Cálculo Integral

Clase # 32

Johnny A. Perafán A.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contenidos:

- Representación de funciones como series de potencias.
- Series de Taylor
- Algunas aplicaciones

Representación de funciones como series de potencias

Recordemos que una *serie numérica* se denomina serie geométrica si es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

donde $a \neq 0$ y r son números reales. Esta serie es *convergente* si $|r| < 1$ y su suma es $S = \frac{a}{1-r}$, es decir,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}}$$

Representación de funciones como series de potencias

Entonces, si $|r| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

Ahora, si $r = x \in \mathbb{R}$ y $a = 1$ en esta serie numérica, se forma la *serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

la cual es convergente si $|x| < 1$, es decir, su intervalo de convergencia es $I = (-1,1)$ y *converge a*

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots}_{\text{Serie de potencias}} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{función}}$$

Representación de funciones como series de potencias

$$\sum_{n=0}^{2} x^n = 1 + x + x^2$$

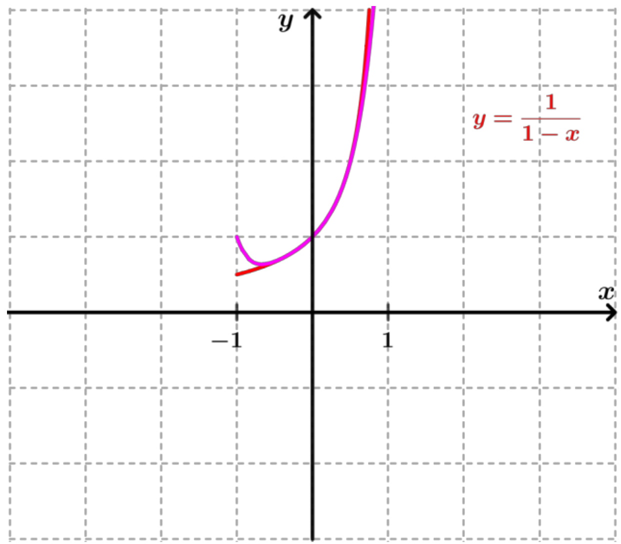
$$\sum_{n=0}^{3} x^n = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\sum_{n=0}^{4} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$\sum_{n=0}^{5} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$



Serie geométrica de potencias

Si $|x| < 1$, entonces la serie geométrica de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge absolutamente a la función* $f(x) = \frac{1}{1-x}$, es decir,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (-1,1)}$$

Teorema (Operaciones con series de potencias):

Suponga que las series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *convergen absolutamente* a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente en el intervalo I, entonces

1. **Suma y diferencia:** La serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n)x^n$ *converge absolutamente* a $f(x) \pm g(x)$ en I.

2. **Multiplicación por una potencia:** La serie de potencias $x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m}$ *converge absolutamente* a $x^m f(x)$ en I, siempre que $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n + m \geq 0$ para todos los términos de la serie.

Teorema (Operaciones con series de potencias):

3. Composición: Si $h(x) = cx^m$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (h(x))^n$ *converge absolutamente* a la función compuesta $f(h(x))$, para toda x tal que $h(x) \in I$.

$$h(x) = 2x$$

$$h(x) = -x^2$$

$$h(x) = (1-x)^2$$ no es permitido.

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \dfrac{x^5}{1-x}$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

multiplicando por x^5 se tiene:

$$x^5 \cdot \frac{1}{1-x} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$x^5 \cdot \frac{1}{1-x} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{x^5}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^5 \cdot x^n$$

$$\frac{x^5}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+5}$$

así, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+5}$ $\quad I = (-1, 1)$

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Sean $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y $h(x) = 2x$, así

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{1}{1-(2x)} = \frac{1}{1-2x}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sustituyendo (composición) x por $2x$:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \qquad |2x| < 1 \iff 2|x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

así,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n \qquad \underline{I} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Sustituyendo (composición) x por $-x^2$

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad |-x^2| < 1$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

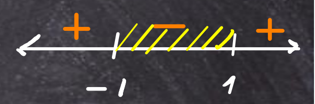
$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad |-x^2| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \qquad |x^2| < 1 \iff -1 < x^2 < 1$$

$$-1 < x^2 \ \wedge \ x^2 < 1$$

$$0 < x^2 + 1 \ \wedge \ x^2 - 1 < 0$$

así, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \qquad I = (-1, 1).$



$x \in (-1, 1)$

Teorema 2 (Continuidad de una serie de potencias):

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente* a la función $f(x)$ en el intervalo I, para el cual el radio de convergencia es $R > 0$ o ∞, entonces la función es continua en cada $x \in I$.

Teorema 3 (Diferenciación de una serie de potencias):

Si la serie de potencias series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente* a la función $f(x)$ en el intervalo I para el cual el radio de convergencia es $R > 0$ o ∞, entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$

es diferenciable en cada $x \in I$ y el *radio de convergencia* R de la función

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(x-c)^{n-1}$$

es el *mismo* que el de la función $f(x)$.

Comentario: Una función f definida por una serie de potencias sobre un intervalo I, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo I.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Derivando respecto a x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$x = -1: \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1}$

div.

$x = 1: \sum_{n=0}^{\infty} n$

div.

así, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ $\quad I = (-1, 1).$

Teorema 4 (Integración de una serie de potencias):

Si la serie de potencias series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente* a la función $f(x)$ en el intervalo I para el cual el radio de convergencia es $R>0$ o ∞, entonces la función $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$

es diferenciable en cada $x \in I$ y el *radio de convergencia* R de la función

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + C$$

es el *mismo* que el de la función $f(x)$.

Teorema 4 (Integración de una serie de potencias):

Si la serie de potencias series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente* a la función $f(x)$ en el intervalo I para el cual el radio de convergencia es $R > 0$ o ∞, entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$

es diferenciable en cada $x \in I$ y el *radio de convergencia* R de la función

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + C$$

es el *mismo* que el de la función $f(x)$.

Comentario: Como la función $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ es continua en el intervalo I, su integral definida existe y está dada por $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b (x-c)^n\,\mathrm{d}x$ para cualquier $a, b \in I$.

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \ln(1-x)$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Integrando respecto a x:

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\,dx$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\,dx$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

así, $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad I = [-1, 1)$

$x = -1: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

c. serie alterna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

conv.

$x = 1$ Div.

Ejemplo: Expresar la función $f(x) = \tan^{-1} x$ como una serie de potencias y determinar su intervalo de convergencia.

De la serie geométrica de potencias:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

de un ejemplo anterior:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Integrando respecto a x:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,dx$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overbrace{(-1)^{2n+1}}^{-1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

conv.

Criterio de la serie alterna:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \quad (1)$$

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$$

$$1 < 3 \quad (2)$$

por (1) y (2) la serie conv.

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{} 1 \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

conv.

así, $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad I = [-1, 1]$

Johnny A. Perafán A.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo (clase anterior): Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$ converge o diverge

Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}\frac{2n+1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+3}}{2n+3}\frac{2n+1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}(2n+1)}{2n+3}\right| = \underline{\frac{1}{3} < 1}$$

La serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = S = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad I = [-1, 1]$$

como $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-1, 1]$, entonces:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

$$\frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{x^5}{1-x}$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$Ln(1-x) \to \int \frac{1}{1-x}$$

$$\tan^{-1} x \to \int \frac{1}{1+x^2}$$

$$\vdots$$

$$f(x) \quad \text{vs} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow$$

$$\ln(1-x) \longrightarrow$$

$$\tan^{-1} x \longrightarrow$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{sen} x \longrightarrow$$

Teorema 5 (Forma general de una serie de potencias):

Si una función f tiene una representación en *series de potencias* de la forma $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ sobre un intervalo I, entonces los *coeficientes* a_n son de la forma $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Comentario: Si una función $f(x)$ tiene una representación en serie de potencias de la forma

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f''(c)}{3!}(x-c)^3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

se denomina serie de Taylor de la función f centrada en c ($c \neq 0$). La serie de Taylor centrada en $c = 0$ es de la forma

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f''(0)}{3!}x^3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

y se denomina serie de Maclaurin de la función f.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo: Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y hallar su intervalo de convergencia.

$c = 0$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = \frac{n!}{1} = n!$$

Serie de Maclaurin: $c = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (x)^n \qquad a_n = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Para el intervalo de convergencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \iff \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{1}_{a_n} (x-0)^n \qquad c = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = \underbrace{1}_{L} \qquad R = \frac{1}{1} = 1$$

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ div.

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1)^n$ div.

$I = (-1, 1)$

Johnny A. Perafán A.
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo: Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y hallar su intervalo de convergencia.

$c = 0$

$$f^{(0)}(x) = e^x$$

$$f^{(1)}(x) = e^x$$

$$f^{(2)}(x) = e^x$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$I = (-\infty, +\infty)$

Johnny A. Perafán A.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} (x-0)^n \qquad c = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \underset{L}{0}$$

$$R = \frac{1}{L} \quad \therefore \quad R \to \infty$$

$$I = (-\infty, +\infty)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo: Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = xe^{x^2}$ y hallar su intervalo de convergencia.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad I = (-\infty, +\infty)$$

sustituyendo (composición) x por x^2

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$$

multiplicando por x:

$$xe^{x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \iff xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

Ejemplo: Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y hallar su intervalo de convergencia.

$c = 0$

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x \longrightarrow f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\vdots$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\cancelto{0}{f^{(0)}(0)}}{0!} x^0 + \frac{\cancelto{1}{f^{(1)}(0)}}{1!} x^1 + \frac{\cancelto{0}{f^{(2)}(0)}}{2!} x^2 + \frac{\cancelto{-1}{f^{(3)}(0)}}{3!} x^3 + \frac{\cancelto{0}{f^{(4)}(0)}}{4!} x^4 + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{-1}{3!} x^3 + \cdots \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejercicio: Comprobar que la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \cos x$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Algunas aplicaciones

Con la serie Taylor se puede determinar la representación en series de potencias para muchas funciones comunes en el cálculo. El objetivo es ilustrar técnicas adicionales asociadas a las series de potencias. Con las series de potencias se cubre todo el panorama del cálculo de límites, derivadas e integrales y la aproximación al valor de una integral definida.

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} = \dfrac{0}{0}$

Ejemplo: Demostrar que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{1!} - \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3!}} + \frac{\cancel{5}x^4}{\cancel{5!}} - \frac{\cancel{7}x^6}{\cancel{7!}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x$$

Ejemplo: Hallar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$x \neq 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + C$$

Ejemplo: Aproximar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x^2} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \frac{x}{0!} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \cdots\right) - (0)$$

$$\simeq$$