Cinemática de Medios Continuos

Conjuntos discretos de partículas vs. medios continuos

1. Es habitual que la cinemática de **una partícula** sea descrita por medio de un vector de posición que depende del tiempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

donde $\mathbf{r}(t) = x_1(t)\,\boldsymbol{e}_1 + x_2(t)\boldsymbol{e}_2 + x_3(t)\boldsymbol{e}_3$

2.. Si hay N partículas, entonces cada una tiene **su** vector:

$$\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}_n(t) \;\; ; \, n = 1,2,3,\ldots,N$$

En un medio continuo *finito*, hay infinitas partículas, por lo tanto no es posible *enumerarlas* por medio del conjunto de los números naturales $\mathcal{N}$, y se pasa a un conjunto que conocemos (!?) más que ningún otro: una partícula específica en el continuo queda determinada por un valor real de sus coordenadas ($\mathcal{R}^3$) en un tiempo de referencia t_0.

En un continuo tenemos que la posición de una partícula **X** está determinada por un vector **x**, el cual depende tanto del tiempo (se desplaza) como de la partícula del continuo (se deforma, se mueven sus partes relativamente).

$$\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathbf{t}) \text{ con } \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0)$$

En forma de componentes, la ec. anterior se lee:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t), & X_1 = x_1(X_1,\ X_2,\ X_3, t_o) \\ x_2 = x_2(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t), & X_2 = x_2(X_1,\ X_2,\ X_3, t_o) \\ x_3 = x_3(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t), & X_3 = x_3(X_1,\ X_2,\ X_3, t_o) \end{array}$$

Descripciones de la cinemática de medios continuos:

Suponiendo que un medio continuo está en movimiento, y que ciertas propiedades cambian con el tiempo, como por ejemplo, la temperatura Θ, la velocidad **v** o el esfuerzo **T** (capítulo siguiente), entonces tenemos dos formas de describir estos cambios:

1. Descripción Material o Lagrangiana: Se describe el cambio desde el punto de vista de las partículas, es decir, se obtienen funciones como:

$$\hat{v}(X_1, X_2, X_3,\ t)$$

$$\hat{\Theta}(X_1,X_2,\ X_3,\ \ t)$$
$$\hat{T}(X_1,X_2,\ X_3,\ \ t)$$

2. Descripción espacial o Euleriana: se describe el cambio en un punto del espacio fijo (como el sistema de referencia del laboratorio), es decir, se obtienen funciones como:

$$\tilde{v}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ t)$$
$$\tilde{\Theta}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ t)$$
$$\tilde{\boldsymbol{T}}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ t)$$

Estas dos formas son equivalentes, pero es importante saber ir de una a la otra (contar el cuentito de la partícula que *sale de X...)*

Derivada Material

La tasa de cambio de una magnitud respecto del tiempo de **una partícula,** se denomina ***derivada material*** y se denota por D /Dt.

La forma de calcularla es:

1. Con la descripción material:

$$\Theta = \hat{\Theta}(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i-\text{fixed}}.$$

2. Con la descripción espacial:

$$\Theta = \tilde{\Theta}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i-\text{fixed}} = \left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\hat{x}_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\hat{x}_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\hat{x}_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial t}\right)_{x_i}.$$

Esto termina en que $\partial x_i / \partial t = v_i$, entonces :

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i-\text{fixed}} = \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial t} + v_1\left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_1}\right) + v_2\left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_2}\right) + v_3\left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_3}\right)$$

Con notación de índices tenemos:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i-\text{fixed}} = \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial t} + v_i\left(\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial x_i}\right)$$

En notación directa tenemos:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\tilde{\Theta}$$

Ejemplo

Mirar: aceleración de una partícula

Dado el campo de velocidad:

$$v_1 = -2x_2 \quad v_2 = 2x_1$$

a) Encuentre el campo de aceleración.

b) Obtenga la expresión de la linea de camino ("pathline") del continuo.

c) Grafique el campo de aceleración en la descripción espacial.

----

a) Encontrar el campo de aceleración es simple, ya que contamos con la ecuación del Lai, 4^{ta} ed. que dice:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\mathbf{v}\ \mathbf{v} \tag{10}$$

Podemos calcular, usando las ecs.(9), las funciones que posee la expresión (10), con lo que el primer término queda:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{11}$$

es decir, la velocidad en un punto (descripción espacial) no cambia con el tiempo. Sólo depende de las coordenadas espaciales.

El segundo término de la ec.(10) queda:

$$\nabla\mathbf{v}\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla\mathbf{v}\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 & -4x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos entonces el campo de aceleración:

$$\mathbf{a}(x_1, x_2) = -4x_1\mathbf{e_1} - 4x_2\,\mathbf{e_2}$$

una cosa interesante del campo de velocidades y el de aceleración, dado por la ec.(13) es que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \left(-2x_2\, \mathbf{e_1} + 2x_1\, \mathbf{e_2} \right) \cdot \left(-4x_1 \mathbf{e_1} - 4x_2\, \mathbf{e_2} \right) = \mathbf{0}$$

lo anterior nos da una idea de movimiento circular, ¿no?, la aceleración perpendicular a la velocidad para cualquier tiempo y para cualquier coordenada...

---

b) Encontrar la trayectoria o *pathline*

Las trayectorias son, simplemente...las trayectorias[2], y están definidas por la ecuación de movimiento $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Sin embargo, a veces es posible deshacerse del parámetro del tiempo, combinando las ecuaciones.

A veces simple, otras no tanto, en este caso:

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -2x_2 \tag{14}$$

$$v_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} = 2x_1 \tag{15}$$

derivando respecto del tiempo las ecs. anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -2\frac{\partial x_2}{\partial t} = -4x_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = 2\frac{\partial x_1}{\partial t} = -4x_2 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

las ecs.(16 y 17) pueden integrarse dos veces para dar:

$$x_1 = r\ cos(2t) \tag{19}$$

$$x_2 = r\ sin(2t) \tag{20}$$

$$\tag{21}$$