

Eigensistemas

Lección 24

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

- 1 Repaso
 - Eigensistemas
 - Diagonalización
- 2 Solución de eigensistemas
- 3 Relación con la Descomposición en Valores Singulares
- 4 Transformaciones de Jacobi

Eigensistemas

(1)

- **Eigensistemas**: se conocen también como sistemas propios, autosistemas o sistemas característicos.
- Estos sistemas tienen la forma

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

con la matriz cuadrada \mathbf{A} .

- A todo vector \underline{x} que satisface la ecuación anterior se le denomina **eigenvector** (vector propio, autovector o vector característico) de la matriz \mathbf{A}
- Al valor λ se le denomina **eigenvalor** (valor propio, autovalor o valor característico) del eigenvector \underline{x}

Eigensistemas

(2)

- Multiplicando el vector por la matriz identidad no lo modifica

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{I}\underline{\mathbf{x}}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

que tiene la solución trivial $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.

- Otras soluciones con $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ posibles solo si $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es singular (tiene nulidad mayor que cero), por lo que

$$\det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Eigensistemas

(3)

- Puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eigensistemas

(4)

- La ecuación $\det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \underline{0}$ es entonces

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \underline{0}$$

que produce un polinomio de orden n en términos de λ .

- El problema de encontrar los valores de λ con esta ecuación es mal condicionado, aun cuando el problema de los eigenvalores en principio esté bien condicionado. Por ello se requieren métodos adicionales, que son usualmente iterativos.

Eigensistemas

(5)

- Para cada uno de los λ_i se plantea un sistema de ecuaciones

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

que permite encontrar las componentes del eigenvector correspondiente.

Aplicaciones

- Análisis espectral de grafos
- Reducción de dimensiones (Reconocimiento de Patrones)
- Observabilidad y Controlabilidad (Control Automático)
- En general: *diagonalización* de matrices

Desplazamiento de eigenvalores

(1)

- Si se suma $\tau \mathbf{I}$ a la matriz \mathbf{A} , entonces todos los eigenvalores se desplazan τ .
- El desplazamiento de eigenvalores no cambia los eigenvectores.

Definiciones y propiedades

(1)

- Matriz simétrica: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$ (real)
- Matriz ortogonal: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$
- Matriz hermítica o autoadjunta: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}^*$ (compleja)
- Matriz unitaria: $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$
- Matriz normal: $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ (conmutativa)
- Si matrices son reales:
 - matriz hermítica \equiv matriz simétrica
 - matriz unitaria \equiv matriz ortogonal
 - matrices simétricas y ortogonales son normales

Definiciones y propiedades

(2)

- Los eigenvalores de una matriz hermítica son todos reales
- Los eigenvalores de una matriz real no simétrica son reales o complejos (en pares conjugados)
- Los eigenvalores de una matriz compleja no hermítica son en general complejos

Definiciones y propiedades

(3)

- Los eigenvectores de una matriz normal con eigenvalores no degenerados (distintos) son completos y ortogonales, y engendran el espacio vectorial n -dimensional
- Si una matriz no es normal, los eigenvectores no son ortogonales y no es siempre posible engendrar el espacio vectorial n dimensional completo. Las matrices son en este caso “defectuosas”

Eigenvectores derechos e izquierdos

(1)

- Los eigenvectores **derechos** satisfacen

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}$$

y se pueden empaquetar en las columnas de una matriz \mathbf{X}_R

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_R = \mathbf{X}_R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Los eigenvectores **izquierdos** satisfacen

$$\underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} = \lambda \underline{\mathbf{x}}^T$$

y se pueden empaquetar en las filas de una matriz \mathbf{X}_L

$$\mathbf{X}_L \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{X}_L$$

Eigenvectores derechos e izquierdos

(2)

- Multiplicando a la izquierda los eigenvectores derechos por \mathbf{X}_L

$$\mathbf{X}_L \mathbf{A} \mathbf{X}_R = \mathbf{X}_L \mathbf{X}_R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Multiplicando a la derecha los eigenvectores izquierdos por \mathbf{X}_R

$$\mathbf{X}_L \mathbf{A} \mathbf{X}_R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{X}_L \mathbf{X}_R$$

- De esto se deriva

$$\mathbf{X}_L \mathbf{X}_R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{X}_L \mathbf{X}_R$$

que se puede cumplir si y solo si $\mathbf{X}_L \mathbf{X}_R$ es diagonal, lo que implica que los eigenvectores son ortogonales entre sí.

- Si se normalizan los eigenvectores para que tengan norma 1, se cumple además $\mathbf{X}_L \mathbf{X}_R = \mathbf{I}$, de donde se deriva que las matrices \mathbf{X}_L y \mathbf{X}_R son inversas entre sí.

Diagonalización

(1)

- Multiplicando

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_R = \mathbf{X}_R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

por la matriz inversa de \mathbf{X}_R se obtiene

$$\mathbf{X}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Esta **transformación de semejanza** se conoce como diagonalización de la matriz \mathbf{A}

Diagonalización

(2)

- Con $\det |\mathbf{AB}| = \det |\mathbf{A}| \det |\mathbf{B}|$, $\det |\mathbf{A}^{-1}| = 1/\det |\mathbf{A}|$, las transformaciones de semejanza mantienen los eigenvalores intactos:

$$\begin{aligned}\det |\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{AZ} - \lambda\mathbf{I}| &= \det |\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{AZ} - \mathbf{Z}\lambda\mathbf{I})| = \det |\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{AZ} - \lambda\mathbf{IZ})| \\ &= \det |\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{Z}| \\ &= \det |\mathbf{Z}^{-1}| \det |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| \det |\mathbf{Z}| = \det |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\end{aligned}$$

Diagonalización

(3)

- Matrices **reales y simétricas** tienen eigenvectores reales y ortonormales, de modo que la transformación de semejanza es ortogonal.
- Si bien matrices **reales no simétricas** se pueden diagonalizar, si los eigenvectores son completos, sus eigenvalores serán complejos.
- Sin embargo, una matriz real no simétrica se puede reducir a otra matriz con bloques reales de 2×2 en la diagonal, con los eigenvalores en pares complejos conjugados.

Estrategia de cálculo de eigensistemas

(1)

- El método general de cálculo de eigensistemas **diagonaliza** la matriz **A** con una secuencia de transformaciones de semejanza:

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \\
 & \rightarrow & \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \\
 & \rightarrow & \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \\
 & \rightarrow & \mathbf{P}_4^{-1} \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \\
 & \rightarrow & \vdots
 \end{array}$$

- Los eigenvectores serán las columnas de la acumulación de transformaciones que llevaron a la matriz diagonal:

$$\mathbf{X}_R = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \cdots$$

Estrategia de cálculo de eigensistemas

(2)

- No siempre es necesario reducir la matriz \mathbf{A} a forma diagonal. Por ejemplo, si solo se requieren los eigenvalores, es suficiente una reducción de \mathbf{A} a forma triangular, en cuya diagonal se encuentran los eigenvalores.
- Hay dos conjuntos de técnicas de implementación de la estrategia de reducción:
 - 1 Métodos de transformaciones atómicas
 - 2 Métodos de factorización
- Estas técnicas usualmente se combinan.

Estrategia de cálculo de eigensistemas

(3)

- En general, la solución de eigensistemas es una tarea compleja, por lo que se recomiendan utilizar bibliotecas como LAPACK para su cálculo.
- El objetivo en este tema es conocer el principio de funcionamiento de esas rutinas que permita seleccionar el algoritmo correcto para la aplicación particular.
- Los métodos usualmente permiten:
 - 1 Encontrar todos los eigenvalores y ningún eigenvector
 - 2 Encontrar todos los eigenvalores y algunos eigenvectores
 - 3 Encontrar todos los eigenvalores y eigenvectores
- Además los métodos se especializan en matrices simétricas o hermíticas, complejas o reales, tridiagonales, etc.
- Estas especializaciones están hechas para ahorrar tiempo y espacio de almacenamiento.

Métodos de transformaciones atómicas

- En los métodos de transformaciones atómicas cada \mathbf{P}_i realiza tareas concretas, como hacer cero elementos particulares fuera de la diagonal (transformación de Jacobi), o hacer cero filas o columnas enteras (transformaciones Householder)
- En general, una secuencia finita de transformaciones no puede diagonalizar la matriz completamente.
- Hay dos salidas:
 - 1 Usar una secuencia finita que lleve “casi” a la diagonal (como matriz tridiagonal) seguido por un método de factorización
 - 2 Iterar la secuencia finita una y otra vez hasta que el error sea despreciable.

Métodos de factorización

- Los métodos de factorización separan a

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_L \mathbf{F}_R$$

de modo que

$$\mathbf{F}_R \mathbf{F}_L = \mathbf{F}_L^{-1} \mathbf{A} \mathbf{F}_L$$

- Estos métodos tampoco convergen en un número finito de transformaciones, pero los mejores métodos convergen rápidamente y de forma estable.

Relación con la Descomposición en Valores Singulares (1)

- La factorización de la matriz \mathbf{A} con los eigenvectores o eigenvalores es

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{X}_L$$

es similar a la descomposición de valores singulares (DVS)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \mathbf{V}^T$$

- En general, ambas descomposiciones **son diferentes**.
- Primero: DVS permite matrices rectangulares, eigensistemas únicamente matrices cuadradas.

Relación con la Descomposición en Valores Singulares (2)

- Si las matrices son cuadradas, los métodos difieren en qué es ortogonal a qué:
 - Las columnas de \mathbf{U} son mutuamente ortogonales
 - Las columnas de \mathbf{V} son mutuamente ortogonales
 - No hay ninguna ortogonalidad preestablecida entre \mathbf{U} y \mathbf{V}
 - Las filas de \mathbf{X}_L son ortogonales a las columnas de \mathbf{X}_R (excepto las correspondientes al mismo eigenvalor)
 - No hay ortogonalidad entre las filas o columnas de \mathbf{X}_L o de \mathbf{X}_R

Relación con la Descomposición en Valores Singulares (3)

- Si la matriz \mathbf{A} es **simétrica** (o hermítica si es compleja) ambas transformaciones son idénticas

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{U} \operatorname{diag}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{X}_R \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{X}_R^T\end{aligned}$$

y puesto que cada descomposición es única, esto implica que

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} = \mathbf{X}_R = \mathbf{X}_L^T \quad \text{y} \quad \lambda_i = w_i, \quad i = 1 \dots n$$

Transformaciones de Jacobi

Transformaciones de Jacobi

(1)

- El método de Jacobi consiste en una secuencia de transformaciones de semejanza ortogonales de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \\
 &\rightarrow \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \\
 &\rightarrow \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \\
 &\rightarrow \vdots
 \end{aligned}$$

- Cada transformación (rotación de Jacobi) se diseña para eliminar uno de los elementos fuera de la diagonal.
- Las transformaciones sucesivas modifican ceros alcanzados en pasos anteriores, pero los elementos fuera de la diagonal se hacen cada vez más pequeños hasta que sean menores a la precisión alcanzable.

Transformaciones de Jacobi

(2)

- La acumulación de las transformaciones en las iteraciones provee la matriz de eigenvectores, mientras que los elementos de la matriz diagonal final corresponde a los eigenvalores.
- Para matrices **reales y simétricas** este método siempre funciona (y es el caso que se estudia)
- Para matrices de orden mayor a 10, el algoritmo es lento, comparado al método basado en QR

Rotación básica de Jacobi

(1)

- La rotación básica de Jacobi se describe por la matriz \mathbf{P}_{pq}

$$\mathbf{P}_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & \cdots & s & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & -s & \cdots & c & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Todos los elementos en la diagonal son 1 excepto dos elementos c en las filas y columnas p y q
- Todos los elementos fuera de la diagonal son cero excepto dos elementos s y $-s$.

Rotación básica de Jacobi

(2)

- Los elementos c y s corresponden al seno y coseno de un ángulo de rotación ϕ , de modo que $c^2 + s^2 = 1$
- La matriz anterior se usa para transformar la matriz \mathbf{A} con

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}_{pq}^T \mathbf{A} \mathbf{P}_{pq}$$

- $\mathbf{P}_{pq}^T \mathbf{A}$ cambia solo las filas p y q de \mathbf{A}
- $\mathbf{A} \mathbf{P}_{pq}$ cambia solo las columnas p y q de \mathbf{A}

Rotación básica de Jacobi

(3)

- Los elementos de \mathbf{A} modificados son solo las filas y columnas p y q

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} & a'_{1p} & a'_{1q} & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ a'_{p1} & \cdots & a'_{pp} & \cdots & a'_{pq} & \cdots & a'_{p,n} \\ & \vdots & \vdots & & \\ a'_{q1} & \cdots & a'_{qp} & \cdots & a'_{qq} & \cdots & a'_{q,n} \\ & \vdots & \vdots & & \\ & a'_{np} & a'_{nq} & & \end{bmatrix}$$

Rotación básica de Jacobi

(4)

- Calculando $\mathbf{P}_{pq}^T \mathbf{A} \mathbf{P}_{pq}$ y considerando la simetría de \mathbf{A} se obtienen las fórmulas con $r = 1 \dots n$

$$a'_{rp} = ca_{rp} - sa_{rq} \quad r \neq p, r \neq q$$

$$a'_{rq} = ca_{rq} + sa_{rp}$$

$$a'_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sca_{pq}$$

$$a'_{qq} = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sca_{pq}$$

$$a'_{pq} = (c^2 - s^2)a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq})$$

- La idea del método de Jacobi es intentar hacer cero los elementos fuera de la diagonal usando una sucesión de rotaciones.

Rotación básica de Jacobi

(5)

- Para hacer $a'_{pq} = 0$ se despeja lo siguiente para el ángulo de rotación ϕ

$$\theta \equiv \cot 2\phi \equiv \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

- Si $t \equiv s/c$, entonces la definición de θ se reescribe

$$t^2 + 2t\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1}$$

- La raíz más pequeña corresponde a un ángulo de rotación menor a $\pi/4$ en magnitud, que brinda la reducción más estable.

Rotación básica de Jacobi

(6)

- Utilizando la forma alterna para la fórmula cuadrática se tiene:

$$t = \frac{\text{signum } \theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$$

- Si θ es tan grande que θ^2 desborda la representación numérica, se hace $t = 1/2\theta$.
- Se deriva

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$
$$s = tc$$

Rotación básica de Jacobi

(7)

- Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como alteraciones de los valores anteriores

$$a'_{pq} = 0$$

$$a'_{pp} = a_{pp} - ta_{pq}$$

$$a'_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}$$

$$a'_{rp} = a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp})$$

$$a'_{rq} = a_{rq} + s(a_{rq} - \tau a_{rp})$$

con

$$\tau = \tan \frac{\phi}{2} \equiv \frac{s}{1 + c}$$

Convergencia del método de Jacobi

- Para considerar la convergencia del método de Jacobi se utiliza la suma de todos los elementos fuera de la diagonal

$$S = \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2$$

- Las ecuaciones anteriores implican que

$$S' = S - 2|a_{pq}|^2$$

- La secuencia de S' decrece monotónicamente

Resultado del método de Jacobi

(1)

- Cuando el algoritmo converge (S' suficientemente pequeño) se obtiene

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}$$

- Con

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \cdots$$

con \mathbf{P}_i las rotaciones de Jacobi.

- Las columnas de \mathbf{V} son los eigenvectores, que se calculan con

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} \mathbf{P}_i$$

en cada paso, con \mathbf{V} inicialmente igual a \mathbf{I}

Resultado del método de Jacobi

(2)

- En detalle, para $r = 1 \dots n$:

$$v'_{rs} = v_{rs} \quad (s \neq p, s \neq q)$$

$$v'_{rp} = cv_{rp} - sv_{rq}$$

$$v'_{rq} = sv_{rp} + cv_{rq}$$

- Estas ecuaciones se pueden replantear en términos de τ para reducir el error de redondeo.

Estrategia de eliminación

(1)

- Queda por determinar la estrategia del orden de eliminación de los elementos fuera de la diagonal.
- Originalmente Jacobi usó en 1846 la búsqueda (manual) del mayor elemento en la parte triangular superior y eliminó ese elemento, repitiendo el proceso (esto hace al algoritmo $\mathcal{O}(n^2)$)
- Para métodos modernos se usa el método de Jacobi cíclico, en donde se eliminan los elementos fila por fila:

$$\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{13}\dots\mathbf{P}_{1n}; \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{24}\dots\mathbf{P}_{2n}; \dots; \mathbf{P}_{n-1,n}$$

- Una aplicación de estas $n(n-1)/2$ rotaciones de Jacobi se denomina un “barrido”

Estrategia de eliminación

(2)

- Usualmente se requieren entre 6 y 10 barridos para alcanzar convergencia (esto es de $3n^2$ a $5n^2$ rotaciones de Jacobi).
- Para calcular los eigenvalores, cada rotación requiere $4n$ operaciones que consisten de una multiplicación y una suma, por lo que en total se requieren de $12n^3$ a $20n^3$ operaciones.
- Si se deben calcular los eigenvectores se requieren $6n$ operaciones por rotación, que aumenta en 50 % el número de rotaciones.

Resumen

- 1 Repaso
 - Eigensistemas
 - Diagonalización
- 2 Solución de eigensistemas
- 3 Relación con la Descomposición en Valores Singulares
- 4 Transformaciones de Jacobi

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2018 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica