



Mecánica del Continuo
Consulta TP2
Cinemática de medios poco discretos (más bien continuos)

Ejercicio 1

Considerar el movimiento descripto por:

$$x_1 = kt + X_1; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3 \quad (1)$$

donde la coordenada material especifica la posición de la partícula a $t = 0$.

- Determine la velocidad y aceleración de la partícula en la descripción material. Obtenga la trayectoria de las partículas cuyas coordenadas materiales están dadas por $X_1 = 0m, X_2, X_3$
 - Determine los campos de velocidad y aceleración (descripción espacial). Grafique utilizando *Mathematica* para $t = 0s$ y para $t = 100s$.
 - Encuentre la razón temporal de cambio de la temperatura que experimenta una partícula, siendo que el campo de temperatura está especificado por $\Theta(x) = Ax_1$.
-

Solución

a) Para determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en la descripción material, es importante que miremos la ec. 3.4.2 del *Lai, Introduction to Continuum Mechanics (4ta Ed.)*. Ahí se lee que:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{X_i \text{ fixed}} \equiv \frac{D \mathbf{v}}{Dt} \quad (2)$$

Si aplicamos la ec. anterior a las ecs. (1), tenemos:

$$v_1 = k \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (3)$$

donde en las ecs. (3) tenemos que todas las partículas tienen una velocidad constante $v_a = k$.

Si aplicamos la ec. de la aceleración de una partícula, tenemos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (4)$$

en la ec. (4) tenemos que $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}(t)$, con lo que el primer término del lado derecho de la ec.(4) es $\partial \mathbf{v} / dt = 0$. El segundo término tiene el campo tensorial que es el *gradiente del campo de velocidades*. Como el campo de velocidades no tiene dependencia espacial alguna, ergo, $\nabla \mathbf{v} = 0$. El campo de aceleración es $\mathbf{a} = 0$.



Con respecto al conjunto de partículas (que es un conjunto infinito no denumerable) $(0, X_2, X_3)$, vemos que las velocidades están en la dirección \mathbf{e}_1 , a velocidad constante, con lo cual su aburrida trayectoria será estar en $(X_1 = 0, X_2, X_3)$ a $t = 0$, y en general tendremos (kt, X_2, X_3) .

Sobre las *pathlines* o trayectorias¹.

Si tomamos este ejemplo, tenemos que la única coordenada que se mueve es $x_1 = kt + X_1$. Es importante ver que todo lo que pasa es que las partículas viajan a derecha...y nada más. Las trayectorias son rectas...y anda más puede hacerse. Para obtener una trayectoria más complicada, es necesario, en general, intentar *deshacerse* del tiempo en las descripciones, intentando obtener $x_1(x_2, x_3)$ o alguna expresión similar. De lo contrario, tenemos la trayectoria *parametrizada con el tiempo*, y se puede ver una gráfica si obtenemos un conjunto de puntos $x\mathbf{x}(t)$ para $t = 0, \dots, t_n$.

b)

Los campos de velocidad y aceleración son bastante aburridos también en la descripción espacial. Como $\mathbf{v} = k\mathbf{e}_1' \forall \mathbf{X}$, entonces la descripción espacial tendrá la misma velocidad en cualquier punto del espacio \mathbf{x} (si nos paramos en \mathbf{x} vemos pasar todas las partículas con la misma velocidad, ergo, la aceleración en la descripción espacial también es $\mathbf{a} = \mathbf{0}$).

Los gráficos de esto van a ser bastante aburridos...como se puede ver luego del código en la Fig.(1)

```
StreamDensityPlot[{{1, 0}, -x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
ColorFunction -> "RedBlueTones", StreamStyle -> Black,
StreamPoints -> Medium, ImageSize -> Large,
PlotLabel -> "Campo de velocidades",
LabelStyle -> Directive[Bold, Orange]]
```

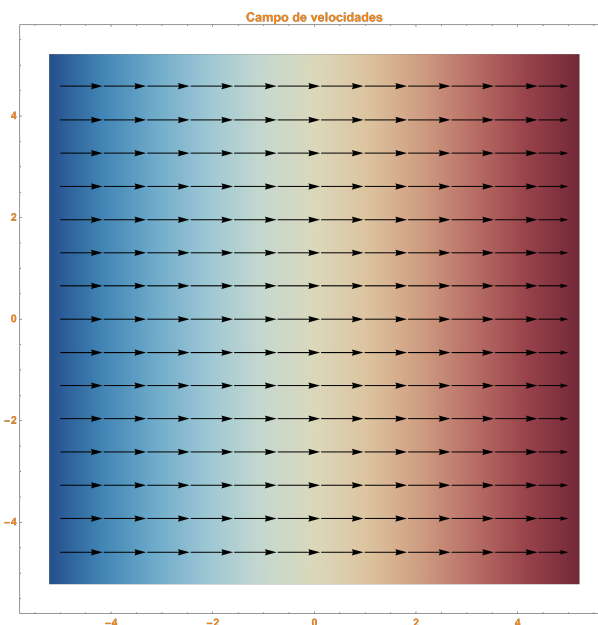


Figura 1: El aburrido campo de velocidades (en el eje horizontal está x_1 , en el vertical, es lo mismo, x_2 ó x_3). Los colores muestran el campo de temperatura.

c)

¹No se cómo, de esta cabeza salió *línea de camino* (la literalidad acecha)...la traducción correcta es trayectoria



El campo de temperatura aumenta con la coordenada espacial x_1 , con una funcionalidad simple $\Theta = Ax_1$. Tenemos entonces:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \overbrace{\frac{\partial\Theta}{\partial t}}^0 + \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = Ak \quad (5)$$

con lo cual podemos vislumbrar que, si el campo de temperatura tiene una tasa de aumento A respecto de la coordenada x_1 y las partículas viajan aumentando esa coordenada en el tiempo a una tasa (velocidad) k , entonces la temperatura de una partícula aumenta a una tasa Ak , lo cual no es desquiciado.

Ejercicio 5

Considere el continuo cuyo campo de velocidad viene dado por:

$$v_i = \frac{x_i}{1+t}$$

Encuentre la ecuación de movimiento y el campo² de aceleración en la descripción material.

Bueno, acá va prolijo. Recuerdo de notación: Minúsculas, escalares. Mayúsculas, tensores (salvo coordenadas materiales). Negritas, vectores. a) Ecuaciones de movimiento:

Como ya sabemos, las ecuaciones de movimiento son $x_i = f(\mathbf{X}, t)$

La velocidad está en la descripción espacial, es decir, $v_i(x_i, t)$. Concretamente:

$$v_i = \frac{x_i}{1+t} \quad (6)$$

ojo que la ec. anterior no tiene como definición la definición de velocidad. La función $v_i(x_i, t)$ describe el cambio de velocidades de las partículas *que pasan* por un punto fijo x_i en un marco de referencia, y no el cambio en la posición respecto del tiempo de **una** partícula.

Entonces, en la ec.(6) hacemos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{x_i}{1+t} \Rightarrow \int_{x_i=X_i}^{x_i} \frac{dx_i}{x_i} = \int_{t=0}^t \frac{dt}{1+t} \quad (7)$$

La solución a la ec.(7) queda:

$$\ln\left(\frac{x_i}{X_i}\right) = \ln(1+t) \Rightarrow x_i(X_i, t) = X_i (1+t) + g(X_{j \neq i}) \quad (8)$$

si miramos la ec.(8) se nota que agregamos una función no especificada $g(X_j)$, para tener en cuenta que estamos integrando una ec. a derivadas parciales. La función $g(X_{j \neq i})$ es una función arbitraria de las

²Esta palabra está mal aquí, cuando hablamos de campo en general pensamos en una representación espacial, y lo que pide a continuación es la descripción material...



coordenadas materiales...que no vamos a usar...pero que sería muy simple de calcular...¿cómo? Tarea para las casas.

El resultado que nos da para las ecs. de movimiento es entonces:

$$x_1(X_1, t) = X_1 (1 + t) \quad (9)$$

$$x_2(X_2, t) = X_2 (1 + t) \quad (10)$$

$$x_3(X_3, t) = X_3 (1 + t) \quad (11)$$

b) ...calcular la aceleración en la descripción material, es decir, la tasa de cambio temporal en las velocidades de cada partícula.

Esto es, de la ecs.(9, 10, 11) hacemos:

$$a_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

Lo que nos deja:

$$a_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Entonces, las partículas no experimentan aceleración a pesar de que la velocidad en un punto del campo cambia en el tiempo.

Consulta Ejercicio 6

Dado el campo de velocidad:

$$v_1 = -2x_2 \quad v_2 = 2x_1 \quad (14)$$

- a) Encuentre el campo de aceleración.
- b) Obtenga la expresión de la línea de camino ("pathline") del continuo.
- c) Grafique el campo de aceleración en la descripción espacial.

a) Encontrar el campo de aceleración es simple, ya que contamos con la ecuación del Lai, 4^{ta} ed. que dice:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (15)$$

Podemos calcular, usando las ecs.(14), las funciones que posee la expresión (15), con lo que el primer término queda:



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (16)$$

es decir, la velocidad en un punto (descripción espacial) no cambia con el tiempo. Sólo depende de las coordenadas espaciales.

El segundo término de la ec.(15) queda:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \partial v_1 / \partial x_1 & \partial v_1 / \partial x_2 & \partial v_1 / \partial x_3 \\ \partial v_2 / \partial x_1 & \partial v_2 / \partial x_2 & \partial v_2 / \partial x_3 \\ \partial v_3 / \partial x_1 & \partial v_3 / \partial x_2 & \partial v_3 / \partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \nabla \mathbf{v} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 & -4x_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

juntando lo anterior, tenemos que la aceleración en la descripción espacial (el *campo* de aceleración) es:

$$\mathbf{a}(x_1, x_2) = -4x_1 \mathbf{e}_1 - 4x_2 \mathbf{e}_2 \quad (18)$$

una cosa interesante del campo de velocidades y el de aceleración, dado por la ec.(18) es que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = (-2x_2 \mathbf{e}_1 + 2x_1 \mathbf{e}_2) \cdot (-4x_1 \mathbf{e}_1 - 4x_2 \mathbf{e}_2) = 0$$

lo anterior nos da una idea de movimiento circular, ¿no?, la aceleración perpendicular a la velocidad para cualquier tiempo y para cualquier coordenada...

b) Encontrar la trayectoria o *pathline*

Las trayectorias son, simplemente...las trayectorias³, y están definidas por la ecuación de movimiento $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Sin embargo, a veces es posible deshacerse del parámetro del tiempo, combinando las ecuaciones.

A veces simple, otras no tanto, en este caso:

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -2x_2 \quad (19)$$

$$v_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} = 2x_1 \quad (20)$$

derivando respecto del tiempo las ecs. anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -2 \frac{\partial x_2}{\partial t} = -4x_1 \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial x_1}{\partial t} = -4x_2 \quad (22)$$

$$(23)$$

³El conjunto de puntos x_1, x_2, x_3 que conforman las posiciones de una partícula para cierto intervalo de tiempo.



las ecs.(21 y 22) ya están separadas (no tienen términos cruzados), y pueden integrarse dos veces para dar:

$$x_1 = r \cos(2t) \quad (24)$$

$$x_2 = r \sin(2t) \quad (25)$$

$$(26)$$

donde $r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ es la constante de integración de las ecs(21 y 22). Nos saltamos algunos pasos, pero si derivamos dos veces las ecs.(24 y 25), se puede ver que obtenemos las velocidades y las aceleraciones que calculamos.

Dicho lo anterior, queda saber que las ecs.(24 y 25) nos dicen explícitamente que esto que teníamos entre manos es un movimiento circular...de hecho, podemos sacar el pathline y deshacernos del tiempo, usando la identidad trigonométrica fundamental:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \equiv \text{constante} \quad (27)$$

con todo este complicado proceso, tenemos el *pathline* o *trayectoria* de la partícula es un círculo cerrado.

c) Graficar el campo de aceleración es simple con Mathematica. No hay que perder de vista que un campo vectorial se grafica habitualmente con vectorcitos en una red definida de puntos. Lo podemos hacer con el comando:

```
StreamDensityPlot[{{-4 x, -4 y}, div[x, y]}, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\},
ColorFunction -> "RedBlueTones", StreamStyle -> Black,
StreamPoints -> Medium, ImageSize -> Large]
```

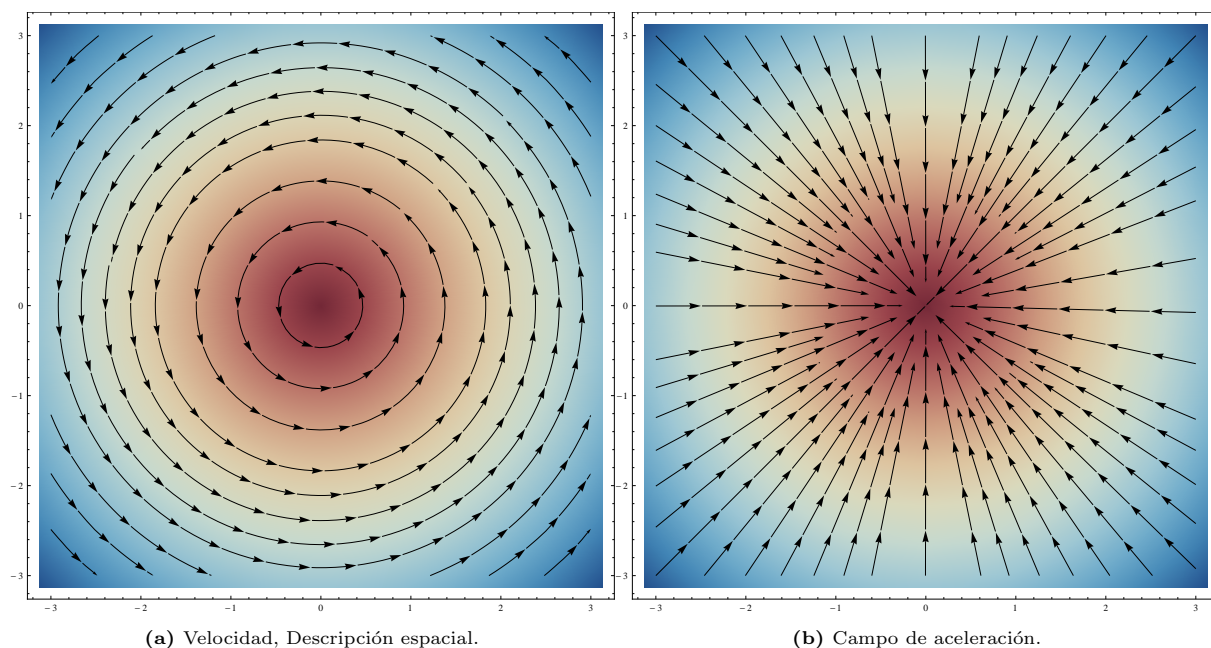


Figura 2: Los colores representan la divergencia del campo (y no se los pude sacar fácilmente!). Sin embargo se ve bonito...es importante notar que es de hecho un campo que se mueve de manera circular en torno a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



Bueno, nos veremos el miércoles para cerrar este práctico y comenzar el nuevo. Buen fin de semana, disculpen por la demora.