Sólido Lineal Isótropo Elástico

El Sólido Lineal Elástico Isótropo (SLEI de aquí en más) es un *modelito* de sólido bastante piola, pues describe algunos experimentos.

Si recuerdan:

- Un SLEI se deforma con un esfuerzo aplicado, mediante la ecuación:

$\mathbf{T} = \lambda e\mathbf{I} + 2\mu\,\mathbf{E}$ **(1)**

donde e = Tr(E); λ y μ son constantes que se conocen como coeficientes de Lamé, y es lo único que se necesita para caracterizar un SLEI.

La ec.(1) vincula esfuerzos T con deformaciones E, y es lo que se conoce como ecuación constitutiva del SLEI.

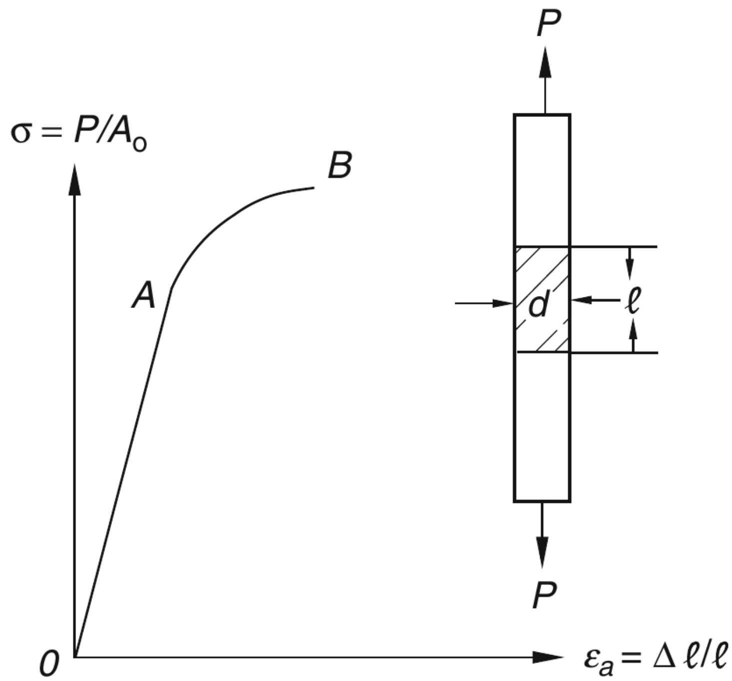
La ec. anterior puede ser invertida para dar:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda T_{kk}}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\mathbf{I}$$

que es la versión en donde tenemos las deformaciones en función de los esfuerzos.

Por otra parte hay una serie de constantes que caracterizan al sólido mediante experimentos que son habituales en sólidos: cada una de esas constantes puede ser escrita en función de los coeficientes de Lamé y viceversa.

Este es un experimento histórico: colgar carga de un cilindro de metal...
(más que experimento una necesidad, de ahí la única diferencia entre teoría y práctica).



la barra tiene dos comportamientos, dependiendo de la carga aplicada: la región A es donde vale la ec.(1), y todo lo que veremos aquí. La llamaremos *región lineal* (obvio, lineal entre esfuerzo y elongación unitaria). La parte B es la zona de deformaciones permanentes: se aplica una carga muy grande y *chaunosvemos* con que el sólido retorne a su forma original después de sacar la carga.

• Si sirve esto o no: es un modelo: sirve pero *siempre* se pude complicar *ad infinitum.*

1. Para hacer entre *todes* - Clase TP4

Muestra gratis

Sabiendo que el acero tiene un límite elástico $t_A = 600MPa$, se quiere diseñar una barra ($\mu = 82.0GPa$ y $\lambda = 117.8GPa$) de sección circular y de $5\,m$ de longitud, que sea capaz de sostener una masa $m = 10^4 kg$, que trabaje dentro del régimen de sólido lineal elástico. También son requisitos que la elongación de la varilla, al colgarse el peso, no supere los 3 cm y que el esfuerzo máximo de corte en cualquier plano no supere 0.8 veces el límite elástico antes mencionado.

a) Calcular el radio mínimo de la barra que cumpla con los tres requisitos.

b) Calcular el radio después de colgar la masa requerida.

Entonces: límite elástico $t_A =$ 600 MPa es la máxima carga que tolera cierto acero ¿Cuál acero? en este caso el que posee λ = 117.8 GPa y μ = 82 GPa.

El estado de esfuerzo propuesto para este tipo de problema es (no lo calculamos de ningún lado, lo copiamos del broli):

In[∘]:=
```
T = {{P/A,0,0},{0,0,0},{0,0,0}};
MatrixForm[%]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{P}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este estado de esfuerzo es el estado de esfuerzo de la barra.

a)

Requisito 1: encontrar un radio que mantenga a la barra dentro del límite elástico:

El peso en Newtons es P = 10^4 Kg*9.8

La barra tiene una sección circular ⟹ A = πr^2

El esfuerzo menor que el límite elástico ⟹ P / A < t_A = 600 MPa ⟹ **r** > (P/(π t_A))^(1/2)

In[∘]:=
```
P = 10^4*9.8;
r1 = ( P/ (π*600*10^6))^(0.5)
```

Out[∘]= 0.00721045

la barra de acero debe tener más de 7.2 mm para mantenerse dentro del límite elástico.

Requisito 2: que la elongación de la barra de 5 metros no sea mayor a 3 centímetros...

Si nos fijamos en la ecuación:

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk}\delta_{ij}\right]$$

tenemos que

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11}\right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11}$$

si recordamos cómo se define la constante de un resorte (fuerza sobre deformación), entonces acá tenemos un

análogo que nos hace independiente el asunto de la sección de la barra y caracteriza el SLEI:

$$E_Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

De tal forma que el *m*ódulo de Young se define como esfuerzo sobre deformación $\boldsymbol{E_Y = T_{11}/E_{11}}$.

En nuestro caso esto está piola porque nos dice cuánto se deforma la barra en el eje 1 (E_{11}) en función del esfuerzo $T_{11} = P/A$.
La deformación infinitesimal ocurre (suponemos) en toda la barra de l = 5m, con lo que tenemos:

E_{11} = (ds - dS)/dS

ds -dS = E_{11} dS = $T_{11}/E_Y\ l < 0.03\,m$

lo cual nos da una condición para calcular el radio mínimo $r^2 > \sigma l/(\pi E_Y\ 0.03\ \text{m})$

In[∘]:=
```
(*Cálculo módulo de Young*)
λ = 117.8*10^9;
μ = 82 * 10^9;
EY = μ(3λ + 2μ)/(λ + μ);
l = 5.0;
r2 > N[(P*l/(0.03*π*EY))^0.5,10]
```

Out[∘]= `r2 > 0.00494812`

Nos da algo así como 5 mm... con lo que este criterio es menos restrictivo que 1!

Requisito 3: El esfuerzo de corte máximo no supere 0.8 t_A en ningún plano ....
Viendo el estado de esfuerzo:

In[∘]:=
```
A= π r^2;
MatrixForm[T]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{31\,194.4}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ya es diagonal....entonces Ts_{max} = P/2A < 0.8 t_A ergo :

In[∘]:=
```
r3 > ( P/(2*0.8*600*10^6*π) )^0.5
```

Out[∘]= `r3 > 0.00570036`

lo que nos deja en 5.7 mm.

Con lo cual, el requisito más restrictivo es el límite elástico del principio.

----

b) Calcular el radio después de colgar la masa requerida.

Bueno, en el punto anterior ya calculamos que el radio debe ser igual o mayor a 7.21 mm.

Ahora, hay que evaluar cómo se contrae el radio al colgar el peso P. A pesar de que el tensor de esfuerzo T tiene sólo una componente que no es 0, el tensor de deformación infinitesimal no cumple esto, ya que la ec. que los vincula hace de las suyas:

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}T_{11}\right] = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}T_{11},$$

$$E_{33} = E_{22} = \frac{1}{2\mu}\left[0 - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}T_{11}\right] = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}E_{11},$$

$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$

De la segunda ecuación se puede definir la razón de Poisson (- deformación perpendicular al stress/deformación paralela al stress):

$-E_{22} / E_{11} = \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

como nuestra barra tiene sección circular, da lo mismo que usemos E_{22} ó E_{33} o un vector apuntando en una combinación de ambos.

Usamos por simplicidad E_{22}:

E_{22}= (ds-dS) /dS = $-\nu E_{11} \Longrightarrow$ ds = dS (1- νE_{11})

el signo negativo los vincula al vesre: si se alarga en la dirección paralela al esfuerzo, se contrae en la perpendicular y viceversa.

In[•]:=
```
r = r1; (*radio en metros*)
E11 = (λ + μ)/(μ(3λ + 2μ))* P/(π r^2) (*deformación paralela al stressfuerzo*)
ν = λ/(2(λ + μ)) (*razón de Poisson*)
ds = r*(1-ν*E11);
N[ds,10]
ds/r1*100
```

Out[•]= 0.00282557

Out[•]= 0.294795

Out[ ]= 0.00720445

Out[ ]= 99.9167

todo esto termina en que el radio se encoge menos del 0.1%, del orden de 10 μm (difícil de medir esto che...)

Con todo esto:

- El SLEI es un modelo de juguete pero útil.
- Sin asunciones el tensor que hace T(E) es el tensor de elasticidad y tiene 81 componentes (C_{ijkl}); luego de las asunciones tenemos 2 componentes de ese tensor y T(E) queda fácil (café con leche).
- Básicamente, con un montón de asunciones, vincula el esfuerzo T con la deformación descrita por E (infinitesimal).
- Las constantes necesarias son, en la forma que usamos aquí, las constantes de Lamé; pueden ser cualesquiera de las otras constantes que salen de los experimentos *históricos.*

No olvidar:

- "*Son 30.000*" es un orden de magnitud de 10 ^4 Hay gente que le baja un orden de magnitud (Ceferino Reato), hay otra que le baja 2 (como Gómez Centurión). Es una diferencia importante, y mentirosa, pero:

- En un SLEI los órdenes de magnitud *parecen descorrelacionados* porque las constantes que vinculan los sólidos son *gigantes.* Los coeficientes de Lamé son del orden de 10^9, y eso deja las deformaciones *muy chiquitas,* incluso para cargas grandes.
- Esto representa problemas (uno más entre miles de millones) si se quiere hacer código que modele estos sólidos.
- Los problemas de diseño de juguete, como este que hicimos, sirven para ver este tipo de cosas.
- Las analogías con cuestiones políticas tal vez no sirvan, pero es bueno al menos recordar dónde vivimos incluso si estamos estudiando mecánica de medios continuos.

Ejemplo Torsión
(TP N°5):

Ejercicio N^o 6. Un eje cilíndrico de acero es sometido a torsión mediante un par de cuplas de 2700 Nm. El esfuerzo máximo permitido de estiramiento es de $0,124$ GPa.

(a) Derive el estado de esfuerzo en la barra.

(b) Si el esfuerzo tangencial máximo permitido es 0,6 veces el esfuerzo de estiramiento máximo, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario para que el eje no se fracture?

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_t x_3}{I_p} & \frac{M_t x_2}{I_p} \\ -\frac{M_t x_3}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_t x_2}{I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_p = \int \left(x_2^2 + x_3^2\right) dA = \pi a^4/2$$

In[∘]:=
```
Ip = π*(x2^2+x3^2)^2/2
T = {{0, -2700*x3/Ip, 2700*x2/Ip},{-2700*x3/Ip, 0,0},{2700*x2/Ip,0,0}};
MatrixForm[%]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}\pi\left(x2^2 + x3^2\right)^2$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5400\, x3}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^2} & \frac{5400\, x2}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^2} \\ -\frac{5400\, x3}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^2} & 0 & 0 \\ \frac{5400\, x2}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
{vals,vecs} = Eigensystem[T];
MatrixForm[vals]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5400}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^{3/2}} \\ \frac{5400}{\pi\left(x2^2+x3^2\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

$$(T_s)_{\max} = \frac{(T_n)_{\max} - (T_n)_{\min}}{2}$$

In[∘]:=
```
Tsmax = 5400/(π (a^3))
Tspermitido = 0.124*10^9*0.6

a > (5400/(π*Tspermitido))^(1/3)
```

Out[∘]= $\frac{5400}{a^3 \pi}$

Out[∘]= 7.44×10^7

Out[∘]= $a > 0.0284811$

entonces el radio mínimo de la barra es ~ 2.8 cm para que cumpla con el requisito pedido.