



FISICA EXPERIMENTAL I
Laboratorio:
Velocidad del Sonido
Calibración de un Sensor de Movimiento

Cada estudiante deberá tener a mano:

- Una computadora.
 - El material de Arduino (placa, protoboard, cables, etc.).
 - El termómetro DS18B20
 - El código [HCSR04.ino](#)
-

Guión - Objetivos

Hasta ahora utilizamos los sensores de movimiento como ‘cajas negras’: un cúmulo de electrónica de la cual no conocemos ni siquiera el principio de funcionamiento. En el laboratorio actual utilizaremos un sensor de funcionamiento parecido al Vernier, el HC-SR04.

El HC-SR04 es un sensor ultrasónico de distancia de bajo costo, diseñado e implementado para Arduino. El principio de funcionamiento, al igual que el sensor Vernier, está basado en que la velocidad del sonido en un medio (el aire en este caso) es constante (para temperatura del medio constante). El sensor mide el *tiempo de vuelo* (Time Of Flight por sus siglas en inglés), que es el intervalo de tiempo que un pulso de sonido demora en recorrer la distancia entre sensor, rebotando en un objeto, arribando al sensor nuevamente.

Este práctico tiene dos objetivos primordiales:

- Calibrar el sensor HC-SR04.
- De *yapa* obtendremos una estimación de la velocidad del sonido.

Introducción

“Una traducción –cuando buena– es a su original, lo que un cuadro copiado de la naturaleza animada...”

Bartolomé Mitre, **Teoría del Traductor** (1889).

Si bien hablamos de *comparación directa* de magnitudes a la hora de medir, en física es habitual estimar una *magnitud* midiendo *otra*. Lo anterior es, en buena medida, aplicable a las medidas que realizamos en este curso: decimos que *medimos* la temperatura con el termistor DS18B20, pero en realidad se mide la resistencia de un transistor y de ahí se obtiene la temperatura (que obviamente depende de la temperatura del termistor); medimos el tiempo de oscilación de un péndulo, sin embargo utilizamos los estados de un



LED infrarrojo para marcar, mediante interrupciones, valores del reloj (que es la cantidad de oscilaciones de un sistema electrónico) de una placa Arduino.

Este tipo de *medidas* –estimaciones– es tan habitual que es imposible pensar en cualquier experimento sin utilizarlas. La *calibración* de un sensor cualquiera es la obtención de una *relación* entre la magnitud *medida* y la magnitud que se desea *estimar* en la situación experimental, y es *parte* de la tarea de *caracterización de un sensor*. Obviamente, con esta curva es posible conocer la magnitud *deseada* a partir de la magnitud *medida*.

Todos los instrumentos que utilizamos hasta ahora poseen una calibración, es decir, existe una función que relaciona una propiedad (tiempo de vuelo, resistencia eléctrica) con la propiedad que se quiere determinar (distancia, temperatura); el termómetro que utilizamos, por ejemplo, tiene almacenados *coeficientes de calibración*, los cuales se introducen en una *función de calibración* (presente en la librería) lo cual nos dice la temperatura en función de una medida de *voltaje*. Las calibraciones son una práctica recurrente en el laboratorio, aunque se realizan sólo en caso de necesitar de una buena *fiabilidad* en las medidas. Esta práctica –que habitualmente no desearemos realizar–, la deberemos sumar a nuestra lista.

Como cualquier otra tarea, una calibración puede resultar en un sin fin de detalles, que crecen con el grado de certidumbre que queremos alcanzar en la estimación requerida. Si queremos tener unas incertezas bien definidas, hay mil detalles que debemos tener en cuenta. Si lo que necesitamos es una estimación *cruda* –*más o menos*– entonces podemos pasar por alto los detalles. Siempre, todo depende de cuánta información sea necesaria a los fines que perseguimos.

Generalidades del Sonido - Sensor HC-SR04

El sonido es una *perturbación de presión* que se propaga longitudinalmente en el *aire*. Es lo que en física se denomina una *onda* de presión. Esta *alteración* de la presión se propaga a las zonas circundantes, modificando la presión del aire, moviendo el aire de cada sitio alrededor de un punto de equilibrio (similar al movimiento de un péndulo).

El sonido se propaga a velocidad constante. Esta *velocidad de propagación* está alrededor de los $\sim 343.4 \text{ ms}^{-1}$ para condiciones de temperatura de 20°C , y no varía para las frecuencias del rango de audición del oído humano (desde 20 Hz a 20 kHz) ni para frecuencias superiores o inferiores. Tampoco varía con la *amplitud* de la onda de presión, que –simplificando– identificaremos con el *volumen percibido*.

Hay varios sitios de internet que [calculan la velocidad del sonido](#) dada la temperatura del aire, y a veces un parámetro de humedad del aire. Si bien pueden complicarse hasta el infinito, el modelo más simple viene de modelar termodinámicamente al aire como un gas ideal¹. Este modelo entrega un vínculo entre la velocidad del sonido en el aire $c [\text{m/s}]$ y la *temperatura del aire* (en escala *kelvin*) $T [\text{K}]$ ²:

$$c = 20.0514 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{T} \quad (0.1)$$

la ec.(0.1) describe bastante bien la velocidad del sonido, partiendo de un modelo simple.

Con respecto al sensor HC-04SR (sería bueno darle una mirada al [datasheet](#)), funciona, como ya anticipamos, con el concepto de tiempo de vuelo³. En la Fig.(1) puede observarse un esquema en el cual una onda, saliendo del emisor, rebota en un objeto separado una distancia d , siendo captado por

¹Un gas ideal es un gas de pelotitas que interactúan sólo chocando y de ninguna otra manera...un modelo de juguete más, al que, por cierto, le debemos tanto o más que buena parte de la termodinámica y la mecánica estadística.

²La escala *Kelvin* de temperatura está relacionada con la de grados Celsius por la ec. $T[\text{K}] = T[\text{C}] + 273.15$.

³La técnica de contar el *tiempo de vuelo* se usa en *innumerables* medidas: la cebra que cae, iones en un campo magnético (espectrómetros de masa), neutrones en un tubo al vacío (determinando energía cinética de una multitud de neutrones), otras partículas cualesquiera en una guía, pulsos de luz para medir distancias, pulsos de sonido para el mismo fin, etc...



el receptor. En el sensor HC-SR04 claramente se visualizan dos cilindros que son *emisor* y *receptor*. Las ondas emitidas por el *emisor* consisten en un tren de 8 pulsos ultrasónicos de 40 kHz (el hecho de utilizar el prefijo *ultra* simplemente es debido a la frecuencia del sonido *mayor* que la frecuencia audible por humanos, de unos 20 kHz). El *receptor* es simplemente un micrófono de bajo costo. La electrónica del HC-SR04 sirve para calcular el tiempo entre la emisión del pulso ultrasónico y su recepción (el *tiempo de vuelo*). Con este dato se podrá calcular la distancia entre el objeto distante y el sensor, o la velocidad del sonido, o ambas.

Para minimizar errores de medición, el objeto en el cual rebota la onda **no podrá** tener las características del de la Fig.(1), sino que utilizaremos una superficie plana de *cierto* tamaño (una pared puede servir).

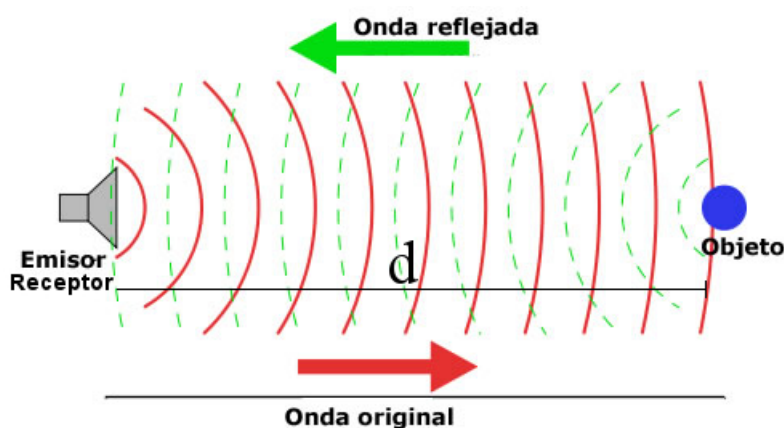


Figura 1: Esquema de rebote de una onda en un objeto distante. La onda saliente está representada en rojo, mientras que la onda reflejada está en líneas punteadas verdes.

1. Experiencia 1: Estimando la velocidad del sonido

Como dijimos anteriormente, mediante la placa Arduino, es posible obtener el *tiempo de vuelo* del sonido emitido por el HC-SR04. La idea de la experiencia es intentar corroborar la ec.(0.1) para una temperatura dada (recuerde que está en escala de temperaturas Kelvin).

La idea de la experiencia es sencilla:

- Mida la temperatura utilizando el termómetro. Anótela.
- Luego, coloque el sensor de movimiento en una posición fija respecto de una pared. Mida la distancia entre el sensor y la pared con una cinta métrica. Mida 400 veces con el sensor.
- Repita la operación para un rango de distancias entre 0.2 m y 1.2 m , en intervalos de 0.1 m .
- El dataset deberá tener una estructura de columnas de la forma $\{d_i; \text{tof}_i\}$, donde d_i es la distancia medida con cinta métrica, mientras que tof_i es el tiempo de vuelo medido con la placa Arduino.

1.1. Análisis de los datos

Escriba el modelo del tiempo de vuelo, es decir, una función $\text{tof}(d)$, en base a la idea de que la velocidad del sonido c es constante en el aire, y que el sonido rebota en la pared, a una distancia d del sensor.



En caso de ser necesario, limpie cada subconjunto de tof_i , sacando valores extremos o raros⁴.

1.1.1. Comparando cualitativamente

- Grafique tof_i vs. d_i . Analice y describa el gráfico, teniendo en cuenta la ecuación de $tof(d)$ que escribió más arriba.

1.1.2. Comparando $tof(d)$ cuantitativamente.

Para comparar valores de c conocidos con los que están presentes en nuestro problema, recurrimos, como siempre, a hacer ajuste de los datos e identificación de parámetros de ajuste con lo que tenemos en la ecuación de $tof(d)$...

- Escriba $tof(d)$ e identifique la ordenada al origen y la pendiente de la recta (en el caso en el que haya escrito una recta).

Ahora podemos realizar un ajuste lineal de los datos, considerando:

- a) Una ordenada al origen nula (en R es `lm(tof ~ 0 + d)`). Considerar ordenada al origen nula es la mejor representación de nuestro modelo...
- b) El ajuste de una recta con ordenada al origen variable.

Compare los parámetros obtenidos de los ajustes lineales (a) y (b) con la velocidad del sonido esperada para la temperatura T , evaluando cuál entrega mejor resultado. En ciencias, la economía de parámetros es algo importante (por lo que optaríamos por un ajuste lineal con ordenada al origen nula), sin embargo no siempre es la mejor opción...

Interprete la ordenada al origen del ajuste lineal (b) en base al funcionamiento del sensor.

- Grafique tof vs. d , junto con los ajustes lineales (a) y (b) y con la recta del modelo de velocidad del sonido c a la temperatura medida.
- Informe la velocidad del sonido estimada y su intervalo de confianza, $c \pm \sigma_c$. Definiendo la discrepancia como $D = c - c_{teórica}$, y $\sigma_D = \sigma_c$, indique posibles fuentes de la discrepancia.
- Como la discrepancia es una distribución normal, ¿el resultado está de acuerdo con el modelo de la ec.(0.1)? Cuán lejos está el valor $D = 0$ en términos de σ_D ?

⁴Puede pensar en limpiar la variable con cuantiles mediante la función `quantile()`, dejando sólo los valores entre los cuantiles 0.025 y 0.975 de la variable (nos deshacemos de las colas de las distribuciones, que son las que tienen los *outliers*). Es una limpieza grosera, pero limpieza al fin.



2. Calibración - Nociones teóricas

Cuando decimos que calibramos este sensor, nos referimos a la capacidad de estimar distancias a partir de tiempos de vuelo, en un *rango* específico y en *condiciones específicas*: vamos a trabajar con las medidas de la experiencia anterior, lo que nos dará una calibración entre 0.2 m y 1.2 m , para estimar la distancia de la pared que utilizamos como *blanco*. Con esto queremos decir, que las calibraciones buscan cuantificar las estimaciones en situaciones concretas y específicas: las calibraciones generales, en condiciones generalmente favorables, están en los manuales o *datasheets*.

La calibración que realizaremos, además, está realizada en saltos del “patrón” de 10 cm , por lo que podrían pasar cosas en medio de alguno de estos intervalos...que no conoceremos: siempre es importante recordar que hay que resignarse a no saber todo!

2.1. Mirando las medidas

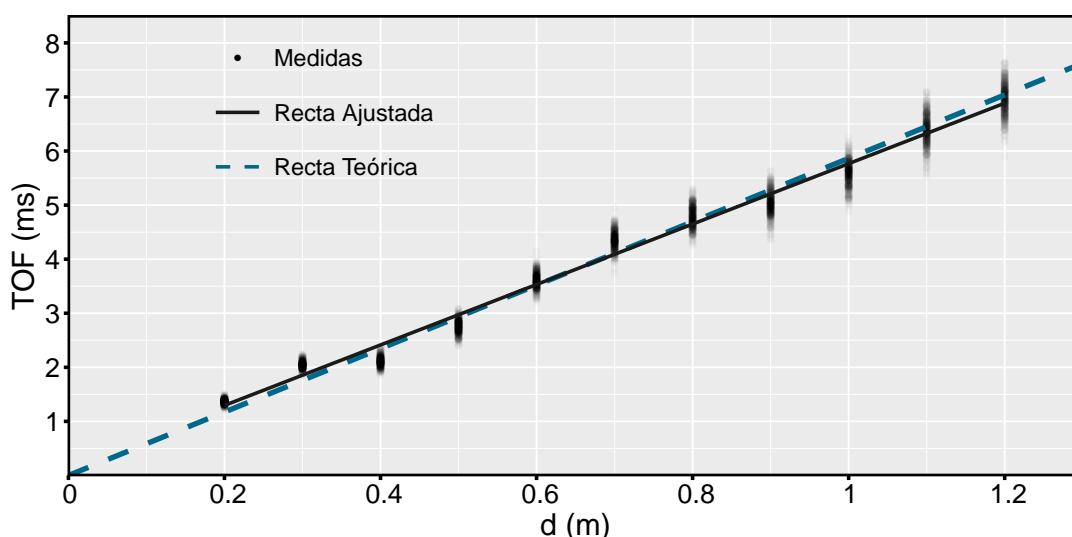


Figura 2: Se grafican los Tiempos de Vuelo (TOF, en ms) en función de la distancia medida con la cinta métrica (d , en m). Si bien las dispersiones en los datos son grandes, el ajuste de los datos entrega valores de parámetros bastante similares (ver texto para detalles).

En la Fig.(2) se muestran los Tiempos de vuelo (TOF, en ms) graficados contra la distancia d (m) de la experiencia anterior (a estos datos les agregamos más dispersión, a fines gráficos); el ajuste lineal de los datos entrega una pendiente $(6.040 \pm 0.01191) \times 10^{-3} s/m$, lo que permite calcular una velocidad del sonido $c_{ajuste} \pm \sigma_c = (331.15 \pm 0.65)m/s$; comparada con la velocidad teórica, $c \sim 343.4m/s$, el valor del ajuste está a unos 19σ de distancia... Las diferencias podrían deberse a los errores sistemáticos del sensor, falta de criterio para elegir el rango de distancias, falta de calibración de el reloj de la Arduino...un mundo de posibilidades.

2.2. Recta de calibración

A pesar de que la velocidad del sonido ajustada está *lejos* (en σ 's) de la teórica, la recta ajustada **continúa** siendo una función que nos vincula Tiempos de Vuelo, TOF , con medidas de distancia independientes d . Esto hace que, si escribimos la recta ajustada como:



$$f(d) = a + bd = TOF \quad (2.1)$$

podamos *invertirla* para obtener medidas de d a partir de los TOF.

La inversión de la función de la ec.(2.1) es bastante simple:

$$g(TOF) = \frac{TOF - a}{b} = d \quad (2.2)$$

donde la función $g(TOF)$ es la *función inversa* de $f(d)$, es decir:

$$f(d) = TOF \Rightarrow g(f(d)) = g(TOF) \Rightarrow d = g(TOF) \quad (2.3)$$

la última cuenta parece *tonta*, pero $g(TOF)$ no es otra cosa que *una función que nos convierte tiempos de vuelo* (una medida del sensor) en *distancias* (una medida con un patrón). Entonces, vamos a identificar a $g(TOF)$ con nuestra función de calibración.

Sería bueno asumir que, a pesar de que el ajuste no entrega *perfectamente* la velocidad del sonido, la función inversa o de calibración sigue conteniendo información sobre el comportamiento del sensor en las condiciones dadas. De nada sirve pretender que la velocidad del sonido está dada por la ec.(0.1), si a partir de los datos del sensor estimamos *otra* velocidad. En la calibración, recordamos, lo importante es tener una forma de estimar un *patrón de calibración*, no corroborar la velocidad del sonido.

Por otra parte, es *más que esperable* que los parámetros de calibración varíen con la temperatura del aire...aunque eso lo dejamos para otra vuelta.

2.2.1. Tareas: Función de calibración

Función de calibración

- Escriba explícitamente la función de calibración e identifique parámetros relacionados con la velocidad del sonido. Anote la temperatura en la que fue realizada la experiencia.
- Realice un ajuste de los datos al *vesre*⁵. Grafique la recta obtenida en el ajuste (ojo con cómo se grafica). Obtenga la velocidad del sonido a partir de los parámetros de este ajuste. ¿Es igual a la obtenida para el primer ajuste?

los ajustes tienen ciertos detalles...en este caso, es importante notar que los algoritmos que utilizamos para hacer un ajuste lineal, en general sólo tienen en cuenta las dispersiones en la coordenada vertical. Es por esto que elegimos el modo *contranatura* de ajustar una función, obteniendo $f(d) = TOF$ y luego invirtiéndola para obtener $g(TOF) = d$, en lugar de ajustar directamente una $g(TOF) = d$: nuestros valores de TOF son los que poseen dispersión y deben ser calibrados, y el algoritmo que usamos –que es el que van a usar *per seculum seculorum*– no tiene posibilidades de ver una variable aleatoria en el eje horizontal, sino sólo en el vertical.

Mirando una distribución de estimaciones

- Utilizando los valores de TOF obtenidos para la distancia de la cinta métrica $d_3 = 0.4\text{ m}$, y la recta de calibración $g(TOF)$, calcule cuatrocientas estimaciones de distancia.

⁵Al revés: obtenga los parámetros de correlación lineal $d = a + b TOF$.



- d) Haga un histograma de las estimaciones de distancias, calcule y grafique la media y la desviación estándar muestrales. Ajuste una función densidad de probabilidad para las estimaciones de distancia usando un *Kernel Density Estimate*. Grafique la distancia medida con cinta métrica.

Evaluando la *discrepancia* entre los valores estimados y el medido con el patrón

- e) Utilizando las cuatrocientas estimaciones de distancia anteriores, evalúe la cantidad

$$\Delta = g(TOF_i) - d_3$$

A esta cantidad la llamamos *discrepancia* y es la diferencia entre *lo estimado* y *lo medido* según el patrón.

- f) Calcule la media y la desviación estándar muestrales de Δ ¿Cuánto *deberían valer* estos estimadores, en el caso en que la estimación fuera *infinitamente precisa e absolutamente exacta*? Informe la exactitud en términos de la media, y la precisión en términos de la desviación estándar muestrales y el error relativo o coeficiente de variación.
- g) Evalúe el *error estándar de la media, SEM*, de la distribución de Δ . ¿A cuántos *SEM* de distancia se encuentra $\Delta = 0$?
- h) Observando el gráfico de *TOF vs. d* y el ajuste lineal, evalúe *cualitativamente* qué acontecerá con el resto de las estimaciones de distancia calculadas a partir de los valores de *TOF* en cuanto a exactitud y precisión.

El problema es que *nos encantaría* que, a pesar del ruido estadístico, sea posible obtener estimaciones *sin sesgo*, es decir, que para una dada d_i la colección de $g(TOF)$ tenga una media μ , cuyos intervalos de estimación contengan con buena probabilidad a d_i ...pero bueno, los resultados son los resultados.

2.3. Incertezas en la calibración

2.3.1. Evaluando el problema

Como vimos en la sección anterior, si bien los valores de *TOF* y *d* muestran una clara correlación lineal respecto del patrón *d* en todo el rango de *d*, en general tendremos una colección de valores de *TOF* que no pueden ser traducidos perfectamente por la función de calibración sin presentar problemas de exactitud: algunos de los valores $g(TOF)$ son *mayores*, mientras que otros son *menores* y, de peor manera, las medias no ayudan: también *sesgan* para arriba o para abajo los valores de distancia medidos con la cinta métrica. Es necesario entonces, entender, que:

Las distancias estimadas, obviamente, tendrán una incerteza estadística, pero también tendrán sesgos de exactitud.

Para enfrentar este problema, diremos que la idea de ajuste lineal conlleva un modelo en el cual la media de una cantidad aleatoria (*TOF* en este caso), cambia *su media* linealmente según se mueve una variable (*d* en este caso). El chiste es que, como siempre, los instrumentos no son perfectos, y –si bien cambian los *TOF's* en el rango de 1 m que utilizamos, no cambia *a la perfección*, sino que lo hace con sesgos.

En la Fig.(3) se observan las medidas de *TOF vs.* las distancias *d* (puntos), junto con las medias muestrales de cada distribución (cruces rojas) y la línea de ajuste. Es importante notar que, dado que los *TOF* se distribuyen *arriba o abajo* de la función de ajuste según qué d_i estemos mirando, y que la función de ajuste es la *forma* de encontrar la función que *traduzca* valores de *TOF* en distancia, entonces lo único que nos queda es mirar *todas las discrepancias en todo el rango* entre los valores de *TOF* y la función de ajuste.

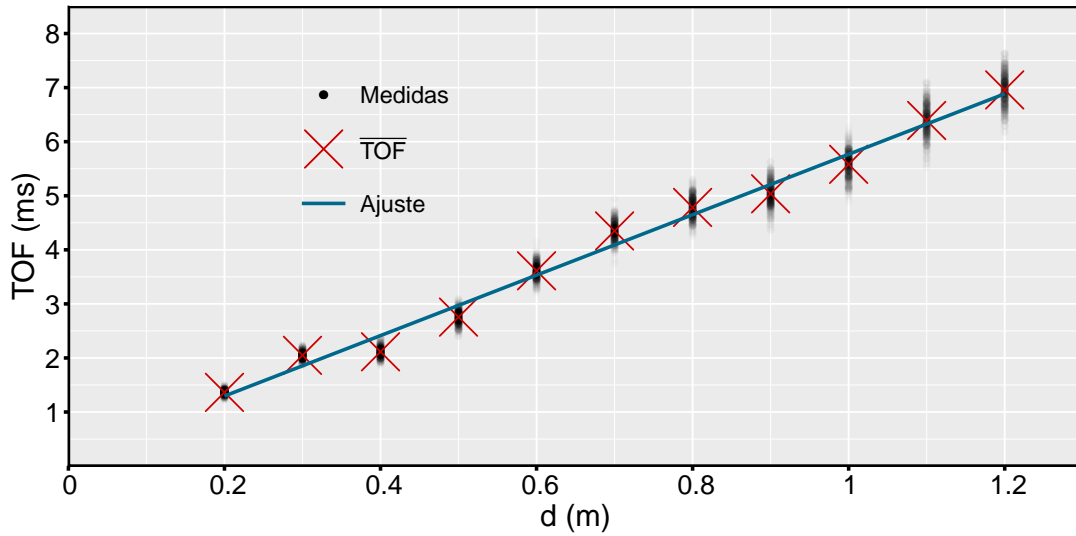


Figura 3: Se grafican los Tiempos de Vuelo (TOF, en ms), junto con la media muestral de cada colección de TOF, en función de la distancia medida con la cinta métrica (d , en m). El ajuste describe bien los puntos, pero las medias muestrales no caen *sobre* el ajuste.

2.3.2. Evaluando residuos para obtener intervalos de confianza

En el vocabulario de ajustes lineales, esta idea de mirar *todas* las discrepancias entre *la función de ajuste y los valores ajustados* se conoce como *análisis de residuos*, siendo los residuos *la variación en TOF* que no es explicada por la variación en d . Para obtener los residuos r , hacemos:

$$r = TOF - (a + b d) \quad (2.4)$$

donde a, b son los parámetros de ajuste y TOF, d son los tiempos de vuelo y la distancia medida con cinta métrica. Notamos que los residuos r están en unidades de TOF .

Los residuos del ajuste, como ya dijimos, tienen información sobre la variación de TOF que *no es explicada por el ajuste*, y nos sirven para analizar cuáles son las desviaciones de los TOF , en todo el rango ajustado, por encima o por debajo de la función de ajuste: desde la dispersión de datos (precisión), hasta los sesgos en las medias (exactitud). Es analizando estos residuos que podremos encontrar intervalos de confianza para los tiempos de vuelo en *todo el rango* de las distancias d .

Una gráfica de los residuos r [ms] respecto de la distancia d puede observarse en la Fig.(4); también se agrega un histograma de los residuos (en el eje vertical) y un ajuste de *Kernel Density Estimate* de los residuos, mostrando que los residuos tienen una distribución que remeda una distribución normal.

La media muestral de los residuos es ~ 0 (lo cual es consecuencia del algoritmo de ajuste: la media es su deleite). La desviación estándar de la muestra de residuos es de $s = 0.258 ms$. Estos dos valores nos informan que:

- La función de ajuste *parte a todos los datos de TOF por su media* (así es el algoritmo de ajuste lineal, lo que corrobora la elección de la función de ajuste como la mejor función disponible para describir el vínculo entra TOF y d).
- Dada la función de ajuste, la desviación estándar de los residuos, $s \sim 0.258 ms$ nos informa las variaciones de los tiempos de vuelo en todo el rango de las distancias d . Además, gracias a que



es una distribución *muy similar a una normal*, también conocemos los intervalos de confianza sin problemas.

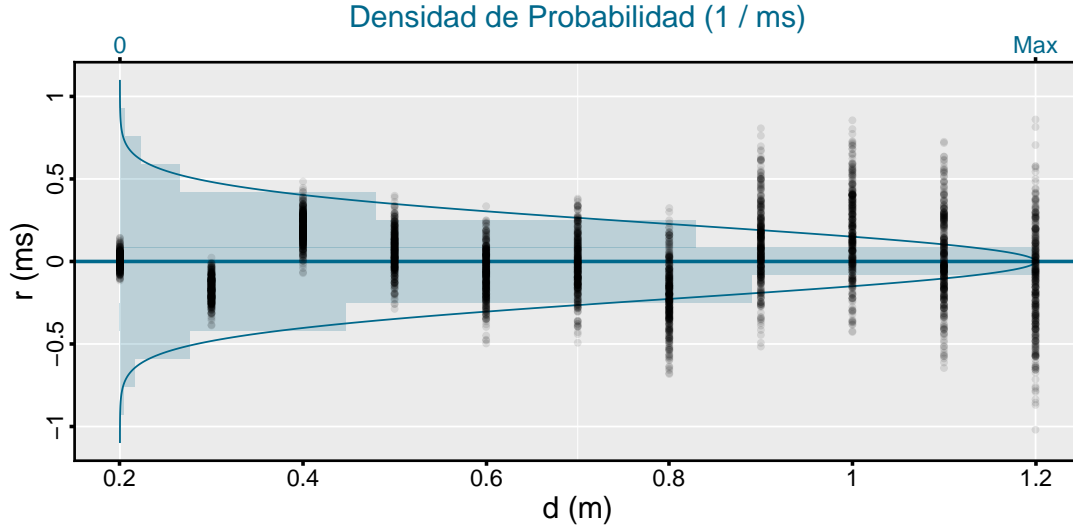


Figura 4: Residuos del ajuste de cada una de las medidas.

Todo este rodeo no nos permite otra cosa que saber que:

- Los intervalos de confianza en la medición de TOF .
- La propagación de estos intervalos de confianza hacia la función de calibración (la inversa de la función de ajuste).
- La incerteza propagada mezclará incertezas estadísticas con errores sistemáticos, pero lo hará con intervalos de confianza conocidos.

Si pensamos en estimar una distancia haciendo medias muestrales de muchas mediciones, la cosa sigue funcionando, aunque con ciertas precauciones. En la Fig.(5) se observan los residuos de las medias *vs.* la distancia d , obtenidos de la misma manera que con las medidas individuales. La media de estos residuos también es ~ 0 , lo que vuelve a poner en evidencia el tipo de algoritmo de ajuste que utilizamos. La desviación estándar de los residuos de las medias es $s \sim 0.18\text{ ms}$, aunque –como puede verse con la estimación de densidad–, 11 puntos es *demasiado poco*, tanto como para determinar una densidad como para determinar una desviación estándar (χ^2 ...si a alguien le suena), con lo que no podremos sacar intervalos de confianza *fiabes*. Sin embargo, notamos que el *rango de los residuos* puede servirnos: las medias se desplazan del ajuste en $\sim 0.259\text{ ms}$. El rango puede servirnos como un intervalo de confianza con un nivel de confianza $\sim 100\%$, con lo que usaremos este valor en nuestra propagación.

2.3.3. Propagación de los intervalos de confianza en los tiempos de vuelo

Teniendo los residuos, podemos estimar *las incertezas de traducción*, propagando el intervalo en $f(d)$ que contiene a los residuos de TOF 's a la función de calibración, $g(TOF) = d$. Si vemos la ec.(2.2), tenemos que $g(TOF) = d(TOF) = (TOF - a)/b$. Utilizando la propagación de errores habitual, y el hecho de que $TOF \sim N(\mu = 0, \sigma = 0.25\text{ ms})$, tenemos que:

$$\sigma_{d(TOF)} = \left| \frac{\partial d}{\partial TOF} \right| \sigma_{TOF} = \frac{1}{b} \sigma_{TOF} = 0.04139396\text{ m} \approx 4\text{ cm} \quad (2.5)$$

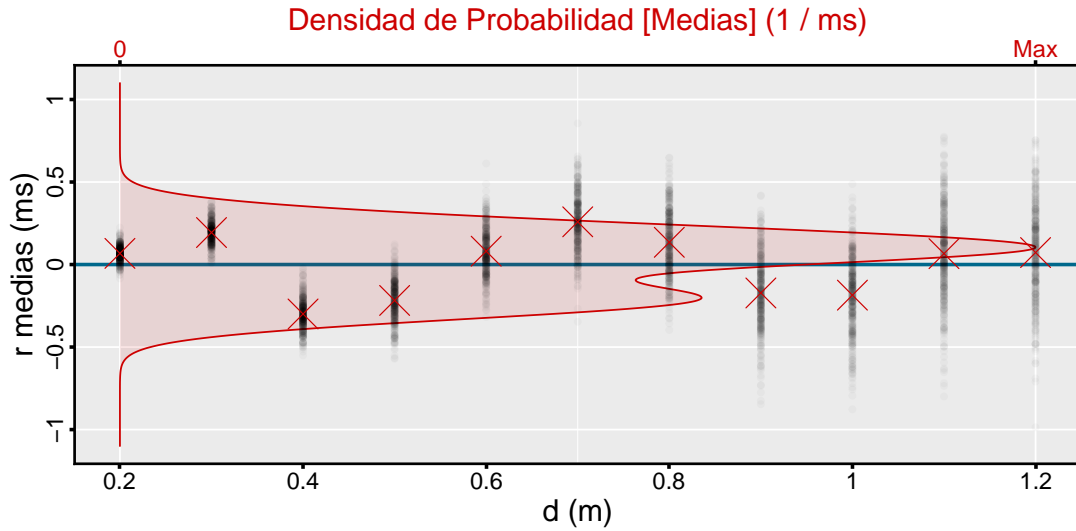


Figura 5: Residuos del ajuste de cada una de las *medias*.

donde remarcamos que la ec. anterior nos da la incerteza para todo el rango de calibración utilizado si pensamos en medir con una sola medida. Además, es importante tener en cuenta que es una mediana que *mezcla* deliberadamente incertezas de precisión y de exactitud. Como las incertezas están medidas con σ de una distribución normal, tenemos los conocidos intervalos de confianza.

Si queremos estimar la incerteza al medir con \overline{TOF} , en este caso estamos un poco menos equipados estadísticamente. Si bien podríamos ajustar una distribución normal a las 11 medias de las que disponemos, el ajuste resultaría *poco fiable*. Podemos utilizar el rango de los residuos de \overline{TOF} e hipotetizar sobre un intervalo de confianza cercano a 100 %, como hacemos a continuación:

$$\delta d(\overline{TOF}) = \frac{1}{b} \delta \overline{TOF} = 0.048 \text{ m} \sim 5 \text{ cm} \quad (2.6)$$

donde, en la ec.(2.6), utilizamos el residuo de mayor valor absoluto y lo identificamos con $\delta \overline{TOF}$. No sorprende que las incertezas sean similares: no lo son los intervalos de confianza.

Es engorroso, pero en caso de necesitarse, siempre vienen bien las calibraciones hechas con criterio.

2.3.4. Tareas: Incertezas en la calibración

Cálculo de intervalos de confianza • Calcule los intervalos de confianza en la estimación de d , para el caso en que estimamos distancia utilizando medidas individuales como para el caso en el que utilizamos las medias muestrales de $n = 400$ medidas de TOF para cada d_i .

Medida al azar

- Coloque el sensor a una distancia *desconocida y no utilizada para la calibración* de la pared. Realice 400 medidas de TOF . Estime la distancia utilizando el TOF de mayor valor, el de menor valor y la media de los 400 TOF . Obtenga las incertezas según la calibración realizada anteriormente. Compare resultados e intervalos de confianza obtenidos respecto de una medida realizada con la cinta métrica.



3. Recalculando la velocidad del sonido

Una de las cosas más tediosas es ver la cantidad de álgebra, cálculo y conceptos teóricos que tienen los modelos de probabilidad por detrás. En el caso de los ajustes lineales, una de las premisas difíciles de cumplir, es que las medidas deben poseer *ruido normal* (es lo que asumimos si usamos el algoritmo), lo que quiere decir que los residuos deberían tener una varianza constante.

En el caso de nuestros datos de calibración, es raro que cada una de las distribuciones de *TOF* para cada d_i puedan salir de distribuciones normales, y más raro es que las distribuciones de *TOF* para cada una de las d_i tengan la misma varianza en los residuos (algo que se ve a simple vista en la Fig. (4), donde las dispersiones aumentan a medida que las distancias se agrandan). Esto puede producir sesgos en la estimación de parámetros, algunos de los cuales pueden variar de manera sensible nuestros resultados.

Si bien las medidas *individuales* no salen de distribuciones normales, el TLC nos libra del problema, diciendo que la *media muestral* tiene una distribución normal, con media y varianza definidas. Esto nos agrega dos elementos importantes a la hora de hacer un ajuste:

- Sabemos que la media muestral vive en una distribución normal.
- Sabemos que esta distribución normal tiene $\sigma^2 \simeq s/\sqrt{n}$

con lo anterior, tenemos los datos que necesitamos para hacer un ajuste *pesado* con la inversa de la varianza para cada dato.

- Calcule una media \overline{TOF}_i por cada d_i .
- Calcule el SEM (σ) de cada \overline{TOF}_i
- Realice un ajuste de los datos, pesando cada \overline{TOF}_i con la inversa de la varianza, $1/\sigma^2$. Calcule la velocidad del sonido, propague incertezas y compare con el resultado de utilizar las medidas particulares.

Software 3.1: Ajuste Pesado

Tenemos datos $\{x_i, y_i\}$, donde cada y_i tiene una varianza σ_i^2 , y pertenece a una distribución normal. Los datos están almacenados en los vectores `x`, `y`, `sigma`. Una manera de incorporar esta información al ajuste lineal es:

```
lm(y ~ x, weights = 1/sigma^2)
```