

Descomposición en Valores Singulares

Lección 13

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

- 1 Generalidades
- 2 Repaso de espacios vectoriales
 - Combinaciones lineales
 - Subespacios y bases
- 3 Espacios de una matriz
 - Espacio columna
 - Espacio nulo
- 4 Ejemplos
 - Nulidad

Justificación

Descomposición en Valores Singulares

- **DVS**: Descomposición en Valores Singulares
- **SVD**: *Singular Value Decomposition*
- Conjunto de técnicas para tratar con sistemas de ecuaciones singulares o cercanos a singulares.
- DVS funciona donde la descomposición **LU** o la eliminación Gaussiana fallan
- DVS permite además diagnosticar cuál es el problema
- Aun con singularidades, DVS provee *una* solución
- AQUÍ: cómo usar DVS (en vez de cómo hacer DVS)

Principio matemático

Descomposición en Valores Singulares

DVS parte de

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

con

- \mathbf{A} : matriz $m \times n$
- \mathbf{U} : matriz $m \times m$ de **columnas** ortogonales

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

- \mathbf{W} : matriz diagonal con n **valores singulares** no negativos
- \mathbf{V} : matriz cuadrada $n \times n$ de **columnas** y **filas** ortogonales

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

Situaciones sobredeterminadas

Sistemas **sobredeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m > n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso \mathbf{U} tiene **todas** sus columnas ortogonales

Situaciones subdeterminadas

Sistemas **subdeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m < n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso

- $w_j = 0$ para $j = m+1, \dots, n$, y sus correspondientes columnas $\mathbf{u}_{\cdot j} = \mathbf{0}$.
- Únicamente las primeras m columnas de \mathbf{U} son ortogonales.

Unicidad de DVS

- DVS es una descomposición única excepto por
 - permutaciones de las columnas correspondientes de \mathbf{U} , elementos de \mathbf{W} y columnas de \mathbf{V} (o filas de \mathbf{V}^T)
 - rotaciones ortogonales entre columnas de \mathbf{U} y \mathbf{V} cuyos elementos correspondientes en \mathbf{W} son idénticos (por ejemplo, multiplicando dichas columnas por -1)
- Resultados de DVS no necesariamente aparecen en orden *canónico*, así que se deben permutar las columnas de las matrices para que la diagonal de \mathbf{W} tenga valores singulares en orden decreciente.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.
- Formalmente, un **vector** es un elemento de un **espacio lineal** o **espacio vectorial**.

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores \mathbb{V} se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo \mathbb{F} (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) si

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores \mathbb{V} se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo \mathbb{F} (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) si

- para una operación de adición vectorial en \mathbb{V} , denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores \mathbb{V} se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo \mathbb{F} (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) si

- para una operación de adición vectorial en \mathbb{V} , denotada $\underline{x} + \underline{y}$, con $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en \mathbb{V} , denotada como $a\underline{x}$, con $\underline{x} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores \mathbb{V} se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo \mathbb{F} (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) si

- para una operación de adición vectorial en \mathbb{V} , denotada $\underline{x} + \underline{y}$, con $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en \mathbb{V} , denotada como $a\underline{x}$, con $\underline{x} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:
 - $a\underline{x} \in \mathbb{V}$. (\mathbb{V} es cerrado con respecto a la multiplicación escalar).
 - $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$. (Asociatividad de la multiplicación escalar en \mathbb{V}).
 - Si 1 representa el elemento neutro multiplicativo del cuerpo \mathbb{F} entonces $1\underline{x} = \underline{x}$. (Neutralidad de uno).
 - $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$. (Distributividad con respecto a la adición vectorial).
 - $(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$. (Distributividad con respecto a la adición del cuerpo \mathbb{F}).

Combinación lineal

- El vector \underline{x} es una **combinación lineal** de los vectores $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ si

$$\underline{x} = c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_n \underline{u}_n$$

con $c_i \in \mathbb{F}$.

- Ya vimos esto en la forma $\underline{x} = \underline{U}\underline{c}$:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \dots & \underline{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Independencia lineal

El conjunto $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- **linealmente dependiente** si algún \underline{u}_i es una combinación lineal de otros elementos de \mathcal{U} .
- **linealmente independiente** o **libre** si

$$c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_n \underline{u}_n = \underline{0}$$

solo con $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Independencia lineal

Consecuencias

- un conjunto que contiene un solo vector, es libre si el vector es no nulo,
- el vector nulo 0 no forma parte de ningún sistema libre,
- todo subconjunto de un sistema libre es también libre,
- el número máximo de vectores de un sistema libre es igual a la **dimensión** de dichos vectores.

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

- A cada elemento del conjunto \mathcal{U} se le denomina en este contexto **vector generador**.

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

- A cada elemento del conjunto \mathcal{U} se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

- A cada elemento del conjunto \mathcal{U} se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
 - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

- A cada elemento del conjunto \mathcal{U} se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
 - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
 - se suma un generador con otro,

Generación de espacios

- Un espacio lineal \mathbb{V} se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{U} , al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

- A cada elemento del conjunto \mathcal{U} se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
 - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
 - se suma un generador con otro,
 - si se suprimen los generadores que son una combinación lineal de los demás.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de \mathbb{V} si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal \mathbb{V} contiene al menos dos subespacios: el mismo \mathbb{V} y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de \mathbb{V} si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal \mathbb{V} contiene al menos dos subespacios: el mismo \mathbb{V} y $\{\mathbf{0}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales \mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 del mismo espacio lineal \mathbb{V} es a su vez un subespacio lineal.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de \mathbb{V} si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal \mathbb{V} contiene al menos dos subespacios: el mismo \mathbb{V} y $\{\mathbf{0}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales \mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 del mismo espacio lineal \mathbb{V} es a su vez un subespacio lineal.
- La unión $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales \mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 del mismo espacio lineal \mathbb{V} **no** necesariamente es un subespacio lineal.

Base

- \mathcal{U} es una **base** de \mathbb{V} si los vectores generadores $\underline{u}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.

Base

- \mathcal{U} es una **base** de \mathbb{V} si los vectores generadores $\underline{u}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{0}\}$ posee al menos una base.

Base

- \mathcal{U} es una **base** de \mathbb{V} si los vectores generadores $\underline{u}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{0}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.

Base

- \mathcal{U} es una **base** de \mathbb{V} si los vectores generadores $\underline{u}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{0}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores de la base es la **dimensión** del espacio lineal.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio \mathbb{V} con n dimensiones

- 1 toda base de \mathbb{V} tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio V con n dimensiones

- 1 toda base de V tiene exactamente n elementos,
- 2 todo subconjunto linealmente independiente de V tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de V si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio \mathbb{V} con n dimensiones

- 1 toda base de \mathbb{V} tiene exactamente n elementos,
- 2 todo subconjunto linealmente independiente de \mathbb{V} tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de \mathbb{V} si y solo si tiene exactamente n elementos,
- 3 cualquier subconjunto de \mathbb{V} que actúa como conjunto generador de \mathbb{V} debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio \mathbb{V} con n dimensiones

- 1 toda base de \mathbb{V} tiene exactamente n elementos,
- 2 todo subconjunto linealmente independiente de \mathbb{V} tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de \mathbb{V} si y solo si tiene exactamente n elementos,
- 3 cualquier subconjunto de \mathbb{V} que actúa como conjunto generador de \mathbb{V} debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,
- 4 si los elementos de una determinada base en \mathbb{V} se toman en un **orden determinado**, cualquier elemento de \mathbb{V} puede entonces ser representado por una secuencia única de **coordenadas**.

Unicidad de coeficientes

El último punto indica que si \mathbb{V} tiene como base a

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \dots, \underline{\mathbf{u}}_n\}$$

entonces un vector

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + c_2 \underline{\mathbf{u}}_2 + \dots + c_n \underline{\mathbf{u}}_n$$

puede representarse utilizando tan solo los coeficientes c_i y manteniendo fija la base: $\underline{\mathbf{x}} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$.

Unicidad de coeficientes

Ninguna otra secuencia puede representar con la misma base al vector \underline{x} , puesto que si existiese alguna otra representación equivalente

$$\underline{x} = d_1 \underline{u}_1 + d_2 \underline{u}_2 + \dots + d_n \underline{u}_n$$

entonces la diferencia de ambas representaciones debería ser cero y

$$(d_1 - c_1) \underline{u}_1 + (d_2 - c_2) \underline{u}_2 + \dots + (d_n - c_n) \underline{u}_n = \underline{0}$$

se cumple solo si $d_i = c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ por el requisito de que la base \mathcal{U} debe ser linealmente independiente.

Mapeo lineal

- Sea el sistema

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

con una matriz \mathbf{A} de tamaño $m \times n$, un vector $\underline{\mathbf{x}}$ de n dimensiones, y un vector $\underline{\mathbf{b}}$ de m dimensiones.

- La matriz \mathbf{A} **mapea** o **transforma** linealmente el vector n -dimensional $\underline{\mathbf{x}}$ a otro vector m -dimensional $\underline{\mathbf{b}}$, pues se realiza con $\underline{\mathbf{x}}$ una combinación lineal de sus vectores columna
- La dimensión del espacio vectorial de las *imágenes* $\underline{\mathbf{b}}$ puede ser menor, igual o mayor que la dimensión del espacio vectorial original que contiene a $\underline{\mathbf{x}}$, pero es igual a la dimensión del espacio que contiene a las columnas de \mathbf{A} .

Espacio columna y rango

- Sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución siempre que \mathbf{b} se encuentre en el **espacio columna** o **alcance** de la matriz \mathbf{A} (ingl. *range*).
- El espacio columna o alcance es el espacio **engendrado** por las n columnas de \mathbf{A} :

$$c_1 \mathbf{a}_{.1} + c_2 \mathbf{a}_{.2} + \cdots + c_n \mathbf{a}_{.n} \in C(\mathbf{A}) \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

- El espacio columna $C(\mathbf{A})$ es un **subespacio** de \mathbb{R}^m , que corresponde al espacio de donde se toma cada columna de \mathbf{A}
- El número de columnas linealmente independientes, es decir, la dimensión del espacio columna $C(\mathbf{A})$ se denomina **rango** de la matriz \mathbf{A} (ingl. *rank*).
- Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ entonces el rango estará entre 1 y $\min(n, m)$

Espacio nulo

(1)

- El sistema

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

tiene la solución trivial $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.

- Si $\underline{\mathbf{x}}_1 \neq \underline{\mathbf{0}}$ soluciona el sistema anterior, entonces $c\underline{\mathbf{x}}_1$ también lo hace, pues

$$\mathbf{A}(c\underline{\mathbf{x}}_1) =$$

$$c(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1) =$$

$$c\underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Espacio nulo

(2)

- Si también \underline{x}_2 soluciona el sistema anterior entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2) &= \\ c_1(\mathbf{A}\underline{x}_1) + c_2(\mathbf{A}\underline{x}_2) &= \\ c_1\underline{0} + c_2\underline{0} &= \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}\end{aligned}$$

- Por las dos propiedades anteriores el conjunto de todos los vectores \underline{x} que satisfacen

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$$

constituyen un subespacio vectorial del espacio \mathbb{R}^n (que contiene a todos los \underline{x}), y se denomina **espacio nulo** de \mathbf{A} .

Espacio nulo

(3)

- La dimensión del espacio nulo de \mathbf{A} se denomina **nulidad** de \mathbf{A}
- La nulidad puede tomar un valor desde cero hasta n .
- La suma del rango de \mathbf{A} más su nulidad es igual a n (número de columnas de \mathbf{A})

Solución única

- Si \mathbf{A} es cuadrada $n \times n$ y con rango n entonces \mathbf{A} es no-singular e invertible; $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada \mathbf{b} y solo el $\mathbf{0}$ se mapea a $\mathbf{0}$ (dimensión del espacio nulo es cero).
- En este caso \mathbf{LU} es el método de preferencia

Multiples o no soluciones

Si \mathbf{A} tiene nulidad mayor que cero (rango menor que n) pueden pasar dos cosas:

- la mayoría de vectores \mathbf{b} no producen solución
- algunos vectores \mathbf{b} tienen como solución un subespacio completo

Relación entre DVS con los espacios de una matriz

La descomposición en valores singulares construye explícitamente

- base vectorial del espacio columna (columnas de \mathbf{U} con valores singulares no nulos)
- base vectorial del espacio nulo (columnas de \mathbf{V} con valores singulares correspondientes nulos)

DVS de matrices cuadradas

- Si \mathbf{A} es cuadrada, entonces \mathbf{U} , \mathbf{W} y \mathbf{V} también lo son.
- Puesto que las matrices son ortogonales o diagonales, el cálculo de la matriz inversa es directa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} [\text{diag}(1/w_j)] \mathbf{U}^T$$

- Único problema posible $w_j = 0$ o ≈ 0
- Número de condición de la matriz \mathbf{A} se define ahora como $\nu = \max_j(w_j) / \min_i(w_i)$
- Si $\nu \rightarrow \infty$ entonces \mathbf{A} es singular
- Si $\nu \gg 0$ y $1/\nu \approx \mathcal{O}$ entonces \mathbf{A} es mal condicionada

Solución de sistema homogéneo

- El sistema homogéneo es planteado como $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
- Cualquier combinación lineal de las columnas de \mathbf{V} con correspondiente valor singular $w_j = 0$ es solución a este sistema.

Solución de sistema con nulidad mayor que cero

(1)

Para

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

- Si $\underline{\mathbf{b}}$ está en el alcance de \mathbf{A} (en su espacio columna) y la nulidad de \mathbf{A} no es cero, entonces sistema tiene infinitas soluciones, pues si $\underline{\mathbf{x}}_1$ es una solución, entonces si se suma con cualquier vector $\underline{\mathbf{n}}$ del espacio nulo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{n}}) &= \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}\underline{\mathbf{n}} \\ &= \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{0}} \\ &= \underline{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

Solución de sistema con nulidad mayor que cero

(2)

- Usualmente se busca la solución de menor norma $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2$, que se obtiene fácilmente de

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1} \underline{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V} [\text{diag}(1/w_j)] (\mathbf{U}^T \underline{\mathbf{b}})\end{aligned}$$

donde para $w_j = 0$ se sustituye en la matriz diagonal inversa $1/w_j \rightarrow 0$, anulando así todo aporte del espacio nulo.

Solución fuera del alcance de \mathbf{A}

Para

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Si \mathbf{b} está fuera del alcance de \mathbf{A} , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{V}[\text{diag}(1/w_j)](\mathbf{U}^T\mathbf{b})\end{aligned}$$

con $1/w_j \rightarrow 0$ si $w_j = 0$ encuentra “una” solución que minimiza

$$r \equiv |\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|$$

con r el residuo de la solución.

Seudoinversa de \mathbf{A}

El cálculo de la matriz inversa utilizando DVS:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} [\text{diag}(1/w_j)] \mathbf{U}^T$$

forzando $1/w_j \rightarrow 0$ si $w_j = 0$ se denomina la inversa de Moore-Penrose o la pseudoinversa de \mathbf{A} , y se denota con \mathbf{A}^+ .

En conclusión:

- Si todo $w_j \neq 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \underline{\mathbf{b}}$ resuelve el sistema no singular.
- Si algunos $w_j = 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \underline{\mathbf{b}}$ devuelve la “mejor” solución en el sentido de que retorna el vector $\underline{\mathbf{x}}$ más pequeño que resuelve el sistema, o aquel que produce el menor residuo si no existe solución.

Ejemplo: Matriz con nulidad

(1)

Utilizando en octave $[U,W,V]=\text{svd}(A)$ se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

Ejemplo: Matriz con nulidad

(2)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0,59684 & -0,06151 & -0,80000 \\ -0,10252 & 0,99473 & 0,00000 \\ -0,79578 & -0,08201 & 0,60000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 7,10741 & 0 & 0 \\ 0 & 1,21848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0,699784 & -0,420676 & -0,577350 \\ -0,014424 & 0,816369 & -0,577350 \\ -0,714208 & 0,395693 & 0,577350 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matriz con nulidad

(3)

- Con $\underline{\mathbf{b}} = [9; 0; 12]^T$ la solución a $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ es $\underline{\mathbf{x}} = [1; -2; 2]^T$
- La nulidad de \mathbf{A} es 1 y el espacio nulo lo engendra $\underline{\mathbf{n}} = [-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$
- Si se hace $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}} + c\underline{\mathbf{n}}$ para cualquier c real se obtiene el mismo $\underline{\mathbf{b}}$ con $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}'$

Ejemplo: Compresión de matrices

(1)

- Con $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$ puede aproximarse \mathbf{A} descartando vectores asociados a valores singulares más pequeños:

$$\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{V}^T$$

con $\tilde{\mathbf{W}} = \text{diag}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n)$ donde

$$\tilde{w}_i = \begin{cases} w_i & \text{si } w_i > \tau \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Se descartan entonces últimas columnas de \mathbf{V} y de \mathbf{U}

Resumen

- 1 Generalidades
- 2 Repaso de espacios vectoriales
 - Combinaciones lineales
 - Subespacios y bases
- 3 Espacios de una matriz
 - Espacio columna
 - Espacio nulo
- 4 Ejemplos
 - Nulidad

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2018 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica