

Eigenvalores y Eigenvectores por descomposición

Lección 26

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

- 1 Eigenvalores y eigenvectores de una matriz tridiagonal
- 2 Eigenvalores y eigenvectores de matrices no simétricas

Eigenvalores y eigenvectores de una matriz tridiagonal (1)

- Partiendo de la matriz real, simétrica, la transformación de Householder revisada anteriormente lleva la integral a una forma tridiagonal

$$\mathbf{P}_{n-2} \cdots \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Una forma directa de calcular los eigenvalores es empleando el polinomio característico y calculando sus raíces.

Eigenvalores y eigenvectores de una matriz tridiagonal (2)

- Existen relaciones recursivas eficientes para encontrar las raíces del polinomio característico de una matriz triangular. Estos inician con un λ dado que es refinado en el proceso.
- Algoritmos de búsqueda son necesarios para encontrar las raíces, y el método es aplicado cuando se requiere una pequeña fracción de los eigenvalores.
- Si todos los eigenvalores se requieren, entonces los métodos de factorización son preferibles.

Algoritmos QR y QL

(1)

- El algoritmo QR se revisó ya anteriormente para las solución de sistemas de ecuaciones lineales
- La idea es descomponer

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

con \mathbf{Q} ortogonal y \mathbf{R} triangular superior.

- Para una matriz general, la descomposición se construye aplicando transformaciones de Householder para eliminar columnas sucesivas de \mathbf{A} bajo la diagonal.

Algoritmos QR y QL

(2)

- Considérese la matriz formada por los factores de la descomposición en orden reverso

$$\mathbf{A}' = \mathbf{RQ}$$

- Puesto que \mathbf{Q} es ortogonal, se deriva de $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$$

con lo que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

- Se observa que \mathbf{A}' es una transformación de semejanza de \mathbf{A} .
- La transformación QR preserva la simetría, la forma tridiagonal y la llamada “forma de Hessenberg”

Algoritmos QR y QL

(3)

- Si en vez de utilizar una matriz triangular superior \mathbf{R} , se emplea una matriz triangular inferior \mathbf{L} , se obtiene la llamada descomposición QL

$$\mathbf{A} = \mathbf{QL}$$

- El algoritmo QL se prefiere sobre el QR puesto que, si las matrices se ordenan de modo que los elementos mayores de la matriz se coloquen en la esquina inferior izquierda, entonces minimiza el error de redondeo.
- El algoritmo QL consiste entonces de una sucesión de transformaciones ortogonales:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_s &= \mathbf{Q}_s \mathbf{L}_s \\ \mathbf{A}_{s+1} &= \mathbf{L}_s \mathbf{Q}_s \quad (= \mathbf{Q}_s^T \mathbf{A}_s \mathbf{Q}_s)\end{aligned}$$

Algoritmos QR y QL

(4)

- El algoritmo funciona fundamentado en un teorema (nada obvio) que establece que
 - 1 Si la matriz \mathbf{A} tiene eigenvalores de diferente valor absoluto $|\lambda_i|$, entonces $\mathbf{A}_s \rightarrow$ [forma triangular inferior] cuando $s \rightarrow \infty$. Los eigenvalores aparecen en la diagonal en orden creciente de magnitud.
 - 2 Si \mathbf{A} tiene un eigenvalor $|\lambda_i|$ de multiplicidad p , $\mathbf{A}_s \rightarrow$ [forma triangular inferior] cuando $s \rightarrow \infty$ excepto por un bloque diagonal de tamaño p con eigenvalores $\rightarrow \lambda_i$
- El algoritmo QL es $\mathcal{O}(n^3)$ por iteración para una matriz general, lo que es ineficiente. Sin embargo, para una matriz tridiagonal el algoritmo es $\mathcal{O}(n)$ por iteración, u $\mathcal{O}(n^2)$ para una matriz Hessenberg.

Algoritmos QR y QL

(5)

- Se revisa ahora el caso con **A** real, simétrica y **tridiagonal**, lo que implica que todos los eigenvalores λ_i son reales.
- Según el teorema, si cualquier λ_i tiene multiplicidad p , entonces deben haber al menos $p - 1$ ceros en la sub y superdiagonal.
- Así, la matriz se puede partir en submatrices que se pueden diagonalizar por separado, y el caso de bloques diagonales para matrices generales no aplica en este caso
- En la demostración del teorema los autores encontraron además que un elemento superdiagonal converge a cero con

$$a_{ij}^{(s)} \sim \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^s$$

- Esta convergencia es lenta si λ_i es cercano a λ_j .

Algoritmos QR y QL

(6)

- La convergencia se puede acelerar utilizando traslación de eigenvalores.
- Si k es una constante, entonces $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ tiene eigenvalores $\lambda_i - k$.
- Si se realiza la descomposición

$$\mathbf{A}_s - k_s\mathbf{I} = \mathbf{Q}_s\mathbf{L}_s$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{s+1} &= \mathbf{L}_s\mathbf{Q}_s + k_s\mathbf{I} \\ &= \mathbf{Q}_s^T\mathbf{A}_s\mathbf{Q}_s\end{aligned}$$

entonces la convergencia se determina por el radio

$$\frac{\lambda_i - k_s}{\lambda_j - k_s}$$

Algoritmos QR y QL

(7)

- La idea es elegir la traslación k_s en cada etapa de modo que se maximice la tasa de convergencia.
- Una buena elección sería tomar k_s cercano a λ_1 , el eigenvalor más pequeño, con el que la primera fila de elementos fuera de la diagonal tiene rápidamente a cero.
- Problema: los eigenvalores son desconocidos.
- En la práctica se calculan los eigenvalores de la submatriz superior izquierda de tamaño 2×2 de \mathbf{A} , y se utiliza k_s igual al eigenvalor más cercano a a_{11} .

Algoritmos QR y QL

(8)

- Supóngase que se han encontrado $r - 1$ eigenvalores de \mathbf{A} . Es posible modificar la matriz eliminando las primeras $r - 1$ filas y columnas, resultando en

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & e_r & \\ & & e_r & d_{r+1} & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & \dots & 0 & e_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

- Se elige k_s igual al eigenvalor de la submatriz 2×2 más cercana a d_r .

Algoritmos QR y QL

(9)

- La convergencia de esta estrategia es cúbica (y en el peor caso cuadrática si la matriz es degenerada), lo que hace al algoritmo atractivo.
- Debido a la traslación de eigenvalores, estos no aparecen ordenados en la diagonal.
- La descomposición QL para matrices generales se realiza por una secuencia de transformaciones de Householder.
- Si la matriz es tridiagonal, es más eficiente usar rotaciones en el plano \mathbf{P}_{pq} .
- Se utiliza la secuencia $\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{23}\cdots\mathbf{P}_{n-1,n}$ para eliminar los elementos $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}$.
- Por simetría, los elementos en la subdiagonal $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n,n-1}$ también son eliminados.

Algoritmos QR y QL

(10)

- Así, cada \mathbf{Q}_s es el producto de rotaciones en el plano

$$\mathbf{Q}_s^T = \mathbf{P}_1^{(s)} \mathbf{P}_2^{(s)} \dots \mathbf{P}_{n-1}^{(s)}$$

donde \mathbf{P}_i elimina $a_{i,i+1}$.

- Debido a que se definió $\mathbf{L} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$, el cálculo anterior determina \mathbf{Q}^T en vez de \mathbf{Q}

Casos no simétricos

- Para matrices reales no simétricas los métodos son más elaborados.
- En principio los eigenvalores pueden ser complejos.
- Estos métodos reducen las matrices a una forma más simple: Hessenberg.
- De la forma Hessenberg luego debe reducirse a forma triangular.
- Los eigenvalores estarán entonces en la diagonal.
- Para más información, puede revisarse el libro de Press et al.

Resumen

- 1 Eigenvalores y eigenvectores de una matriz tridiagonal
- 2 Eigenvalores y eigenvectores de matrices no simétricas

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2018 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica