Errores de truncamiento

Lección 03

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Manipulaciones aritméticas

Se brindarán ejemplos en base 10 por simplicidad, pero recuérdese que el computador utiliza números en base 2.

Suma
Coma flotante

- Se toma número con menor exponente
- Mantisa se modifica para igualar exponente del otro número (Alineación de la coma decimal)
- Se realiza la suma
- En caso necesario, se renormaliza número

Ejemplo: Suma (1)

Ejemplo

Sume los números $0,157 \times 10^1$ y $0,44 \times 10^{-1}$, asumiendo que el sistema numérico utilizado puede representar 3 cifras significativas.

Ejemplo: Suma (2)

Solución:

$$\begin{array}{r}
0,157\times 10^1 \\
0,0044\times 10^1 \\
\hline
0,1614\times 10^1 \\
\downarrow \\
0,161 \times 10^1
\end{array}$$

Resta
Coma flotante

Idéntico al caso de la suma

- Se toma número con menor exponente
- Mantisa se modifica para igualar exponente del otro número (Alineación de la coma decimal)
- Se realiza la resta
- En caso necesario, se renormaliza número

Ejemplo: Resta (1)

Ejemplo

Reste los números 10 y $9,99$, asumiendo que el sistema numérico utilizado puede representar 3 cifras significativas.

Ejemplo: Resta (2)

Solución:

$$
\begin{array}{r}
0,10\quad\times 10^2 \\
0,0999\times 10^2 \\
\hline
0,0001\times 10^2 \\
\downarrow \\
0,100\times 10^{-1}
\end{array}
$$

Problema: si los dos números a restar son similares, en la representación numérica aprecen cifras que **no** son significativas.

Suma y resta
Coma fija

En representaciones de coma fija, las operaciones de suma y resta tienen la coma decimal alineada, lo mismo que el resultado, así que símplemente se realizan las operaciones sobre cada dígito con acarreo.

Multiplicación y división

Coma flotante

- Se suman (o restan) exponentes
- Se multiplican (o dividen) las mantisas de n dígitos
- Se normaliza el resultado (y se redondea si es necesario)

Nótese que el producto de dos mantisas de n dígitos produce $2n$ dígitos.

Ejemplo: Multiplicación (1)

Ejemplo

Multiplique los números 136,3 y 0,06423, asumiendo que el sistema numérico puede representar cuatro cifras significativas.

Ejemplo: Multiplicación (2)

Solución:

$$\begin{array}{ll} 0,1363 & \times 10^{3} \\ 0,6423 & \times 10^{-1} \\ \hline 0,08754549 & \times 10^{2} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$0,8754\textcolor{red}{549} \times 10^{1} \approx 8,754 \text{ (corte)}$$

Procesos acumulativos

En procesos acumulativos de las formas:

$$y = \sum_i x_i \qquad\qquad y = \prod_i x_i$$

implementados iterativamente, los redondeos de cada resultado parcial introducen errores crecientes con cada paso.

Tarea

Ejemplo

Realice un programa en C++ que acumule (aditivamente) N veces los números 1 y $0,00001$ en precisiones simple y doble.

Suma de números grandes y pequeños

La suma de un número grande y otro pequeño, con una diferencia en órdenes de magnitud mayor al número de cifras significativas, no produce **ningún** efecto.

$$\begin{array}{r} 0{,}4000 \qquad \times 10^4 \\ 0{,}0000001 \times 10^4 \\ \hline 0{,}4000001 \times 10^4 \\ \downarrow \\ 0{,}4000 \times 10^4 \end{array}$$

¡Advertencia!

En sumas de gran número de términos, se debe procurar sumar primero los términos pequeños y por último los grandes, de modo que se minimice el efecto anterior.

Cancelación por resta

Redondeo inducido cuando se restan dos números de coma flotante casi iguales.

Cancelación por resta

Ejemplo

Cálculo de las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con $b^2 \gg 4ac$.

En el ejemplo anterior el numerador tiende a cero.

Ejemplo

Verifique el problema anterior para $a = 1$, $b = 3000{,}001$ y $c = 3$, con un programa en C++, si se sabe que $x_{1,2} = -0{,}001 | -3000$.

Solución cuadrática alternativa

La ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene una formulación alternativa de solución que minimiza error de cancelación por resta:

$$x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Presencia de errores de redondeo

1. Series: p.ej. $\sum_{i=0}^{N} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$
2. Productos punto: $\sum_{i=0}^{N} x_i y_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots$

- Reducción de error de redondeo: usar precisión extendida
- Existen técnicas de reducción de error, pero dependen de cada caso particular

Errores de truncamiento

Producidos al utilizar una aproximación en vez de procedimiento matemático exacto.

Por ejemplo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

se aproximó con

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}v(t_i)$$

Teorema de Taylor (1)

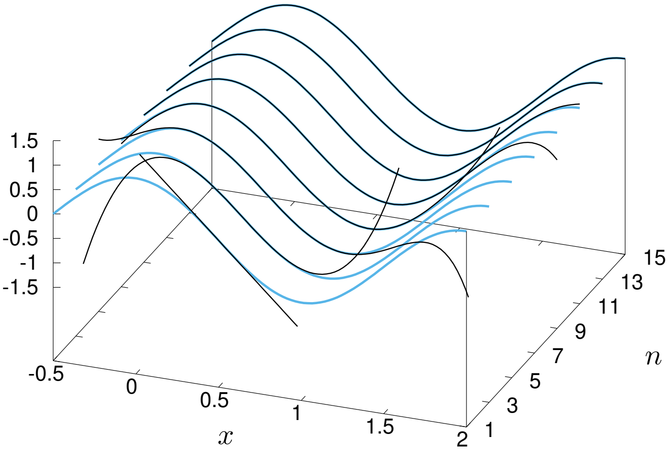
Serie infinita:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

Teorema de Taylor (2)

$f(x) = \cos(\pi x)$ centrado en $x_0 = 1/2$:



Teorema de Taylor (3)

Serie finita más residuo:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n \end{aligned}$$

donde el residuo R_n en su forma integral se calcula como

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^n}{n!} f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau$$

Teorema de Taylor (4)

Si se omite R_n se tiene una *aproximación* de $f(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&\approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k
\end{aligned}
$$

donde n es el **orden** de la aproximación.

R_n correspone entonces al **error de truncamiento**.

Teorema del valor medio

Para integrales de funciones **continuas**, y si $h(t)$ no cambia de signo en $[x_0, x]$

$$\int_{x_0}^{x} g(t)h(t)\,dt = g(\xi)\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt$$

donde $\xi \in [x_0, x]$.

Con $h(t) = 1$ se tiene el caso especial

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = g(\xi)\int_{x_0}^{x} dt = g(\xi)(x - x_0)$$

Forma de Lagrange del residuo

Aplicando el teorema de valor medio a la forma integral

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^n}{n!} f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau$$

con

$$g(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad\qquad h(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

se obtiene la forma de Lagrange del residuo

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con $\xi \in [x_0, x]$.

Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (1)

Ejemplo

Encuentre la serie de Taylor centrada en $x_0 = 1/2$ de la función $f(x) = \cos(\pi x)$. Calcule el peor caso de los resíduos de las aproximaciones en $x = 3/2$.

Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (2)

Solución:
Para las derivadas en este caso se cumple:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\pi x) \\
f'(x) &= -\operatorname{sen}(\pi x)\pi \\
f''(x) &= -\cos(\pi x)\pi^2 \\
f'''(x) &= \operatorname{sen}(\pi x)\pi^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen}(\pi x)\pi^n & \text{para } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(\pi x)\pi^n & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (3)

Con $x_0 = 1/2$ se tiene

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x_0) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen}(\pi/2)\pi^n & \text{para } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(\pi/2)\pi^n & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \pi^n & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}
$$

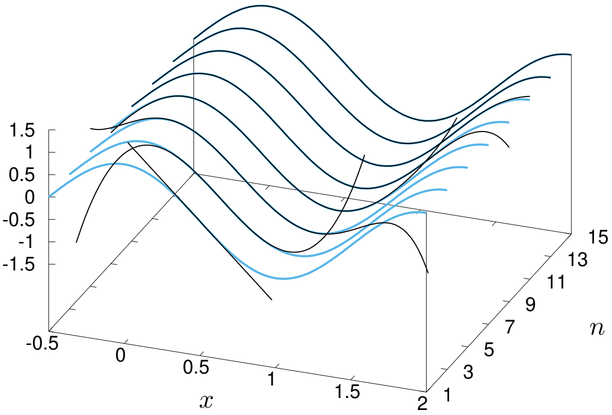
Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (4)

Con lo que finalmente se tiene

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi^n}{n!} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (5)



Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (6)

El resíduo para la aproximación de n-ésimo orden es

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}\operatorname{sen}(\pi\xi)\pi^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & \text{para } n \text{ par} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cos(\pi\xi)\pi^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Puesto que $|\operatorname{sen}(\pi\xi)| \leq 1$ y $|\cos(\pi\xi)| \leq 1$, entonces

$$|R_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Ejemplo: Serie de Taylor de la función cosenoidal (7)

y con $x_0 = 1/2$ y $x = 3/2$

$$|R_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

n	$\lvert R_n \rvert_{\text{máx}}$	$\lvert E_t \rvert$
0	$\pi \approx 3,1415$	0
1	$\frac{\pi^2}{2!} \approx 4,9348$	$3,1415$
3	$\frac{\pi^3}{3!} \approx 4,0587$	$2,0261$
5	$\frac{\pi^5}{5!} \approx 1,3353$	$0,5240$
7	$\frac{\pi^7}{7!} \approx 0,2353$	$0,0752$
9	$\frac{\pi^9}{9!} \approx 0,0258$	$0,0069$
11	$\frac{\pi^{11}}{11!} \approx 0,0019$	$0,0004$
13	$\frac{\pi^{13}}{13!} \approx 0,0001$	$0,0000$

Residuo

- Si bien $f(x)$ y sus derivadas usualmente no se conocen, la serie de Taylor expresa **posiblidad** de una serie de potencias.
- Resíduo indica límites de error de truncamiento
- Su cálculo **exacto** depende de ξ
- No se puede calcular si se desconoce $f^{(n)}(x)$ y ξ
- Se sabe que el resíduo es $\mathcal{O}\left(h^{n+1}\right) = \mathcal{O}\left((x - x_0)^{n+1}\right)$

Estimación de errores de truncamiento

En el ejemplo del paracaidista:

$$\begin{aligned} v(t_{i+1}) &= v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i) \\ &= v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \ldots + R_n \end{aligned}$$

Truncando a una expresión de primer orden

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

de donde se despeja

$$v'(t_i) = \underbrace{\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\text{Aprox. } 1^{\text{er}} \text{ orden}} - \underbrace{\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}}_{\text{Error de truncamiento}}$$

Residuo y error de truncamiento

Con

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2$$

entonces el error de truncamiento es:

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(t_{i+1} - t_i)$$

que es $\mathcal{O}\left(t_{i+1} - t_i\right)$, lo que quiere decir que el error es proporcional al incremento:

- Si se reduce $t_{i+1} - t_i$ a la mitad, entonces también el error.

Resumen

1. Manipulaciones aritméticas
2. Errores de truncamiento
3. Series de Taylor
4. Estimación de errores de truncamiento

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux