



FISICA EXPERIMENTAL I

Trabajo Final

Dinámica de un Péndulo Casero

Cada estudiante deberá tener a mano:

- Una computadora.
 - Un celular.
 - El material de Arduino (placa, protoboard, cables, diodos.).
 - El código [pendulum.ino](#)
-

Guión - Objetivos

El péndulo es un sistema que, como veremos, admite un sinnúmero de interpretaciones teóricas: desde el péndulo simple, hasta la complejización *ad infinitum* de los modelos; el péndulo *parecería ser* uno de los sistemas más estudiados de la física. No en vano, aparece en muchos *toy-models*¹ de una gran cantidad de sistemas, el péndulo ocupó un lugar central en la tecnología para medir el tiempo y también para estimar g .

En esta ocasión vamos a centrarnos un poco en la *dinámica* de un péndulo:

- I Estudiaremos las aceleraciones presentes en el sistema, y compararemos este estudio con los resultados de una medida hecha con un péndulo que consiste en un teléfono celular colgando de un hilo. Para la medida de las aceleraciones se utilizará el acelerómetro del teléfono.
- II Obtendremos la amplitud de la oscilación del péndulo en el tiempo, por medio de los datos del acelerómetro.
- III Compararemos dos modelos que intentan describir la dinámica del decaimiento de la amplitud en el tiempo.
- IV Estudiaremos la caída del periodo de oscilación respecto de la amplitud, utilizando los datos y/o modelos de amplitud con periodos medidos utilizando la fotoc compuerta construída durante el curso.
- V Estudiaremos la estimación de la gravedad mediante la aproximación de pequeñas oscilaciones y la corrección de ángulo finito.

¹ *Toy-models*, literalmente, *modelos de juguete*: un modelo que no representa fielmente todo el comportamiento de un sistema, pero que alcanza para captar cualitativamente ciertos aspectos y con el cual es más simple hacer inferencias y analogías.



1. Introducción

1.1. De dónde, cómo y por qué

“Clásico es aquel libro que una nación o un grupo de naciones o el largo tiempo han decidido leer como si en sus páginas todo fuera deliberado, fatal, profundo como el cosmos y capaz de interpretaciones sin término.

Jorge Luis Borges. *Sobre los Clásicos. Otras Inquisiciones* (1952), en *Obras Completas* (1974). Ed. Emecé.

COMO ya seguramente sabemos, el término *péndulo* se refiere a una masa o una *distribución de masa* que *oscila* en torno a un centro, impulsada por la fuerza de gravedad. Antiguo como el tiempo, el péndulo comienza a tener importancia en física con el comienzo de la misma como disciplina científica, gracias a *Galileo Galilei*, quien en el año 1602 observó que el péndulo tiene un periodo que es independiente de la amplitud del movimiento. Además de esto, *Christiaan Huygens* (un genio de los Países Bajos menos conocido por el gran público) inventó el reloj de péndulo, el cual fue, hasta la década de 1930, la tecnología que permitía *medir el tiempo* de la manera más precisa posible, siendo reemplazado por el cristal de cuarzo². El péndulo, además se utilizó hasta la década de 1960 para estimar g , cuando fue reemplazado por los sistemas que se utilizan actualmente: una bolita que cae en un doble vacío y la medición de su posición por medio de interferometría láser.

En un orden más *gramatical*, el péndulo es un sistema físico que *oscila*. Oscilar es un verbo en castellano, de amplia difusión en las lenguas romances y anglosajonas (es la raíz científica latina lo que introdujo este término en esas lenguas bárbaras). Este verbo viene del latín, *oscilare* (lo cual no aporta nada); sin embargo aparece en otra palabra castellana, *ósculo* (beso), la cual tiene la misma raíz. El verbo latino *oscilare* se originó de las fiestas de Baco (bacanales), dios romano del *jolgorio*: en las festividades de Baco se colgaban en los árboles unas voluptuosas bocas de papel, *osculum*, indicando el tiempo de diversos ritos orgiásticos. Estas bocas *oscilaban con el viento*, y por esos azares que rigen los significados, la palabra pasó de los impúdicos ritos de Baco a nuestro verbo para describir el apacible movimiento del péndulo.

Etimologías y orgías aparte, la oscilación de un péndulo ocupa en física un lugar muy central, tanto por ser uno de los primeros sistemas estudiados, como por ser *modelo por analogía* de muchos otros sistemas físicos. El péndulo posee una ecuación de movimiento que, aproximadamente, para pequeñas oscilaciones, puede constituir un ejemplo de *oscilador armónico*. La palabra armónico refiere a que una cantidad oscila *sinusoidalmente*, con frecuencia de oscilación única. Todo estudio que realicemos posteriormente, como ondas mecánicas, acústicas y electromagnéticas, considerará este tipo de oscilaciones. En los años subsiguientes vamos a estudiar un oscilador armónico cuántico, un sólido como una colección de osciladores armónicos cuánticos (modelo de sólido de Einstein) y dependiendo de la curiosidad de cada *une*, todavía hay un problema importante y no resuelto, el famosísimo problema de Fermi-Pasta-Ullam-Tsingou, el cual consiste en N osciladores (símil péndulos) acoplados por un pequeño término no lineal en la interacción, que resulta en muchas preguntas interesantes, *aunque este margen es demasiado pequeño para enunciarlas*. Un problema de hace unos 70 años, en los orígenes de la simulación por computadora.

“Si (como afirma el griego en el *Cratilo*) // el nombre es arquetipo de la cosa // en las letras de ‘rosa’ está la rosa // y todo el Nilo en la palabra ‘Nilo’.”³, podríamos sugerir que péndulo es, tal vez, sólo *otra manera de decir física*.

²Hace pocos años se [publicó un trabajo](#) sobre un reloj atómico de átomos entrelazados, que permiten disminuir la desviación estándar de las fluctuaciones en las medidas de tiempo de los relojes atómicos convencionales. La medida de los tiempos ocupa un capítulo aparte tanto en física como en la vida cotidiana

³J.L. Borges, ‘El Golem’, en *Obras Completas* (1974). Ed. Emecé.



2. Un modelo para armar

En esta ocasión vamos a comenzar por el estudio teórico, parándonos en ciertos detalles. Es que la medida que vamos a realizar, si bien es simple –como todas las medidas hogareñas– va a requerir de bastante interpretación, a fin de no quedar *lost in translation* entre el mundo de la teoría y el de las medidas: habitualmente es así, pero siempre estuvimos merodeando todo lo relacionado con incertezas y tratamiento de datos, simplificando al máximo los modelos que utilizamos.

Vamos a presentar el péndulo simple, y luego *complejizar*⁴ un poco los modelos, incorporando dos importantes características: el decaimiento por fricción con el aire y la expresión para ángulos finitos.

Resultará relevante mirar los detalles del péndulo y del acelerómetro, para ver *qué es medido* al medir, y cómo podemos extraer conclusiones a partir de los datos de los que disponemos. Además aconsejamos realizar este estudio con los resultados de una medida del acelerómetro a la vista: simplifica las cosas intentar armar un esquema de qué está aconteciendo.

2.1. Cómo funciona la cosa en el mundo de la no fricción

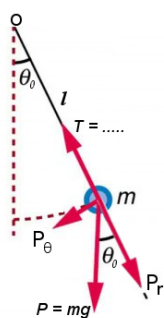


Figura 1: Esquema de un péndulo con hilo de longitud l y masa m , en el momento en que el ángulo $\theta(t) = \theta_0$.

El péndulo más simple concebible es aquél que *describimos* como una masa puntual m , la cual cuelga de un hilo de largo l . No casualmente este tipo de péndulo se denomina péndulo ideal: masa puntual (una buena aproximación, a veces) y un hilo inextensible sin masa, de largo l . Obvio, no existen ni amortiguamiento con el aire, ni fricción entre las partes. En este modelo, un péndulo, una vez puesto a oscilar, lo hará para siempre.

Mientras que la fuerza que *mueve* al péndulo es la componente tangencial del peso de la masa m , hay, obviamente, otras fuerzas actuando en el hilo del péndulo, que se denominan fuerzas *radiales*: son la componente del peso en la dirección del hilo, y la tensión del hilo, que en parte contrarresta la componente del peso en esa dirección y en parte soporta la fuerza centrípeta que sostiene la rotación del péndulo (es claro que el péndulo es un movimiento en un arco de círculo, por lo que, cuando tiene movimiento, existe una fuerza centrípeta que cambia la dirección de la velocidad tangencial).

2.1.1. Consideraciones de Fuerzas

En la Fig.(1) se observa el esquema de un péndulo en el instante en el que se encuentra en $\theta = \theta_0$ (está en el ángulo máximo, que llamamos *amplitud*). Viendo la configuración, sabemos que el péndulo se mueve en una sección de un círculo de radio l . El peso de la masa m puede descomponerse en dos componentes perpendiculares: una de las componentes está en la misma dirección que el hilo (P_r , la componente radial), mientras que la otra es perpendicular al mismo (P_θ , la componente tangencial).

Tarea de Interpretación

- Calcule las componentes del peso $P = mg$, como se muestran en la Fig.(1). Indique cuál es la componente de restitución.
- Bosqueje cómo varían ambas componentes del peso en función del ángulo θ para los ángulos $-\theta_0 < \theta < \theta_0$. Prediga *cualitativamente* el trabajo que realiza cada una de las componentes.

⁴En el artículo ‘R. Nelson, M.G. Olsson, *The pendulum - Rich physics form a simple system*’, *Ame. J. Phys.*, Vol. **54** (2), (1986), se asiste a lo que denominaríamos una descripción *ad nauseam* de un péndulo a fines de intentar de determinar la aceleración de la gravedad en una parte en 10 000. Además se menciona parte de la historia del péndulo, íntimamente asociada a la historia de la física.



- c) Identifique aceleraciones tangenciales máximas y mínimas de la masa m en base al análisis de fuerzas.
- d) Calcule la tensión de la cuerda T en el momento en el que se muestra en la Fig.(1), es decir, de máxima amplitud.
- e) ¿Podría intentar decir en cuál de los dos casos es mayor la tensión $T(\theta = 0)$ (el punto de equilibrio):
(i) si se encuentra en absoluto reposo, (ii) si está oscilando con amplitud θ_0 ?

El análisis de las fuerzas presentes y sus componentes entrega algunos conocimientos sobre el comportamiento del péndulo y permite identificar las trayectorias posibles. Ahora pasamos al análisis energético, que nos dará otro enfoque a este mismo problema.

2.1.2. Energéticamente hablando...

Bueno, en teoría ya sabemos cómo se portan las fuerzas en el péndulo ideal. El punto de vista de la energía siempre aporta algo más.

Para plantear el problema energéticamente, notamos que la masa m se encuentra, obviamente, en el campo gravitatorio terrestre, por lo que es posible definir una energía potencial $E_p = mgh$, donde h es la diferencia de altura entre el punto de reposo del péndulo y la posición de la masa m (recordemos que el cero de potencial es tan arbitrario como los signos con los que escribimos los números).

La Fig.(2) muestra un péndulo ideal de masa m y largo l , que oscila con amplitud θ_0 . En un ángulo cualquiera θ , la energía total del péndulo es la suma de las energías potencial y cinética, es decir $E_T = E_p + E_k = mgh + mv^2/2$. Como asumimos que no hay disipaciones, esta cantidad debe ser igual para cualquier θ , para cualquier número de oscilaciones. Notamos que:

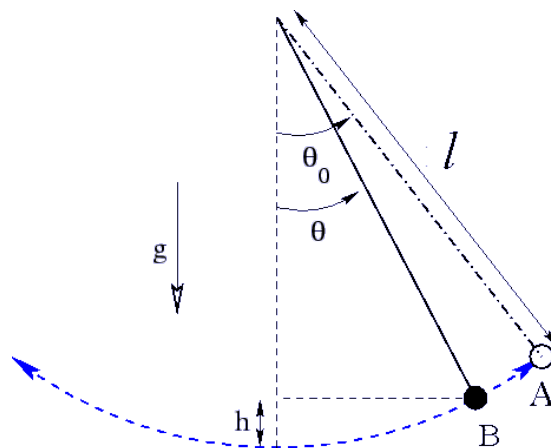


Figura 2: Esquema de un péndulo con hilo de longitud l y masa m , indicando dos ángulos, $\theta(t)$ y θ_0 .

- En los extremos de oscilación –donde la velocidad es 0– la energía potencial gravitatoria del sistema es la energía mecánica total del sistema. Haciendo un poco de trigonometría:

$$E_T = E_{pmax} = mgh_{max} = mgl(1 - \cos(\theta_0)) \quad (2.1)$$

con esto tenemos la energía total del sistema en función de la amplitud θ_0 .

- En el punto de equilibrio $E_p = mgl(1 - \cos(0)) = mgl(1 - 1) = 0$, y toda la energía potencial gravitatoria es transformada en energía cinética, con lo que podemos escribir:

$$E_T = E_{kmax} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgl(1 - \cos(\theta_0)) \quad (2.2)$$



Tarea de Interpretación

- Encuentre la energía potencial para cualquier ángulo θ en el que el péndulo se encuentre. Grafique e interprete para el rango $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$.
- Sabiendo que la energía potencial máxima es la energía de todo el sistema y teniendo en cuenta la expresión del punto anterior de la energía potencial, calcule la energía cinética en cualquier ángulo θ .
- Considerando la expresión obtenida, calcule el módulo de la velocidad tangencial $|v_\theta(\theta)|$. Grafique la función para $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, interprete dónde ocurre el máximo y dónde ocurre el mínimo. ¿Se animaría a graficar v_θ en lugar de su módulo?

Con el análisis energético ganamos mucha simplicidad y conectamos cantidades cinemáticas (o su módulo) con las cantidades *medibles* del péndulo simple. Lo que no debería ser sorpresa –y a veces lo es– es que la velocidad no depende de la masa, por lo que el periodo de oscilación tampoco (el péndulo simple es una masa que cae en un campo gravitatorio constante, sólo que atada a un hilo). Si nos preguntamos por el *isocronismo* para diferentes amplitudes, no es tan fácil verlo, es toda una cuenta que en un rato retomaremos.

2.1.3. La tensión del hilo

Es claro que el hilo *inextensible y sin masa* del péndulo sostiene *la componente del peso en la dirección del mismo*. No es *tan claro* que, además, cuando el péndulo *oscila*, el hilo *sostiene*, además del peso, la *fuerza centrípeta*, que depende de la velocidad tangencial $v_\theta(\theta)$. Esta fuerza es la encargada de *cambiar la dirección y el módulo* de $v_\theta(\theta)$ en la trayectoria circular que sigue el péndulo.

De la dinámica de rotación del movimiento circular uniforme, sabemos que, cuando un cuerpo rota con velocidad *angular* $d\theta/dt = \dot{\theta}$ en una trayectoria circular de radio l , entonces tenemos que la aceleración centrípeta es:

$$a_c = \frac{v_\theta^2}{l} = l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = l\dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

donde en la ec.(2.3) podemos calcular la aceleración centrípeta a partir de la velocidad tangencial v_θ . Es importante notar que a_c está en la dirección de \hat{r} , aunque no haya aceleraciones en esta dirección.

Tarea de Interpretación

- Calcule la aceleración centrípeta a_c para el rango $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, grafique e interprete. Dibuje un esquema de un péndulo indicando dirección y sentido de la aceleración centrípeta.
- Sabiendo la aceleración centrípeta a_c , calcule la velocidad angular $d\theta/dt = \dot{\theta}$, mediante la ec.(2.3) para todo el rango de ángulos. Grafique e interprete valores extremos.
- Calcule la fuerza centrípeta que el hilo ejerce sobre la masa m . Dibuje su dirección y sentido en un esquema.
- Teniendo en cuenta que la tensión del hilo es la suma de la componente del peso sobre el hilo y la fuerza centrípeta, súmelas e interprete mínimos y máximos de la función obtenida.

Ahora que ya tenemos alguna imagen del funcionamiento del péndulo, vamos a escribir la ecuación de movimiento y ver algunas características desde el punto de vista angular.



2.1.4. Ecuación de movimiento

La ec. de movimiento del péndulo vincula la aceleración angular $d^2\theta(t)/dt^2 = \ddot{\theta}(t)$ con el ángulo $\theta(t)$ en cada instante⁵. Puede ser [deducida de diferentes maneras](#), y su expresión es:

$$I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = I\ddot{\theta}(t) = -mgl \operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (2.4)$$

donde $I[\text{kg m}^2]$ es el *momento de inercia* de la masa oscilante, y puede ser escrito como $I = \gamma ml^2$, γ es un coeficiente adimensional que mide la geometría respecto del eje de oscilación del péndulo ($\gamma = 1$ para un péndulo simple, y $\gamma \neq 1$ para péndulos con masa distribuida alrededor del eje de rotación).

En las cuentas, es posible asumir idealidad utilizando $I = ml^2$, con lo que la ec.(2.4) queda:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (2.5)$$

donde la ec.(2.5) es una ecuación diferencial de segundo orden y resolverla implica encontrar una función $\theta(t)$ que cumpla los requerimientos dados por la ecuación. La manera más común es aproximar $\operatorname{sen}(\theta) \sim \theta \forall \theta \sim 0$ (pequeñas oscilaciones), lo que simplifica la ec.(2.5) a:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta(t) \quad (2.6)$$

cuya solución es $\theta(t) = \theta_0 \cos(2\pi t/\tau + \phi) = \theta_0 \cos(2\pi \sqrt{g/l} t + \phi)$. Esta aproximación es la que da origen a la *isocronía* del periodo de oscilación del péndulo para diferentes amplitudes, pero se sostiene sólo con la aproximación $\operatorname{sen}(\theta) \sim \theta$...recordemos esto.

Tarea de Interpretación

- Grafique $d^2\theta(t)/dt^2$ para $-\theta_0 < \theta < \theta_0$. Encuentre máximos y mínimos e interprete.
- Estime I asumiendo que el teléfono posee una densidad constante.
- Calcule γ a partir del punto anterior.

2.2. Modelos de amortiguamiento

Tanto en casa como en el laboratorio, es difícil que alguien quiera montar un péndulo en el vacío (aunque lo hubo para hacer ciencia), y lo máximo que podría hacerse –en el labo– es idear métodos para impedir que la energía inicial del péndulo se pierda rápidamente. Por lo tanto, es claro que nuestro experimento ocurrirá en una atmósfera respirable... y amortiguadora.

La amplitud de un péndulo decae en el tiempo por varias cosas, pero casi siempre la más importante de ellas es la *fricción*⁶ con el aire. El aire va *frenando* el péndulo, haciendo que la amplitud θ_0 decaiga monótonamente.

Sin embargo, y anotado aquí al pasar, hay dos *regímenes* de velocidades que imponen tasas de pérdida de energía diferentes:

⁵La expresión $\ddot{\theta}(t)$ es la segunda derivada temporal de θ , es decir, $\ddot{\theta}(t) = d^2\theta(t)/dt^2$. La notación de los puntos fue utilizada por Newton, y pervive en la física. La notación diferencial era utilizada por Leibnitz y es la usual y mucho más intuitiva.

⁶Este término en fluidos no es muy adecuado, pero lo mantenemos para la comprensión de todos los lectores. Diríamos: fluido viscoso, *non-slit interface* y otro conjunto de términos *demasiado extensos para ser contenidos en este margen*.



- En un régimen de *bajas velocidades*⁷ la *fuerza de fricción* es proporcional a la velocidad del objeto respecto del medio, por una constante.
- En un régimen de altas velocidades, la *fuerza de fricción* tiene un término proporcional a la velocidad y *otro* término proporcional al cuadrado de la velocidad.

Para el régimen de bajas velocidades, existe una solución muy común: la amplitud *decae exponencialmente*:

$$\theta_0(t) = \theta_i e^{-\alpha t} \quad (2.7)$$

donde en la ec.(2.7) el parámetro $\alpha [s^{-1}]$ determina la tasa de decaimiento de la amplitud del péndulo desde un valor inicial θ_i , y puede ser ajustada a partir de datos experimentales mediante un ajuste lineal (dado que es un problema *linealizable* mediante el cambio de escala).

En cuanto al régimen de *altas velocidades* notamos que si las consecuencias del amortiguamiento son, justamente, que el sistema *pierda energía*, entonces el término cuadrático *debería* actuar en el comienzo de las oscilaciones, ya que cuando la amplitud decae (se disipa energía del sistema en calor), la velocidad también lo hace, entrando en el régimen de bajas velocidades, y decaimiento exponencial. Esta idea entrega otro modelo de decaimiento de la amplitud en el tiempo⁸ t , dado por:

$$\theta_0(t) = \theta_i \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\beta \theta_i (1 - e^{-\alpha t}) + \alpha} \quad (2.8)$$

donde $\beta [s^{-1}]$ es el coeficiente correspondiente al término proporcional a v^2 , mientras que $\alpha [s^{-1}]$ es el que acompaña a v , como en la instancia anterior. Es fácil ver que si hacemos $\beta = 0$ entonces estamos dentro del dominio de fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, y el consecuente decaimiento exponencial de la amplitud; para probar que a medida que t aumenta sólo queda el decaimiento exponencial, es necesario desarrollar los términos exponenciales y hacer mucha, mucha, mucha álgebra.

Sumando otro problema, es que la función en la ec.(2.8) no es *linealizable*, por lo que para determinar los parámetros a partir de datos de amplitud y comparar modelos, deberemos realizar un ajuste no lineal. Esta técnica la introducimos en el Apéndice C, aunque aclaramos desde ya que el problema es más complicado que los ajustes lineales.

Teniendo estos dos modelos de decaimiento de la amplitud, intentaremos contrastarlos con los datos que obtengamos de nuestro péndulo.

2.3. El periodo es...

Para terminar, repetimos hasta el hartazgo que el periodo de un péndulo τ *no depende de la amplitud, siempre y cuando ésta sea pequeña (Galileo dixit)*. Vamos a desafiar nuestras habilidades. Sabemos que:

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.9)$$

donde la ec.(2.9) describe los periodos de un péndulo sin importar su amplitud θ_0 .

⁷¿Bajas velocidades respecto de qué? La dinámica de fluidos se va a guardar sus secretos por el día de hoy. Y por algunos años más.

⁸Se pueden ver las cuentas –complicadas– en ‘R. Nelson, M.G. Olsson, *The pendulum - Rich physics from a simple system*, *Ame. J. Phys.*, Vol. **54** (2), (1986).



Además, sabemos de Wikipedia⁹ que el periodo de un péndulo simple en función de su amplitud θ_0 puede ser descrito mediante:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\sin^6 \theta_0}{2} + \dots \right] = \tau_0 f(\theta_0) \quad (2.10)$$

donde la ec.(2.10) es una serie que, aunque truncamos, logramos buena aproximación (los términos de órdenes superiores a $O(\sin^8(\theta_0/2))$ entregan milésimas para 30°). Se sugiere truncar la serie teniendo en cuenta la *mínima escala en la que se pueda medir el periodo*.

En la última igualdad de la ec.(2.10), $\tau_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, mientras que $f(\theta_0)$ representa la serie del término anterior.

3. Acelerómetro: Generalidades y medidas

“Como te ven, te tratan...”
Rosa María Juana Martínez Suárez
(ap. Mirtha Legrand)
(1999 a.C.).

Un acelerómetro es, de manera redundante, un aparato que mide la aceleración, desde un marco de referencia no inercial. En particular, los **acelerómetros MEMS**¹⁰ (*Micro-Electro-Mechanical-Systems*) son piezas que están comunmente en los teléfonos celulares.

Si bien no vamos a entrar en detalles, es importante tener en cuenta que un acelerómetro consiste, siempre en una versión simplificada, en una masa m_a conectada a resortes, la cual se desplaza cuando es *movida*, alterando la longitud de los resortes. El desplazamiento de la masa es traducido a aceleración mediante una calibración.

Como ya dijimos, los acelerómetros *miden* aceleraciones desde un marco de referencia no inercial. Cuando están en reposo, miden la aceleración de la gravedad ($\vec{a}_a = \vec{g}$), y cuando son sometidos a una aceleración \vec{a} , entonces sensarán la descomposición $\vec{a}_a = \vec{g} - \vec{a}$.

Tarea de Interpretación

- Suponga que se arroja el teléfono celular en el vacío, y se mide la salida del acelerómetro. Discuta el resultado de este experimento sin arrojar el teléfono desde el techo de su casa.
- Suponga que el acelerómetro está en reposo, con el eje z apuntando hacia abajo, en el cual leemos la aceleración de la gravedad. Luego se acelera el teléfono con la magnitud de la aceleración de la gravedad en la dirección $+x$ del acelerómetro. Escriba los resultados de las medidas de cada componente del acelerómetro.

Los acelerómetros *MEMS* son generalmente ruidosos, e incrementan el ruido cuando se mueven. Si la intención es sensar ángulos con el teléfono en movimiento, entonces lo habitual es combinar medidas de acelerómetros y giróscopos (otro MEMS que mide la aceleración angular) mediante *filtros*. Una de las versiones más simples es el **filtro complementario**. La versión compleja, que mandó a los homo sapiens

⁹Si se prefiere un artículo académico, una buena discusión y un montón de matemáticas, F. M. S. Lima, P. Arun, "An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime," Am. J.Phys. 74(10), 892–895 (2006).

¹⁰Acá lo explica un buen hombre con videos robados, pero la explicación es bastante sencilla y aplicada a automóviles.



sapiens a la Luna y diversos aparejos a Marte, se llama [filtro de Kalman](#), y consiste en uno de los logros de todos los días del siglo pasado. En esta experiencia dejamos fuera el giróscopo, principalmente porque no todos los teléfonos que utilizamos lo tienen.

Volviendo a nuestro teléfono –nuestro péndulo–, las fuerzas presentes en la masa de prueba del acelerómetro, m_a , son su peso y su masa inercial. Si el acelerómetro se encuentra a una distancia r del eje de rotación del péndulo, entonces, las fuerzas en el marco de referencia no inercial de acelerómetro, son¹¹:

$$F_r = m_a (r(\dot{\theta})^2 + g \cos(\theta)) \quad (3.1)$$

$$F_\theta = m_a (-r\ddot{\theta} - g \sin(\theta)) \quad (3.2)$$

Notamos que la fuerza en la dirección radial, de la ec.(3.1) tiene dos términos:

- $m_a r(\dot{\theta})^2$, que es la [fuerza centrífuga](#) (una pseudo fuerza que asumimos porque estamos en un marco de referencia no inercial), apuntando en el sentido desde O hasta r .
- $m_a g \cos(\theta)$, que es la componente del peso de la masa del acelerómetro.

De la misma manera, la fuerza en la dirección tangencial, F_θ en la ec.(3.2), también posee dos términos:

- $-m_a r\ddot{\theta}$, que es la aceleración del péndulo, cambiada de signo (la masa del acelerómetro está en un sistema de referencia no inercial, y se asemeja a lo que sentimos cuando vamos en un coche que acelera).
- $-m_a g \sin(\theta)$, es la componente del peso de la masa del acelerómetro en la dirección de $\hat{\theta}$.

¹¹C. Dauphin, F. Bouquet, *Physical pendulum experiment re-investigated with an accelerometer sensor*, Papers in Physics, Vol.10 art. 100008 (2018). DOI: <http://dx.doi.org/10.4279/PIP.100008>



Tarea de Cálculo e Interpretación

Aceleraciones

- Es fácil dividir las fuerzas presentes en el acelerómetro por la masa del acelerómetro, para obtener las ecs. de las aceleraciones que detectará el acelerómetro. Hágalo.
- Calcule la componente radial de la aceleración que *mediría el acelerómetro*, reemplazando la expresión de $\dot{\theta}$ en la ec.(3.1). Grafique e interprete máximos y mínimos.
- Calcule la componente tangencial de la aceleración que *mediría el acelerómetro*, reemplazando la ec. de movimiento del péndulo (ec. (2.5)) en la ec.(3.2). Grafique e interprete máximos y mínimos, utilizando $r = 0, r = l/2, r = l, r = 10l$, donde r es la distancia perpendicular entre el eje de rotación del péndulo (O) y el acelerómetro y l es la distancia entre O y el centro de masa del péndulo.
- Suponga la existencia de fuerzas de fricción i) Constantes ii) proporcionales a la velocidad ¿cómo se verían esto reflejado en los modelos de aceleración recién obtenidos?

Amplitudes a partir de la aceleración radial

Una de las ideas que vamos a utilizar es acceder a amplitudes de oscilación del péndulo $\theta_0(t)$ a partir de los datos del acelerómetro. Identificando máximos y mínimos de las componentes radial y tangencial de las aceleraciones medidas por el acelerómetro, podremos obtenerlas.

- Obtenga una expresión para calcular la amplitud θ_0 usando los mínimos de la aceleración radial a_r .
- Obtenga una expresión para calcular la amplitud θ_0 usando los máximos de a_r .
- Evalúe las estimaciones anteriores en base a su fiabilidad y sus posibles problemas. De las estimaciones anteriores, ¿cuál resultará más fiable? ¿por qué? Explícite sesgos en cada caso.

4. Montaje del experimento

Según los objetivos I, II y III que planteamos, será necesario construir un péndulo con el celular. Para el objetivo IV será necesario colocar la fotoc compuerta que armamos con la Arduino a la par que tomamos datos con el acelerómetro.

4.1. Péndulo Celular

La idea de “colgar el celular” es un poco tosca, es decir, podríamos realizar el experimento de manera mucho más controlada si fijáramos el celular a una madera que hace de eje. Sin embargo, hacer esto sin herramientas ni rodamientos con poca fricción hacen titánica esta tarea, por lo que tendremos que apostar por esta solución más simple....

Para el hilo inextensible y sin masa del péndulo, utilizaremos hilo de coser (ese con el que cosemos los botones), usando unos diez hilos (dependiendo del peso de su celular) a fines de conseguir algo *parecido* a un hilo inextensible. La masa puntual m estará dada por el celular. Como se muestra en la Fig.(3), colgaremos el celular utilizando una configuración *bifilar*, a fines de *minimizar* otros modos de oscilación (como giros en torno de un punto de sujeción); sin embargo, siempre aparecerán otros modos asociados (que entrarán en nuestro acelerómetro y nada puede hacerse por el momento). Aconsejamos utilizar, en lo posible, un largo $L \geq 1.5m$ (hilos atados al marco de una puerta, del techo, donde se pueda), a fines de minimizar modos vibracionales alternativos y mejorar la relación frecuencia de muestreo/frecuencia del sistema.

La fotoc compuerta podrá ser armada con una caja, cuidándonos de cortar todo el cartón que no sea estrictamente necesario para sostener los diodos, a fin de evitar perturbaciones en los flujos de aire cuando $\theta \sim 0$. Como siempre, unos trozos de cinta podrán mantener los diodos en su lugar, y oscurecer el receptor de manera controlada.

Para tomar los datos, colocamos el teléfono en la amplitud inicial θ_i (que estimaremos mediante medidas de longitud), y *lo dejaremos caer desde el reposo*, intentando evitar vibraciones, estiramientos de los hilos y cualquier otro *modo vibracional* que no sea el lento oscilar del péndulo: si bien es imposible, las diferencias entre *tiradas prolijas y desprolijas* se notarán claramente.

El tiempo de toma de datos aconsejable es hasta que la amplitud decaiga considerablemente, lo que tendría que ocurrir en un lapso de dos a tres minutos (para la configuración mostrada en la Fig.(3)). La frecuencia de muestreo a utilizar debe ser la más alta disponible (en el experimento que realizamos para armar esta guía osciló entre los 98 y 100Hz). Es importante anotar la resolución del acelerómetro (la aplicación más simple disponible es AccelDataRec, y es la aconsejable).

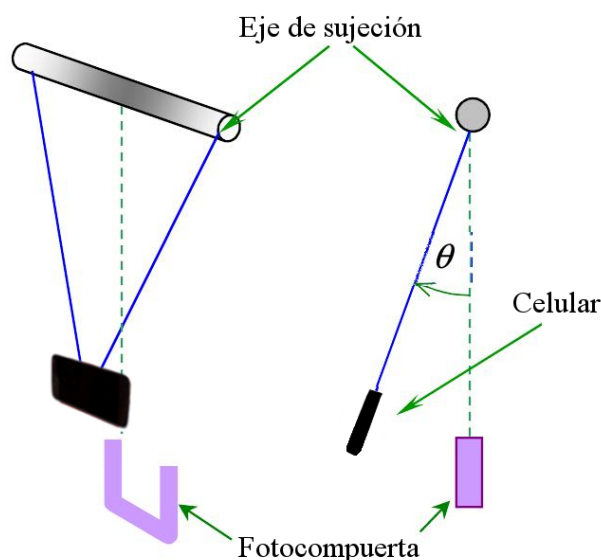


Figura 3: Esquema para mostrar la configuración *bifilar* utilizada. Es conveniente colgar el celular desde el lado de mayor longitud, a fines de evitar modos de oscilación fácilmente excitables.



5. Resultados y Análisis de Datos

“Clasificarlo todo.
Donar lo prescindible.
Embalar lo importante.
Concentrarse en la muerte.
Si él se entromete, ignorarlo.”

Samanta Schweblin.
Siete Casas Vacías (2015).
Ed. Páginas de Espuma.

Luego de realizado el experimento, obtendremos dos conjuntos de datos. Por un lado, los datos del acelerómetro, de los cuales nos importan las columnas (t, a_x, a_y, a_z) . Por otro lado, el conjunto de los tiempos en los que la interrupción de la placa arduino fue activada, es decir (t_{int}) .

- Del conjunto de datos del acelerómetro, tomaremos la primera oscilación para identificar los periodos en el segundo set de datos, aunque es probable que las primeras oscilaciones en la aceleración tengan mucho ruido, producto de la tirada, y deban ser dejadas fuera del análisis.
- Del segundo conjunto de datos, se sacarán los periodos mediante alguna operación. Es necesario saber identificar el primer periodo contado por la placa, a fin de lograr una buena equiparación de las series temporales.

Ahora seguimos con el análisis de los datos de aceleración, para retomar al final los datos del periodo.

5.1. Datos del Acelerómetro

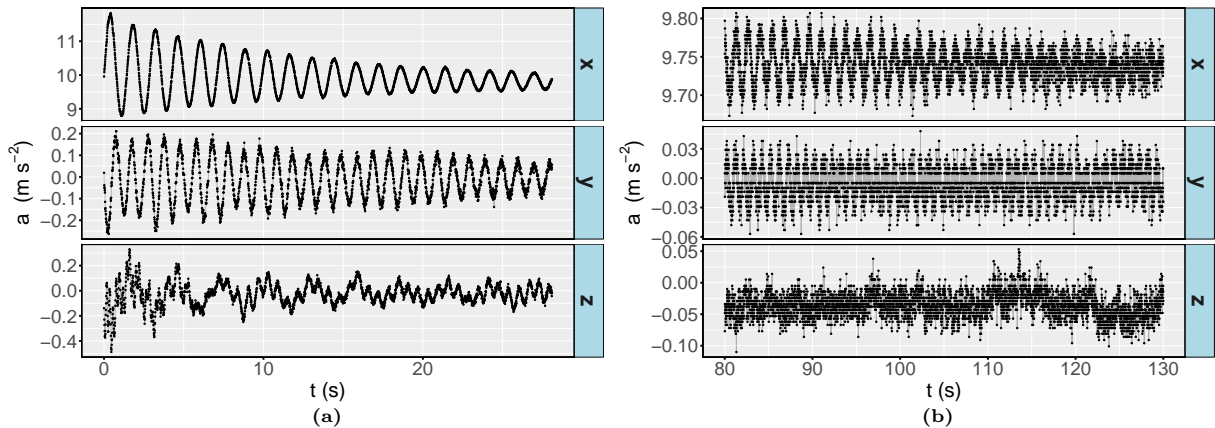


Figura 4: Se muestran las mediciones del acelerómetro $a_i [ms^{-2}]$ vs. $t[s]$, para $i = x, y, z$. (a) Medidas en el intervalo $0s \leq t \leq 28s$. Se observa la caída de amplitud de las oscilaciones. (b) Medidas en el intervalo $80s \leq t \leq 130s$. La relación señal/ruido cae considerablemente al final de las mediciones.

Es a partir de los datos del acelerómetro que intentaremos obtener información sobre $\theta_0(t)$, aunque adelantamos que será una tarea no tan simple.

La gráfica de las primeras diez oscilaciones del péndulo, medidas por el acelerómetro se muestra en la Fig.(4a). Es posible observar que la amplitud de la *oscilación de las aceleraciones* decae en el tiempo para las tres componentes. Mientras que la componente a_x presenta un gran rango de amplitudes al comienzo ($8.8ms^{-2} \lesssim a_x \lesssim 11.8ms^{-2}$), las componentes a_y y a_z , presentan un rango mucho menor ($-0.3ms^{-2} \lesssim a_y \lesssim 0.2ms^{-2}$ y $-0.5ms^{-2} \lesssim a_z \lesssim 0.35ms^{-2}$). Estos rangos están en concordancia con lo que puede ser estimado a partir de las ecs. que conseguimos para el acelerómetro.



De la manera en la que fue ubicado y alineado el teléfono, la componente a_x tiene información de la aceleración radial detectada por el acelerómetro, a_r , mientras que a_z tiene la información sobre la aceleración tangencial a_θ . La componente a_y , según el modelo teórico, no debería tener información alguna, sin embargo, es claro que hay oscilaciones presentes que están siendo mostradas. Para explicar este fenómeno, proponemos que (a) *la alineación del teléfono no es perfecta*, por lo que *una pequeña parte* de a_r está sobre a_y , (b) hay otro modo de oscilación que se refleja en a_y , *sarandeos* del teléfono en el eje longitudinal del mismo. En a_z ocurre un fenómeno similar, es decir, se observan los rangos esperados, mas es clara la presencia de un modo de oscilación de frecuencia muy superior a la del péndulo, montada sobre la oscilación esperada.

En la Fig.(4b) se observan las medidas del acelerómetro $a_i [ms^{-2}]$ en el tiempo $t[s]$ para $80 s \leq t \leq 130 s$. Es posible observar que la tasa de decrecimiento en la amplitud de las componentes de la aceleración es menor. También, se percibe un notable decaimiento de la relación señal/ruido, por lo que deberemos ser cuidadosos con la utilización de estos datos.

Es posible tener una vista de la variación de los valores extremos de las aceleraciones medidas en a_x si observamos todo el intervalo de tiempos de la medición. En la Fig.(5) se observa que el rango de la primera oscilación está entre $8.8ms^{-2} \lesssim a_x \lesssim 11.8ms^{-2}$, mientras que las últimas oscilaciones medidas poseen valores de $9.69ms^{-2} \lesssim a_x \lesssim 9.79ms^{-2}$, siendo estos valores extremos, además, producto de ruidos.

Tarea de interpretación

- Interprete las variaciones en a_x de las medidas tomadas en su casa, identificando $a_x \sim a_r$, para amplitudes de oscilación (de a_x) grandes, así como donde parece estar muy cerca del valor de g .
- ¿Cómo calcularía las amplitudes a partir de los máximos y los mínimos de a_r ?
- Interprete las componentes a_y y a_z de sus medidas.

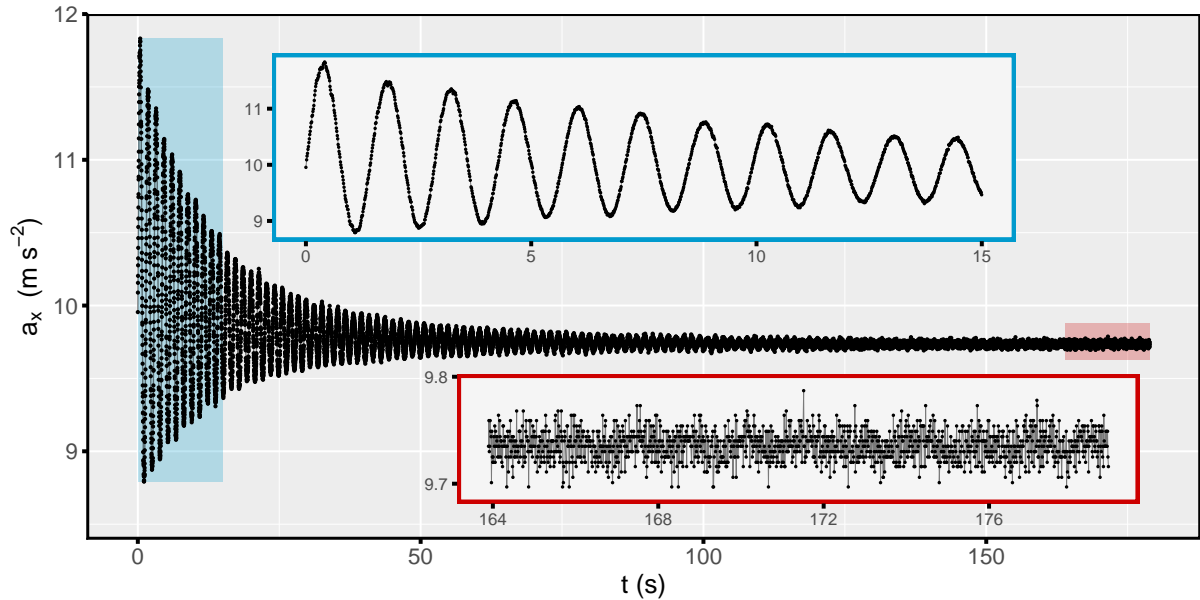


Figura 5: $a_x [ms^{-2}]$ vs. $t[s]$, para todo el rango de mediciones. *Insets:* Comienzo y final de la serie temporal: la razón señal/ruido es mínima en la cola final de las mediciones.

Es claro que, al menos *cualitativamente*, el comportamiento de la aceleración medida a_x parece seguir el modelo de aceleraciones. En lo que sigue, veremos los resultados de: a) obtener la amplitud de oscilación en el tiempo; b) hacer ajustes de los modelos de decaimiento de la amplitud θ_0 ; c) buscar correlaciones entre la caída de la amplitud y el periodo de oscilación, medido con la fotoc puerta casera.



5.2. $\theta_0(t_i)$ a partir de los datos

5.2.1. Máximos y mínimos de a_x a partir de los datos crudos

Para obtener las amplitudes, debemos obtener los máximos y mínimos locales de $a_x \sim a_r$. De estos valores extremos obtendremos la información sobre la amplitud de oscilación (en el caso en el que hayamos podido hacer las cuentas y los análisis). Si bien sería posible elegirlos a mano (una operación realmente tediosa), en el Apéndice A se muestra un algoritmo que puede hacer esto fácilmente.

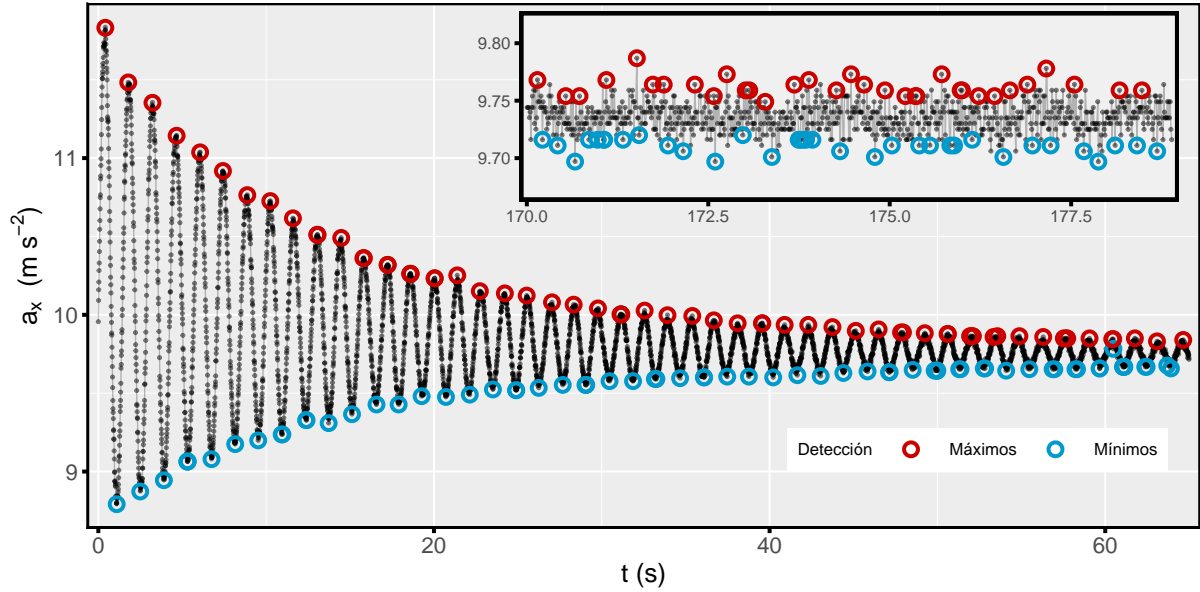


Figura 6: Detección de máximos y mínimos locales. Para grandes amplitudes la detección arroja buenos resultados. *Inset:* La detección empeora cuando la señal se ensucia mucho, es decir, cuando baja la razón señal/ruido.

En la Fig.(6) pueden observarse los máximos y los mínimos obtenidos para a_x utilizando la función `peaks()`. Se observa que el proceso de detección tiene buenos resultados cuando la señal es mucho más grande que el ruido, tanto para los mínimos como para los máximos¹².

En el inset de la Fig.(6) se muestra el resultado de la selección de picos al final de la medición ($170s < t < 180s$), donde la detección de picos empeora notablemente: los picos dejan de estar aproximadamente equiespaciados en t , y los valores obtenidos sobreestiman o subestiman grandemente la señal, debido al ruido presente. Teniendo los máximos y mínimos de a_x , podemos calcular las amplitudes θ_0 .

5.2.2. $\theta_0(t)$ estimado a partir de a_x

Los ángulos estimados pueden observarse en la Fig.(7), donde se muestran las amplitudes θ_0 (rad) vs. t (s), con la escala de color discriminando entre máximos (en rojo) y mínimos (azul) de los valores extremos de a_x . Los errores propagados a partir de la escala del acelerómetro son muy pequeños (la resolución, de $1.2 \times 10^{-3} m s^{-2}$, del acelerómetro no es un buen *proxy* para estimar incertezas). Se observa que amplitud θ_0 decae en para tiempos $0 \leq t \leq 130s$ (para las dos series de estimaciones de θ), llegando a valores constantes para $t > 130s$. Además, se observa una *discrepancia* entre las amplitudes obtenidas a partir de los máximos y los mínimos, siendo marcadamente menores las amplitudes calculadas a partir de los valores máximos de a_x para tiempos $t > 130s$.

¹²Para el caso en el que los datos tengan *otra frecuencia de muestreo* (en este caso hay unos 100 datos por segundo), podría hacerse mayor o menor la ventana de detección dada por `spam`. A veces es necesario probar con varios valores de parámetros hasta obtener un buen resultado.



Tarea de Interpretación - Incertezas

- a) Obtenga la incerteza en la estimación de amplitud, propagada a partir de la mínima escala del acelerómetro (hay que mirar lo que dice el software donde tomó los datos).
- b) Si necesitáramos publicar este trabajo, lo primero que se nos pediría son unas lindas barras de error en las estimaciones de θ_0 , y aquí sólo tenemos las barras de error debidas a la propagación de la resolución del acelerómetro (que son muy pequeñas y no se ven) ¿Podríamos proceder de otra forma para obtenerlas? ¿qué incerteza parecen tener los puntos para $t > 130s$?
- c) Las amplitudes calculadas con los máximos y con los mínimos poseen una marcada *discrepancia* ¿Podríamos decir que esta discrepancia puede estar incluida en algún tipo de incerteza *estadística*?

Tarea de Interpretación - Error Sistemático

Para pensar la *dinámica del péndulo* utilizamos el modelo de péndulo ideal, y nunca tuvimos en cuenta la *fricción* del aire respecto de la masa m (en este caso el teléfono). Anotamos también, que cuando detectamos picos mínimos/máximos, el ruido detectado *restará/sumará* valores a cada pico: es el deleite de la función (más picudo, mejor). Por último, no sabemos en qué parte del teléfono está el acelerómetro...

- d) Recuerde los valores extremos de las velocidades ¿en $\theta = \theta_0$ y/o $\theta = 0$?
- e) Anote las fórmulas utilizadas para estimar θ_0 a partir de a_x ¿en cuál de ellas no incidiría el modelo sin fricción utilizado, y cómo lo haría?
- f) ¿Sería mejor *agregar* un término de aceleración –hasta ahora no tenida en cuenta– en los máximos de a_x ? ¿Podríamos obtener estimaciones de este término a partir de los datos de los que disponemos?
- g) Mirando el inset de la Fig.(6), los **mínimos** detectados al final de la curva, *sobreestiman* o *subestiman* las amplitudes θ_0 ? ¿y los **máximos**?
- h) ¿Cómo cambiarían nuestros resultados si el acelerómetro no está *al medio* (en el centro, bah) del celular?
- i) Piense en que el decaimiento de la amplitud en el tiempo *parece* truncarse, quedando una constante, ¿podría encontrar una explicación para esto? ¿Esa explicación, funcionaría para explicar, también, la discrepancia entre las dos series de datos, máximos y mínimos?
- j) En base a los puntos anteriores, decida cuál de las series de θ_0 estimadas representan mejor la amplitud θ_0 del péndulo.

Si bien los resultados son buenos, claramente está pasando algo en la cola de la curva, donde θ_0 *parece hacerse constante*. Vamos a recalcular, utilizando una técnica muy común, aunque con ciertos detalles.

5.2.3. θ_0 recalculada a partir de medias de algunos datos

Cuando los ruidos empiezan a *enmascarar* la señal, la detección de picos deja de funcionar, detectando ruido. Es posible intentar *filtrar* el ruido, mediante una operación que conocemos...la *media muestral*. La media muestral, además de aplicarse a los histogramas (una dimensión), puede utilizarse como *filtro pasa bajos* en una serie temporal, es decir, un filtro que ayude a eliminar los ruidos que *tengan una frecuencia muy superior a la señal que quiere verse*. En el Apéndice B se muestra esta técnica, que consiste en que se hace una media de k puntos alrededor del elemento x_i :



$$\bar{x}_i = \sum_{n=i-k/2}^{i+k/2} \frac{x_n}{k} \quad (5.1)$$

donde la ec.(5.1) puede aplicarse a todos los puntos de cualquier serie temporal, siempre que existan puntos a izquierda o a derecha (no tendrá resultados ni en los primeros $k/2$ puntos, ni en los últimos $k/2$ puntos).

El número k de elementos alrededor del elemento x_i , estará determinado por la información que queramos. Como está discutido en el Apéndice B de forma extensa, el número k al caso al que lo queremos aplicar, es una relación de compromiso entre la mínima señal que queremos detectar (los picos en este caso) y el sesgo que estamos dispuestos a tolerar. Por otra parte, y como esto es una serie temporal que oscila, la cantidad k de elementos que tomemos en la media estará directamente relacionada con la frecuencia de muestreo y el periodo de la señal: si m es el número de elementos que tiene una oscilación completa, entonces hacer $k = m$ nos subestimarán grandemente los picos.

Si bien el análisis podría ir *ad infinitum*, elegimos cortarlo aquí: utilizaremos $k = 1, 5, 10, 20, 30$ para hacer las medias, luego pasaremos estas series temporales por el algoritmo que detecta picos y obtendremos $\theta_0(k)$. Veremos los resultados directamente en una gráfica $\ln(\theta_0)$ vs. t : este tipo de gráfica semi logarítmica nos ayudará a detectar decaimientos exponenciales en el final de la serie temporal (como rectas de pendiente negativa), que justamente es lo que esperamos según nuestros dos modelos de decaimiento, ecs.(2.7) y (2.8): esta idea puede no ser formal, pero es un buen *proxy* para saber si nuestro método funciona.

En la Fig.(8) se observa el resultado de las operaciones descritas anteriormente. Es posible observar que las señales son más *coherentes* a medida que k aumenta: las dispersiones comienzan en $t = 60, 80, 120, 140s$ para $k = 1, 5, 10, 15, 30$, lo cual nos dice, simplemente, hasta dónde la función `rollmean()` *limpia* los ruidos permitiendo una buena detección de picos. Además, es claro que se observan series de valores que remedan rectas de pendientes negativas (cuyos valores parecen ser independientes del valor de k utilizado,

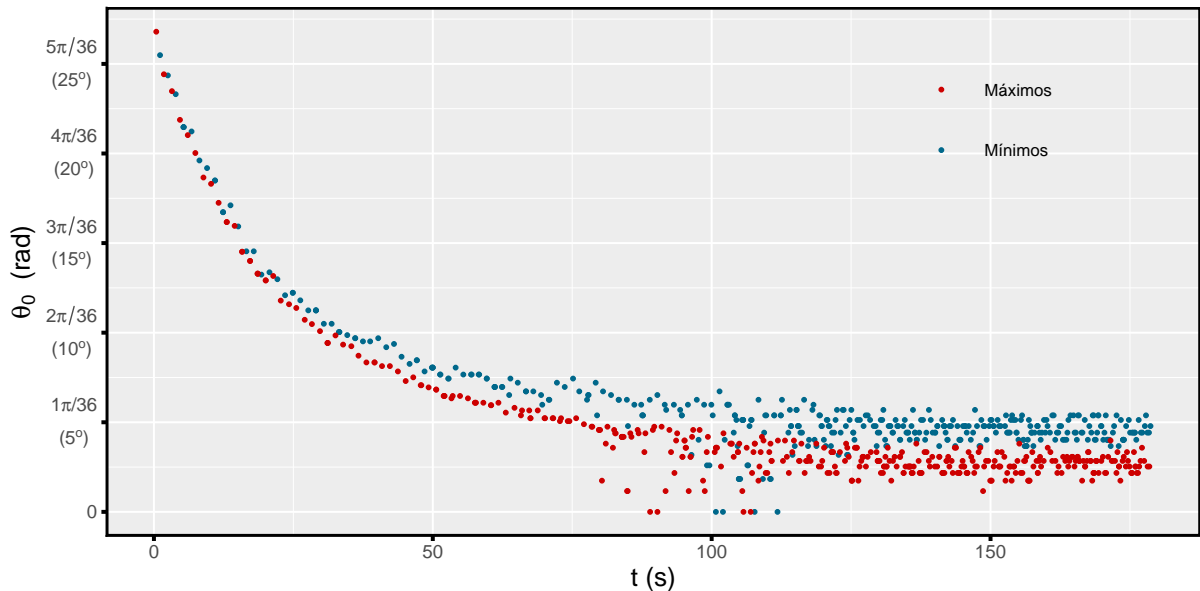


Figura 7: Se muestran las amplitudes obtenidas mediante el análisis de los valores extremos de a_x . La incerteza propagada a partir de la incerteza instrumental del acelerómetro es muy pequeña y no puede ser observada a simple vista. Pareciera o pareciera que hay un error sistemático en alguna de las dos series...¿podría alguien encontrar una razón que permita elegir uno de los dos conjuntos de datos?.

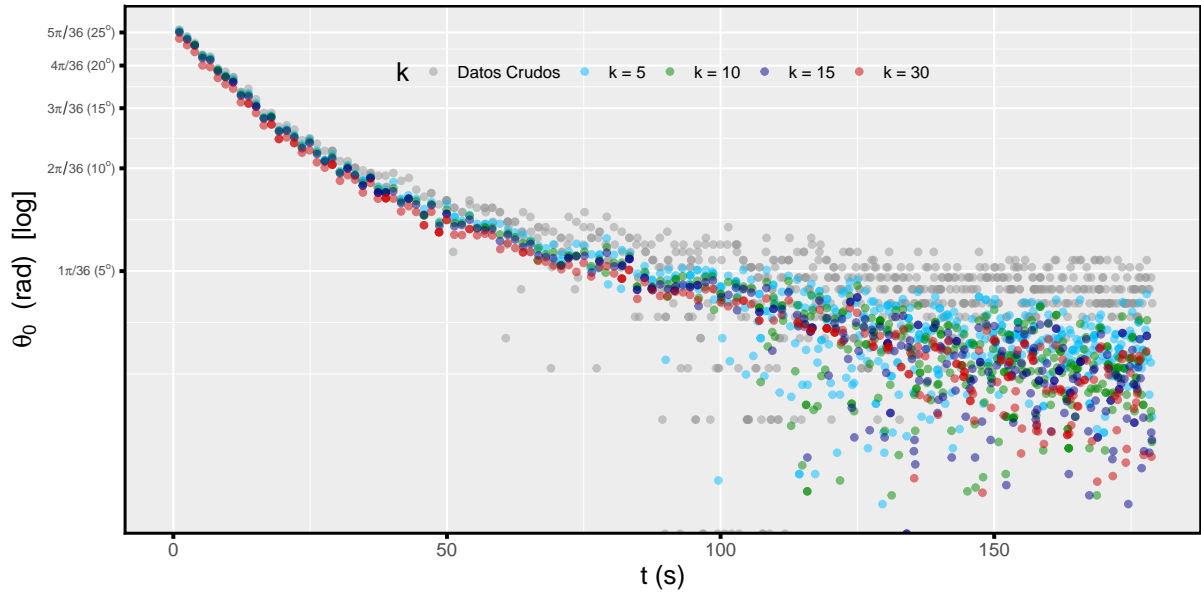


Figura 8: Se muestra el logaritmo de las amplitudes obtenidas luego de calcular `rollmean()`, con valores $k = 1, 5, 10, 15, 30$ vs. el tiempo t . La curva tiene mayor *coherencia* a medida que k aumenta, como contraparte, la subestimación –respecto de los datos crudos– aumenta.

dado que sea $k \geq 15$), de lo que deducimos que el método parece funcionar. Vamos a elegir la media de $k = 15$ elementos de la serie temporal, a fines de no subestimar demasiado los ángulos obtenidos, y permitir el mayor rango posible para realizar el ajuste. Esta serie se cortará en $t = 125s$, a fin de eliminar el ruido que aparece luego.

5.3. Ajuste de $\theta_0(t)$

Teniendo los valores de $\theta_0(t)$ respecto del tiempo t , podemos intentar mirar cuál de los modelos de amplitud (ecs.(2.7) y (2.8)) describen mejor los datos. Si bien esta pregunta parece *clara como el agua*, pueden aparecer complicaciones de diversa índole, que discutiremos a la luz (o a la oscuridad) de los resultados. De antemano, tenemos algunas opciones:

- Ambos modelos describen bien los datos, caso en el cual nos quedamos con el más simple¹³.
- Uno de los modelos es mejor que el otro (caso en el cual deberemos justificar por qué): en los ajustes no lineales no es posible utilizar el R^2 como coeficiente para comparar, por lo que iremos con una comparación cualitativa/cuantitativa de residuos.
- Ambos modelos ajustan mal los datos, con lo que deberemos salir corriendo a conseguir otro modelo o revisar desde la experiencia hasta las cuentas.

Por otra parte, está el problema de la teoría de ajustes. En los lineales no hay problemas: hay detalles que estaría bueno conocer y no conocemos del todo, pero, mientras que en los ajustes lineales se minimiza

¹³Esto remite a la famosa navaja de Occam, que expresa el criterio de *parsimonia*: ‘*Entia non sunt multiplicanda sine necessitate*’, los elementos (de análisis) no deben multiplicarse sin necesidad. Teniendo N pares de números que representan cantidades, (x_i, y_i) , siempre podemos encontrar una función que ajuste perfectamente los puntos a costa de tener la multitud de N parámetros. El criterio de parsimonia nos dice que, mientras *menos* [parámetros], *mejor* [descrito]. En la versión de Gregory Chaitin, *la ciencia funciona como un compresor de archivos, es decir, a partir de un montón de datos observacionales, el objetivo de la ciencia es explicarlos en base a cierto número reducido de premisas*. Esto conlleva largas discusiones filosóficas por detrás, ¿no?.



una función que tiene sólo un mínimo (absoluto y calculable analíticamente), en los ajustes no lineales la función de ajuste no tiene uno, sino muchos (muchísimos) mínimos locales y los resultados no son tan confiables: hay que inicializar parámetros (un valor plausible desde el cual arrancar), darles cotas, etc. Entonces, aparte de la proliferación de detalles (algo que también desconocemos de los ajustes lineales), existe la posibilidad de que nuestros resultados entreguen cualquier cosa... a prenderle una velita a *San Turing*.

Los ajustes de las ecs.(2.7) y (2.8) fueron realizados sobre los datos obtenidos a partir de $k = 15$. En la Fig.(9a) se observan las estimaciones de θ_0 vs $t[s]$, junto con ambos ajustes. Es claro que el ajuste no lineal (ANL) de la ec.(2.8), comparado con el ajuste lineal (AL) de la ec.(2.7), representa de mejor manera la estructura de los datos de la amplitud en el tiempo. Se percibe claramente que el modelo dado por el AL no da cuenta de la complejidad de los datos, mientras que el modelo alternativo, dado por ANL, logra captar el decaimiento estimado para nuestro péndulo.

Los residuos de los ajustes, graficados respecto de t , pueden verse en la Fig.(9b), junto con líneas continuas que son un ajuste no paramétrico y local de los residuos, buscando representar estructura de los residuos¹⁴. Las desviaciones estándar de los residuos son $\sigma_{al} = 0.03 \text{ rad}$ y $\sigma_{anl} = 0.006 \text{ rad}$, mientras que el ajuste de la ec.(2.8) describe bien los datos y presenta un residuo con poca dispersión y estructura, el de la ec.(2.7) posee residuos con mucha estructura (hay algo del modelo que *no concuerda*), y mucha dispersión. La varianza de los residuos pesada con la varianza de los datos nos permite calcular los valores de $R_{al}^2 = 0.8524$ y $R_{anl}^2 = 0.995$ ¹⁵.

En la Tabla (1) es posible observar los resultados del ajuste de parámetros. Mientras que θ_i entrega valores menores para AL que ANL, el parámetro α ajustado es mayor en AL que en ANL. Esto es explicable porque el rápido decaimiento inicial, no descrito correctamente por AL, introduce un error sistemático positivo en el parámetro α . En cuanto al parámetro β , el ANL entrega valores de $(0.115 \pm 0.001) \text{ s}^{-1}$.

Modelo	$\theta_i \pm \sigma_{\theta_i} [\text{rad}]$	$\alpha \pm \sigma_{\alpha} [\text{s}^{-1}]$	$\beta \pm \sigma_{\beta} [\text{s}^{-1}]$	R^2
Modelo Lineal	0.28 ± 1.03	0.0136 ± 0.0004	–	0.852
Modelo No Lineal	0.452 ± 0.003	$(3.5 \pm 0.5) \times 10^{-9}$	(0.115 ± 0.001)	0.995

Tabla 1: Resultados de los ajustes y sus parámetros. En ajuste no lineales, R^2 no es un buen estimador de la bondad del ajuste, y no viene en esta librería, hay que calcularlo a mano. La amplitud inicial del péndulo, estimada a través de medidas de longitud, arrojó $(0.44 \pm 0.04) \text{ rad} \sim (25^\circ \pm 2^\circ)$.

Para cerrar esta sección, parece evidente que el modelo no lineal dado por la ec. (2.8) describe mejor los datos que el modelo lineal. Esto se ve muy bien en la comparación de residuos. Los valores de parámetros obtenidos tienen poco error relativo, aunque notamos que, en el ANL el parámetro $\alpha \pm \sigma_{\alpha} = (3.5 \pm 0.5) \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ parece ser excesivamente pequeño respecto de otros trabajos realizados en la cátedra. Una posible explicación de esto es que la serie temporal obtenida es demasiado corta, lo que libera mucho el parámetro en cuestión, aunque *métodos demasiado complejos para entrar en este margen* serían necesarios para la evaluación numérica de los resultados en el espacio de parámetros.

¹⁴`loess()`

¹⁵Ojo que en los ajustes no lineales R^2 no se llama coeficiente de correlación y, además, no es un buen estimador estadístico respecto de la determinación del modelo, como sí ocurre con los ajustes lineales. Para más información, se puede consultar ‘Baty, Florent, et al. “A toolbox for nonlinear regression in R: the package nlstools.” Journal of Statistical Software Num. 66.5 (2015): Vol.1-21. y ‘Tarald O. Kvålseth (1985) *Cautionary Note about R²*’, The American Statistician, Vol:39:4, pág. 279-285, DOI: 10.1080/00031305.1985.10479448

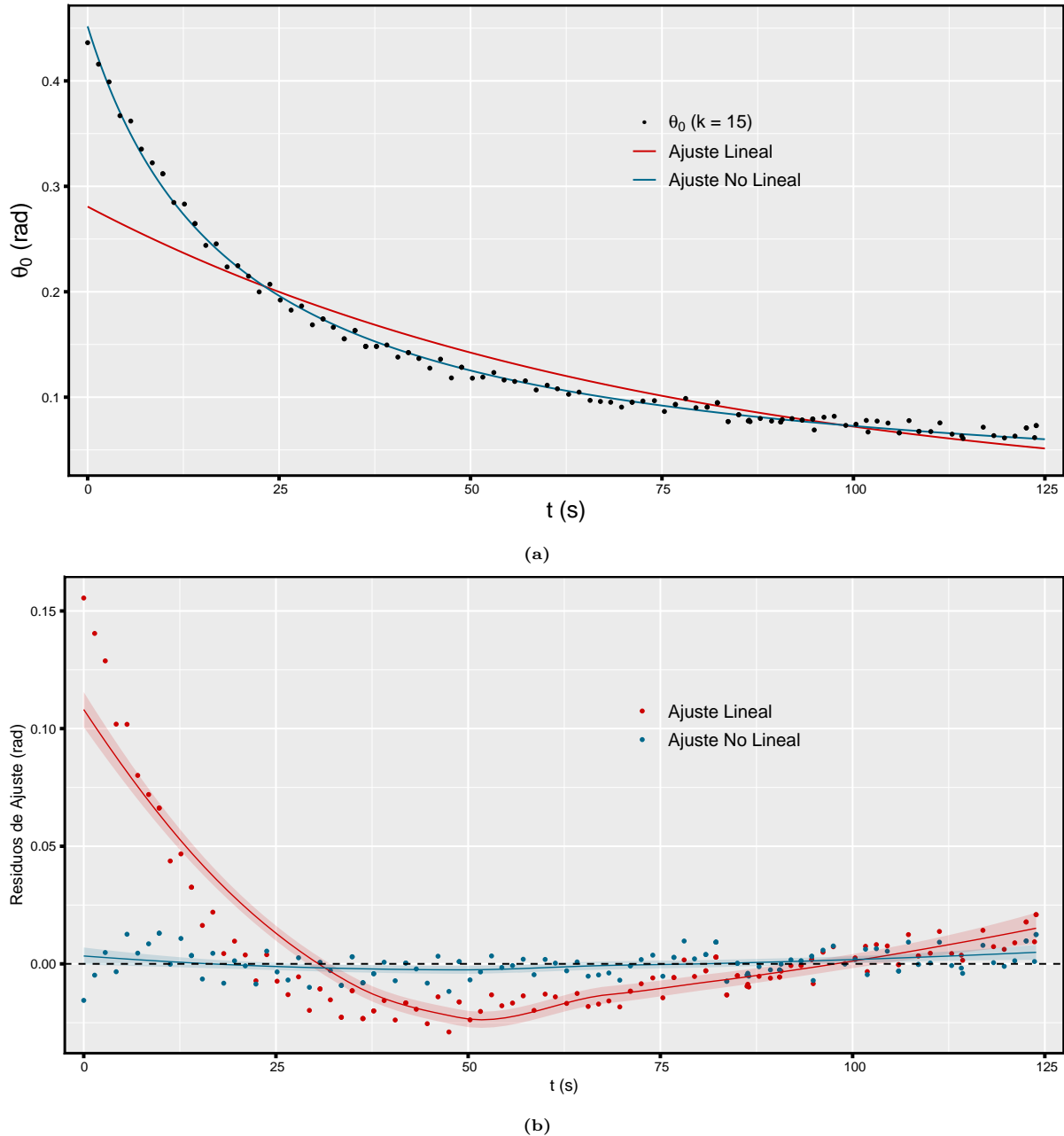


Figura 9: Se muestran los resultados de las regresiones. (a) θ_0 vs. t (puntos), con los dos ajustes (líneas). (b) Los residuos de los ajustes anteriores, junto con un ajuste no paramétrico de los residuos, para intentar captar cierta estructura de los mismos.

5.4. Periodos vs. θ_0

Es posible hacer una función que represente $f(\theta_0)$ de la ec.(2.10) e introducir las amplitudes θ_0 conseguidas mediante el análisis anterior. Luego de eso, podemos hacer una gráfica τ vs. $f(\theta_0)$, con los periodos bien acomodados respecto de la serie de amplitudes calculadas.

- ¿La correlación de los periodos τ vs. $f(\theta_0)$ es positiva?
- Grafique τ vs. $f(\theta_0)$. Grafique el modelo de la ec.(2.9) (periodo independiente de la amplitud) y el



modelo de la ec.(2.10) (periodo dependiente de la amplitud).

- c) Haga dos ajustes de los datos: el primero de un sólo parámetro (la media de τ , o del subconjunto de los τ 's $\forall \theta_0 \sim 0$), y el otro una recta de $\tau \propto f(\theta_0)$ ¿Cuál describe mejor los datos?
- d) Estime g en base a los dos modelos anteriores, y explique posibles discrepancias entre el valor obtenido y el informado por la RAGA. ¿Cuál modelo estima mejor la gravedad?

Luego, responda:

- e) La *exactitud* de una estimación, ¿depende del modelado?
 - f) ¿Qué no fue tenido en cuenta en estos modelos de periodo, para utilizarlos como estimadores de g ?
 - h) ¿Hay alguna razón para creer que una estimación como la que hicimos es *independiente de la teoría*?
- Escoja un modelado más, intentando *sesgar menos la estimación* de g . [Puede consultar aquí para una lista bastante exhaustiva](#)¹⁶, aunque tiene completa libertad de utilizar cualquier otro modelo, o de consultar con la cátedra.

¹⁶Este link redirige a [Sci-hub](#), sitio fundado por la científica kazaja, de origen armenio, Alexandra Elbakyan. Como el sitio está asediado por las editoriales, tiene muchos tipos de dominio, que siempre son actualizados en la página de Wikipedia del sitio ante eventuales cierres de otros dominios. Siéntase en libertad de buscar el artículo que desee: es gratis e ilegal, pero justo.



Apéndice A: Cómo calcular máximos y mínimos

Software 5.1: Máximos Locales de un conjunto de datos

Si a es un vector de valores numéricos, entonces:

```
install.packages("splus2R"); library("splus2R") #instala y carga la librería
#máximos
maximos.locales <- peaks(x = a, span = 27, strict = F)
```

La función `peaks()` encuentra máximos, y entrega un *vector lógico* del mismo largo que a , con el cual es posible indexar a para obtener los valores de los picos:

```
picos <- a[maximos.locales]
```

Para obtener los mínimos locales en a , podemos cambiar a por $-a$:

```
minimos.locales <- peaks(x = -a, span = 27, strict = F)
```

- `span` es el número de elementos entre los que se determina un máximo: si es un número muy chico, entonces va a *ver* el ruido, detectando muchos máximos consecutivos. Si es muy grande, entonces *no verá la señal*.
- `strict` es para mantener dentro de la cantidad de elementos dada por `span`, la condición de máximo *absoluto*.

Como siempre, es mejor jugar varias veces con los parámetros de la función y ver los resultados desde muchas ópticas.

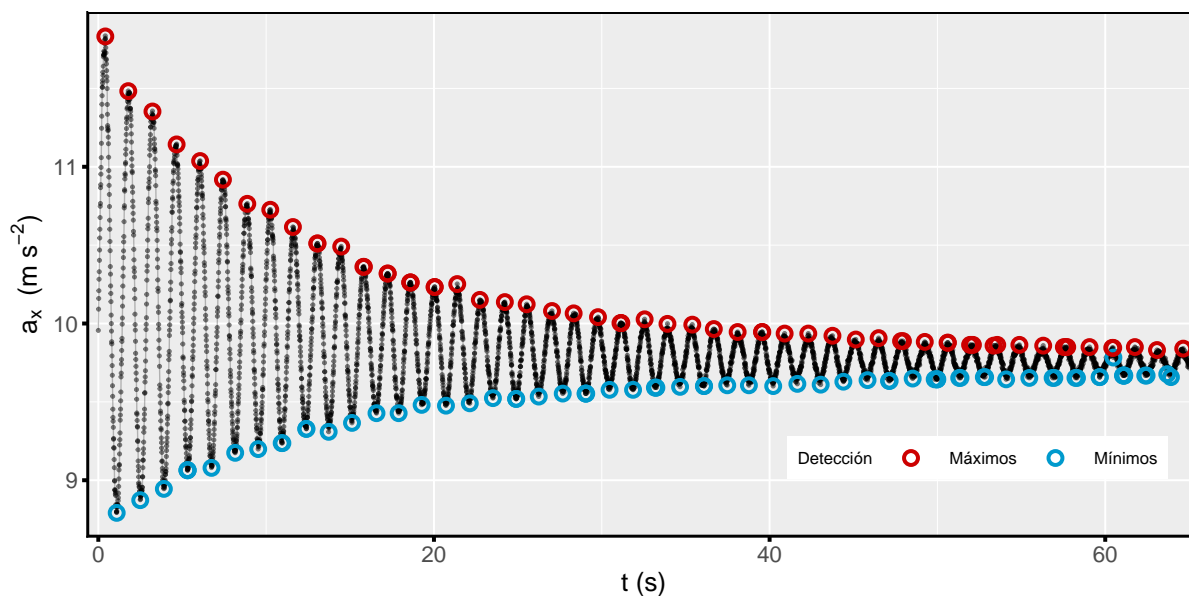


Figura 10: Se muestran los módulos de aceleración medidos por el acelerómetro $|a_a| [m s^{-2}]$ vs. el tiempo $t [s]$, junto con los máximos y mínimos locales, detectados con la función `peaks()`.



Apéndice B: `rollmean()` y sus efectos

Cuando se tiene una serie temporal con baja razón señal/ruido, es posible limpiarla usando un *sinnúmero* de técnicas. No las vamos a enumerar, sino que veremos los efectos de utilizar la función `rollmean()`, en la librería `zoo`.

La idea básica de `rollmean()` es, dado un vector \mathbf{x} con N elementos, asignarle a cada elemento x_i la media dada por:

$$\bar{x}_i = \sum_{n=i-k/2}^{i+k/2} \frac{x_n}{k}$$

donde en la ec. anterior, resulta claro que toda la colección de valores se *suaviza*. En este sentido, la media es un *filtro pasa bajos*, es decir, nos *limpia* el ruido de alta frecuencia (alta respecto de la señal, claro está).

Hay varios pormenores de esta técnica:

- Cada elemento pasado por este filtro \bar{x}_i queda *correlacionado* con los elementos vecinos, ya que comparten valores comunes. Como el conjunto de datos original es una serie temporal, esto nos problematiza las técnicas de regresiones(ajustes), las cuales asumen elementos *des correlacionados*, es decir, muestreados de una variable aleatoria.
- Los elementos nuevos \bar{x}_i tienen algunas propiedades numéricas cuando la señal varía, las cuales vamos a ver en con cierto detalle.
- Cuando se trata de señales periódicas, como la que estamos tratando, la cantidad de elementos k que utilizamos en la media, puede jugarnos una mala pasada si es superior a la cantidad de elementos de un periodo, pues perderíamos mucha información de la señal en cuestión.

El resultado de aplicar la función `rollmean()` sucesivamente para valores de $k = 2, 3, 4, \dots, 50$ a la serie temporal de las aceleraciones (t, a_x) puede observarse en la Fig.(11), en donde se observan los datos crudos en cruces (x) y los resultados de `rollmean()` como puntos, con la escala de colores indicando el parámetro k utilizado. En el (11a) se observa el resultado para la primera oscilación, de gran amplitud, en (11b) se observa el resultado para una oscilación de amplitud algo menor y en (11c) se observa el resultado para la cola de la serie temporal, de amplitudes muy pequeñas.

En (11a) es posible ver que, al aumentar el número de k hasta valores altos, la señal se *suaviza* hasta niveles absurdos. Como contraparte, disminuye (aumenta) el valor de los máximos (mínimos). Este efecto es bastante esperable: si en cada elemento se toman $k/2$ vecinos para hacer una media, entonces en un máximo (mínimo) local todos los vecinos son menores (mayores). Lo que obtenemos como respuesta a la obtención de picos, entonces, tendrá cierto sesgo si utilizamos valores de k muy altos.

Por otra parte, como se observa en (11b), para señales algo menores, es necesario un k un poco mayor, a fines de no detectar picos espurios (los valores celestes están un poco dispersos). Finalmente, como se muestra en la Fig.(11c), los puntos celestes y los verdes, asociados a valores bajos/medios de k están muy dispersos, y la señal sólo se puede observar con valores $k \geq 45$.

Dicho lo anterior, será necesaria una relación de compromiso entre la cantidad de picos que querramos encontrar aumentando k y el sesgo que estemos dispuestos a admitir. Un último detalle es que todo esto involucra una frecuencia de muestreo aceptable, necesaria para tener algunos puntos cerca del máximo ó mínimo de amplitud de la aceleración a_x , de lo contrario la sobre/subestimación será mayor.

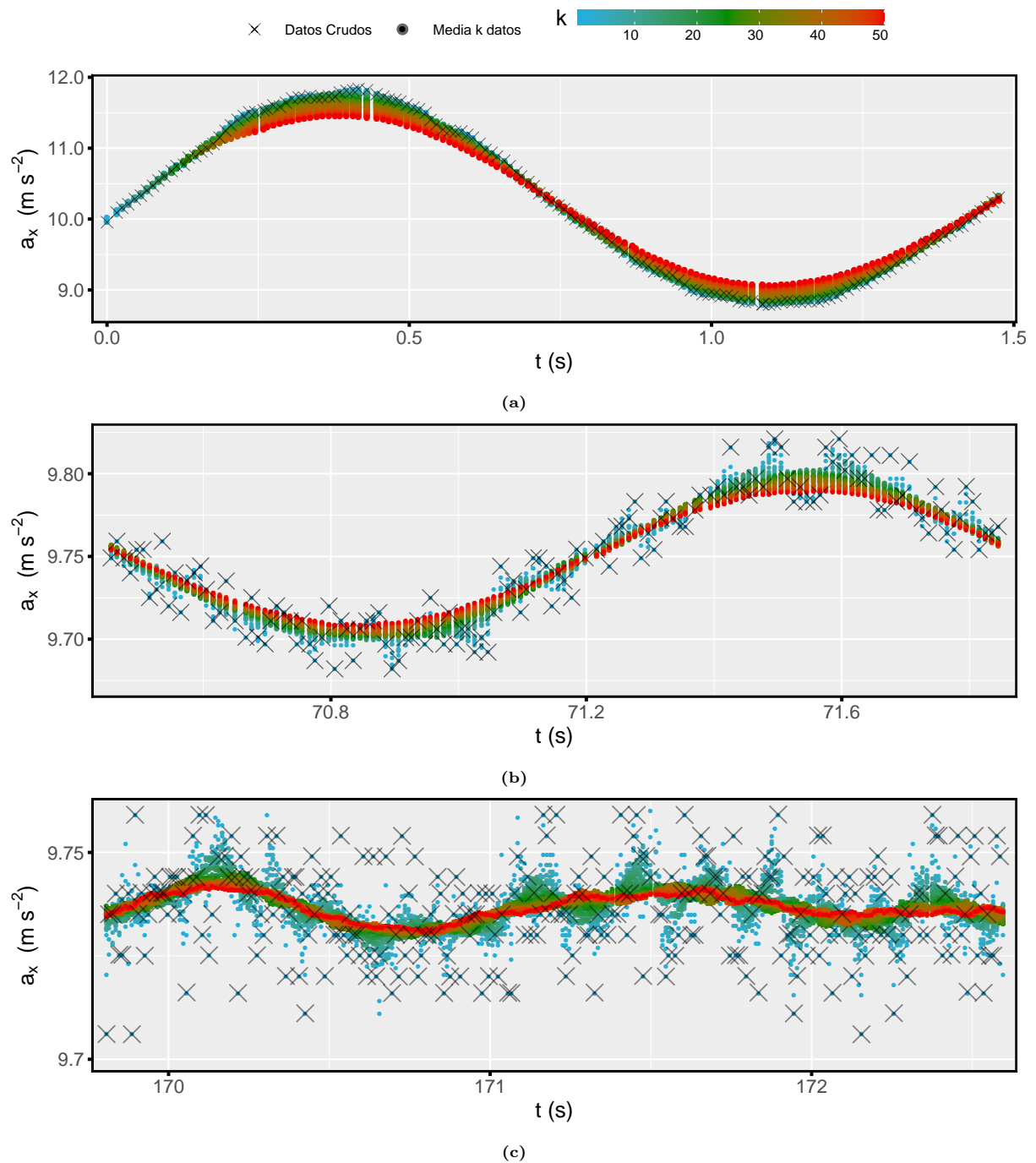


Figura 11: Se muestran los datos crudos de a_x (cruces), junto con el efecto de aplicar `rollmean(a, k)`, con $k = 2, 3, \dots, 50$, indicado por la escala de colores (arriba). (a) Datos del comienzo de la serie, $0 \text{ s} \leq t \leq \tau$. (b) Datos de la mitad de la serie $70.4 \text{ s} \leq t \leq 70.4 \text{ s} + \tau$, (c) Datos del final de la serie, $169.8 \text{ s} \leq t \leq 169.8 \text{ s} + 2\tau$.

Software 5.2: `rollmean()`

Si x es un vector de valores numéricos, entonces:

```
install.packages("zoo"); library("zoo") #instala y carga la librería
media.10.elementos <- rollmean(x = x, k = 10, align = "center", fill = NA);
```



Apéndice C: ¿Cómo hacer un ajuste no lineal?

Generalidades

Los ajustes no lineales son una gran herramienta, de aparición relativamente reciente. La teoría de ajustes lineales –que sigue siendo objeto de investigación– está asentada desde un poco antes de la primera mitad del siglo XX, mientras que en ajustes no lineales recién se arribó a un método cerca de 1970, y sigue siendo investigada profusamente.

Recordamos que lo que determina que un ajuste sea lineal o no, es la función de *los parámetros* de ajuste, y no la función de la variable que coloquemos en el eje horizontal¹⁷.

En los ajustes lineales, el problema es minimizar una función que tiene sólo un mínimo absoluto; en los ajustes no lineales, la función que hay que minimizar presenta muchos mínimos, y es necesario *inicializar los parámetros y dar cotas de búsqueda a los algoritmos*, a fines de limitar la cantidad de mínimos que los algoritmos encuentran.

Las manos en la masa

Sabemos que la ec. que vincula la amplitud que decae con el tiempo, siguiendo el modelo no lineal, es:

$$\theta_0(t) = \frac{\theta_i \alpha e^{-\alpha t}}{\theta_i \beta (1 - e^{-\alpha t}) + \alpha} \quad (5.2)$$

Si bien la ecuación parece simple, su ajuste no lo es tanto. Los ajustes no lineales requieren que *inicialicemos parámetros de ajuste*, es decir, que le informemos al algoritmo valores desde los cuales arrancar. Además, necesita que le demos cotas superiores e inferiores a esos valores. Todo esto es muy contrastante con los ajustes lineales, los cuales tienen solución única y son estables a pesar de que los ajustes a simple vista entreguen malas aproximaciones. En los ajustes no lineales:

- La función a minimizar tiene muchos mínimos locales.
- Muchos de estos mínimos locales están *muy cerquita* en el espacio de parámetros, pero las curvas que entregan son muy distintas.
- Cuesta lograr la convergencia.
- A veces se logra una convergencia en alguna de las cotas de los parámetros: no es deseable, pero...

Qué valores podemos utilizar para inicializar parámetros

Los parámetros necesitan ser inicializados y acotados, lo que no quiere decir otra cosa que entregarle al algoritmo los valores para empezar a minimizar la función. Algunos valores hacen que el algoritmo no converja, otros entregan ajustes horribles. Es necesario, entonces, buscar algunas pistas de cómo inicializarlos.

Viendo la ec. que queremos ajustar, notamos que necesitaremos valores para tres parámetros: θ_i, α, β :

¹⁷Los polinomios de la forma $f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ pueden ajustarse a los datos mediante ajustes lineales: aunque no sean funciones lineales de x , el ajuste es función lineal de los coeficientes. Por otra parte, $f(x) = Ae^x$ también es lineal respecto del parámetro A . Un ejemplo no lineal sería $f(x) = c_1 e^{c_2x} + \tan(c_3x)$



Valor inicial para θ_i

Si tenemos la serie de (t_i, θ_{0i}) , e hicimos $t_1 = 0$, entonces este parámetro se identifica con $\theta_i = \theta_0(t = 0)$, para las cotas...podemos probar intervalos.

Valor inicial para α

El parámetro α es un poco más resistente. Si recordamos el modelo, el parámetro α está relacionado con el decaimiento que depende linealmente con la velocidad, y esto ocurre para bajas velocidades. Este decaimiento de la amplitud es exponencial, y ocurre en todo el rango de tiempos para la ec.(2.7), y en la cola final de tiempos en el modelo descrito por la ec.(2.8). Esto quiere decir que la pendiente de la cola del gráfico θ_0 vs. t en escala semi-log, *debería* ser cercana al parámetro α , y es justamente desde donde obtendremos una primera estimación del parámetro.

El procedimiento anterior puede observarse en la Fig.(12), donde se observa el ajuste lineal de los puntos de θ_0 vs. t para los valores más altos de t , que supuestamente siguen un decaimiento exponencial. Es necesario aclarar que, si bien es lo que esperamos, el valor de α puede ser mucho menor que la pendiente encontrada en este ajuste, ya que los puntos ajustados de t pueden aún contener influencias del parámetro β , sobreestimando la pendiente del ajuste, que nos entrega α . Esto nos lleva a colocar como valor inicial de α la pendiente encontrada (en realidad su valor negativo), aunque vamos a tener que darle una cota inferior lo más cercana a cero posible (no puede ser cero). Como cota superior, le podemos dar la pendiente encontrada y unas cuatro desviaciones estándar del parámetro.

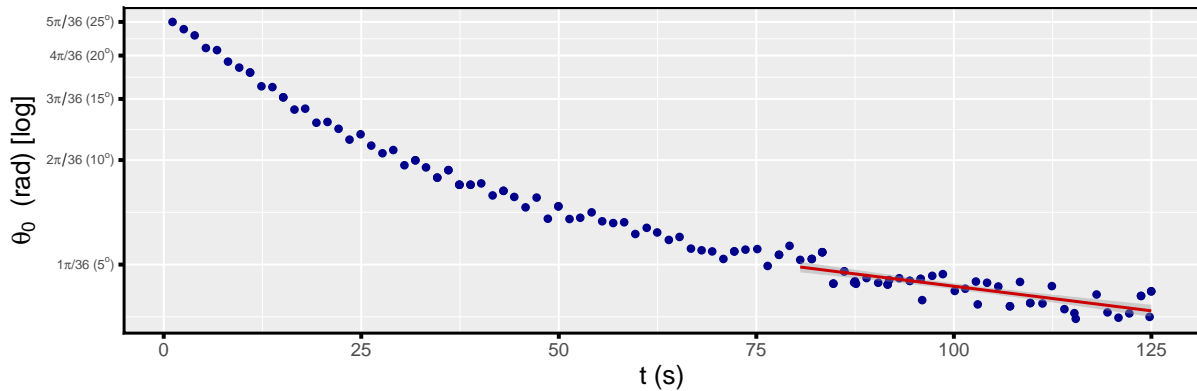


Figura 12: Calculando un valor inicial para α .

Valores iniciales para β

Entonces, ya tenemos valores iniciales de los parámetros θ_i y α . Al parámetro β lo podemos dejar *libre* (darle un mínimo de 0 y un máximo de 1 estará bien). Sin embargo, el método que seguimos, sugiere que debemos buscarle un valor para inicializar el parámetro en el ajuste no lineal.

Como se ve en la Fig.(13), el decaimiento para t pequeños (los primeros puntos), puede ser visto como una recta de pendiente negativa y ordenada al origen θ_i . Entonces, haciendo una expansión de Taylor en torno a $t = 0$ y truncándola a $O(t^2)$ (el orden que le sigue al lineal), queda:

$$\theta_0(t) = \theta_i + \left(-\alpha\theta_i - \beta\theta_i^2 \right)t + O(t^2) \quad (5.3)$$

con lo que tenemos la parte *lineal* de la función, y puede servirnos para aproximar la recta que vemos. Si la identificamos con la pendiente m que nos entrega un ajuste lineal de los primeros cuatro valores, entonces podemos calcular:



$$m = -\alpha\theta_i - \beta\theta_i^2 \Rightarrow \beta = -\frac{m}{\theta_i^2} - \frac{\alpha}{\theta_i} \quad (5.4)$$

con lo que tenemos un valor inicial para β . Aconsejaremos usar muchas desviaciones estándar, pues...el número de puntos que usamos para estimar valores iniciales de parámetros es muy pequeño, es decir, puede ser muy inestable.

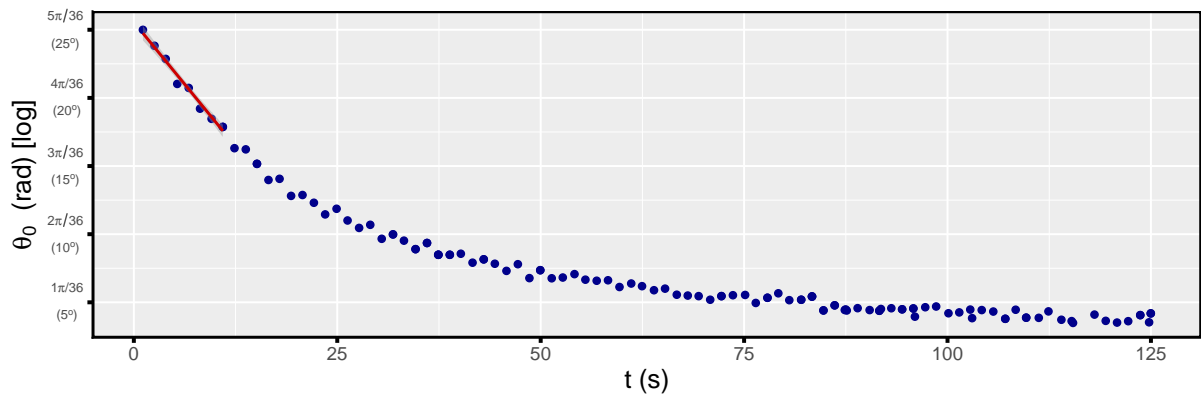


Figura 13: Calculando un valor inicial para β .



Software 5.3: Ajuste no lineal

Supongamos que queremos ajustar la función de la ec.(2.8), dada por:

$$\theta_0(t) = \theta_i \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\beta \theta_i (1 - e^{-\alpha t} + \alpha)}$$

y tenemos los puntos $\{\theta, t\}$ en los vectores `theta` y `tiempo`. Lo primero es escribir la función con los parámetros que necesitamos:

```
amp.tiempo <- function(tiempo, amp.i, a, b){
a * amp.i * exp( - a * tiempo ) / ( b * amp.i * (1-exp(- a * tiempo ) ) + a )
}
```

los parámetros están representados por `a`, `b` y `amp.i` (α , β y θ_i , respectivamente).
Luego instalamos una librería de ajustes no lineales `nls2`, y escribimos:

```
#la amplitud como función del tiempo
aju <- nls2(theta ~ amp.tiempo(tiempo, amp.i, a, b),
#inicializa valores donde buscar
start = c(amp.i = theta.i, a = alpha.i, b = beta.i ),
#cota inferior de parámetros
lower = c(amp.i = 0.8*theta.i, a = 10^-9, b = 0.1*beta.i),
#cota superior
upper = c(amp.i = 1.2*theta.i, a = alpha.i + 5*s.alpha*i, b = 5*beta.i),
#weights = 1/ref$eCcs^2, #(pesos, en este caso no)
algorithm = "port", #hay varios tipos de algoritmos
#cantidad máxima de iteraciones y detalles
control = nls.control(maxiter = 15000, minFactor = 1/1000))
a.ver.si.da.por.favor <- summary(aju); #resultados aquí.
```

Detalles hay mil millones, y podríamos discutirlos largamente. Los ajustes no lineales son algo que se sabe menos que la teoría de ajustes lineales y hay mucha gente imprudente dando vueltas: bienvenidos nosotros.