# Trabajo Práctico N°4: Esfuerzo

- a) Defina esfuerzo
- b) Defina estado de esfuerzo
- c) Enumere propiedades importantes del tensor de esfuerzos
- d) Consigne el significado de las componentes del tensor de esfuerzos
- e) Defina esfuerzos principales y planos en los que ocurren.
- f) Defina máximo esfuerzo de corte y planos de acción.

## Muestra Gratis 1

El estado de esfuerzos en un punto de un sólido está dado por:

$$[T] = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} MPa$$

**a)** ¿cuál es el esfuerzo en el plano cuya normal es $\mathbf{e_1}$?

## Si recordamos la definición de estado de esfuerzo en un punto...entonces todo bien (buscadla).

In[•]:=

```
T = {{6, 5, -2}, {5, 3, 4}, {-2, 4, 9}};
Print["T = " MatrixForm[%]]
n = {1, 0, 0};
Print["n = " MatrixForm[%]]
Print["t = Tn = "  MatrixForm[t = T.n], "MPa"]
Print["Y el módulo de t será"]
Print["|t| =", N[MatrixForm[Norm[t]], 10], "MPa"]
```

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = Tn = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

Y el módulo de t será

|t| =8.062257748MPa

*Recitamos entonces: "El vector de esfuerzo $t_n$,* con $n = (1, 0, 0)$, está dado por $t_n = (6, 5, -2)$ MPa"

**b)** Discrimine, en el vector de esfuerzo del punto anterior, entre esfuerzo normal y tangencial.

Esta es muy fácil, como **n** simboliza el *vector normal a una superficie*, entonces:

● El esfuerzo *normal* es la proyección de **t** sobre **n** *en la dirección de **n*** (que es unitario):

In[∘]:=
```
η = (t.n)n;
Print["η =" MatrixForm[η]]
Print["|η| =" MatrixForm[Norm[η]]]
```

$$\eta = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\eta| = 6$

● El esfuerzo tangencial $\boldsymbol{\tau}$ es *lo que queda* (la resta de **t** - $\boldsymbol{\eta}$)

In[∘]:=
```
τ = t - η;
Print["τ = " MatrixForm[τ]]
Print["|τ|=" MatrixForm[Norm[τ]] ]
```

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$|\tau| = \sqrt{29}$

Obvio que el cuadrado del módulo de t es la suma del cuadrado de los módulos de componentes tangencial y normal.

(para hacer esto le pregunto a *Mathematica* si son iguales, con un doble símbolo "=")

In[∘]:=
```
Norm[t]^2
Norm[τ]^2 + Norm[η]^2
```

Out[∘]= 65

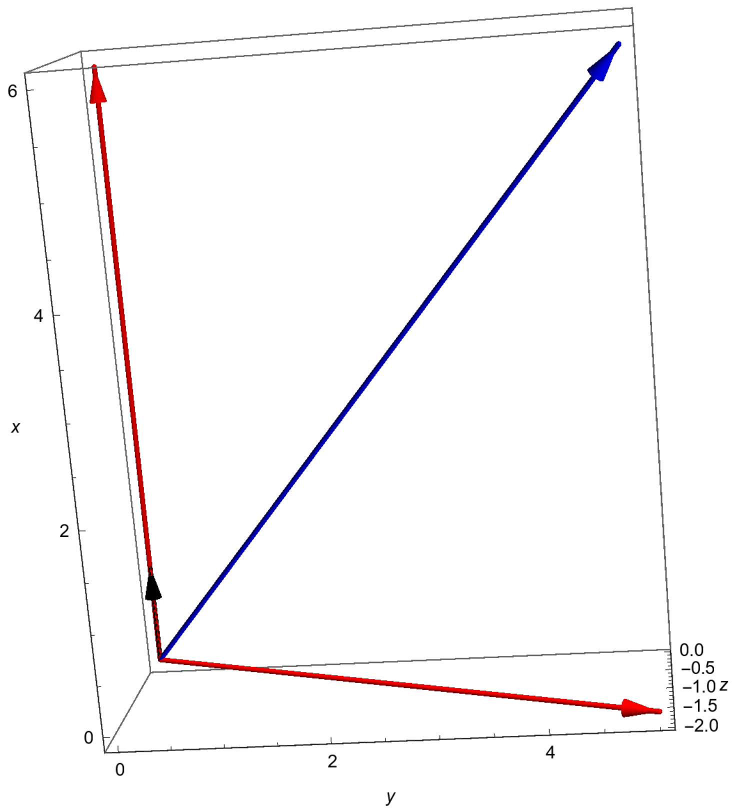
Out[∘]= 65

Podemos ver que está todo ok. Hago un grafiquito para que *veamos* (la preponderancia de la vista no tiene límites)

los resultados:

In[•]:=
```
Graphics3D[{Black,Arrow[Tube[{{0,0,0},n}, 0.025]],Blue,Arrow[Tube[{{0,0,0},t}, 0.025]],Red
Axes→True,Boxed→ True, AxesLabel → {x,y,z}]
```

Out[•]=




**c)** ¿Es posible calcular el *máximo esfuerzo normal* y el plano en el que actúa, definido por el vector normal **n**? De ser así, hágalo.

Es posible, claro, porque sabemos que:

- **T** es simétrico, por ende, tres autovalores $\lambda_i$ y tres autovectores $\boldsymbol{v_i}$ reales (hermítico).
- Los $\lambda_i$ son valores extremos de las representaciones de un tensor...
- Los $\boldsymbol{v_i}$ son direcciones en las cuales el esfuerzo es *puramente* normal, es decir, $\boldsymbol{t_v} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$

Vamos entonces: calculamos el eingensystem de **T**:

- el mayor autovalor *es* el máximo esfuerzo normal.
- El autovector asociado es normal al plano de acción.

In[•]:=
```
{vals,vecs} = Eigensystem[T];
valsN = MatrixForm[N[vals, 10]];
Print["λi 's = " valsN]
(*vemos que el máximo valor es 11.089....*)
(*Y está asociado al primer autovector*)
MatrixForm[N[vecs[[1]], 10]]
vec1 = Normalize[vecs[[1]]];
vec2 = Normalize[vecs[[2]]];
vec3 = Normalize[vecs[[3]]];
MatrixForm[N[vec1,10]]
N[Norm[vecs[[1]]],10]
N[Norm[vec1],10]
```

$$\lambda_i\text{'s} = \begin{pmatrix} 11.08948437 \\ 9.335127005 \\ -2.424611371 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.2362846694 \\ 0.6405134262 \\ 1.000000000 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.1951441519 \\ 0.5289909398 \\ 0.8258857945 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 1.210821165

Out[•]= 1.000000000

## d) Calcule los esfuerzos para $-\mathbf{n}$, es decir, *la otra cara de la moneda*

Bueno, si miran la teoría: $t_n = -t_{-n}$, con lo cual nos debería dar el vector que calculamos al principio, pero dado vuelta....

In[•]:=
```
t' = T.(-n);
Print["t' = " MatrixForm[t']]
Print["t = " MatrixForm[t]]
t == - t' (*Le pregunto*)
```

$$t' = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Out[•]= True

Con esto damos por terminado el ejercicio.... vimos:

● Que el esfuerzo **t** en un punto es el producto entre el estado de esfuerzo **T** por un vector unitario **n** que es normal a una superficie que pasa por el punto.

● Que el esfuerzo **t** no es, en general, normal a **n**, y que es habitual expresarlo en componentes *normal* $\boldsymbol{\eta}$ y tangencial $\boldsymbol{\tau}$

● **T** es simétrico, y los esfuerzos normales máximos y mínimos se encuentran en los autovalores o valores principales de **T**
y en las direcciones asociadas a estos valores principales (esto tiene una demostración un poco oscura en el Lai).

● También vimos que $\boldsymbol{t_n} = -\boldsymbol{t_{-n}}$, lo cual es una asunción que nos permite, entre otras asunciones, expresar $t_n = \text{Tn}$.
Fíjense que:

$$t_n = \text{Tn}$$

$$t_{-n} = T(-n) = -\text{Tn} = -t_n$$

Ecuaciones que no tendrían sentido si no tuviéramos la asunción, ya que no habría forma de hacerle cumplir al álgebra de
tensores las líneas anteriores.

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Muestra Gratis 2

Con el estado de esfuerzos del ejercicio anterior, calcule:

**a)** El máximo esfuerzo tangencial y el plano en el que actúa.

**b)** El esfuerzo *normal* en el plano del *máximo esfuerzo de corte*

a)

Ya tenemos el tensor T escrito del ejercicio anterior.

In[ ]:=
```
Print["T = " MatrixForm[T]]
{λ,v} = Eigensystem[T];
```

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

La idea de máximo esfuerzo tangencial (o de corte) es simple, pero no la vamos a sacar tan fácil como autovalores y autovectores (esos son máximos y mínimos *esfuerzos normales*).

La teoría nos dice que:

$$(T_s)_{\max} = \frac{(T_n)_{\max} - (T_n)_{\min}}{2}$$

donde $(T_s)_{\max}$ es el esfuerzo de corte, $(T_n)_{\max,\min}$ es el máximo ó mínimo esfuerzo normal.
Entonces, si recordamos, tenemos los autovalores (valores de esfuerzos normales máximos y mínimos):

In[ ]:=
```
MatrixForm[N[λ,10]]
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 11.08948437 \\ 9.335127005 \\ -2.424611371 \end{pmatrix}$$

de aquí tenemos: $(T_n)_{\max}$ = 11.0895 y $(T_n)_{\min}$ = -2.4246 ...por lo que calculamos $(T_s)_{\max}$ como:

In[ ]:=
```
Tsmax = (λ[[1]] - λ[[3]])/2;
Print["Tsmax = ", MatrixForm[N[Tsmax, 10]], " MPa"]
```

$Ts_{max}$ = 6.757047868 MPa

Y listo el *poio*, tenemos el valor del máximo esfuerzo de corte (tangencial, *shearing*, etc.)

---

Para saber el plano donde actúa, recordamos que:

● Lean el libro en la' páginas: 162-167

La cuestión es que el máximo esfuerzo de corte ocurre en un plano que *bisecta* a los planos donde ocurren $(T_n)_{\max}$ y $(T_n)_{\min}$...que ya los conocemos, porque calculamos los autovectores de T:

Los autovalores $(T_n)_{\max}$ y $(T_n)_{\min}$están asociados a:

In[•]:=

```
v1 = Normalize[N[v[[1]], 10]];
MatrixForm[%]
v2 = Normalize[N[v[[2]], 10]];
MatrixForm[%]
v3 = Normalize[N[v[[3]], 10]];
MatrixForm[%]
Graphics3D[{Blue, Arrow[Tube[{{0,0,0},m = Normalize[v1+v3]}]], Red, Arrow[Tube[{{0,0,0},v1

m
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.1951441519 \\ 0.5289909398 \\ 0.8258857945 \end{pmatrix}$$

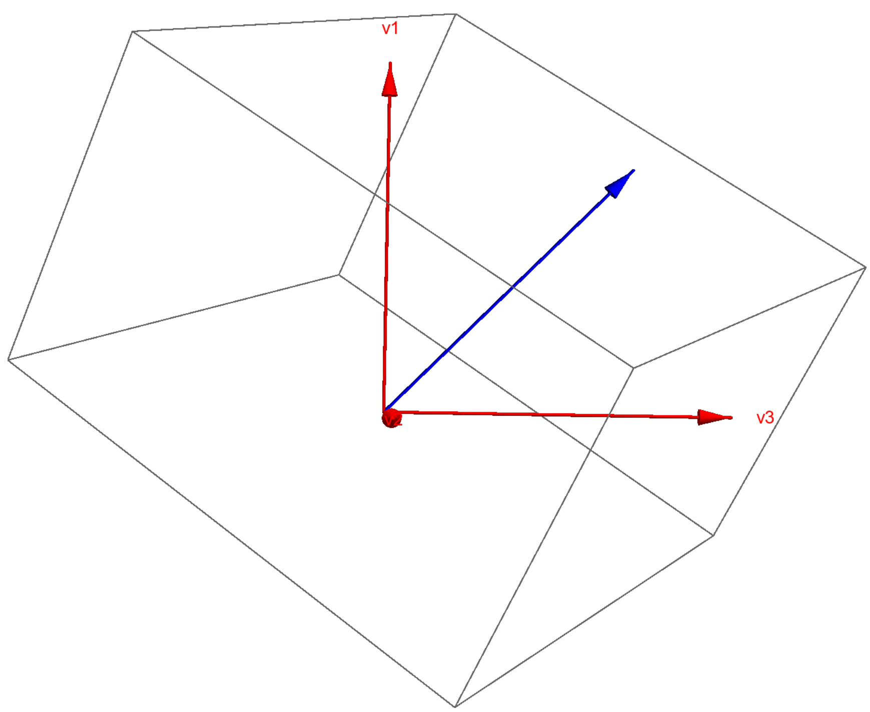
Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.8201415292 \\ -0.3737768484 \\ 0.4331959599 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.5378537274 \\ -0.7618788966 \\ 0.3609070722 \end{pmatrix}$$

Out[•]=




Out[•]= {0.518307771, -0.1646766535, 0.839189284}

El plano donde ocurre $(T_s)_{max}$ *bisecta a los planos donde ocurren los esfuerzos normales* ***máximo y mínimo...***

El plano, entonces, puede obtenerse sabiendo que el vector n = v1 + v3 bisecta al ángulo formado por los v1 y v3.

In[•]:=
```
Print["m = ",MatrixForm[m], "        Es el plano donde ocurre TSmax"]
```

$m = \begin{pmatrix} 0.518307771 \\ -0.1646766535 \\ 0.839189284 \end{pmatrix}$ Es el plano donde ocurre $T_{Smax}$

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

La parte (b) sería calcular el valor del esfuerzo normal en el plano donde ocurre el máximo esfuerzo de corte.

$$T_n = \frac{(T_n)_{\max} + (T_n)_{\min}}{2}$$

Lo hacemos calculando el módulo con la ec. de arriba:

In[•]:=
```
N[(λ[[1]] + λ[[3]]) / 2, 10]
```

Out[•]= 4.332436497

Si lo calculamos con el plano cuyo vector normal es m, tenemos que:

In[•]:=
```
tm = T.m;
tmnormal = (tm.m) m; (*Esto es la parte normal del vector de esfuerzo*)
Norm[tmnormal]
tmshear = tm - tmnormal;
Norm[tmshear]
```

Out[•]= 4.3324365

Out[•]= 6.7570479