subíndice es la fila y segundo la columna

Vector columna

Vector de n dimensiones

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector fila

Vector de n dimensiones

$$\underline{\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Matriz en vectores

Matriz $n \times m$ $\mathbf{A}$ se compone de n vectores fila

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:}^T \end{bmatrix}$$

o m vectores columna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:} & \underline{\mathbf{a}}_{2:} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{m:} \end{bmatrix}$$

Vectores como matrices

Observe que todo vector es un tipo particular de matriz, de dimension $1 \times m$ para un vector fila o $n \times 1$ para un vector columna.

Matriz transpuesta

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

entonces su transpuesta es

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

en otras palabras, si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ entonces $b_{ij} = a_{ji}$

Matriz simétrica

Matriz es **simétrica** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es decir $a_{ij} = a_{ji}$.

Matriz diagonal

Matriz es **diagonal** si todos los elementos son cero excepto aquellos en la diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Matriz es diagonal con todos sus elementos no nulos iguales a uno

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Matriz es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Matriz es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriz a bandas

La matriz a bandas tiene todos los elementos cero excepto una banda centrada en la diagonal principal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Cuando el ancho de la banda tiene tres diagnonales la matriz se denomina **tridiagonal**

Producto escalar-matriz

El producto $s\mathbf{A}$ es otra matriz con todos los componentes escalados

$$s\mathbf{A} = s\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1m} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{n1} & sa_{n2} & \cdots & sa_{nm} \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

Suma definida para dos matrices de idéntico tamaño:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Producto punto entre vectores

El producto punto está definido para dos vectores de dimension n, y es un valor **escalar** calculado con:

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

El producto punto es un tipo de producto *interno* y por tanto se puede denotar también como $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle$

Producto externo entre vectores

El producto externo está definido para dos vectores y es una **matriz** de dimensiones $n \times m$ con n el tamaño del primer vector y m el tamaño del segundo vector:

$$\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

Producto matricial

El producto entre una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times m$ por otra matriz $\mathbf{B}$ de dimension $m \times l$ es la matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_{:1} & \underline{\mathbf{b}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}}_{:l} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:1} & \underline{\mathbf{a}}_{1:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{1:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:l} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:1} & \underline{\mathbf{a}}_{2:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{2:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:1} & \underline{\mathbf{a}}_{n:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:l} \end{bmatrix}$$

que es una matriz de $n \times l$.

Note la similitud con el producto externo de vectores.

Propiedades del producto matricial

- El producto matricial **NO** es conmutativo

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial **sí** es asociativo

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial es distributivo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Interpretaciones del producto matricial (1)

Obsérvese primero el producto matriz-vector

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:}^T \end{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

En el producto con una matriz, este patrón se presenta para cada uno de los vectores columna de la segunda matriz, y el vector columna resultante mantiene la misma posición horizontal en el resultado que aquella en la segunda matriz

Interpretaciones del producto matricial (2)

Otra forma de ver el producto matriz-vector es como combinación lineal de los vectores columna:

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{:1} & \underline{\mathbf{a}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{:m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b_1\underline{\mathbf{a}}_{:1} + b_2\underline{\mathbf{a}}_{:2} + \cdots + b_m\underline{\mathbf{a}}_{:m}$$

Observe la similitud con el producto punto.

Interpretaciones del producto matricial (3)

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

(representación gráfica en gnuplot)

Interpretaciones del producto matricial (4)

Obsérvese ahora el producto vector-matriz

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} &= \underline{\mathbf{b}}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{:1} & \underline{\mathbf{a}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{:n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:1} & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:n} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En el producto de dos matrices, este patrón se presenta para cada uno de los vectores fila de la primera matriz, y el vector fila resultante mantiene la misma posición vertical en el resultado que aquella en la primera matriz

Interpretaciones del producto matricial (5)

Otra forma de ver el producto vector-matriz es como combinación lineal de los vectores fila:

$$\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n:}^T \end{bmatrix} = b_1 \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T + b_2 \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T + \cdots + b_n \underline{\mathbf{a}}_{n:}^T$$

Observe de nuevo la similitud con el producto punto.

Interpretaciones del producto matricial (6)

Dos posibles interpretaciones

Lo anterior implica que el producto de dos matrices puede intepretarse como combinaciones lineales de las columnas de la primera matriz, o de las filas de la segunda matriz.

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es invertible si existe otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.
Una matriz es **ortogonal** si se cumple $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$, es decir, si sus vectores (fila y columna) son ortogonales entre sí.

Determinante de una matriz

La determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se denota como $|\mathbf{A}|$ o $\det \mathbf{A}$ y se calcula para una matriz 2×2 con

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y para una matriz de mayor orden como

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{fj} |\mathbf{A}_{fj}|$$

donde $\mathbf{A}_{fj}$ es la matriz adjunta de a_{fj} dada por $(-1)^{f+j}\mathbf{M}_{fj}$, y $\mathbf{M}_{fj}$ es el menor complementario de a_{fj}, es decir, una matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtenida eliminando la fila f y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

Propiedades de la determinante

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de $n \times n$

- $|s\mathbf{A}| = s^n|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{I}| = 1$
- Distributividad: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- $|\mathbf{I}| = 1 = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$

Traza de una matriz

La traza de una matriz es la suma de los elementos en su diagonal

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Aumento de una matriz

Aumentar una matriz significa agregar columnas o filas a otra matriz, por ejemplo sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

La matriz **A** aumentada con la matriz identidad es

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas de ecuaciones en notación matricial (1)

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede expresar de la forma

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

que representa a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o en forma tradicional

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Sistemas de ecuaciones en notación matricial (2)

- Si el sistema tiene solución, el vector con las incógnitas $\underline{\mathbf{x}}$ se puede despejar multiplicando ambos lados a la izquierda con $\mathbf{A}^{-1}$ con

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}}$$

- El cálculo de la matriz inversa es un proceso numéricamente inestable, por lo que se estudiarán métodos para encontrar la solución evitando la inversión.
- Varios métodos usan la matriz $\mathbf{A}$ aumentada con $\underline{\mathbf{b}}$:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Resumen

1. Repaso de álgebra lineal
   - Vectores y matrices
   - Operaciones matriciales

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux