



## Laboratorio N° 7 Caída libre de una *cebra*

### Guión

#### Aristóteles y la física pre galileana<sup>1</sup>

La caída de los cuerpos, constituye uno de los experimentos claves en la evolución del pensamiento físico y filosófico de la humanidad. Para comprender su trascendencia nos debemos mover al paradigma de la física de [Aristóteles](#) (*Αριστοτέλης*), desarrollada alrededor de 350 a.C. Esta concepción era la prevalente antes de la revolución científica ocurrida hacia fines del Renacimiento, que tuvo como protagonistas principales a: Copérnico, Galileo, Kepler y Newton (que desde luego lo hicieron independientemente en tiempos y lugares diferentes).

En la concepción de Aristóteles<sup>2</sup>, son cuatro los elementos constituyentes de todos los cuerpos materiales: el fuego, el aire, el agua, y la tierra. Cada uno de ellos tenía propiedades de movimientos intrínsecas a su naturaleza. Así, liberado a sí mismo un trozo de tierra tenía un movimiento “natural” vertical y descendente hacia el centro de la Tierra (que coincidía con el centro mismo del Universo), mientras que el fuego tenía un movimiento “natural” vertical y ascendente. De esta forma, la tierra era naturalmente un elemento pesado (grave) y el fuego era naturalmente liviano. El aire y al agua ocupaban una posición intermedia entre estos extremos.

Para que un cuerpo grave (tierra) comience a moverse era necesario aplicarle una fuerza. Los vocablos *animado* (con *alma*) e *inanimado* (sin ella) reflejan esta concepción: *alma* viene del vocablo latino *anima*, que a su vez deriva del vocablo griego *άνεμος* (ánemos), que deriva de viento, el soplo vital. En esta esquema, lo que se mueve, se mueve por el influjo externo, a menos que puedan moverse por sus propios medios<sup>3</sup>. Por otra parte, la noción que caracteriza la rapidez del movimiento es el tiempo que se demora en recorrer una dada distancia, que podríamos asimilar a nuestro concepto actual de velocidad. Es importante reparar que los conceptos modernos no son totalmente asimilables a los de la época de Aristóteles<sup>4</sup>, pero haciendo esta salvedad trataremos de usar un lenguaje moderno y matemático para explicar en nuestros términos las ideas de Aristóteles. A propósito, la forma matemática de expresar las leyes físicas se inicia precisamente con Galileo, lo que constituye uno de los puntos fundamentales para entender la radicalidad del pensamiento de Galileo, y la ciencia que estamos estudiando.

Deformando los conceptos de Aristóteles (esperamos tener el favor de los filósofos), se puede intentar *matematizar un poco* su concepción de la física. La velocidad  $v$  que adquiere un cuerpo es, según Aristóteles, proporcional a la fuerza aplicada  $F$ , e inversamente proporcional a la resistencia o *espesura del medio*  $R$ , con lo que nos queda una fórmula simple, pero muy intuitiva,  $v = F/R$ . Por ejemplo, un caballo arrastra un tronco, recorriendo una distancia  $d$  en un tiempo  $T$ . En el caso en que dos caballos<sup>5</sup> arrastren el tronco, entonces se tendrá el doble de fuerza, y por ende, emplearán un tiempo  $\sim T/2$ . Este tipo de argumento explicaría, en base al parámetro  $R$ , por qué es más fácil correr en el aire que en el agua (mayor  $R$ ). La velocidad máxima de un automóvil podría maximizarse aumentando  $F$  (dada por el motor) y disminuyendo  $R$ , dada por la *aerodinámica* del

<sup>1</sup>Extractado de Gil, Salvador, *Experimentos de Física de Bajo Costo, usando TIC's. Editorial de la Universidad Nacional de San Martín* (2016).

<sup>2</sup>O. Lombardi, “Comparación entre la Física Aristotélica y la Mecánica Clásica”, *Educación en Ciencias* 1 (3), 62-70, 1997. Revista de la Universidad Nacional de San Martín, Buenos Aires, Argentina.

<sup>3</sup>A los objetos inanimados, se les debe *animar*; los seres vivos tienen un soplo vital interno, un *alma*, que es lo que ocasiona la posibilidad de locomoción.

<sup>4</sup>Lombardi, rep.

<sup>5</sup>Siempre, dos caballos *idénticos*, las cosas de la ciencia.



automóvil. Es posible ver que estas ideas no son absurdas, sino que son una física del *sentido común*, y permiten explicar situaciones que se observan en la vida cotidiana.

Dentro de este esquema es claro que la Tierra se encuentra inmóvil. Si todas sus partes (cualquier trozo de tierra, por ejemplo una piedra) se mueven naturalmente hacia el centro, es claro que como un todo, la Tierra misma debe ser esférica y centrada en dicho punto, el centro mismo del Universo. Vemos así que dentro de la física de Aristóteles no es sencillo transformar a la Tierra en un simple planeta más. El movimiento no es relativo en este paradigma.

Asimismo, si lo que se mueve se mueve por otro, y así sucesivamente, esto no puede continuar indefinidamente, como bien sostenía Aristóteles. Debe haber una causa última del movimiento. Este era el lugar ideal para colocar una divinidad y Santo Tomás de Aquino no dudó en usar este argumento para probar la existencia de Dios.

Dentro de la concepción aristotélica, los cuerpos más pesados son atraídos por la Tierra con mayor fuerza que los livianos. Por tanto, siguiendo con el argumento de Aristóteles ( $v = F/R$ ), los cuerpos más pesados, al caer, deberían llegar más rápido al suelo que los ligeros. Galileo, en el siglo XVI, dejó caer cuerpos pesados y livianos desde lo alto de la Torre de Pisa<sup>6</sup>, observó que demoraban el mismo tiempo en llegar al piso. También realizó experimentos de un modo más controlado usando un plano inclinado para estudiar la caída de los cuerpos. Todos sus resultados indicaban que los cuerpos ligeros y pesados, caían de la misma forma<sup>7</sup>. Estos resultados contribuyeron a demostrar una grave anomalía en la concepción aristotélica, que concluyó con una de las revoluciones científicas más importantes de la historia. En la concepción de Galileo y Newton, siempre que el roce con el aire sea despreciable, todos los cuerpos caen con la misma aceleración, independientemente de su masa.

## Maneras de medir $g$

Las medidas de aceleración de la gravedad  $g$ -y relacionadas- son información que resulta valiosa desde puntos de vista *aparentemente dispares*, como pueden ser ámbitos académicos, ambientales y/o comerciales. Tanto para determinar movimientos de masas de agua o petróleo bajo la superficie terrestre, así como para determinar composiciones de la roca madre de un lugar, las medidas *locales* de  $g$  aportan información nada desdeñable. Las medidas empleadas para obtener los conocimientos anteriormente nombrados, requieren de un grado de precisión atroz y difícil de alcanzar. Los métodos experimentales empleados para estas medidas, enfrentan, además, muchas dificultades, ya que los equipos deben ser *transportables* a fines de *geolocalizar* cada medida:

- Deben ser robustos en cuanto a construcción.
- No deben sufrir influencias de las temperaturas de campo, o estar calibrados en temperatura.
- Las medidas deben ser reproducibles a un grado ignorado por les mortales estudiantes y docentes de la Lic. en Física.

La paleta de métodos disponibles es gigantesca. Comienza en el sistema más simple: una bolita que cae en un tubo con doble vacío, cuya posición en el tiempo es sensada por un interferómetro láser (este equipo cuesta 500 000 U\$D, y es el único de los que nombraremos que determina la aceleración de manera absoluta). Sigue con una esfera superconductora, mantenida en levitación, en la que se varía un campo magnético para levantar a la esfera, que correlaciona con variaciones en  $g$  (costo 100 000 U\$D). De reciente aparición, un acelerómetro mecánico, *similar* al que tiene un celular, bastante grande y muy bien calibrado, promete determinaciones en las variaciones de  $g$  de precisión comparable a la de la esfera superconductora<sup>8</sup>. Un *poco* más caro y más alto, consiste en dos

<sup>6</sup>A pesar de la popularidad de este experimento, todo parece indicar que nunca existió, ningún historiador pudo comprobar su veracidad. Sin embargo es lindo pensar en la manzana de Newton o Galileo tirando dos cuerpos desde lo alto de la torre de Pisa...

<sup>7</sup>Largo debate: según cierta tradición, Galileo no podía concluir en base a sus resultados que esto era así, con lo que en realidad esto debió ser *postulado*. El problema es que Galileo mismo situó a la experiencia como jueza de la teoría...

<sup>8</sup>Middlemiss, R., Samarelli, A., Paul, D. et al. Measurement of the Earth tides with a MEMS gravimeter. Nature 531, 614–617 (2016). <https://doi.org/10.1038/nature17397>

satélites estadounidenses cuyas distancias orbitales son diferentes: al aumentar  $g$  la distancia entre los satélites disminuye, y midiendo esta distancia de forma muy precisa, es posible correlacionar esta distancia con variaciones en  $g$ . Estos datos pueden descargarse, en parte, desde la página de la NASA, con una resolución espacial y temporal baja. Como es posible ver en estos ejemplos, determinar variaciones locales de  $g$  es de una gran importancia.

En este laboratorio intentaremos estimar  $g$  mediante el método más simple posible, que no sea un péndulo.

## 1. Experiencia

La idea es dejar caer desde el reposo una *cebra*, como se muestra en la Fig.(1), por una fotoc compuerta construída con los diodos IR conectados a una Arduino. La fotoc compuerta marca el tiempo (con una resolución de  $2\mu s$ ) cada vez que la cebra cubre o descubre los diodos enfrentados.

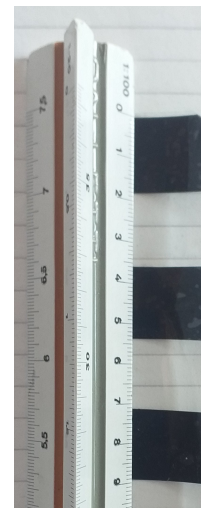
A partir de los datos de tiempo  $t_i$  de cada interrupción de la placa Arduino, y de las medidas de posición de cada extremo de las cintas  $x_i$ , será posible estimar la aceleración de la gravedad.

## 2. Construcción de la cebra

La cebra de la Fig.(1) fue construída recortando una botella PET de soda Talca de 2 l. Es importante que el pedazo de plástico obtenido no presente curvaturas en el eje vertical, a fines de evitar que se incline mientras cae, generando datos con errores sistemáticos provenientes de la inclinación.

Para la generación de las barras, se pegó cinta aislante negra, en trozos paralelos, con el mayor cuidado posible, a fines de no deformar la cinta plástica. Los trozos de cinta se pegaron consecutivos. Luego se retiró trozo de cinta por medio, dejando los espacios sin cinta. Esto evita la tarea engorrosa de medir reiteradas veces.

A la cebra se le hicieron unas muescas, cortando los ángulos inferiores a  $45^\circ$  (ver parte superior de la Fig.(1) ), a fines de identificar el mismo extremo en cada lanzada.



**Figura 1:** Cebra construída con una botella de plástico PET. Se muestra una regla milimetrada que permite medir los intervalos. Utilizando el software [ImageJ](#) (o cualquier software de edición de imágenes) es posible obtener medidas con mayor resolución que la de la regla.

## 3. Fotocompuerta

Para la construcción de la fotoc compuerta se utilizaron dos diodos IR<sup>9</sup>. Uno de los diodos es *emisor* de luz Infrarroja (el transparente), mientras que el otro es *receptor* (el negro).

Los diodos se colocaron en un recorte de una caja de cartón, como se muestra en la Fig.(2).

Los diodos se queman fácil (lo decimos por experiencia). Es necesario mantener el arduino desenchufado mientras se revisan las conexiones. El esquema de conexión para los diodos puede observarse en la Fig.(3) (sólo lo intenta quien esté canchere con la electrónica, para no quemar nada). Las resistencias ( $220\Omega$  y  $4.7k\Omega$ ) poseen un esquema de rayas para su identificación.

Por otra parte, vamos a ver cómo hacer las conexiones en clase de laboratorio.

<sup>9</sup>IR es Infra Rojo, lo que quiere decir que van a emitir luz, pero no la vamos a ver. Cuidado al enchufarlos, hay un sistema de resistencias que deberemos tener en cuenta para no quemarlos.



**Figura 2:** Fotocompuerta construída con cartón y diodos. Es importante que el diodo receptor esté bien cubierto de la luz ambiente, logrando una buena señal cuando la luz del emisor es obstruida por la cebra. Otra manera de lograr esto es bajar la luz ambiente durante el experimento.

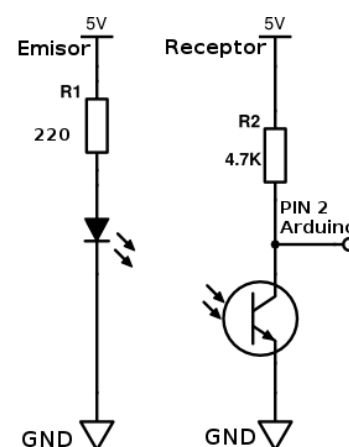
### 3.1. Importante - Conexiones de los diodos

### 3.2. Prueba del Receptor

Para probar la recepción, puede cargarse en la Arduino el código que lee el pin analógico A0. Es necesario conectar la salida del receptor de la misma forma que está en el esquema de la Fig.(3), pero en lugar de hacerlo al pin 2, lo conectamos al analógico A0.

#### Software 3.1: Prueba Receptor - Código Arduino

```
float lecacero;  
void setup() {  
  Serial.begin(9600);  
  pinMode(A0, INPUT);  
}  
  
void loop() {  
  delay(100);  
  lecacero = analogRead(A0);  
  Serial.println((float)lecacero /1024.0 * 5.0, DEC);  
}
```



**Figura 3:** Conexiones de emisor (transparente) y receptor (negro).

Cuando el pin esté en completa oscuridad, el valor que se imprime en el monitor serie debe ser cercano a 5. Cuando está iluminado con IR (el diodo emisor, aunque puede ser una llama a unos 10 cm de distancia, o la luz del sol), el valor debe ser cercano a 0. El código puede observarse arriba.

Estando el emisor ya conectado, es importante utilizar este código para probar la cebra en mano, viendo si el plástico seleccionado permite que pase el IR de los diodos.



## 4. Modelo Teórico

La cebra activará la fotocompuerta en las posiciones  $x_i$  a los tiempos  $t_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , que dependen de cuántas cintas tenga la cebra. La idea básica es que la cebra caerá con una aceleración *cercana* (aunque *un poco* menor) a la aceleración de la gravedad (cuyo valor debe consultarse en la Red Argentina de Gravedad Absoluta).

- Escriba la posición de una partícula acelerada uniformemente,  $x(t)$ , para valores discretos  $x_i(t_i)$ , como en el caso de la cebra.
- Identifique los coeficientes de un polinomio cuadrático  $x(t) = a + bt + ct^2$  con las cantidades escritas en el modelo anterior.

## 5. Experiencia de prueba

Calcule el tiempo de caída de la cebra *desde el reposo*, desde la primera activación de la fotocompuerta hasta la última, suponiendo la aceleración de la gravedad. Deje caer la cebra desde el reposo algunas veces:

- ¿Los tiempos de caída son aproximadamente *reproducibles*?
- Grafique las pocas repeticiones, y compare visualmente el patrón que tiene el gráfico con el modelo establecido. Graficar una parábola con lo esperado puede resultar de ayuda.
- Calcule la velocidad media entre  $x_1$  y  $x_n$ , asumiendo que la velocidad inicial de la cebra es  $v_0 = 0$ . Realice una cuenta sencilla con los datos obtenidos en tres repeticiones y compare las magnitudes. Como es imposible lograr, en el experimento, la condición  $v_0 = 0$ , esperamos que haya un error sistemático por exceso en los resultados experimentales.

Saque conclusiones sobre los cuidados a la hora de realizar la experiencia.

## 6. Experiencia

1) Deje caer la cebra unas  $n = 150$  veces por la fotocompuerta, tomando las precauciones que puedan haber surgido del experimento de prueba.

2) Cuelgue un vaso plástico de la cebra, usando hilos que lo sostengan. Coloque una piedra en el vaso plástico. Haga otro conjunto de  $n = 150$  mediciones de la cebra cayendo por la fotocompuerta.

Sabemos que 150 veces asusta, pero a no preocuparse: en diez minutos está listo.

## 7. Estimación de $g$ - Ajuste de un polinomio de grado 2 en R

Recordemos:

- El modelo que tenemos para  $x(t)$  es cuadrático.
- La velocidad inicial de la cebra no se puede controlar, por lo que no podremos *linealizar todas* las tiradas al mismo tiempo.

lo anterior implica que no podremos tratar nuestra colección de repeticiones como medidas *con los mismos coeficientes* de nuestro modelo teórico. La linealización de *cada tirada por separado* es posible, pero difícil (en un rato volvemos a ella).

La primera manera de estimar  $g$  será utilizando un *ajuste lineal* de un *polinomio de grado 2* al cual podemos *mocharle* el coeficiente independiente. Esto es, ajustaremos un polinomio de la forma  $x = bt + ct^2$ .

#### Software 7.1: Ajustando un polinomio $x(t) = bt + ct^2$ en R

Inventamos un vector de datos en  $t$ , y hacemos un polinomio  $x(t)$ , ensuciado:

```
t <- seq(0, 1, 0.01); x <- t + t^2 + rnorm(sd = 0.05, n = length(t))
```

Hacemos un ajuste lineal de estos datos, con la función  $x(t) = bt + ct^2$ :

```
ajuste <- lm( x ~ 0 + t + I(t^2) )
```

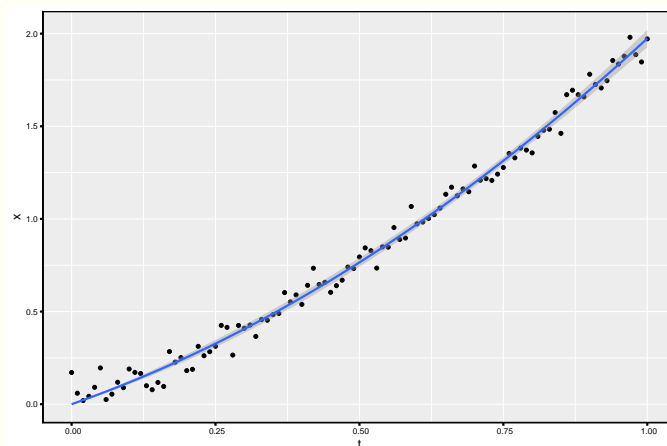
Vemos los resultados (acá mostramos sólo parámetros y  $R^2$ ) y sacamos los parámetros ajustados:

```
d.ajuste <- summary.lm(ajuste)
d.ajuste$coefficients
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
t      1.0865917 0.03775712  28.77846 6.853275e-50
I(t^2) 0.8872098 0.04850313  18.29181 1.609000e-33
d.ajuste$adj.r.squared
[1] 0.9971158
#sacamos coeficientes
b <- d.ajuste$coefficients[1,1]; c <- d.ajuste$coefficients[2,1]
```

Modelo y grafica de los datos y el modelo:

```
t.modelo <- seq(min(t),max(t), 0.001); x.modelo <- b*t.modelo + c*t.modelo^2
#gráfico
plot(t,x, pch = 16, cex = 0.8); lines(t.modelo,x.modelo,lwd = 3, col = "Blue")
```

Podemos ver el resultado graficado:



Ojo, que son datos de mentira.

Con cada repetición del experimento, tendremos un valor de parámetro que, luego de alguna cuenta podremos identificar con  $g$ , y también tendremos la desviación estándar del parámetro estimado  $\sigma_g$ .





## 8. Tratamiento de los datos

Uno de los problemas que no tratamos en teoría –pero que anotamos aquí– es que, en cada repetición del experimento, lo que obtenemos mediante el ajuste es un valor medio de un parámetro de ajuste, junto con una desviación estándar. Si hacemos  $n = 150$  repeticiones, lo que vamos a obtener es una *colección de medias*, junto con una *colección de desviaciones estándar asociadas a cada media*.

El problema se presenta cuando queremos hacer el plural superlativo “la **media de medias**” (que salen de cada ajuste), las cuales no tienen desviaciones estándares iguales. Para resolver este problema, se puede demostrar<sup>10</sup> que, si tenemos una colección de valores  $\bar{g}_i$ , cada uno de los cuales tiene una desviación estándar  $\sigma_i$ , entonces, para obtener el mejor valor para la media  $\mu'$ , hacemos:

$$\mu' = \frac{\sum(\bar{g}_i / \sigma_i^2)}{\sum(1 / \sigma_i^2)} \quad (1)$$

y para obtener la varianza (y la desviación estándar) asociada a  $\mu'$ , hacemos:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum(1 / \sigma_i^2)} \quad (2)$$

Las ecs. anteriores servirán para expresar los resultados de esta experiencia.

## Preguntas que deberá responder en la exposición...

- 1) Comparando la cebra *con y sin peso extra*: ¿cómo resultaron las aceleraciones obtenidas?
- 2) ¿La aceleración depende de la masa del objeto que cae? ¿Esto es contradictorio con la física de Aristóteles o la de Galileo y Newton?
- 3) Si tuviéramos una cebra de un kilómetro –y las instalaciones para realizar tal experimento–, ¿cómo cree que se vería una gráfica de  $x_i$  vs  $t_i$ ? ¿La aceleración sería constante?
- 4) El resultado obtenido para la aceleración de la gravedad ¿depende del modelo utilizado?
- 5) Elabore un método que le permita estimar  $g$  a partir de los mismos datos, pero utilizando el ajuste de una recta ¿Sería posible?
- 6) Si realiza el método, compare los valores obtenidos a partir de los mismos datos ¿son iguales?

<sup>10</sup>Por el método de máxima verosimilitud, pero este margen es muy exiguo para contenerlo.



## Apéndice: Código Arduino

El código que vamos a utilizar para la Arduino se muestra a continuación. La estructura de datos que genera es *tidy data*, y permite seleccionar tanto el número de Tirada, como el número de interrupción dentro de cada tirada. La estructura de datos que genera tiene columnas Tirada, Interrupt, t. Es necesario agregarle la columna de  $x_i$  para cada  $t$  posteriormente, aunque si se miden los valores se puede realizar agregar aquí usando el comando `Serial.print(x[n]);`.

Es importante notar que, si pasa un tiempo de 1s desde la última toma de datos, entonces el marcador de Tirada aumenta en uno.

Con respecto a la forma de obtener los tiempos de cada paso de la cebra, es destacable que no se utiliza nada en la función `loop()`, sino que se utiliza un tipo especial de funciones, llamadas genéricamente *interrupciones*. Las interrupciones, muy inespecíficamente, son funciones que se ejecutan cuando un pin (especificado), cambia de valor de voltaje (en lógica, cambia de 0 a 1 ó de 1 a 0, o ambos). Este tipo de funciones *interrumpe* (de ahí su nombre) la ejecución del código principal, y hace una tarea (generalmente pequeña). En el caso de medir tiempos de eventos, este tipo de funciones son las indicadas, porque se ejecutan muy rápido y obtienen el tiempo de un evento sin demoras. En el caso que nos ocupa, la función `loop()` sólo se encarga de imprimir en el caso en que una interrupción haya ocurrido.





### Software 8.1: Código Arduino

```
const byte Pino = 2;
byte flag = 0;
volatile unsigned long t = 0;
volatile unsigned long t_ant = 0;
unsigned long t1 = 0;
int n = 1;
int tirada = 0;

void setup() {
  Serial.begin(57600);           // setup serial
  pinMode(Pino, INPUT_PULLUP);
  attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(Pino), inputISR1, CHANGE);
  Serial.print("Tirada");
  Serial.print(";");
  Serial.print("Interrupt");
  Serial.print(";");
  Serial.println("t");
}

void loop() {
  if(flag == 1){
    if((t - t_ant) >= (1000000) ){tirada = tirada +1; n = 1;};
    if(n == 1){t1 = t;};
    Serial.print(tirada);
    Serial.print(";");
    Serial.print(n);
    Serial.print(";");
    Serial.println(t-t1);
    t_ant = t;
    flag = 0;
    n = n+1;
    /* Posible debouncing para Nano o UNO. (no para Mega)
    EIFR |= bit(INTF0);    // pone la bandera INT0 en 0
    EIMSK |= bit(INT0);    // máscara
    */
  }
}
/*INTERRUPCIONN*/
void inputISR1() {
  t_ant = t;
  t = micros();
  flag = 1;
  // EIMSK &= ~bit(INT0);  // apaga la interrupción (debouncing)
}
```