Fluidos que fluyen.

Latín

Fluidus -a -um: que corre | débil, lánguido | lacio, flojo, efímero. (-*idus,* sufijo que indica que es perceptible por la vista)

¿Definición de fluido según Lai?

Un fluido es un material que no puede soportar esfuerzos de corte sin deformarse continuamente.

Todos los fluidos, el Fluido Newtoniano

Es un fluido cuyo estado de esfuerzo depende **no** de la deformación, sino de la **tasa de deformación.** Otras denominaciones:

- Fluido linealmente viscoso

Tensor de esfuerzo de un fluido en reposo

Si no puede soportar esfuerzos de corte, cizalla o tangenciales, entonces en un punto -y en cualquier plano-, un fluido (en reposo) sólo debe tener esfuerzos normales, con lo cual cualquier vector **n** es eingenvector de **T:**

$$\mathbf{Tn} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{n} \qquad \mathbf{(1)}$$

Si es para cualquier vector **n** que se mantiene la relación (1), entonces es fácil probar que λ es igual para cualquier vector:

$\mathrm{Tn}_1 = \lambda_1 \; n_1$ y $\mathrm{Tn}_2 = \lambda_2 \; n_2$

$n_2 \cdot \mathrm{Tn}_1 - n_1 \cdot \mathrm{Tn}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \;\; n_1 \cdot n_2$ **(2)**

Usando la definición de tensor transpuesto $n_1 \cdot \mathrm{T}\, n_2 = n_2 \cdot T^T \; n_1$, con lo que el lado izquierdo de la expresión (2) es 0 y:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \;\; \forall\, n_1, n_2 \;\Longrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

con lo cual un tensor en el cual *todos* los esfuerzos son normales (y compresivos) se escribe:

$$T = -p\,I = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

lo que denominamos *tensor de esfuerzo hidrostático.*

Soy un pobre fluido al cual no dejan comprimir

La idea de fluido incompresible se usa *bastante* para ciertas situaciones, aunque todo depende de la escala:

- El agua es considerada incompresible para los flujos que vamos a desarrollar...
- El agua es considerada compresible para la transmisión de sonido....

Entonces, un fluido incompresible es aquél que *nunca* cambia la densidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

y si vemos la ec. de conservación de la masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

entonces, un fluido incompresible tiene una divergencia del campo de velocidades:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

quedando definido fluido incompresible.

Fíjense que div **v** = **0** no es otra cosa que: lo que entra por algunas de las caras de un cubito infinitesimal sale por las otras caras del cubito infinitesimal...lo que deberían haber visto en *todas* las derivaciones de las ecs. de FísicaMatemática II.

Resolviendo el problema de la hidrostática

Las ecuaciones de movimiento (en equilibrio, o sea, ecuaciones de inmovimiento) son:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0$$

Recordamos nuestro resultado:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

con lo que la primera ecuación queda:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho B_i$$

es decir, obtenemos una conexión entre las derivadas del escalar p(**x**) y las fuerzas de volumen.

$$\nabla p = \rho \mathbf{B}$$

Si suponemos un campo gravitatorio en la dirección e_3 para las fuerzas de volumen:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = g,$$

entonces las ecuaciones para la presión quedan:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g$$

que no es otra cosa que nuestras ecuaciones para la presión hidrostática tal cual la conocemos:

- $p(x_1, x_2, x_3)$ es función sólo de x_3 (depende de la altura en el campo gravitatorio)

Práctico 6

Ejercicio N^o 2. Derive la expresión que da el valor de la presión p dentro de un contenedor que contiene un fluido que se encuentra en campo gravitatorio terrestre ($b = -ge_3$) y está acelerado con una aceleración $a = a_1e_1 + a_2e_2$.

Para resolver este ejercicio, recordamos que:

- Un fluído se define como aquel material que no soporta esfuerzos cortantes.

- Las ec. que resolverá nuestro problema es la ecuación de movimiento sin movimiento:

In[ ]:=
```
B = {a1,a2,-g} (*a1 y a2 constantes*)
```

Out[ ]= {a1, a2, - g}

la ecuación anterior define nuestras fuerzas de volumen. Hay que pregutnarse si es válido considerar *aceleraciones* como fuerzas de volumen: no nos lo preguntamos más, es válido por el ppio de equivalencia de Einstein (gravedad y aceleraciones indiscernibles).

Entonces se puede escribir:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{a_1}\, \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{a_2}\, \boldsymbol{e_2} + \mathbf{g}\, \boldsymbol{e_3} \quad \text{ó} \quad \mathbf{B} = +\mathbf{g}\, \boldsymbol{e_3} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = -\boldsymbol{a_1}\, \boldsymbol{e_1} + -\boldsymbol{a_2}\, \boldsymbol{e_2}$$

Si elegimos la primera tenemos:

$\partial T_{ij}/\partial x_j + \rho\ B_i = 0$

Y también sabemos que si el fluido está en reposo, entonces no hay deformaciones del mismo, i.e., estado isotrópico:

- $T_{ij} = p(x_1, x_2, x_3)\ \delta_{ij}$
- Con lo anterior, decimos que resolvemos el estacionario directamente (nada tiene que ver con acelerar un fluído, sino con *tenerlo acelerado un tiempo laaaaaarrrrgo*).

Entonces con las ecs anteriores tenemos:

$\partial p(x_1, x_2, x_3) / \partial x_1 = - \rho\, a_1$ (1)
$\partial p(x_1, x_2, x_3) / \partial x_2 = - \rho\, a_2$ (2)
$\partial p(x_1, x_2, x_3) / \partial x_3 = - \rho\, \mathrm{g}$ (3)

e integrando estas expresiones queda:
(1) $p_1 = - \rho\, a_1\, x_1 + f_1(x_2,\ x_3)$
(2) $p_2 = - \rho\, a_2\, x_2 + f_1(x_1,\ x_3)$
(3) $p_3 = - \rho\ \mathrm{g}\ x_3 + f_3(x_1,\ x_2)$

ojo que las f_i son las otras p...por lo que nos queda:

$\mathrm{p} = -\rho\, (a_1\, x_1 + a_2\, x_2 - \mathrm{g}\, x_3) + \mathrm{c}$

y obviamente podemos hacer $\mathrm{c} = p_o$, la presión atmosférica. Finalmente tenemos:
$\mathrm{p} = -\rho\, (a_1\, x_1 + a_2\, x_2 - \mathrm{g}\, x_3) + p_o$

la otra cuestión es que x_3 está definido en el sentido contrario de la gravedad, así es que hacer crecer x_3 es hacer decrecer la presión.
Si consideramos las $a_i = 0$, entonces nos queda la ecuación que todes conocemos de hidrostática.

Notar que el Lai parece estar mal sobre la dependencia del campo de presión que aparece en el fluido....no está mal, pero *normaliza* la interpretación (página 357).

Un ***remark*** más: este problema se puede resolver como el del Lai, cambiando las coordenadas para que la aceleración perpendicular a la gravedad quede en un sólo eje.

Recordando cosas

Tenemos que un fluido en *reposo ó,* más generalmente, *en movimiento de cuerpo rígido,* tiene sólo un tensor isotrópico cuyo autovalor es la *presión p* del fluído. Obvio que es una cuestión puntual, i.e., $p \equiv p(x_i)$.

La cuestión de la isotropía del tensor esfuerzo no se mantiene para fluidos que no están en reposo o en movimiento de cuerpo rígido... el *chiste* que se usa habitualmente es partir el tensor de esfuerzos en una parte isotrópica (que corresponde al reposo o al cuerpo rígido) y otra que no lo es:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij}$$

donde en la ec. anterior vamos a tener que el tensor T'_{ij} va a ser la componente que modele los esfuerzos del fluído en movimiento.

Se definen entonces los *fluídos newtonianos* como una clase de materiales idealizados:

- Para cada punto material, T'_{ij} depende sólo del tensor *tasa de deformación* (y **no** del tensor deformación*....un fluido adopta la forma del recipiente que lo contiene).* El tensor tasa de deformación puede ser escrito en función del campo de velocidades del fluido como:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

- El fluido es isotrópico respecto de cualquier configuración de referencia.

Siguiendo argumentos parecidos a los del SLEI (muchos y muy importantes), y teniendo en cuenta que $\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33} = D_{kk}$, tenemos que T'_{ij} está dado por:

$$T'_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

donde λ y μ son constantes (distintas del SLEI) que tienen dimensiones [fuerza][tiempo]/[longitud^2]. El tensor T_{ij} se denomina el tensor de esfuerzo viscoso. El esfuerzo total, entonces, estará dado por:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

v.g, dentro de la diagonal

$T_{11} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{11}, \quad T_{22} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{22}, \quad T_{33} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{33}$

fuera:

$$T_{12} = 2\mu D_{12}, \quad T_{13} = 2\mu D_{13}, \quad T_{23} = 2\mu D_{23}$$

la presión seguirá dada por el escalar *p,* aunque dejará de ser el esfuerzo normal total en cualquier plano.