Tarea 2 - Métodos Computacionales 2

Juan Pablo Salas (201821908) & Daniel Dorado (201821010)

7 de febrero de 2022

1. Fourier Series

1.1. Series de Fourier

Derivación

Como $f(t)$ es continua en $[-T/2, T/2]$ y $f(-T/2) = f(T/2)$, podemos extender la función para todo $t \in \mathbb{R}$ de forma periódica: $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso tenemos que la serie de Fourier de $f(t)$ converge al valor de la función en toda la recta real.

Adicionalmente, como la derivada es continua a trozos, su serie de Fourier converge, es decir

$$f'(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t),$$

donde $f'(t)$ sea continua. Los coeficientes de la serie están dados por

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt,$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt.$$

Concentrémonos en el coeficiente A_0:

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)dt = \frac{2}{T}[f(T/2) - f(-T/2)] = 0.$$

Para los demás coeficientes usamos integración por partes:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\cos(n\omega_0 t)f(t)\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)[-n\omega_0 \sin(n\omega_0 t)]\,dt \\
&= n\omega_0\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt\right] = n\omega_0 b_n. \\
B_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\sin(n\omega_0 t)f(t)\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)[n\omega_0 \cos(n\omega_0 t)]\,dt \\
&= -n\omega_0\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right] = -n\omega_0 a_n.
\end{aligned}$$

Este cálculo muestra que

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n\omega_0[-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t)],$$

tal como se obtendría al derivar la serie término a término.

Integración

Sin pérdida de generalidad asuma que $t_1 = -T/2$ y $t_2 \in [-T/2, T/2]$. Para verlo observe que si $|t_2 - t_1| > T$, la integral se puede descomponer como una suma de integrales sobre intervalos de longitud T y una sola integral sobre intervalo de longitud menor a T. Por la periodicidad de f, las integrales sobre los intervalos de longitud T son nulas y la última se puede reducir a una integral entre puntos en $[-T/2, T/2]$. Ahora, para cualesquiera dos puntos al interior de este intervalo, tenemos que

$$\int_a^b \cdots = \int_a^{-T/2} \cdots + \int_{-T/2}^b \cdots = -\int_{-T/2}^a \cdots + \int_{-T/2}^b \cdots$$

Esto implica que si el teorema vale para $t_1 = -T/2$ y $t_2 \in [-T/2, T/2]$ vale para cualesquiera dos puntos.

Definamos

$$F(t) = \int_{-T/2}^t f(x)\,dx.$$

Como $f(t)$ es continua a trozos, $F(t)$ es continua. Su serie de Fourier es continua si y solo si $F(T/2) = F(-T/2)$, pero

$$\begin{aligned} F(-T/2) &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0, \\ F(T/2) &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = Ta_0/2. \end{aligned}$$

Esto muestra que en general, $F(-T/2) \neq F(T/2)$ y por ende la serie de Fourier de $F(t)$ no es igual a la función para $-T/2 \leq t \leq T/2$. Sin embargo, defina

$$G(t) = F(t) - H(t),$$

donde $H(t) = \frac{a_0}{2}(t + T/2)$. Claramente, $G(t)$ es continua debido a que es suma de funciones continuas y $G(-T/2) = G(T/2) = 0$, de modo que la serie de Fourier de $G(t)$ converge a la función en $[-T/2, T/2]$. Escriba la serie de Fourier de $G(t)$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t),$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[F(t) - \frac{a_0}{2}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \cos(n\omega_0 t)\,dt, \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[F(t) - \frac{a_0}{2}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \sin(n\omega_0 t)\,dt. \end{aligned}$$

Los coeficientes A_n se calculan integrando por partes:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[F(t) - \frac{a_0 T}{4}\right] \cos(n\omega_0 t)\,dt - \frac{a_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\cos(n\omega_0 t)\,dt.$$

La segunda integral del lado derecho se anula, debido a que es la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico. Para la primera tome $u = F(t) - a_0 T/4$ y $dv = \cos(n\omega_0 t)\,dt$, de modo que $du = f(t)\,dt$ y $v = (n\omega_0)^{-1}\sin(n\omega_0 t)$:

$$A_n = \frac{2}{n\omega_0 T}\sin(n\omega_0 t)\left(F(t) - \frac{a_0 T}{4}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = -\frac{1}{n\omega_0} b_n.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[F(t)-\frac{a_0T}{4}\right]\sin(n\omega_0 t)\,dt - \frac{a_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\sin(n\omega_0 t)\,dt\\
&= -\frac{2}{n\omega_0 T}\cos(n\omega_0 t)\left(F(t)-\frac{a_0T}{4}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\\
&\qquad\qquad - \frac{2t\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0 T}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega_0 t)\,dt\\
&= \frac{1}{n\omega_0}a_n + \frac{2}{(n\omega_0)^2 T}\sin(n\omega_0 t)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{n\omega_0}a_n.
\end{aligned}$$

Finalmente, para A_0 observe que

$$G(T/2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi) + B_n\sin(n\pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi) = 0,$$

luego

$$A_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\omega_0}b_n\cos(n\pi).$$

Así,

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n[\cos(n\omega_0 t)-\cos(n\pi)] + a_n\sin(n\omega_0 t)]$$

y entonces

$$F(t) = H(t) + G(t) = \frac{a_0}{2}\left(t+\frac{T}{2}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n[\cos(n\omega_0 t)-\cos(n\pi)] + a_n\sin(n\omega_0 t)],$$

lo cual coincide con la prescripción del teorema.

1.2. Presentación de funciones

Calculamos los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{t^2}{\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = 0 \quad \text{(integrando impar)},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = -\frac{t\cos(nt)}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt = -\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\sin(nt)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

La serie es entonces

$$t = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$

1.3. Función $\zeta(s)$ de Riemann

1. Note que para esta función, el período y la frecuencia inicial corresponden a $T = 2\pi, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$. Procediendo a calcular los coeficientes se tiene

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Para el coeficiente asociado con el coseno

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{t^2}{n}\sin(nt)\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = -\left.\frac{t\cos(nt)}{n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right|_0^{\pi} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

Con esta integral se tiene

$$A_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Debido a la paridad de la función, todos los coeficientes B_n se anulan. Por esta razón,

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

2. Podemos reescribir la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

Esta serie se puede integrar de $t = 0$ hasta $t = t$ para tener

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt) = \frac{t^3}{12} - \frac{\pi^2 t}{12} = g(t)$$

Note que está es la transformada de Fourier de la función $g(t)$. En este punto se puede utilizar la identidad de Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[g(t)]^2 dt$. Donde la normal del coeficiente c_n está dada por

$$|c_n|^2 = \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 = \frac{b_n^2}{4} = \frac{1}{4n^6}$$

De esta manera se tendrá

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t^3}{12} - \frac{\pi^2 t}{12}\right)^2 dt = \frac{1}{72\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2 dt = \frac{1}{72\pi}\int_0^{\pi} t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2 dt \\ &= \frac{1}{144\pi}\left(\frac{\pi^7}{7} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{3}\right) = \frac{1}{72}\frac{8}{105}\pi^6 = \frac{\pi^6}{945} \end{aligned}$$