Laboratorio
Calibrando un inclinómetro digital
(usando el acelerómetro de 3 ejes del celular)

¿Qué significa calibrar un instrumento?

En esta guía de laboratorio nos proponemos utilizar el acelerómetro de tres ejes como un inclinómetro, es decir, como un aparato que pueda medir ángulos de inclinación respecto de la horizontal. Para ello, vamos a elaborar un pequeño modelo basado en la descoposición de la fuerza de gravedad en los tres ejes del acelerómetro, utilizando una medida o serie de medidas con el teléfono en posiión horizontal, y otra sere de medidas con el teléfono inclinado un ángulo α respecto de la horizontal.

Ahora, ¿qué significa calibrar? En una primera aproximación, calibrar (que viene de calibre, no el instrumento de medida sino el tamaño del orificio de un arma de fuego) es comparar medidas hechas por un instrumento con medidas hechas por un instrumento, o bien *patrón de medida*, o bien un instrumento de mejor calidad...o bien un instrumento que al menos sabemos que responde a los fines que necesitamos (comienzamos con *patrón*, terminamos con *al menos que sirva*). En este caso, vamos a comparar los ángulos obtenidos mediante nustras medidas de acelerómetro, con ángulos estimados a partir de medidas de longitud de catetos y operaciones trigonométricas.

Si nos situamos más en detalle, lo que buscamos al calibrar un instrumento es:

- ¡Saber si el instrumento *funciona*!
- Conocer cómo son las desviaciones de las medidas del instrumento comparadas con otro considerado *patrón*, o de mejor calidad. En base a esto, estimar incertezas de la medida de nuestro instrumento y posibles errores sistemáticos.
- Finalmente, obtener una función de calibración, que nos permita obtener, a partir de las medidas del instrumento calibrado, la medida del patrón o instrumento de referencia.

Esta guía tiene incorporado un preámbulo que permite entender cómo funciona un acelerómetro y qué bicho raro tiene adentro para medir aceleraciones; contiene además someras explicaciones sobre el modelo utilizado para estimar ángulos mediante el acelerómetro y algunos consejos útiles para la realización del experimento. Obvio que todo esto parece fácil, pero siempre hay detalles. Vamos, entonces, a adentrarnos el ellos.

Lo que necesitamos saber:

1. Tipos de Errores.
    a) Incertezas o errores azarosos.
    b) Errores sitemáticos.
2. Estadística
    a) Medidas de tendencia central (media y mediana)
    b) Medidas de dispersión.
    c) Criterios de limpieza de datos.
    d) Ajuste lineal.

Preámbulo: acelerómetros

Si bien los acelerómetros están presentes en muchos aparatos de uso cotidiano (el celular y el automóvil son los ejemplos más típicos), dedicarle algunas líneas no es redundante por, al menos, dos motivos: el primero tiene que ver con la importancia de conocer el funcionamiento de los sensores que utilizamos; el segundo es dar con la teoría detrás del sensado de aceleraciones. Estos motivos nos llevarán detrás de un sistema simple, a saber, el sistema *masa-resorte*, y el modelado del mismo en el caso de querer describirlo en un sistema de referencia *no inercial*, lo que da origen a este método de medida.

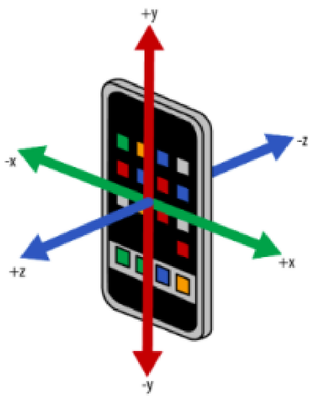

Figura 1: Direcciones ortogonales en las cuales miden los acelerómetros de los teléfonos.

El acelerómetro del teléfono es un acelerómetro de tres ejes. Con tres ejes, queremos decir tres direcciones perpendiculares entre sí en las cuales se miden las aceleraciones. Estas direcciones están *estandarizadas*, es decir, son las mismas para todos los teléfonos (no en vano, sirven para orientar la pantalla vertical u horizontalmente). Un esquema de esto se muestra en la Fig.(1): la dirección x es perpendicular al lado más largo del teléfono, la y es paralela a ese lado y la z sale de la pantalla del teléfono. Para cada una de las direcciones, hay un sistema masa-resorte encargado de la medida de aceleración. Vamos a estudiar brevemente su dinámica.

Sistema Masa Resorte

En la Fig.(2) se encuentra un sistema masa resorte que puede moverse libremente a izquierda o a derecha de la caja en la que está contenido (**no** puede moverse hacia arriba o hacia abajo, o hacia afuera o adentro de la página, gracias a la caja que lo contiene). La caja puede representar al teléfono o al circuito integrado que lo contiene.

Según la ley de Hooke, un resorte tiene cierta relación lineal entre su deformación y la fuerza que ejerce. Si el resorte se deforma $\Delta x\,[m]$, realiza una fuerza (restitutiva) $F\,[N] = -k\Delta x$, donde $k\,[Nm^{-1}]$ es la constante del resorte, a mayores(menores) valores de k, mayor(menor) la fuerza que realiza para una dada deformación.

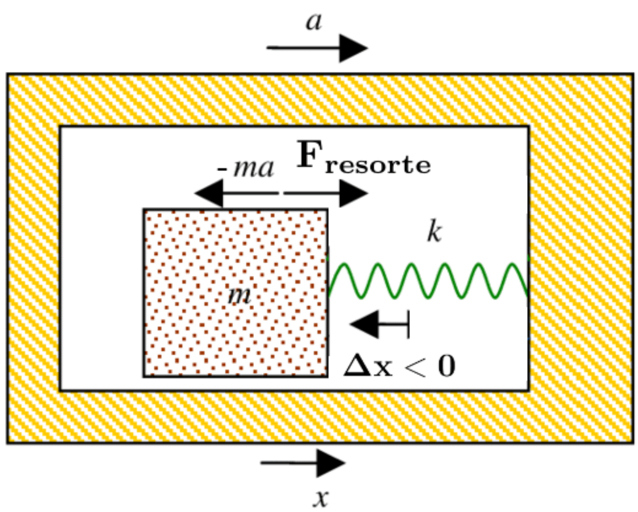

Figura 2: Sistema masa resorte, encerrado en una caja (teléfono) que se mueve hacia la derecha con aceleración a.

Consideremos las fuerzas en la masa m cuando la caja que lo contiene se mueve a la derecha con aceleración a. En este punto, consideramos un sistema de referencia solidario a la caja acelerada. Dado que la caja está acelerada, el sistema de referencia es *no inercial*. Para describir la dinámica de la masa m dentro de la caja en el sistema de referencia solidario a ella, tendremos que asumir una *pseudofuerza* $F_{pseudo} = -ma$, contraria a la aceleración a en el marco de referencia inercial, fuera de la caja. Esta fuerza describe el hecho de que el sistema de referencia solidario a la caja está acelerado, pero no puede explicarse a partir de ninguna interacción, es por ello que las llamamos *pseudofuerzas* ó *fuerzas ficticias*.

Mientras que la masa m se acelera a izquierda, el resorte se deforma hasta alcanzar el equilibrio entre las dos fuerzas:

$$F_{pseudo} + F_{resorte} = 0 \Longrightarrow F_{pseudo} = -F_{resorte} \tag{1}$$

como la fuerza del resorte está descripta por la ley de Hooke, podemos escribir:

$$F_{pseudo} = -F_{resorte} = -(-k\Delta x) = k\Delta x \tag{2}$$

sabiendo que $F_{pseudo} = -ma$, es posible despejar de la ec.(2) la aceleración a de la caja, en función de las constantes m, k y Δx de nuestro sistema masa resorte:

$$F_{pseudo} = -ma = k\Delta x \Longrightarrow a = \frac{-k\Delta x}{m} \tag{3}$$

con lo que en la ec.(3) tenemos que es posible estimar la aceleración de la caja a, sabiendo las características del sistema masa resorte (k y m), y midiendo el desplazamiento Δx. En este caso, deformaciones a izquierda ($\Delta x < 0$), conducen a aceleraciones a derecha ($a > 0$); obviamente, deformaciones a derecha ($\Delta x > 0$), conducen a aceleraciones a izquierda ($a < 0$). Es importante notar que la fuerza F_{pseudo} sólo es tenida en cuenta en el sistema de referencia que se mueve solidario a la caja acelerada, es decir, es una *pseudo fuerza* postulada en ese marco de referencia no inercial.

Es importante siempre aclarar que el término *pseudofuerza* o *fuerza ficticia* parece bajarle el precio, como si no tuvieran otro efecto que el cálculo. Sin embargo, como siempre, es necesario aclarar que su nombre se debe que no hay interacción que las explique. En este caso, permiten la medida de aceleraciones, es decir, tienen un efecto real sobre nuestro sistema.

Ahora consideramos la caja en posición vertical, asumimos que hay una fuerza de gravedad y que la masa m siente una fuerza de arriba hacia abajo dada por $F = mg$.

Ejercicios:

a)Escriba la condición de equilibrio de la masa de pruba sometida a la acción de la gravedad. Prediga en lo posible, la aceleración medida y su signo.

b) Explique qué mediría un acelerómetro si estuviera en caída libre (no tire el teléfono por la ventana, la teoría ahorra dinero).

c) El modelo presentado es tan sencillo que hay una mentira casi obvia con respecto al comportamiento dinámico de la masa, ¿se le ocurre cómo podríamos hacerlo más realista o cuál es su principal falla en la explicación?

Acelerómetro MEMs

En la Fig.(3) se observa una imagen obtenida a través de microscopía electrónica del acelerómetro MEMS LIS33DLH, de *ST Electronics* (muy parecido al que se utilizó en para hacer las medidas en esta guía). Este acelerómetro es un dispositivo cuya *dinámica* es igual al sistema masa resorte, pero desde ya que *no se parece* al sistema que dibujamos anteriormente. Por empezar, tienen la longitud de todo el sistema es de decenas o cientos de μm (son muy pequeños); en segundo lugar, el resorte utilizado no es parecido al de la Fig.(2), sino de diseño algo más complicado. Este tipo de acelerómetros se denomina acelerómetros MEMS (*MicroElectroMechanical Systems*), y, si bien funciona *dinámicamente* muy parecido al sistema masa resorte, visualmente no se parece en nada.

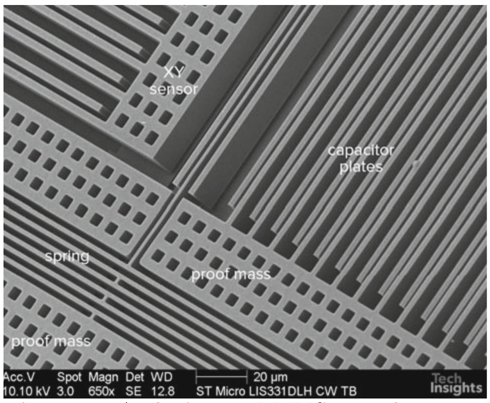

Figura 3: Acelerómetro MEMS, mirado con un microscopio electrónico. Se observan la masa m (*proof mass*), el resorte (*spring*) y las placas del capacitor (*capacitor plates*) encargadas de la medida del desplazamiento de la masa.

El desplazamiento de la masa Δx, en estos dispositivos, es medido mediante una medida eléctrica (una medida capacitiva). Como todos los sistemas masa resorte, los acelerómetros MEMS están sujetos a cualquier vibración presente (la detección de vibraciones es una de las aplicaciones más frecuentes). Para realizar nuestras medidas deberemos intentar aislarlos de cualquier posible vibración.

Si bien las aplicaciones son muchas, en los automóviles se utilizan para la detección de una posible colisión y su ángulo (frente, 45^o trasera,lateral), lo que permite inflar ciertos *airbags*, y ver este ***gag***.

Como cierre de esta rápida visita a los acelerómetros, vamos a hacer una medida de prueba para ver cómo funciona el acelerómetro en reposo.

Midiendo con Phyphox.

Aplicación para obtener los datos del acelerómetro

Hay un sinfin de aplicaciones para Android y iOS que *loggean* los datos del acelerómetro. Una de ellas permite acceder a varios sensores disponibles en el celular y es gratuita. Puede encontrarse en la Play Store (o en la Apple Store) bajo el nombre de ***Phyphox***. Permite utilizar muchos sensores del teléfono celular para hacer experimentos. Fue desarrollada por la RWTH Aachen University, una universidad pública alemana.

Los datos del acelerómetro son exportados a archivos `'.csv'`, con un formato de columnas:

```
Time(s), Ax(m/s2),Ay (m/s2), Az(m/s2),Amod(m/s2) \n
```

donde la coma ',' es la separación de las columnas y `'\n'` es el fin de línea de `UNIX` (todos los Linux y casi todos los lenguajes de programación). Si bien los sistemas operativos Windows no tienen el mismo fin de línea, es posible configurar el software que estén utilizando para reconocer `'\n'` como fin de línea.

Es importante notar que todas las personas en el curso deben usar la misma aplicación, ya que el formato de los *data-sets* no es un tema menor a la hora de compartir información (y es lo que hacemos habitualmente en el curso). En caso de querer cambiar por otra aplicación, deberán ponerse de acuerdo.

Midiendo el teléfono en reposo (boca arriba)

Dejando el teléfono sobre la mesa (el eje z hacia arriba), tomamos 10 segundos de medidas del acelerómetro en Phyphox. Utilizamos una demora de 3 s antes de iniciar las medidas, con el fin de evitar las vibraciones al inicio de la medida ocasionadas por la presión del dedo sobre la pantalla del celular. El eje apuntando hacia arriba es el eje $z+$. La gravedad, salvo pequeñas inclinaciones, es una fuerza que apunta hacia $z-$.

En la Fig.(4) se muestra un histograma para los datos de medida de cada componente x, y, z y el módulo $|g|$. Es posible observar que las distribuciones se asemejan bastante a una distribución normal, indicada por la línea continua negra. Las medias y las desviaciones estándar muestrales son:

$$\bar{g_x} \pm s_x = (-0.174 \pm 0.009)ms^{-2} \quad \bar{g_y} \pm s_y = (0.024 \pm 0.01)ms^{-2} \quad \bar{g_z} \pm s_z = (9.88 \pm 0.01)ms^{-2}$$

las componentes g_x y g_y tienen medias cercanas a cero, mientras que g_z está cerca del valor de la aceleración de la gravedad. Esto es completamente esperable dada la posición del teléfono.

El módulo $|g| = \sqrt{g_x^2 + g_z^2 + g_x^2}$ tiene una media y una desviación estándar muestrales de:

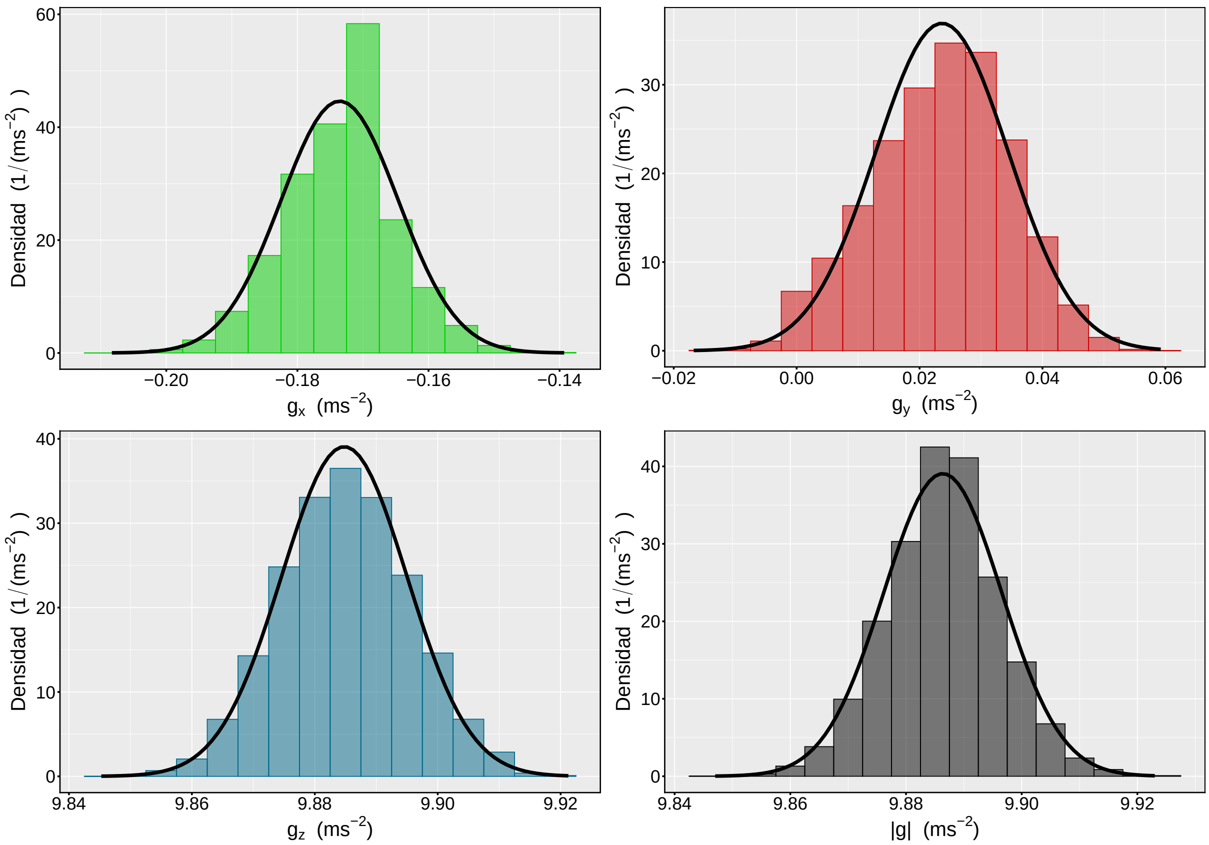

Figura 4: Se muestran los histogramas para las componentes g_x, g_y, g_z y el módulo $|g|$ de la medida con el teléfono en reposo, sobre una mesa (pantalla mirando al techo). Las líneas continuas en cada gráfico representan un ajuste a una distribución normal.

$$|\bar{g}| \pm s_{|g|} = (9.89 \pm 0.01)ms^{-2}$$

Tarea: es claro que el módulo lo podemos calcular a partir de $|\bar{g}| = \sqrt{\bar{g_x}^2 + \bar{g_y}^2 + \bar{g_z}^2}$. Obtenga $s_{|g|}$ a partir de s_x, s_y, s_z.

Como puede verse con los resultados de la medida en reposo, los acelerómetros son bastante ***precisos***, es decir, presentan poca dispersión de valores. Sin embargo, $|\bar{g}| \pm (9.89 \pm 0.01)ms^{-2}$ difiere bastante del valor de la Red Argentina de Gravimetría Absoluta ($g \pm s_g = (9.79316985 \pm 0.00000002)ms^{-2}$)...esto es porque los acelerómetros no son muy ***exactos***, ni están diseñados para serlo (hay excepciones, claro, como los sismógrafos). Estos dispositivos están pensados para la orientación (que involucra cocientes entre componentes), antes que para la determinación exacta de la aceleración de la gravedad. Es claro que pueden calibrarse, pero las lecturas cambian mucho con las variaciones de temperatura, por lo que calibrar un acelerómetro para que sea *exacto*, además de *preciso*, puede conllevar un gran trabajo.

1. Actividad: Modelo, montaje y experimento de prueba

1.1. Modelo

Ya dijimos que el acelerómetro en reposo descompone a g en tres componentes. Entonces, el teléfono en posición *horizontal* ($\theta = 0$), poseerá una descomposición de g, $g_h = g_{h,x}\mathbf{e_1} + g_{h,y}\mathbf{e_2} + g_{h,z}\mathbf{e_3}$, donde $\{\mathbf{e_i}\}$ con $i = 1, 2, 3$ son los vectores ortonormales de la base del acelerómetro.

Es posible pensar que, al inclinar el teléfono, tendremos *otra* descomposición de la aceleración de la gravedad $g_\theta = g_{\theta,x}\mathbf{e_1} + g_{\theta,y}\mathbf{e_2} + g_{\theta,z}\mathbf{e_3}$.

El producto punto o escalar entre los vectores g_h y g_θ deberá proveernos de una forma de obtener el ángulo θ, que no es otra cosa que el ángulo entre diferentes descomposiciones de la gravedad, es decir, el ángulo de inclinación del telégono respecto de la horizontal.

Responder por escrito

a) Realice un esquema del teléfono en reposo con el vector $\vec{g}$, primero en posición horizontal ($\vec{g}_h$) y luego inclinado un ángulo θ ($\vec{g}_\theta$).

b) Utilizando el producto punto, calcule el ángulo θ como función de las componentes de g_h y g_θ, mencionadas anteriormente.

c) Inspeccionando la fórmula anterior, deduzca el intervalo de θ que será posible obtener a partir de las componentes de $\vec{g}_h$ y $\vec{g}_\theta$.

1.2. Medidas de longitud y ángulos: cómo montar esto

Figura 5: Teléfono sobre plano inclinado, del cual quiere conocerse el ángulo de inclinación. Es importante no perturbar con vibraciones el teléfono, mientras dura la medida. Los acelerómetros responden fuertemente a las vibraciones, siendo uno de los sensores preferidos para detectarlas.

En la Fig.(5), se muestra la configuración experimental a utilizar:

- El teléfono está montado (con cintas adhesivas) sobre una tabla de madera plana, que sirve de soporte (puede utilizarse una tabla proveniente de un cajón de verdulería). Esta madera forma un triángulo rectángulo con la pared y el suelo.

- Sobre la pared y el piso se encuentran adheridas con cinta dos reglas metálicas, que permiten medir las longitudes de los catetos opuesto y adyacente del triángulo rectángulo. En caso de no contar con reglas largas, pueden utilizarse cintas métricas ó utilizar reglas de 30 cm y disminuir el largo de la tabla de madera.
- A fin de no demorar mucho –por experiencia se lo decimos– es *menester* que la tabla sea mantenida en su lugar en cada medida, mediante algún método de sujeción (una silla en este caso, aunque puede ser un libro pesado, un ladrillo, etc...)

1.3. Experimento de prueba

a) Monte la configuración experimental mencionada. Mida en posición horizontal, la salida del acelerómetro por unos dos segundos.

b) Coloque la tabla con el celular y mida un ángulo del plano inclinado midiendo las distancias necesarias. Mida con el acelerómetro en esa posición unos dos segundos. Calcule el ángulo y su incerteza a partir de las ecuaciones trigonométricas planteadas.

c) Realice los cálculos del modelo para obtener ángulos a partir de las medidas del acelerómetro. Utilice la media y la desviación estándar y como incerteza el SEM (limpie datos y haga las cosas pertinentes a fines de no *sesgar* la media).

d) Compare las magnitudes obtenidas en los puntos (b) y (c).

2. Actividad: Mediciones

2.1. Medidas de longitud y del acelerómetro

En esta actividad vamos a repetir las medidas que hicimos anteriormente, pero para un rango de valores (es decir, para una calibración confiable).

a) Realice la primera muestra con $\theta = 0$, es decir, horizontal (apoyado en el piso). Registre un número algo mayor a 2000 medidas sin perturbar el teléfono. Nombre este archivo (en la aplicación) como `00.csv`.

b) Haga lo mismo para cada uno de los ángulos:
$\theta_i = \frac{\pi}{18}\ , \frac{2\pi}{18}\ , \frac{3\pi}{18}\ , \frac{4\pi}{18}\ , \frac{5\pi}{18}\ , \frac{6\pi}{18}\ , \frac{7\pi}{18}\ , \frac{8\pi}{18} = 10^o, 20^o, 30^o, 40^o, 50^o, 60^o, 70^o, 80^o$

c) utilice los nombres de archivo `01.csv`, `02.csv`,...,`08.csv` para enumerar las medidas.

d) En cada medida, registre las longitudes de los catetos, a fines de calcular el ángulo θ_l para cada una de las posiciones en las que se coloca el acelerómetro.

Algunas consideraciones:

- Para acelerar el proceso: mida la longitud de la madera y calcule, en base a los valores de θ pedidos, las longitudes de uno de los catetos para cada θ. Con esta lista de longitudes en la mano, es más fácil demorar media hora en lugar de dos.
- Intente abarcar el mayor rango posible (10^o a 80^o) (pero no caiga en la locura): si los extremos resultan difíciles o las reglas no alcanzan, reduzca el rango sin perder puntos de medida.
- Obviamente, cada uno de los valores de θ propuestos es *aproximado*: podemos admitir variaciones de 5^o ó más. Si quiere agregar puntos, bienvenido.

3. Actividad: Análisis de datos

Teniendo en cuenta que vamos a utilizar muchos datos, es conveniente tener un arreglo de datos tipo *Tidy-Data*[1], un forma usual –entre otras– de arreglar datos[2]. Pedimos encarecidamente no caer en el manejo de 10 variables separadas, y llenar de líneas repetidas el código, sino intentar sistematizar las operaciones.

3.1. Medidas de longitud

Calculando ángulos e incertezas con las medidas de longitud.

a) Obtenga los ángulos θ_l a partir de las medidas de longitud.

b) Obtenga la incerteza $\delta\theta_l$ a partir de las medidas de longitud.

c) Informe los valores extremos de $\delta\theta_l$, y discuta sus posibles causas ¿Acaso las incertezas en las medidas de longitud no son iguales? ¿qué hace que cambien los valores de $\delta\theta_l$?

3.2. Medidas del acelerómetro

Calculando dispersiones de ángulos y cuantificando una medida a partir de los datos del acelerómetro.

a) Tenga en cuenta que hay que cargar varios archivos ASCII. Recorte los datasets a un número predefinido de repeticiones de cada medida, como 2000.

b) Calcule los ángulos θ_a a partir de hacer las operaciones necesarias sobre las medidas de g_h y cada uno de los g_θ. La idea de propagar la incerteza puede ser difícil, y buscaremos cuantificar la incerteza a partir de la dispersión de 2000 valores de θ_a calculados de cada ángulo. En caso en el que las dispersiones sean muy grandes (aunque rogamos que no), pueden perderse algunos valores en el cálculo de los ángulos, pues utilizamos una función trigonométrica inversa cuyo dominio está acotado.

c) Analice las medidas de conjunto y asegúrese de eliminar valores anómalos antes de calcular medias y SEM's.

d) Calcule para cada ángulo la media muestral, la desviación estándar de la muestra y el SEM. Informe los ángulos con la mayor y la menor s_θ (desviación estándar de la muestra). Haga histogramas de las dos medidas anteriores. Discuta posibles orígenes de la discrepancia entre los valores de s_θ.

d) ¿Qué probabilidades tiene *una medida* del acelerómetro, de caer en el intervalo $\overline{\theta} \pm s_\theta$? (Informe esto para los valores extremos de s_θ)

e) ¿Qué probabilidades tiene *la media* $\overline{\theta_a}$ *(2000 repeticiones)* del acelerómetro, de caer en el intervalo $\overline{\theta_a} \pm SEM$? (Informe esto para los valores extremos de s_θ del punto anterior)

3.3. Comparando medidas

Ahora vamos a comparar las medidas, pero en lugar de hacerlo para una medida, lo vamos a hacer para todos los puntos encontrados.

[1] Puede consultarse Wickham, H. (2014). *Tidy Data*. Journal of Statistical Software, 59(10), 1 - 23. doi:http://dx.doi.org/10.18637/jss.v059.i10

[2] Habitualmente se utiliza este arreglo durante el curso.

- Con las medidas de longitud, debemos tener una `tabla` que tenga tres columnas: θ_l , $\delta\theta_l$, N, donde N es el número de medida.
- En el acelerómetro utilizaremos la media muestral de los datos limpios, $\overline{\theta_a}$ como estimador de tendencia central, y el SEM como desviación estándar de $\overline{\theta_a}$. Debemos obtener una tabla con las columnas: θ_a , SEM , N. Este arreglo de datos debe tener solamente N datos, pues consta de medias y no de todos los datos.

Si unimos estos datos, podremos graficar θ_a (en el eje y) *vs.* θ_l. La gráfica de los puntos debe parecer una recta $\theta_a = \theta_l$, es decir, una recta de pendiente 1.

- Grafique θ_a *vs.* θ_l.
- Grafique, encima del gráfico anterior, una recta de pendiente unitaria.
- Grafique un ajuste lineal e informe parámetros.
- Calcule los residuos del ajuste lineal, $\theta_{res} = \theta_a - (a + b * \theta_l)$. Informe la recta de calibración.
- Haga la diferencia $\delta\theta = \theta_l - \overline{\theta_a}$ y grafique $\delta\theta$ *vs.* θ_l, adjuntando a $\overline{\theta_a}$ barras indicando el SEM. Informe el rango de $\delta\theta$. Discuta dónde la medida del acelerómetro funciona mejor y dónde funciona peor. Evalúe si $\delta\theta$ es menor a tres SEM para todas las medidas.