Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Lección 20

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Aplicaciones

- Solución de ecuaciones diferenciales:
  ¡quizá mayor impacto de los métodos numéricos!

Aplicaciones

- Solución de ecuaciones diferenciales:
  ¡quizá mayor impacto de los métodos numéricos!
- Ecuaciones diferenciales **ordinarias** (EDO/ODE)
  Solo **una** variable independiente (por ejemplo t):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

Aplicaciones

- Solución de ecuaciones diferenciales:
  ¡quizá mayor impacto de los métodos numéricos!
- Ecuaciones diferenciales **ordinarias** (EDO/ODE)
  Solo **una** variable independiente (por ejemplo t):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

- Ecuaciones diferenciales **parciales** (EDP/PDE)
  Varias variables independientes (por ejemplo x e y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 1$$

Aplicaciones

- Solución de ecuaciones diferenciales:
  ¡quizá mayor impacto de los métodos numéricos!
- Ecuaciones diferenciales **ordinarias** (EDO/ODE)
  Solo **una** variable independiente (por ejemplo t):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

- Ecuaciones diferenciales **parciales** (EDP/PDE)
  Varias variables independientes (por ejemplo x e y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 1$$

- Métodos analíticos son limitados para aplicaciones modernas:
  - Simulaciones físicas: [1] [2] [3] [4] [5]
  - Gráficos por computadora [1] [2] [3] [4] [5]

¿Porqué solo primer orden para EDO?

- Una ecuacion diferencial ordinaria de orden mayor a uno se replantea como **sistema** de EDO de orden 1
- Por ejemplo: ecuación de posición x de un sistema masa-resorte con amortiguamiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

con masa m, amortiguamiento c y constante de resote k se replatea como

$$\begin{cases} y & = \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} & = -\dfrac{c}{m}y - \dfrac{k}{m}x \end{cases}$$

Ecuaciones Diferenciales

- Algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver por métodos analíticos

Ecuaciones Diferenciales

- Algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver por métodos analíticos
- Por ejemplo, analíticamente se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**) lineales

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

con $y^{(n)}$ la n-ésima derivada respecto a x, $a_i(x)$ y $f(x)$ funciones de x.

Ecuaciones Diferenciales

- Algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver por métodos analíticos
- Por ejemplo, analíticamente se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**) lineales

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

  con $y^{(n)}$ la n-ésima derivada respecto a x, $a_i(x)$ y $f(x)$ funciones de x.
- Para ecuaciones diferenciales **no lineales** (con productos de derivadas o aplicaciones de funciones no lineales a las derivadas) usualmente no existen formas cerradas y la **única** posibilidad de solución es por métodos numéricos.

Ecuaciones Diferenciales

- Algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver por métodos analíticos
- Por ejemplo, analíticamente se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**) lineales

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

  con $y^{(n)}$ la n-ésima derivada respecto a x, $a_i(x)$ y $f(x)$ funciones de x.
- Para ecuaciones diferenciales **no lineales** (con productos de derivadas o aplicaciones de funciones no lineales a las derivadas) usualmente no existen formas cerradas y la **única** posibilidad de solución es por métodos numéricos.
- Avance en ingeniería moderna se debe en gran medida a los métodos desarrollados para resolver estos tipos de ecuaciones.

Linealización

- Una forma clásica de resolver sistemas no lineales es la **linealización**
- Por ejemplo, la ecuación del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

se linealiza si se restringe θ a valores suficiente pequeños para aproximar $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- Si el problema requiere un estudio en rango completo de parámetros, la linealización no es una opción.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

- Los métodos de Runge-Kutta resuelven ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

  con solución $y(x)$.

- En general, la estructura de la solución es

$$\begin{array}{ccccccc} \text{valor nuevo} & = & \text{valor anterior} & + & \text{pendiente} & \times & \text{tamaño de paso} \\ y_{i+1} & = & y_i & + & \phi & \times & h \end{array}$$

  y los métodos difieren en la manera en que se estima la pendiente.

Método de Euler

- Método de Euler: se aproxima la derivada al inicio de un intervalo, y se asume constante en él.
- El i-ésimo intervalo inicia en x_i y termina en $x_i + h$
- La solución de la ecuación diferencial es y_i en x_i y en x_{i+1} es $y(x_{i+1})$ que se aproxima con $y_{i+1} = y_i + \phi h$ (Taylor)
- Con la ecuación diferencial original

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

entonces

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

y con el método de Euler (o Euler-Cauchy, o punto pendiente)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Tipos de error en el Método de Euler

- La solución numérica de las EDO tienen dos tipos de error:
  1. Error de **truncamiento** (o discretización) global o total, compuesto de:
     1. Error de truncamiento **local**, para la aplicación en 1 paso
     2. Error de truncamiento **propagado** que resulta de las aproximaciones de pasos previos.
  2. Errores de **redondeo** (precisión de representación numérica)

Cálculo del error (1)

- Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

con derivadas continuas.

- Entonces $y(x)$ se puede expresar con series de Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n$$

con $h = x_{i+1} - x_i$, $y_i = y(x_i)$ y R_n el residuo

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

con $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$

Cálculo del error (2)

- Con las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} y_{i+1} =& y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + \mathcal{O}\left(h^{n+1}\right) \end{aligned}$$

  donde $\mathcal{O}\left(h^{n+1}\right)$ indica el orden del error de truncamiento local
- El método de Euler corresponde entonces a la aproximación de Taylor de primer orden.

Cálculo del error (3)

- El error es entonces

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \mathcal{O}\left(h^{n+1}\right)$$

que se aproxima con

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \in \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

para h suficientemente pequeño

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)
- En problemas reales, aparecen funciones cuyas derivadas son difíciles de calcular, lo que complica el cálculo de la serie de Taylor

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)
- En problemas reales, aparecen funciones cuyas derivadas son difíciles de calcular, lo que complica el cálculo de la serie de Taylor
- La ventaja es que permiten comprender el comportamiento del método de Euler: el error local es proporcional a h^2 y a la primera derivada de la solución.

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)
- En problemas reales, aparecen funciones cuyas derivadas son difíciles de calcular, lo que complica el cálculo de la serie de Taylor
- La ventaja es que permiten comprender el comportamiento del método de Euler: el error local es proporcional a h^2 y a la primera derivada de la solución.
- Se puede demostrar que el error de truncamiento global es $\mathcal{O}(h)$

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)
- En problemas reales, aparecen funciones cuyas derivadas son difíciles de calcular, lo que complica el cálculo de la serie de Taylor
- La ventaja es que permiten comprender el comportamiento del método de Euler: el error local es proporcional a h^2 y a la primera derivada de la solución.
- Se puede demostrar que el error de truncamiento global es $\mathcal{O}(h)$
- Por lo tanto el error se reduce disminuyendo el paso h.

Análisis de la estimación de error con Series de Taylor

- Serie de Taylor solo permite estimar error de truncamiento local.
- No permite evaluar error propagado (y por tanto tampoco el error global)
- En problemas reales, aparecen funciones cuyas derivadas son difíciles de calcular, lo que complica el cálculo de la serie de Taylor
- La ventaja es que permiten comprender el comportamiento del método de Euler: el error local es proporcional a h^2 y a la primera derivada de la solución.
- Se puede demostrar que el error de truncamiento global es $\mathcal{O}(h)$
- Por lo tanto el error se reduce disminuyendo el paso h.
- Si la solución es lineal, como su segunda derivada es cero entonces el método de Euler no tiene error.

Métodos con serie de Taylor de orden superior (1)

- En general, métodos de n-ésimo orden son exactos si solución es un polinomio de n-ésimo orden, y de otro modo tienen error local $\mathcal{O}\left(h^{n+1}\right)$ y error global $\mathcal{O}\left(h^{n}\right)$
- Para reducir el error se pueden entonces incluir términos de orden superior.
- Para una aproximación de segundo orden se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

con error de truncamiento local

$$E_a = \frac{f''(x_i, y_i)}{6}h^3$$

Métodos con serie de Taylor de orden superior (2)

- En general, la primera derivada de $f(x, y)$ se calcula con

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

- Las derivadas de orden superior son más complejas

$$\begin{aligned} f''(x_i, y_i) =& \frac{\partial[\partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)(dy/dx)]}{\partial x} + \\ & \frac{\partial[\partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)(dy/dx)]}{\partial y}\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

por lo que se han desarrollado métodos que usan un solo paso, con exactitud similar a procedimiento de series de Taylor de orden superior, pero con el cálculo de las primeras derivadas únicamente.

Errores en el método de Euler

- La razón principal de error en el método de Euler consiste en la suposición que la derivada al inicio del intervalo se mantiene constante durante el intervalo.
- Hay dos métodos simples para evitar dicha suposición:
  1. Método de Heun
  2. Método del punto medio
- Ambos métodos, junto al método de Euler pertenecen a una clase mayor de métodos de Runge-Kutta

Método de Heun (1)

- Método de Heun calcula la derivada al inicio y al final del intervalo, y se utiliza su promedio como derivada constante en todo el intervalo.
- El método de Euler partió de

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

y esto se utiliza para extrapolar a y_{i+1} con la **ecuación predictora** (o predictor)

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Método de Heun (2)

- En el método de Heun lo anterior es solo una estimación intermedia, que permite estimar la pendiente al final del intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$$

- Combinando las dos pendientes:

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

- Utilizando esta pendiente se obtiene la **ecuación correctora** (o corrector)

$$y_{i+1} = y_i + \bar{y}'h = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}h$$

- El método de Heun es por tanto un procedimiento predictor-corrector.

Relación con la regla del trapecio (1)

- Si la función $y' = f(x, y)$ no depende de y entonces

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

- Integrando en el intervalo

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Relación con la regla del trapecio (2)

y con la regla del trapecio

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

se obtiene finalmente

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h$$

Relación con la regla del trapecio (3)

- Entonces, si la función f no depende de y, entonces el paso de predicción es innecesario, y la técnica se simplifica en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$$

- En esta forma la regla se asocia con la regla del trapecio, que se sabe tiene un error

$$E_t = -\frac{f''(\xi)}{12} h^3$$

  donde $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$
- El error local es $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ y el error global $\mathcal{O}\left(h^2\right)$

Naturaleza iterativa del método de Heun

- De nuevo con el caso general:

$$\textbf{Predictor} \quad y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$\textbf{Corrector} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}h$$

- El corrector usa a ambos lados de la igualdad a y_{i+1}, lo que indica que se puede iterar para mejorar la estimación.
- El proceso iterativo se detiene cuando el cambio del valor estimado

$$|\epsilon| = |y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}|$$

sea menor a algún umbral

Método del punto medio

- El método del punto medio (o polígono mejorado, o Euler modificado) predice el valor de y en el punto medio del intervalo:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

- Con ese valor predicho se calcula la pendiente en el punto medio

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

  que al estar en la posición media aproxima mejor la pendiente promedio en el intervalo.

- La extrapolación hasta x_{i+1} se obtiene entonces con

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

- Esta estimación no puede mejorarse iterativamente

Relación con la regla de integración del punto medio

- En las fórmulas abiertas de integración, la regla del punto medio establece que
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(x_1)$$
con $x_1 = (a+b)/2$ y por tanto
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx hf(x_{i+1/2})$$
de donde este método obtiene su nombre.
- La estimación de derivada en el punto medio tiene un error de truncamiento local $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ que contrasta con el método de Euler $\mathcal{O}(h)$.
- Este método tiene errores local y global $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ y $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ respectivamente.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta (1)

- Los métodos de Runge-Kutta (RK) logran la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas de orden superior.
- Todas las variantes siguen la forma generalizada

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

con $\phi(x_i, y_i, h)$ la **función de incremento** que representa la pendiente en el intervalo.

Métodos de Runge-Kutta (2)

- La función de incremento tiene la forma

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

donde a_j son constantes y las k_j son

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, \\
&\qquad y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

con p_j y q_{jl} constantes.

Métodos de Runge-Kutta (3)

- Observe que cálculo de k_j requiere todas las k_l con $l < j$
- El método RK con $n = 1$ equivale al método de Euler
- En general, una vez elegido n, se determinan las constantes a, p y q igualando

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

a la expansión de la serie de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (1)

- La versión de segundo orden de la ecuación

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

es

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1) \end{aligned}$$

y se deben determinar cuatro constantes p_1, q_{11}, a_1 y a_2

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (2)

- Con la aproximación de segundo orden por serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

donde con la regla de la cadena

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

por lo que

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!}$$

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (3)

- Para funciones de dos variables, la serie de Taylor es

$$g(x+r, y+s) = g(x,y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

y con ello k_2 se puede reexpresar como

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \approx f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

- Sustituyendo estos últimos resultados en

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y_{i+1} =& y_i + a_1 hf(x_i, y_i) + a_2 hf(x_i, y_i) + \\ & a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (4)

- Agrupando términos (y con $k_1 = dy/dx$)

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 + a_2) f(x_i, y_i) h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right] h^2 + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

y comparando con la versión derivada de la serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2!} + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

se obtiene

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

- Hay cuatro incóginas pero solo tres ecuaciones $\Rightarrow$ no hay una única solución.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (5)

- Si por ejemplo se asume un valor conocido para a_2 entonces

$$a_1 = 1 - a_2 \qquad\qquad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

- Como a_2 puede tomar un infinito número de valores, hay un infinito número de métodos RK de segundo orden.
- Cada método da exactamente el mismo resultado si la solución es cuadrática, lineal o constante. Para otras soluciones más complejas, se obtienen distintas soluciones con cada método.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (6)

- Con $a_2 = 1/2$ se obtiene el método de Heun
  Se obtiene $a_1 = 1/2$ y $p_1 = q_{11} = 1$ y

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) h$$

con

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad \text{pendiente al inicio de intervalo}$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h) \qquad \text{pendiente al final de intervalo}$$

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden (7)

- Con $a_2 = 1$ se obtiene el método del punto medio
  Se obtiene $a_1 = 0$ y $p_1 = q_{11} = 1/2$ y

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) && \text{pendiente al inicio de intervalo} \\ k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + k_1 h/2) && \text{pendiente a mitad de intervalo} \end{aligned}$$

Método de Ralston

- Con $a_2 = 2/3$ se obtiene el método de Ralston, que se demostró por Ralston y Rabinowitz que produce el menor error de truncamiento para algoritmos de segundo orden.
- Con ese a_2 se obtiene $a_1 = 1/3$ y $p_1 = q_{11} = 3/4$
- La solución de la ecuación diferencial se obtiene entonces con

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

con

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad \text{pendiente al inicio de intervalo}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) \qquad \text{pendiente a } 3/4 \text{ del intervalo}$$

Resumen

1. Introducción

2. Métodos de Runge-Kutta
   - Método de Euler
   - Método de Heun
   - Método del punto medio

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LATEX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux