Laboratorio N^o 8: Oscilaciones

Introducción

En física las relaciones entre magnitudes habituales son:

- Lineales.
- Exponenciales.
- Potenciales.
- Oscilantes.

Nos vamos a centrar en el último comportamiento mencionado.

Simple

Un resorte puede ser modelado por la fuerza $F\,[N]$ con la que responde a la deformación en su eje longitudinal a partir de una posición de equilibrio $\Delta l\,[m]$. La ley de Hooke es un modelo de esta fuerza, bastante acertada en general para resortes helicoidales. Dice que '*el cociente entre la fuerza ejercida por el resorte y la deformación del mismo*' es una constante:

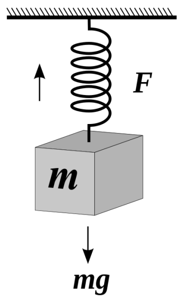

Figura 1: El diagrama de un sistema masa-resorte en equilibrio.

$$F = -k\Delta l \tag{1}$$

donde $F[N]$ es la fuerza realizada por el resorte, $\Delta l = y - y_0[m]$ es la deformación (expresada como la resta entre una posición cualquiera y e y_0, la posición de equilibrio) y $k[N/m]$ es la constante del resorte. Valores de k mayores se reflejan en resortes más *rígidos*.

Tarea 1 : Determinar la constante k del resorte.

Colgando 5 masas diferentes, estimar la constante del resorte mediante un ajuste lineal. Informe esta experiencia.

Medio Bajo

Al colgar una masa, el sistema masa resorte *oscila*, es decir, va y viene (sube y baja, etc.). Esto sale de resolver la segunda ley de Newton, asumiendo que en el sistema es *conservativo*, no pierde energía alguna.

Considerando la 2^{da} ley de Newton y aplicándola al problema, tenemos:

$$F = ma \text{ utilizando los modelos propuestos: } \begin{cases} F = -k(y - y_0) \\ a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases} \tag{2}$$

donde $y(t)[m]$ es el desplazamiento, e $(y - y_0)[m]$ es el desplazamiento en torno a la posición de equilibrio $y_0[m]$. Proponiendo el cambio de variables:

$$x = (y - y_0) \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2(x(t)+y_0)}{dt^2} = \frac{d^2(x(t)}{dt^2} + \frac{d^2(y_0)}{dt^2} = \frac{d^2(x(t))}{dt^2} + 0 \\ F = -kx \end{cases} \tag{3}$$

tenemos la misma funcionalidad, pero centrada en la posición de equilibrio y_0. Escribimos entonces una ec. diferencial, quedando:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \tag{4}$$

la ec. (4) es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución es una función $x(t)$. Resolverla formalmente está fuera del alcance de este curso. Una solución *particular* es:

$$x(t) = A\ cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) = A\ cos\Big(\omega\, t + \phi\Big) \quad ; \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

donde $x(t)\,[m]$ es el desplazamiento vertical respecto de la posición de equilibrio, $A[m]$ es la *amplitud* (el valor máximo de $x(t)$) y $\phi[rad]$ es la *fase*. La cantidad $\omega[s^{-1}]$ es llamada *frecuencia angular*; al estar dentro de la función conseno –que se repite periodicamente cada 2π–, la cantidad ω determina cuán *rápido* se repite el movimiento. Es decir, si $t = \tau$, siendo $\tau[s]$ el periodo del movimiento:

$$\omega\tau = 2\pi \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

con lo que ω es lo que vincula la constante de restitución del resorte k y la masa m con el periodo de oscilación.

Una gráfica de la ec. (5) puede verse en la Fig. (2), mostrando la posición $x[m]$ en función del tiempo $t(s)$. Se observa que la posición se repite periódicamente en el tiempo, con periodo τ y amplitud A; todos los valores de posición se encuentran en el rango $[-A, A]$.

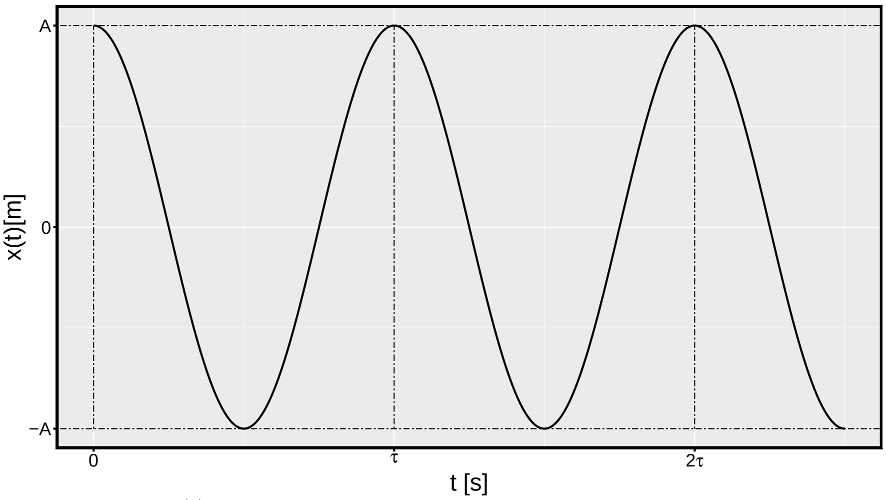

Figura 2: $x(t)$ vs. t para un sistema masa-resorte oscilando libremente.

Tarea 2: Medir el periodo

Montando un sistema masa-resorte, y habiendo caracterizado k en la **Tarea 1**:

I) Medir la masa m empleada. Estimar el periodo esperado en base a las cantidades dinámicas k y m $\tau_d \pm \sigma_{\tau_d}$, mediante las expresiones mencionadas.

II) Medir el desplazamiento en función del tiempo utilizando un sensor de movimiento basado en el tiempo de vuelo de las ondas sonoras (inaudibles).

- Colgar un gran blanco debajo de la pesa utilizada para no tener valores indeseados.
- Medir la temperatura ambiente, pues es necesario para la conversión de tiempos de vuelo en distancias.

III) Con los datos de no más de dos periodos (guarda con las amplitudes decrecientes), obtener mediante un ajuste no lineal los parámetros de la ec. (5). Estimar el periodo obtenido en la cinemática $\tau_c \pm \sigma_{\tau_{cm}}$ con el obtenido anteriormente.

Medio Medio

Uno de los problemas de la ec.(4) es que considera que la fuerza ejercida por el resorte sólo depende de la posición. Este modelo, como sabemos, tiene sólo fuerzas *conservativas*, y su energía no decae con el tiempo por fuerzas *disipativas*.

Este inconveniente en el modelo puede subsanarse agregando una fuerza proporcional *al contrario de la velocidad*, es decir, $F_f \propto -dx(t)/dt$. Esto sería:

$$\begin{aligned} m \quad a &= \quad F_{resorte} + F_f \Longrightarrow \\ m\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \quad -kx(t) - b\tfrac{dx(t)}{dt} \end{aligned} \tag{7}$$

donde, si dividimos ambos lados de la ec. (7) por la masa, tenemos la ec. diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}\frac{dx(t)}{dt} \tag{8}$$

donde en la ec.(8) tenemos el término $b\,[kgs^{-}1]$, que mide la interacción con el aire: valores de b mayores implican pérdidas de energía mayores. La solución (particular) para la ec. diferencial anterior, es:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}cos(\omega t) \tag{9}$$

una gráfica de la ec. (9), en donde se muestra $x(t)$ en función del tiempo t, puede verse en la Fig.(3). Se observa que el modelo predice una oscilación senoidal cuya amplitud decae en función del tiempo, que se muestra con una funcionalidad particular, $e^{-\frac{b}{2m}t}$

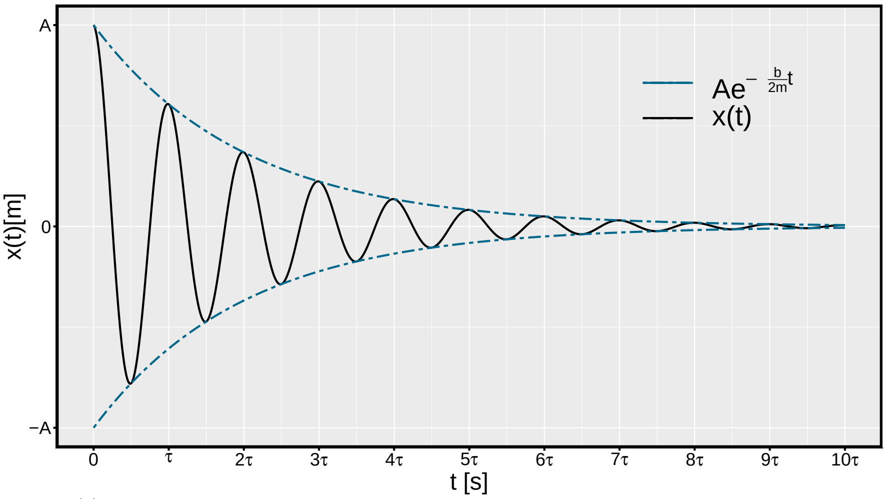

Figura 3: $x(t)$ vs. t para un sistema masa-resorte oscilando con una fuerza disipativa proporcional a la velocidad.

Tarea 3: Medir el periodo y el decaimiento

Montando un sistema masa-resorte, habiendo caracterizado k, m y τ en las **Tareas 1 y 2**:

I) Medir el desplazamiento en función del tiempo utilizando un sensor de movimiento basado en el tiempo de vuelo de las ondas sonoras (inaudibles). El tiempo de medida debe ser el suficiente para que se note el decrecimiento en la amplitud (eso depende de cómo esté montado el sistema).

- Si no se observa un decaimiento, aumentar el tamaño del blanco utilizado. En principio, esto aumentará las fuerzas disipativas, pero también la masa oscilante, que deberá ser medida nuevamente.
- Medir la temperatura ambiente, pues es necesario para la conversión de tiempos de vuelo en distancias.

II) Elegir los parámetros libres necesarios para ajustar una función como la de la ec. (9). Informar parámetros. En caso de utilizar masas iguales, comparar los valores de periodo obtenidos en la **Tarea 2**.

III) Calcular la energía total del sistema a partir de los datos. Calcular la energía del sistema a partir de la ec. (9). Comparar los resultados utilizando los valores de los parámetros obtenidos en el ajuste anterior.

IV) Elaborar: ¿Por qué la energía decae exponencialmente? ¿Qué tiene de especial la función exponencial que aparece tanto?¿Cómo se relaciona esto con la energía del sistema?

Medio Alto

Intentar medir la segunda Ley de Newton (para masas de sistema constante) involucra medir los dos lados de la igualdad de manera independiente:

$$\sum_i F_i = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{10}$$

en este caso, lo que tenemos son modelos de las fuerzas $F_i[N]$.

Tarea 4: Medir posiciones y aceleraciones

Utilizando el mismo sistema masa-resorte, mida la posición en el tiempo (utilizando el TOF de pulsos de sonido) y la aceleración del sistema (utilizando el teléfono celular encima del plato de cartón agregado al oscilador).

1. Calibre el acelerómetro con g_{RAGA} (para esto mida con el teléfono en reposo).
2. Si puede, tome la temperatura ambiente para utilizar una velocidad del sonido no demasiado desquiciada.

Realice las gráficas y ajustes que crea convenientes para mostrar la validez de las ecs. (5) y (8).

Tenga en cuenta que las series temporales no van a coincidir ni en los tiempos ni en la frecuencia de muestreo. Lo recomendable es calcular datos de aceleración en los tiempos que tenemos del sensor de movimiento utilizando una interpolación lineal.