Mecánica del Continuo

Consulta TP N 3

Cinemática de medios poco discretos (más bien continuos)

Ejercicio 2

Un cuerpo está rotando con una velocidad angular $\omega = \omega_1 \, e_1 + \omega_2 \, e_2 + \omega_3 \, e_3$.

a) Encuentre el campo de velocidades asociado en coordenadas cartesianas.

b) Suponga $\omega = |\omega| e_3$. Evalúe las funciones que encontró en el punto (a).

c) Encuentre el campo de aceleración en coordenadas cartesianas para $\omega = |\omega| \, e_3$.

d) ¿la velocidad de cada partícula varía en el tiempo? ¿cómo relaciona la aceleración con la pregunta anterior?

Solución

a) Para encontrar el campo de velocidades asociado, sólo tenemos que saber que:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x} \tag{1}$$

donde esta ecuación no es tan familiar, sólo porque en todas las físicas teóricas se ven las cosas en un plano...pero basta con proponer esta ecuación en un caso simple y darle una vuelta para ver que no es nada desquiciada.

Si en la ec.(1) tenemos que $\omega = \omega_1 \mathbf{e_1} + \omega_2 \mathbf{e_2} + \omega_3 \mathbf{e_3}$ y representamos un punto cualquiera por un vector posición $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e_1} + x_2 \mathbf{e_2} + x_3 \mathbf{e_3}$, entonces tenemos:

$$\mathbf{v} = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2)\mathbf{e_1} + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)\mathbf{e_2} + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)\mathbf{e_3} \tag{2}$$

con lo que está listo el campo de velocidades.

b) Este punto sale directamente, reemplazando en la ec.(2) $\omega = \omega_3 \mathbf{e_3} = |\omega| \mathbf{e_3}$:

$$\mathbf{v} = -|\omega| x_2 \mathbf{e_1} + |\omega| x_1 \mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3} \tag{3}$$

c) Para obtener el campo de aceleración, simplemente usamos la ec. que está en el libro, reemplazando la ec.(3)

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 & -|\omega| & 0 \\ |\omega| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|\omega| x_2 \\ |\omega| x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|\omega|^2 x_1 \mathbf{e_1} - |\omega|^2 x_2 \mathbf{e_2} \tag{4}$$

donde en la ec.(4) nos entrega una aceleración que siempre apunta perpendicularmente al eje $\mathbf{e_3}$.

d) Esta la dejamos para la interpretación personal de cada une...que no es menor.

Ejercicio 4

Considere el campo de deformación dado por $x = X + AX$, siendo A un tensor de componentes A_{ii} independientes de X_i.

a) Realice gráficas en la forma del punto $(2.d)$ para un elemento material de su elección y para el ángulo θ entre dos elementos materiales –también a su elección– comparando con el tensor E. Utilice valores $0 < A_{ii} < 0.5$

b) Agregue a las gráficas anteriores un tensor $E^A = (A + A^T)/2$ y compare. ¿para qué rango de A_{ii} la aproximación es válida?

Solución Ej 4

a) Tenemos que la deformación está dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X} + k\mathbf{I}\mathbf{X} \tag{5}$$

donde el símbolo $\mathbf{I}$ es el tensor identidad.

De la ec.(5), podemos identificar el campo de deformación $\mathbf{u} = k\mathbf{X}$. Luego el tensor *gradiente de deformación* como:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde vemos que el tensor ∇u es simétrico.

Sabiendo el gradiente de deformación, es posible calcular, a partir de un elemento no deformado, $d\mathbf{X}$, el elemento deformado $d\mathbf{x}$, utilizando la ec. del libro de texto $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \nabla \mathbf{u} d\mathbf{X}$.

Eligiendo dos elementos materiales inicialmente perpendiculares, $d\mathbf{X}^{(\mathbf{1})} = dS\mathbf{e_1}$ y $d\mathbf{X}^{(\mathbf{2})} = dS\mathbf{e_2}$, tenemos que se deforman como:

$$d\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} = (1+k)\, dS\mathbf{e_1} \qquad d\mathbf{x}^{(\mathbf{2})} = (1+k)\, dS\mathbf{e_2} \tag{7}$$

donde, como era esperable, aumentan su longitud en un factor $(1 + k)$ y no modifican el ángulo entre ellos (que continua siendo de $\pi/2$ después de la transformación). Una forma usual de caracterizar un cambio en la elongación de un elemento $d\mathbf{X}$ es utilizar la *deformación unitaria*, que no es otra cosa que $(ds - dS)/dS$, donde ds es la longitud del elemento deformado. Para las ecs. (7) tenemos:

$$\frac{ds^{(1)} - dS^{(1)}}{dS^{(1)}} = k \qquad \frac{ds^{(2)} - dS^{(2)}}{dS^{(2)}} = k \tag{8}$$

donde ya tenemos nuestro gráfico predilecto (sin hacerlo): la elongación unitaria es una recta de pendiente k conn ordenada al origen 0.

Por otra parte, el *tensor de deformación lagrangiano* $\mathbf{E}^*$, está dado por $\mathbf{E}^* = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u}$, y caracteriza las deformaciones (es necesario leer un poco). Si consideramos deformaciones infinitesimales, el *tensor de deformación infinitesimal* $\mathbf{E} = 1/2(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u}^T))$ es simétrico, y descarta los términos de $O(>1)$ presentes en $\mathbf{E}^*$[1].

Si calculamos el tensor de deformación infinitesimal, tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\big) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \tag{9}$$

con lo que nuestro tensor de deformación infinitesimal $\mathbf{E}$ es igual al gradiente de deformación $\mathbf{u}$.

De cualquier forma, se lee en la ec. **3.8.1** que $ds^2 = dS^2 + 2dS^2E_{nn}$ (sin suma en n). Dado que nuestro etnsor $\mathbf{E}$ tiene una diagonal k...¿cómo conciliar resultados?

Bueno, no termino de resolver porque la teoría *merece una leída.*

Saludos cordiales, cualquier cosa me avisan.

[1] En mecánica de medios continuos, sobre todo en la parte de sólidos, es usual que las deformaciones sean infinitesimales, dado que (a) Los regímenes donde valen los modelos presentan zonas de deformaciones permanentes si las deformaciones son grandes; (b) los esfuerzos aplicados tienen correlato con las deformaciones por medio de constantes que hacen que, aún con esfuerzos grandes, las deformaciones sean de una parte en 10^6.