Mecánica del continuo
Trabajo Práctico N^{o}2 :

Temas: descripción del movimiento de un continuo - coordenadas materiales - descripción material y espacial del movimiento - velocidad y aceleración del continuo.

Ejercicio N^o 1. Considerar el movimiento descripto por:

$$x_1 = kt + X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

donde la coordenada material especifica la posición de la partícula a $t = 0$.

a) Determine la velocidad y aceleración de la partícula en la descripción material. Obtenga la trayectoria de las partículas cuyas coordenadas materiales están dadas por $X_1 = 0m\,, X_2\,, X_3$

b) Determine los campos de velocidad y aceleración (descripción espacial). Grafique utilizando *Mathematica* para $t = 0\,s$ y para $t = 100\,s$.

c) Encuentre la razón temporal de cambio de la temperatura que experimenta una partícula, siendo que el campo de temperatura está especificado por $\Theta(x) = Ax_1$.

Ejercicio N^o 2. Suponga que el movimiento de un continuo está descripto por $x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2 + kX_1^2t^2, \quad x_3 = X_3$ y considere una zona, con forma de cuadrado unitario a $t = 0$.

a) Determine la posición de los vértices a $t = 1s$ y realice un esquema de al nueva forma de la figura.

b) Determine la velocidad y aceleración de una partícula del continuo.

c) Muestre que el campo de velocidad está dado por:

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_2 = 2kx_1^2t.$$

Ejercicio N^o 3. La ecuación de movimiento que describe el movimiento de un continuo es $x_1 = X_1 - 2X_2^2t^2, \quad x_2 = X_2 - X_3t, \quad x_3 = X_3$.

a) Realice un esquema que describa el cambio en la forma de un segmento recto, cuyos extremos poseen coordenadas $(0,0,0)$ y $(0,1,0)$ en el instante de referencia.

b) Determine el valor de la velocidad a $t = 2$ de la partícula cuyas coordenadas materiales son $(1,1,0)$ en el instante de referencia.

c) Encuentre la velocidad de la partícula que posee coordenadas $(1,1,0)$ cuando $t = 2$.

Ejercicio N^o 4. Encuentre el campo de velocidad en la descripción espacial del continuo cuya ecuación de movimiento es:

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0} X_1; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3$$

Ejercicio N^o 5. Considere el continuo cuyo campo de velocidad viene dado por:

$$v_i = \frac{x_i}{1+t}$$

Encuentre la ecuación de movimiento y el campo de aceleración en la descripción material.

Ejercicio N^o 6. Dado el campo de velocidad:

$$v_1 = -2x_2, \quad v_2 = 2x_1$$

a) Encuentre el campo de aceleración.

b) Obtenga la expresión de la linea de camino ("pathline") del continuo.

c) Grafique el campo de aceleración en la descripción espacial.

Ejercicio N^o 7. En la descripción espacial, la ecuación para evaluar la aceleración es:

$$\frac{Dv}{Dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_x + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$$

Esta ecuación es no-lineal, es decir si consideramos dos campos de velocidad v^A, v^B, se cumple que:

$$a^A + a^B \neq a^{A+B}$$

donde a^A y a^B son los campos de aceleración de los campos de velocidad v^A y v^B (respectivamente) y a^{A+B} es el campo de aceleración del campo de velocidad $v = v^A + v^B$.

Suponga un campo bidimensional dado por:

$$\begin{aligned} v^A &= -2x_2 e_1 + 2x_1 e_2 \\ v^B &= 2x_2 e_1 - 2x_1 e_2 \end{aligned}$$

a) Verifique esta desigualdad para los campos de velocidad anterior. Grafique a^{A+B}

b) Obtenga la suma $a^A + a^B$. Grafíquela.

c) ¿Qué condición debería cumplir $\nabla \mathbf{v}$ para que las gráficas anteriores coincidan?

Ejercicio N^o 8. Considerar el movimiento descripto por:

$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = X_2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{s}t\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{m}X_1\right)$$
$$x_3 = X_3$$

A $t = 0$ un filamento material coincide con la linea recta que se extiende desde $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$.

a) Realice un esquema que muestre la forma de este filamento a $t = 1/2s, \quad t = 1s, \quad$ y $\quad t = 3/2s$.

b) Encuentre la velocidad y la aceleración en la descripción espacial.

c) Encuentre la velocidad y la aceleración en la descripción material.

Ejercicio N^o 9. Considerar los campos de velocidad y temperatura descriptos por:

$$v = \frac{x_1 e_1 + x_2 e_2}{x_1^2 + x_2^2}$$
$$\theta = k(x_1^2 + x_2^2)$$

a) Determine la velocidad en varias posiciones y describa la forma general de este campo de velocidad. ¿Qué forma poseen las isotermas? Grafique.

b) Determine la aceleración y la función que describe la razón temporal de cambio de la temperatura de la partícula cuya coordenada material es $X = (1,1,0)m$.