1. Las manos en la masa (compu)

1.1. ¿Qué es esto?

Esto que estamos viendo es un *notebook* de Mathematica. Hasta ayer no lo sabía usar (quiero mucho al software privativo). Ahora un poco menos.

Puede:

- Escribir texto como ahora estoy haciendo.
- Incluir y ejecutar código de Mathematica.
- Incluir imágenes y algunas otras cosas.

1.2. ¿Qué es *Mathematica*?

Mathematica es un software basado en un lenguaje, llamado Wolfram Language. Si ustedes ya programan en algún lenguaje (cosa que siempre es recomendable), van a notar algunas diferencias importantes al usar este lenguaje :

- Este lenguaje es de muy alto nivel y con una fuertísima orientación a objetos (no agarren sus pertenencias, el código no les va a robar nada).
- Está fuertemente orientado a mate simbólica, aunque es muy versátil en cálculo numérico.
- Generalmente, sabe mucho más mate que nos, así es que usándolo se aprenden cosas, y es bueno tener cancha para saber qué puede funcionar mal, como en cualquier lenguaje.

1.3. ¿Cómo funciona este notebook?

Este notebook funciona por **celdas**, es decir, por bloques que pueden ser texto, código u otras cosas. Arriba a la izquierda se puede ver qué ***tipo de celda*** estamos usando (si hacen click sobre este texto debería decir **Text**).

A continuación voy a agregar una celda de ***Input***, que no es otra cosa que código.

In[•]:=
```
Print["Hello, my exQuarantined World"]
Print[Style["Hola Mundo en exCuarentena",18,Blue]]
```

```
Hello, my exQuarantined World
```

Hola Mundo en exCuarentena

Bastante chotos los print, pero bueno: una celda de input se ejecuta con “**Shift + ENTER**” y el programa agrega **In[número de línea]** y abajo la salida **Out[número de línea de *In* +*1*].**

Si nunca programaron, imprimir Hola Mundo, Hello World, etc, es una forma de hacer arrancar un código por primera vez. Ahora vamos a ver algunas cosas más propias de la mate que vamos a usar.

2. ¿Qué tiene que ver *Mathematica* con la Matemática?

2.1 Definiendo un vector

Vamos a escribir un vector en V^3 que se llame "a", y que tenga componentes $< a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3 >$. Luego lo multiplicamos por el escalar 2.

In[•]:=
```
(*Esta es una manera de comentar en Mathematica*)
a = {1, 2, 3};  (*si ponen punto y coma al final de una línea, no se imprime la salida*)
MatrixForm[a] (*MatrixForm imprime como una matriz*)
MatrixForm[a*2]
MatrixForm[2a] (*Las ultimas dos lineas son lo mismo*)
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.2 Definiendo una matriz

In[•]:=
```
M = {{2,0,0},{0,2,0},{0,0,2}} (*se define como tres vectores fila entre {}*)
MatrixForm[M]
MatrixForm[Dot[M,a]] (*Dot[M,a] es el producto entre la matriz o tensor M y el vector a qu
```

Out[•]= {{2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 2}}

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.3 Definiendo con símbolos

Esta puede ser una de las características más llamativas de Mathematica, y si les gusta hacer cosas teóricas les puede resultar muy útil. Recuerden, pese a lo que estamos viendo, Mathematica sabe *mucha* matemática: esto y el software libre SAGE, son lo que habitualmente se utiliza para hacer teoría (yo se que en sus cabezas es un pizarrón lleno de fórmulas, pero no, ahora los matemáticos vienen más compactos)

In[∘]:=
```
(*Defino un vector con símbolos*)
u = {c1,c2,c3}
(*Lo normalizamos, es decir, queremos un vector unitario en la misma dirección*)
MatrixForm[Norm[u]](*Norm[] calcula el módulo*)
MatrixForm[unorm = u / Norm[u]](*Dividimos por el módulo y alta normalización por 15P*)
```

Out[∘]= $\{c_1, c_2, c_3\}$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\sqrt{\text{Abs}[c_1]^2 + \text{Abs}[c_2]^2 + \text{Abs}[c_3]^2}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{\text{Abs}[c_1]^2+\text{Abs}[c_2]^2+\text{Abs}[c_3]^2}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{\text{Abs}[c_1]^2+\text{Abs}[c_2]^2+\text{Abs}[c_3]^2}} \\ \frac{c_3}{\sqrt{\text{Abs}[c_1]^2+\text{Abs}[c_2]^2+\text{Abs}[c_3]^2}} \end{pmatrix}$$

Lo que muestra que puede operar con símbolos sin problemas...

2.3 Definiendo matrices con símbolos y sacando autovalores y autovectores

Primero una *fácil, muy fácil*

In[∘]:=
```
M = {{λ1,0,0},{0,λ2,0},{0,0,λ3}};
MatrixForm[M](*Si alguien no sabe eigenvalores y eigenvectores de esta matriz...*)
{vals,vecs} = Eigensystem[M];
Print[Style[Eigenvalores,12,Red]]
vals
Print[Style[Eigenvectores,12,Red]]
Print["v1 = ", MatrixForm[vecs[[1]]],"    ;    v2 = ", MatrixForm[vecs[[2]]], "    ;    v3 = "
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Eigenvalores

Out[∘]= $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

Eigenvectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Un ejemplo (complicado) para repaso

Ejercicio N^o 2. Considere el tensor de rotación **R** que representa ur
α en torno a un dado eje con orientación **m**. La acción de **R** en la ba

$$\mathbf{Re_1} = \mathbf{e_2}, \qquad \mathbf{Re_2} = \mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{Re_3} = \mathbf{e_1}$$

a)Determine la matriz que representa el tensor, especificando la ba
sentado.

b) Determine la dirección del vector unitario **m**.

(a) Para hacer este punto recordamos que la componente R_{ij} de un tensor R es $R_{ij} = \boldsymbol{e_i} \cdot \mathbf{Re}_{\boldsymbol{j}}$ (esto mejor saberlo sí o sí)

Con lo anterior las componentes (que voy a escribir a mano) quedan:

$R_{11} = e_1 \cdot \mathrm{Re}_1 = e_1 \cdot e_2 = 0$; $R_{12} = e_1 \cdot \mathrm{Re}_2 = e_1 \cdot e_3 = 0$; $R_{13} = e_1 \cdot \mathrm{Re}_3 = e_1 \cdot e_1 = 1$;

$\mathrm{R}_{21} = \mathrm{e}_2 \cdot \mathrm{Re}_1 = \mathrm{e}_2 \cdot \mathrm{e}_1 = 1$; $R_{22} = e_2 \cdot \mathrm{Re}_2 = e_2 \cdot e_3 = 0$; $\mathrm{R}_{23} = \mathrm{e}_2 \cdot \mathrm{Re}_3 = \mathrm{e}_2 \cdot \mathrm{e}_1 = 0$;

$R_{31} = e_3 \cdot \mathrm{Re}_1 = e_3 \cdot e_2 = 0$; $R_{32} = e_3 \cdot \mathrm{Re}_2 = e_3 \cdot e_3 = 1$; $R_{33} = e_3 \cdot \mathrm{Re}_3 = e_3 \cdot e_1 = 0$;

In[ ]:=
```
R = {{0,0,1},{1,0,0},{0,1,0}};
MatrixForm[R](*Para controlar es mejor imprimir así*)
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La idea básica: un tensor o matriz de rotación tiene una dirección (m en este caso) que no rota ***ergo*** *el eigenvector real de la matriz* **es** *la dirección de rotación....(real lo qué??)*

In[•]:=
```
{vals,vecs} = Eigensystem[R];
Print["Eigenvalores"]
vals
Print["Eigenvectores"]
vecs

Print[Style[" m = " MatrixForm[m], Blue, Bold]]
MatrixForm[vecs[[1]] = m = vecs[[1]]/Norm[vecs[[1]]  ]]

vecs[[2]] = vecs[[2]]/Norm[vecs[[2]]]
vecs[[3]] = vecs[[3]]/Norm[vecs[[3]]]
```

Eigenvalores

Out[•]= $\left\{1, \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right\}$

Eigenvectores

Out[•]= $\left\{\{1,1,1\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right), 1\right\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right), 1\right\}\right\}$

m = $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Out[•]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Out[•]= $\left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Out[•]= $\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

2.5 Parte simétrica y antisimétrica de R

c) Determine el valor de α, sabiendo que el vector dual asociado a la parte antisimétrica de $\mathbf{R}$ está dado por $\mathbf{t}^A = sin(\alpha)\mathbf{m}$, y que $Tr(\mathbf{R}) = 1 + 2cos(\alpha)$. Grafique (a mano o con *Mathematica*) la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, el vector $\mathbf{m}$, un vector cualquiera $\mathbf{a}$ y su rotación dada por $\mathbf{Ra}$.

Este era el punto (c), de un parcial viejo. Es un ejercicio un poco loco...que enseña algo de mate.
Lo que quiero rescatar es que el *dual de Hodge o vector dual está en la parte antisimétrica de R,* por lo que la parte antisimétrica de R también debería tener el mismo autovector real {1,1,1}...

In[•]:=
```
Rsim = 1/2*(R + Transpose[R]); MatrixForm[Rsim]
Rantisim = 1/2*(R - Transpose[R]); MatrixForm[Rantisim]
MatrixForm[Rsim + Rantisim](*Sólo para no desesperar y ver que está todo bien ameo'*)
Print[Style["La definición de vector Dual del Lai",18,Red]]
ta = {Rantisim[[3,2]],Rantisim[[1,3]], Rantisim[[2,1]]}; (*Este es el que está en el brol
Print[Style["t^A = " MatrixForm[ta],18,Red]]
{vals,vecs} = Eigensystem[Rantisim];
vecs[[1]] = vecs[[1]]/Norm[vecs[[1]]];
vecs[[2]] = vecs[[2]]/Norm[vecs[[2]]];
vecs[[3]] = vecs[[3]]/Norm[vecs[[3]]];
Print[Style["El autovector de R^A paralelo a ta es m = " MatrixForm[vecs[[3]]],18,Blue]]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La definición de vector Dual del Lai

$$t^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El autovector de R^A paralelo a ta es m = $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

In[•]:=
```
α1 = ArcCos[1/2*(Tr[R]-1)]*180/π(*Traza del Tensor*)
```

Out[•]= 120

In[•]:=
```
α2 = 180 - ArcSin[Norm[ta]]*180/π
```

Out[•]= 120

2.6 Problemas de "*exceso de formalidad*"

El último punto que vamos a charlar en cuanto a Mathematica, refiere a que el código sabe más que nosotros. Y eso nos puede complicar a la hora de calcular autovalores y autovectores:

- A veces las expresiones de los autovalores o autovectores son imposibles de entender $\Longrightarrow$
- Es necesario obtener expresiones aproximadas.

Hacemos un ejemplo con el comando N[valor, cifras significativas], para ver cómo puede complicarse la mano.

In[∘]:=
```
MatrixForm[M = {{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]
{vals,vecs} = Eigensystem[M];
vals
vecs
(*Hay un exceso de piedad de este lenguaje*)
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Out[∘]= $\left\{\frac{3}{2}\left(5+\sqrt{33}\right),\ -\frac{3}{2}\left(-5+\sqrt{33}\right),\ 0\right\}$

Out[∘]= $\left\{\left\{-\frac{-15-\sqrt{33}}{33+7\sqrt{33}},\ \frac{4\left(6+\sqrt{33}\right)}{33+7\sqrt{33}},\ 1\right\},\ \left\{-\frac{15-\sqrt{33}}{-33+7\sqrt{33}},\ \frac{4\left(-6+\sqrt{33}\right)}{-33+7\sqrt{33}},\ 1\right\},\ \{1,\ -2,\ 1\}\right\}$

Intentamos deshacernos de tantos símbolos raros con un comando que aproxima nuestros eigenvalores y vectores:

In[∘]:=
```
MatrixForm[M = {{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]
{vals,vecs} = Eigensystem[N[M,2]];
vals
vecs
(*Nos escupe todo con 2 cifras decimales...gracia' a Dió'*)
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Out[∘]= $\{16.,\ -1.1,\ 3.2\times 10^{-7}\}$

Out[∘]= $\{\{-0.24,\ -0.53,\ -0.82\},\ \{0.79,\ 0.087,\ -0.61\},\ \{-0.41,\ 0.82,\ -0.41\}\}$

Bien, con esto concluye nuestro *training...espero que se hayan divertido.*

Ahora cinco de descanso y vamos a ver un par de ejercicios del TP N°3

3. Dos ejercicios del TP N°3

3.1 Ejercicio 3

Ejercicio N^o 3. Considere el movimiento dado por:

$$x = X + X_1\, k\, e_1 \tag{1}$$

Notamos que el tiempo desapareció en la ecuación anterior. Podemos considerar que: a) el tiempo no existe. b) el continuo se deforma desde una configuración incial, llegando a un estado de equilibrio descrito por la ec. (1)....*elija su propia aventura*...

Sean $dX^{(1)} = (dS_1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$ y $dX^{(2)} = (dS_2/\sqrt{2})(-e_1 + e_2)$ elementos materiales diferenciales en la configuración no deformada.

a) Encuentre los elementos deformados según la ec. (1), $dx^{(1)}$ y $dx^{(2)}$.

b) Evalúe las razones entre las longitudes $(ds^{(1)} - dS^{(1)})/dS^{(1)}$ y $(ds^{(2)} - dS^{(2)})/dS^{(2)}$ ¿cómo son las razones?

c) Evalué el ángulo θ, entre los elementos no deformados ($dX^{(1)}$ y $dX^{(2)}$) y deformados ($dx^{(1)}$ y $dx^{(2)}$) del punto (b). ¿Cómo es el ángulo? Haga un esquema mostrando lo que acontece en las dos situaciones.

d) Mediante gráficas, compare los resultados de (b) y (c) con los obtenidos mediante el *tensor de deformación infinitesimal* E para $0 < k < 1$.

(a) Para encontrar los elementos deformados tenemos que tener:

- u(X,t) = x(X,t) - X, esto es el campo de deformación
- El gradiente de u(X,t), esto es ∇u
- Con esto armamos la ec. dx = dX + (∇u) dX, que nos da los elementos deformados

Viendo la ec.(1) del ejercicio:

$$u = X_1 k\, e_1 \Longrightarrow \nabla u = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

voy a intentar mantener la notación en el código, pero no siempre es posible...

In[∘]:=
```
Print[" ∇u = ",MatrixForm[gradu = {{k,0,0},{0,0,0},{0,0,0}}]]
Print["dX1 = ", MatrixForm[dX1 = (dS1/2^(1/2))*{1,1,0}], "     ⟹     dx1 = dX1 + ∇u dX1 = 

Print["dX2 = ", MatrixForm[dX2 = (dS2/2^(1/2))*{-1,1,0}],"     ⟹     dx2 = ", MatrixForm[(
```

$$\nabla u = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dX1 = \begin{pmatrix} \frac{dS1}{\sqrt{2}} \\ \frac{dS1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad dx1 = dX1 + \nabla u \; dX1 = \begin{pmatrix} \frac{dS1\,(1+k)}{\sqrt{2}} \\ \frac{dS1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dX2 = \begin{pmatrix} -\frac{dS2}{\sqrt{2}} \\ \frac{dS2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad dx2 = \begin{pmatrix} -\frac{dS2\,(1+k)}{\sqrt{2}} \\ \frac{dS2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos los elementos deformados... que son un poquito más *largos* en la dirección e_1 y se mantienen iguales en la dirección e_2.

(b) las elongaciones unitarias son: (ds-dS)/dS

In[∘]:=
```
elongacion1 = FullSimplify[(Norm[dx1] - Norm[dX1])/Norm[dX1]]
elongacion2 = FullSimplify[(Norm[dx2] - Norm[dX2])/Norm[dX2]]
```

Out[∘]= $-1 + \frac{\sqrt{1 + \mathrm{Abs}[1 + k]^2}}{\sqrt{2}}$

Out[∘]= $-1 + \frac{\sqrt{1 + \mathrm{Abs}[1 + k]^2}}{\sqrt{2}}$

(c) El ángulo θ es 90° en el caso no deformado...en el caso deformado tendremos que hacer un producto punto
entre dx1 y dx2:

In[∘]:=
```
Dot[dX1, dX2] (*sólo chequeando, da cero porque son ortogonales*)
ArcCos[FullSimplify[Dot[dx1,dx2]]] (*El arco coseno de un número negativo es mayor que 90
```

Out[∘]= 0

Out[∘]= $\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{1}{2}\, dS1\, dS2\, k\, (2 + k)\right]$

(d) El tensor de deformación infinitesimal Einf (le voy a decir acá) es la parte simétrica de ∇u...

In[•]:=
```
MatrixForm[Einf = 1/2*(gradu + Transpose[gradu])]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así es que va a dar todo igual!!! Y eso es porque....????

3.2. Ejercicio

Ejercicio N^o 6. Dado el tensor de deformación infinitesimal:

$$[E] = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

a) Encuentre las direcciones de mayor deformación de un elemento infinitesin

b) Pruebe que el tensor E de arriba no es el mismo que:

$$[E'] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

In[•]:=
```
MatrixForm[Einf = {{5,3,0},{3,4,-1},{0,-1,-2}}]
{vals, vecs} = Eigensystem[ N[Einf, 5]  ];

Print[ vals[[1]] ]
Print[ vals[[2]]]
Print[ vals[[3]]]

Print["Autovectores"]
Print[MatrixForm[ Normalize[vecs[[1]] ]] ]
Print[ MatrixForm[ Normalize[ vecs[[2]]] ] ]
Print[ MatrixForm[ Normalize[ vecs[[3]] ] ] ]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.5854

-2.2019

1.6165

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 0.75576 \\ 0.65131 \\ -0.067949 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.082171 \\ 0.19726 \\ 0.97690 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.64967 \\ 0.73272 \\ -0.20260 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=

```
MatrixForm[Ebase = {{vals[[1]], 0,0},{0,vals[[2]], 0},{0,0,vals[[3]]}}]
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 7.5854 & 0 & 0 \\ 0 & -2.2019 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6165 \end{pmatrix}$$