Errores de truncamiento

Lección 04

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Diferenciación numérica
Aproximación con diferencias hacia adelante

La ecuación:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \mathcal{O}\left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &= \frac{\Delta f_i}{h} + \mathcal{O}\left(h\right) \end{aligned}$$

se conoce como aproximación por cociente de diferencias finitas, donde

- Δf_i es la primera diferencia hacia adelante
- h es el tamaño de paso, o incremento

Diferenciación numérica
Aproximación con diferencias hacia atrás

Se pueden repetir las deducciones anteriores y encontrar:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \mathcal{O}(x_i - x_{i-1})$$

se conoce como aproximación por cociente de diferencias finitas, donde

- $f(x_i) - f(x_{i-1})$ es la primera diferencia hacia atrás
- $x_i - x_{i-1}$ es el tamaño de paso, o incremento

Diferenciación numérica
Aproximación con diferencias centradas

Utilizando las series de Taylor hacia adelante y hacia atrás se tiene:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

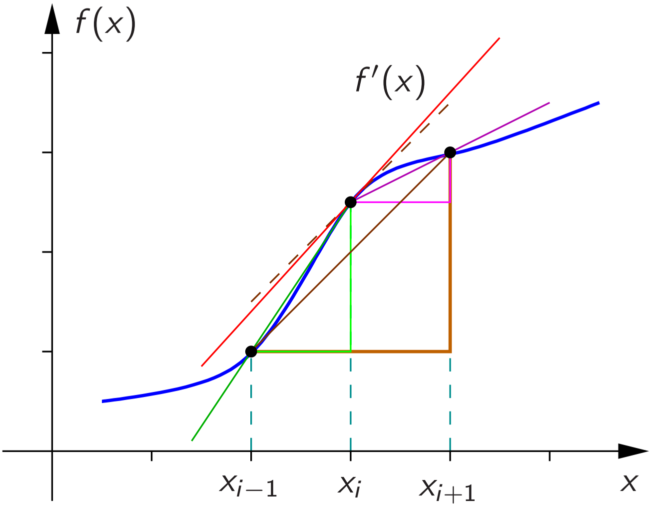
Restando ambas formulaciones resulta en:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + 2\frac{f^{(5)}(x_i)}{5!}h^5 + \dots$$

de donde se despeja:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \underbrace{- \frac{f'''(x_i)}{3!}h^2 - \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!}h^4 - \dots}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

Diferenciación numérica



Derivadas de órdenes superiores (1)

Con otra aproximación hacia adelante con paso $2h$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(2h)^3 + \dots$$

y con la aproximación anterior

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

se calcula $f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1})$ para obtener:

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + 6\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

Derivadas de órdenes superiores (2)

Finalmente, despejando $f''(x)$ se tiene la segunda diferencia finita dividida hacia adelante:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} - \underbrace{\frac{f'''(x_i)}{3!}h - \dots}_{\mathcal{O}(h)}$$

La versión hacia atrás es:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

y la versión centrada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

Propagación de error

Se desea estimar

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})|$$

en función de la diferencia $\Delta\tilde{x} = x - \tilde{x}$.

Usualmente se desconoce x pues por el error de redondeo solo se cuenta con $\tilde{x}$.

Si $x \approx \tilde{x}$ entonces con la serie de Taylor se desarrolla:

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - \tilde{x})^2 + \dots$$

y con una aproximación de primer orden

$$\begin{aligned} f(x) - f(\tilde{x}) &\approx f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \\ \Delta f(\tilde{x}) &\approx |f'(\tilde{x})|\Delta\tilde{x} \end{aligned}$$

Ejemplo: Propagación de error (1)

Ejemplo

Dado $\tilde{x} = 2,5$ con un error $\Delta\tilde{x} = 0,01$, estime el error de $f(x) = x^3$.

Ejemplo: Propagación de error (2)

Solución:

Con $f'(x) = 3x^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta f'(\tilde{x}) &\approx |f'(\tilde{x})|\Delta\tilde{x} \\ &= 3(2,5)^2 0,01 = 0,1875\end{aligned}$$

Puesto que $f(2,5) = (2,5)^3 = 15,625$ se pronostica que

$$f(2,5) = 15,625 \pm 0,1875$$

Ejemplo: Propagación de error (3)

Observe que

$$f(2,5-0,01) = 15{,}438249 = 15,625 - 0{,}186751$$
$$f(2,5+0,01) = 15{,}813251 = 15,625 + 0,188251$$

por lo que el error es aproximado satisfactoriamente.

Propagación de funciones de múltiples variables

Utilizando series de Taylor para funciones de múltiples variables se demuestra que

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n$$

con lo que se obtiene para las operaciones aritméticas básicas:

Operación	Error	Estimación
Adición	$\Delta(\tilde{u}+\tilde{v})$	$\Delta\tilde{u}+\Delta\tilde{v}$
Sustracción	$\Delta(\tilde{u}-\tilde{v})$	$\Delta\tilde{u}+\Delta\tilde{v}$
Multiplicación	$\Delta(\tilde{u}\times\tilde{v})$	$\lvert\tilde{v}\rvert\Delta\tilde{u}+\lvert\tilde{u}\rvert\Delta\tilde{v}$
División	$\Delta\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)$	$\frac{\lvert\tilde{v}\rvert\Delta\tilde{u}+\lvert\tilde{u}\rvert\Delta\tilde{v}}{\lvert\tilde{v}\rvert^2}$

Estabilidad y condición (1)

Utilizando la aproximación de Taylor de primer orden

$$f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

con lo que se puede estimar el error relativo de la función:

$$E_f = \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \approx \frac{f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

El error relativo de x es

$$E_x = \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}}$$

Número de condición

El **número de condición** es la relación entre los dos errores relativos

$$N = \frac{E_f}{E_x} = \frac{\tilde{x} f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

indica qué tanto una inexactitud de x se aumenta por $f(x)$.

- $N = 1$: Error relativo de la función idéntico al de x.
- $N > 1$: Error relativo se amplifica.
  - $N \gg 1$: Función **mal condicionada**
- $N < 1$: Error relativo se atenúa

Un cálculo es **numéricamente inestable** si la inexactitud de los valores de entrada aumenta por el método numérico (la función es mal condicionada).

Ejemplo: Número de condición (1)

Ejemplo

Calcule el número de condición de $f(x) = \tan(x)$ para

$$\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0,1\frac{\pi}{2} = 0,55\pi$$
$$\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0,01\frac{\pi}{2} = 0,505\pi$$

Ejemplo: Número de condición (2)

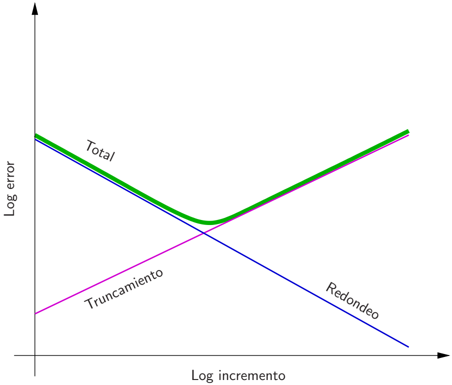
Solución:
El número de condición se calcula con

$$N = \frac{\tilde{x} f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} = \frac{\tilde{x}(1/\cos^2(\tilde{x}))}{\tan \tilde{x}} = \tilde{x} \frac{1}{\cos^2 \tilde{x}} \frac{\cos \tilde{x}}{\operatorname{sen} \tilde{x}}$$
$$= \frac{\tilde{x}}{\cos \tilde{x} \operatorname{sen} \tilde{x}} = \frac{2\tilde{x}}{\operatorname{sen} 2\tilde{x}}$$

Para $\tilde{x} = 0,55\pi$ $N = -11,2$.
Para $\tilde{x} = 0,505\pi$ $N = -101$.
(ver ejemplo en lec04/clase/nc.m)

Error numérico total

El error numérico total es la suma de los errores de redondeo y truncamiento.



Error numérico total (1)

Caso de diferencias centradas

La aproximación de la primera derivada es (ver Folio 5):

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}}_{\text{Aproximación}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2 - \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!}h^4 - \dots}_{\text{Truncamiento}}$$

Sin embargo, los valores de la función tienen error por redondeo e_i:

$$f(x_{i-1}) = \tilde{f}(x_{i-1}) + e_{i-1}$$
$$f(x_{i+1}) = \tilde{f}(x_{i+1}) + e_{i+1}$$

por lo que

$$f'(x_i) \approx \underbrace{\frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2h}}_{\text{Aproximación}} + \underbrace{\frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2h}}_{\text{Redondeo}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2}_{\text{Truncamiento}}$$

Error numérico total (2)

Caso de diferencias centradas

$$f'(x_i) \approx \underbrace{\frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2h}}_{\text{Aproximación}} + \underbrace{\frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2h}}_{\text{Redondeo}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2}_{\text{Truncamiento}}$$

- Si h se reduce
  - Error de redondeo crece
  - Error de truncamiento se reduce
- Si $\max e_i = \epsilon$ entonces el peor caso de $(e_{i+1} - e_{i-1}) = 2\epsilon$.
- Si la 3ra derivada nunca supera en magnitud a M, entonces

$$E_T = \left| f'(x_i) - \frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2h} \right| \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2 M}{6}$$

Error numérico total (3)

Caso de diferencias centradas

El paso óptimo h_{opt} se obtiene derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2 M}{6}\right] = 0$$

$$h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}}$$

TAREA

Realice un programa para GNU/Octave que calcule el valor de la derivada de una función $f(x)$ en $x = 1$ por

- diferencias hacia atrás
- diferencias hacia adelante
- diferencias centradas

con pasos a partir de 1, que se reduzcan cada vez con un factor de λ, es decir

$$h_0 = 1 \qquad\qquad h_i = \lambda h_{i-1}$$

Realice un gráfico con el error calculado, a partir de la evaluación analítica de la derivada.

Control de errores numéricos

- Evitar restas de números similares, pues se pierden cifras significativas
- Reordenar operaciones aritméticas e iniciar con números más pequeños
- Utilizar precisión extendida

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LATEX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux