Tensores

Notación *Indicial (!?)*

Como toda disciplina la Mecánica de Medios continuos tiene una notación específica. Esta notación (que traduje por *indicial,* ó de *índices),* es una notación diseñada -creo- mayormente por *Alberto Einstein* (tal vez el físico más conocido por el gran público).

La ***notación indicial*** busca resumir un montón de sumas y ecuaciones mediante ciertas reglas semánticas de índices.

Las sumas que busca resumir no son otra cosa que operaciones de tensores. Los tensores, como siempre pasa con las nomenclaturas abigarradas, están postergados para después....jejeje.

Índices *tontos* (de prueba) *(Dummy Indices)*

Convención de la suma

Consideremos la suma:

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_n x_n$$

la suma anterior puede ser resumida mediante la letra Σ, como ya sabemos:

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

sin embargo, en la notación usando índices, lo anterior puede resumirse como:

$$s = a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

donde los índices corren desde *i=1* hasta i = *n, acordando de antemano el* ***numero de dimensiones*** *n*. **En la notación indicial, los índices repetidos a un lado de una ecuacion, se suman.**

Esto lo vamos a usar para escribir espacios de vectores o tensores, con lo que n = 3 en la gran mayoría (sino todos) los casos.

● Importante es decir, que esta convención no aplica a tres elementos, por ejemplo:

$s = x_i y_i z_i$

no tiene sentido dentro de esta convención, y hay que mantener el símbolo de sumatoria en caso de querer explicitar este tipo de operaciones.

Ejemplo: Producto Punto

El producto punto es un producto interno del espacio vectorial V^3, y estamos acostumbrados a escribirlo como:

$$\mathbf{a} = a_1\, \mathbf{e_1} + a_2\, \mathbf{e_2} + a_3\, \mathbf{e_3}$$
$$b = b_1\, \mathbf{e_1} + b_2\, \mathbf{e_2} + b_3\, \mathbf{e_3}$$
$$a \bullet b = a_i\, b_j\, (\mathbf{e_i} \bullet \mathbf{e}_j) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a \bullet b = a_1\, b_1\, (\mathbf{e_1} \bullet e_1) + a_2\, b_2\, (e_2 \bullet e_2) + a_3\, b_3\, (e_3 \bullet e_3) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

(todos los productos $e_i \bullet e_j$ son 1 si $i = j$, y 0 si $i \neq j$.

Cualquier producto punto puede ser escrito utilizando nuestra convención como:

$$\mathbf{a \bullet b = a_i\, b_i}$$

lo que no es otra cosa que una hermosa manera de resumir índices...

Índices Libres (*Free Indices)*

Consideremos las ecs.:

$$x_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3$$
$$x_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3$$
$$x_3 = a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3$$

Estas ecs. pueden ser resumidas utilizando el símbolo de la suma:

$$x_1 = a_{1\,m}\, y_m$$
$$x_2 = a_{2\,m}\, y_m$$
$$x_3 = a_{3\,m}\, y_m$$

a su vez, podemos pensar un índice *i* que exprese los *grados de libertad* que mantiene la ecuación:

$$x_i = a_{im}\, y_m$$

Estos últimos índices que usamos, se llaman índices *libres,* y nos permitirán resumir ecuaciones bastante conocidas.

De hecho, es fácil que veamos las ecuaciones desde donde partimos con la forma más habitual (matricial):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = A\, y$$

Ejemplo (Ejercicio 2.7)

Escribir la ecuación:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

en forma extendida (escribir todas las ecs.)

Solución
Vemos que tenemos un índice que *suma* (j) y un índice libre (i).

Primero tomamos la suma:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}$$

luego podemos expandir a tres ecuaciones:

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$
$$a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$
$$a_i = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

La verdad es que la notación resume bastante, ¿no?

Queda:
- delta de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall\ i \neq j \\ 1 & \forall\ i = j \end{cases}$

- Símbolo de permutación $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \ \forall \text{ ijk permutación par de } 1, 2, 3\ (123,\ 312,\ 231) \\ -1 \ \forall \text{ ijk permutación impar de } 1, 2, 3\ (132,\ 213,\ 321) \\ 0 \ \forall \text{ ijk que no sean permutación de } 1, 2, 3\ (111, 222, 333, 322 \ldots) \end{cases}$

Tensores: Algunas definiciones y muestra de ejercicios.

Tensores como Transformación Lineal (TL)

Una definición de tensor de segundo orden puede ser planteada como un operador **T**, el cual es una transformación lineal de los vectores **a** y **b**, es decir, dados los escalares α y β:

$T(\alpha a + \beta b) = T(\alpha a) + T(\beta b) = \alpha Ta + \beta Tb$

Ejemplo:

Una transformación **T** aplicada a un vector **a** entrega el vector unitario **a**/|**a**|, ¿es T una transformación lineal?

$\mathbf{T}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$; $\mathbf{T}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathbf{T}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{a+b}{|a+b|} = \mathbf{a}\,/\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}| + \mathbf{b}\,/\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq \mathbf{a}\,/\,|\mathbf{a}| + \mathbf{b}\,/\,|\mathbf{b}| = \mathbf{Ta} + \mathbf{Tb}$

Solo funciona en el caso de colinealidad entre a y b, por lo que la transformacion propuesta no es una TL y por ende no puede representar un tensor.

Producto Diádico

El producto diádico consiste en un tensor **ab** que cumple la siguiente relación aplicado a un tercer vector **c:**

$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})$

Si $\mathbf{a} = a_i\,\boldsymbol{e_i}$ y $\mathbf{b} = b_i\,\boldsymbol{e_i} \Longrightarrow$

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_1\,b_1 & a_1\,b_2 & a_1\,b_3 \\ a_2\,b_1 & a_2\,b_2 & a_2\,b_3 \\ a_3\,b_1 & a_3\,b_2 & a_3\,b_3 \end{pmatrix}$$

Pregunta: ¿qué autovectores tiene **ab**?

In[•]:=

```
diadico = { {a₁*b₁, a₁*b₂, a₁*b₃} , {a₂*b₁, a₂*b₂, a₂*b₃}, {a₃*b₁, a₃*b₂, a₃*b₃} };

Print["(ab) = ", MatrixForm[diadico]]
{eigenvals,eigenvecs} = Eigensystem[diadico]; (*EigenSystem resuleve eigenvalores y vecto
Print["λ₁ = ", eigenvals[[1]] , "; v₁ = ", MatrixForm[eigenvecs[[1]]] ]
Print["λ₂ = ", eigenvals[[2]] , "; v₁ = ", MatrixForm[eigenvecs[[2]]] ]
Print["λ₃ = ", eigenvals[[3]] , "; v₃ = ", MatrixForm[eigenvecs[[3]]]]
```

$$(ab) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0; \ v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b_3}{b_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0; \ v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3; \ v_3 = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_3} \\ \frac{a_2}{a_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que no es otra cosa que:

- Todo **c** perpendicular a **b** es *eigenvector* de **ab**, con *eigenvalor* $\lambda = 0$
- **a** es *eigenvector* de **ab** con eigenvalor $\lambda = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$

Preguntas...

Transpuesta de un Tensor

El tensor transpuesto **T**, denotado por $\boldsymbol{T}^T$, está definido como el tensor que cumple la siguiente identidad para vectores cualesquiera **a** y **b:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{a}$$

Tensores Ortogonales

Un tensor ortogonal no es otra cosa que una TL que conserva el módulo de los vectores, y los ángulos entre los vectores. Por definición:

$$\mathbf{Qa} \cdot \mathbf{Qb} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Por definición de la transpuesta de un tensor, tenemos que:

$$\mathbf{Qa} \cdot \mathbf{Qb} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q}\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

ergo $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \mathbf{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$

Así tenemos que un tensor ortogonal **Q** es un tensor cuya transpuesta es su inversa:

$$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

De acá sale(n) una(s) hermosa(s) pregunta(s):

Un tensor ortogonal *rota* vectores en el espacio.
¿Cuál es su autovector?
¿Y su autovalor?

Ojo que hay detalles!

2.29; 2.30; 2.31 -> los únicos ejercicios más o menos difíciles de pensar