Eliminación de Gauss

Lección 10

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Sistemas de ecuaciones lineales (1)

Todo sistema de ecuaciones lineales expresa de la forma

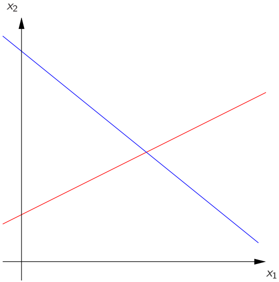
$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

que representa a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

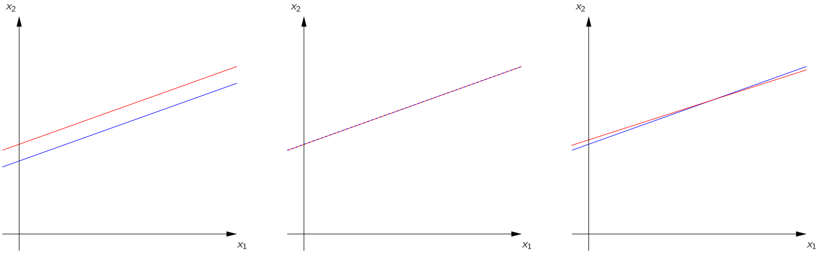
Métodos gráficos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$



- Aplicables a sistemas de dos o tres ecuaciones
  - 2D: Intersección de dos rectas
  - 3D: Intersección de tres planos

Permiten visualizar casos mal condicionados o singulares



Regla de Cramer

- Sea $\underline{\mathbf{u}}_i$ un vector con componentes u_k iguales a cero excepto si $k = i$, en cuyo caso la componente es $u_i = 1$.
- Por ejemplo, para vectores de 4 dimensiones $\underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- El método de Cramer establece:

$$x_i = \frac{\left|\mathbf{A} + (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}_{:i})\underline{\mathbf{u}}_i^T\right|}{|\mathbf{A}|}$$

Regla de Cramer

- Sea $\underline{\mathbf{u}}_i$ un vector con componentes u_k iguales a cero excepto si $k = i$, en cuyo caso la componente es $u_i = 1$.
- Por ejemplo, para vectores de 4 dimensiones $\underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- El método de Cramer establece:

$$x_i = \frac{\left|\mathbf{A} + (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}_{:i})\underline{\mathbf{u}}_i^T\right|}{|\mathbf{A}|}$$

- ¿Qué hace lo anterior?

Regla de Cramer

- Sea $\underline{\mathbf{u}}_i$ un vector con componentes u_k iguales a cero excepto si $k = i$, en cuyo caso la componente es $u_i = 1$.
- Por ejemplo, para vectores de 4 dimensiones $\underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- El método de Cramer establece:

$$x_i = \frac{\left|\mathbf{A} + (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}_{:i})\underline{\mathbf{u}}_i^T\right|}{|\mathbf{A}|}$$

- ¿Qué hace lo anterior?
- Reemplaza la i-ésima columna de $\mathbf{A}$ con $\underline{\mathbf{b}}$

Regla de Cramer

- Sea $\underline{\mathbf{u}}_i$ un vector con componentes u_k iguales a cero excepto si $k = i$, en cuyo caso la componente es $u_i = 1$.
- Por ejemplo, para vectores de 4 dimensiones $\underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- El método de Cramer establece:

$$x_i = \frac{\left| \mathbf{A} + (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}_{:i})\underline{\mathbf{u}}_i^T \right|}{|\mathbf{A}|}$$

- ¿Qué hace lo anterior?
- Reemplaza la i-ésima columna de $\mathbf{A}$ con $\underline{\mathbf{b}}$
- Impráctico por complejidad en el cálculo de la determinante para $n > 3$

Eliminación de Gauss simple

- Eliminar de la i-ésima ecuación y posteriores todas las variables x_j con $j < i$ (**eliminación hacia adelante**).
- Sustituir hacia atrás para encontrar los valores de las variables desde x_n hasta x_1 (**sustitución hacia atrás**)

Eliminación de Gauss simple (1)

Dado el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

El paso de eliminación consiste en obtener una matriz triangular superior.

Se inicia de la segunda ecuación "hacia adelante", eliminando la variable x_1. La i-ésima ecuación se sustituye por el resultado de restar la primera ecuación multiplicada por a_{i1}/a_{11}

$$\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \cdots + \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1$$

Eliminación de Gauss simple (2)

de la *i*-ésima ecuación, que se transforma entonces en:

$$\left(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{12}\right) x_2 + \cdots + \left(a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1n}\right) x_n = \left(b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1\right)$$

o simplificando la notación

$$a'_{i2} x_2 + \cdots + a'_{in} x_n = b'_i$$

Aplicando esto al resto del sistema, resulta en

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
 & & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nn}x_n & = & b'_n
\end{array}$$

Eliminación de Gauss simple (3)

El proceso se repite para eliminar ahora x_2 de la tercera ecuación hacia adelante restando a la i-ésima ecuación (con $i > 3$) la segunda multiplicada por a'_{i2}/a'_{22}

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & a''_{33}x_2 & + & \cdots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 \\
 & & & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
 & & & a''_{n3}x_2 & + & \cdots & + & a''_{nn}x_n & = & b''_n
\end{array}
$$

Eliminación de Gauss simple (4)

El proceso se repite sucesivamente hasta obtener:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & + & a''_{33}x_2 & + & \cdots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 \\
 & & & & & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}
\end{array}
$$

A los elementos $a_{ii}^{(i-1)}$ se les denomina **pivotes**.

Eliminación de Gauss simple (5)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss simple (6)

La **sustitución hacia atrás** parte de x_n que se despeja directamente como

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

resultado que se puede utilizar en la $(n-1)$-ésima ecuación para despejar x_{n-1}. Se demuestra, que este proceso permite encontrar

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

Ejercicio

Plantee un algoritmo para realizar al eliminación hacia adelante y la sustitución hacia atrás

Algoritmo de eliminación de Gauss simple (1)

```
for (int k=0;k<n-1;++k) {
  for (int i=k+1;i<n;++i) {
    const T factor=a[i][k]/a[k][k];
    for (j=k+1;j<n;++j) {
      a[i][j] -= factor*a[k][j]
    }
    b[i] -= factor*b[k];
  }
}

x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1];
for (int i=n-2;i>=0;--i) {
  T sum=b[i];
  for (j=i+1;j<n;++j) {
    sum -= a[i][j]*x[j];
  }
  x[i]=sum/a[i][i];
}
```

Complejidad de la eliminación de Gauss simple

- La eliminación hacia adelante por sus tres ciclos es $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ en el número de operaciones de punto flotante a realizar.
- El algoritmo de sustitución es $\mathcal{O}\left(n^2\right)$

Determinante y mal condicionamiento

- Dados tres sistemas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix}$$

Determinante y mal condicionamiento

- Dados tres sistemas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix}$$

- Determinantes: 8, -0,2 y -20

Determinante y mal condicionamiento

- Dados tres sistemas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix}$$

- Determinantes: 8, -0,2 y -20
- Observese que últimos dos sistemas son idénticos (escala 10)

Determinante y mal condicionamiento

- Dados tres sistemas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix}$$

- Determinantes: 8, -0,2 y -20
- Observese que últimos dos sistemas son idénticos (escala 10)
- Mal condicionados ¿si determinante cercana a cero?

Determinante y mal condicionamiento

- Dados tres sistemas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix}$$

- Determinantes: 8, -0,2 y -20
- Observese que últimos dos sistemas son idénticos (escala 10)
- Mal condicionados ¿si determinante cercana a cero?
- ¡**Debe** normalizarse primero!

Normalizar para cálculo de condición

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow 1,333$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0,55 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5,2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow -0,05$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 104 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0,55 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5,2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow -0,05$$

Problemas del método simple

- En el proceso puede ocurrir división por cero, si $a_{ii}^{(i)} = 0$

Problemas del método simple

- En el proceso puede ocurrir división por cero, si $a_{ii}^{(i)} = 0$
- Eliminación y sustitución propagan errores de redondeo

Problemas del método simple

- En el proceso puede ocurrir división por cero, si $a_{ii}^{(i)} = 0$
- Eliminación y sustitución propagan errores de redondeo
- En sistemas mal condicionados errores de redondeo en coeficientes conducen a fuertes cambios en resultados.

Problemas del método simple

- En el proceso puede ocurrir división por cero, si $a_{ii}^{(i)} = 0$
- Eliminación y sustitución propagan errores de redondeo
- En sistemas mal condicionados errores de redondeo en coeficientes conducen a fuertes cambios en resultados.
- Condición del sistema requiere **normalización** del mayor coeficiente sea en magnitud 1.

Problemas del método simple

- En el proceso puede ocurrir división por cero, si $a_{ii}^{(i)} = 0$
- Eliminación y sustitución propagan errores de redondeo
- En sistemas mal condicionados errores de redondeo en coeficientes conducen a fuertes cambios en resultados.
- Condición del sistema requiere **normalización** del mayor coeficiente sea en magnitud 1.
- Determinante se puede calcular con la diagonal de matriz **L** (resultante de eliminación)

$$D = a_{11} a'_{22} a''_{33} \cdots a_{nn}^{(n-1)}$$

Pivoteo parcial y escalamiento

- Evitar divisiones por cero: antes de eliminar variable x_i, intercambiar filas i y τ de modo que i-ésima posición quede el coeficiente $a_{\tau i}$ de mayor magnitud antes de la eliminación.
- Ecuaciones pueden estar escaladas por factores disímiles: es usual escalarlas de modo que el mayor coeficiente sea 1, pero únicamente para realizar el pivoteo, pues este escalamiento puede introducir otros errores de redondeo.
- En caso de que se requiera el determinante, sí se realiza el escalamiento de las matrices.

Ejemplo: Pivoteo parcial (1)

Ejemplo

Utilice la eliminación de Gauss para resolver

$$0,0003x_1 + 3,0000x_2 = 2,0001$$
$$1,0000x_1 + 1,0000x_2 = 1,0000$$

Repita el procedimiento pero utilizando pivoteo parcial.

Ejemplo 9.9 (Chapra & Canale)

Ejemplo: Pivoteo parcial (2)

Solución:
Multiplicando la primera ecuación por $1,0000/0,0003$ resulta en

$$x_1 + 10\,000x_2 = 6\,667$$

que permite eliminar a x_1 de la segunda ecuación

$$-9\,999x_2 = -6\,666$$

de donde se despeja

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

y sustituyendo en la primera ecuación:

$$x_1 = \frac{2,0001 - 3x_2}{0,0003} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo: Pivoteo parcial (3)

Por la cancelación por resta en el denominador el resultado es muy sensible a las cifras significativas

#CS	x_2	x_1	$\lvert\epsilon_r\rvert$
3	0,667	-3,33	1 099
4	0,6667	0,0000	100
5	0,66667	0,3000	10
6	0,666667	0,3300	1
7	0,6666667	0,3330	0,1

Ejemplo: Pivoteo parcial (4)

Con pivoteo se intercambian las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}1,0000x_1 + 1,0000x_2 &= 1,0000\\ 0,0003x_1 + 3,0000x_2 &= 2,0001\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $0,0003/1,0000$ resulta en

$$0,0003x_1 + 0\,0003x_2 = 0,0003$$

que permite eliminar a x_1 de la segunda ecuación

$$2,9997x_2 = 1,9998$$

de donde se despeja

$$x_2 = \frac{1,9998}{2,9997} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo: Pivoteo parcial (5)

y sustituyendo en la primera ecuación:

$$x_1 = \frac{1,0000 - 1,0000(2/3)}{1,0000}$$

#CS	x_2	x_1	$\lvert\epsilon_r\rvert$
3	0,667	0,333	0,1
4	0,6667	0,3333	0,01
5	0,66667	0,33333	0,001
6	0,666667	0,333333	0,0001
7	0,6666667	0,3333333	0,00001

Ejercicio

Amplíe su algoritmo para realizar pivoteo parcial

¿Cómo puede evitarse tener que intercambiar las dos filas de la matriz?

Gauss-Jordan

En el método de Gauss-Jordan en el proceso de eliminación la incógnita es eliminada de todas las *otras* ecuaciones, no solo de las subsecuentes.
Se requiere normalización previa por el elemento pivote.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_i = b_i^{(n)}$$

Mejoras al algoritmo de Gauss-Jordan

Las mejoras de pivoteo y escalamiento también se aplican a este algoritmo

Complejidad del algoritmo de Gauss-Jordan

Este algoritmo es también $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ en el número de *flops* (**fl**oating-point **op**erations), sin embargo, se puede demostrar que utiliza aproximadamente un 50 % más de operaciones que el método simple de eliminación.

Solución de múltiples ecuaciones y cálculo de la inversa

Método de Gauss-Jordan resuelve varios sistemas simultáneos (diferentes vectores $\underline{\mathbf{b}}$) y a su vez calcula matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3m} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3m} & y_{31} & y_{32} & \cdots & y_{3m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm}
\end{array}\right]$$

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux