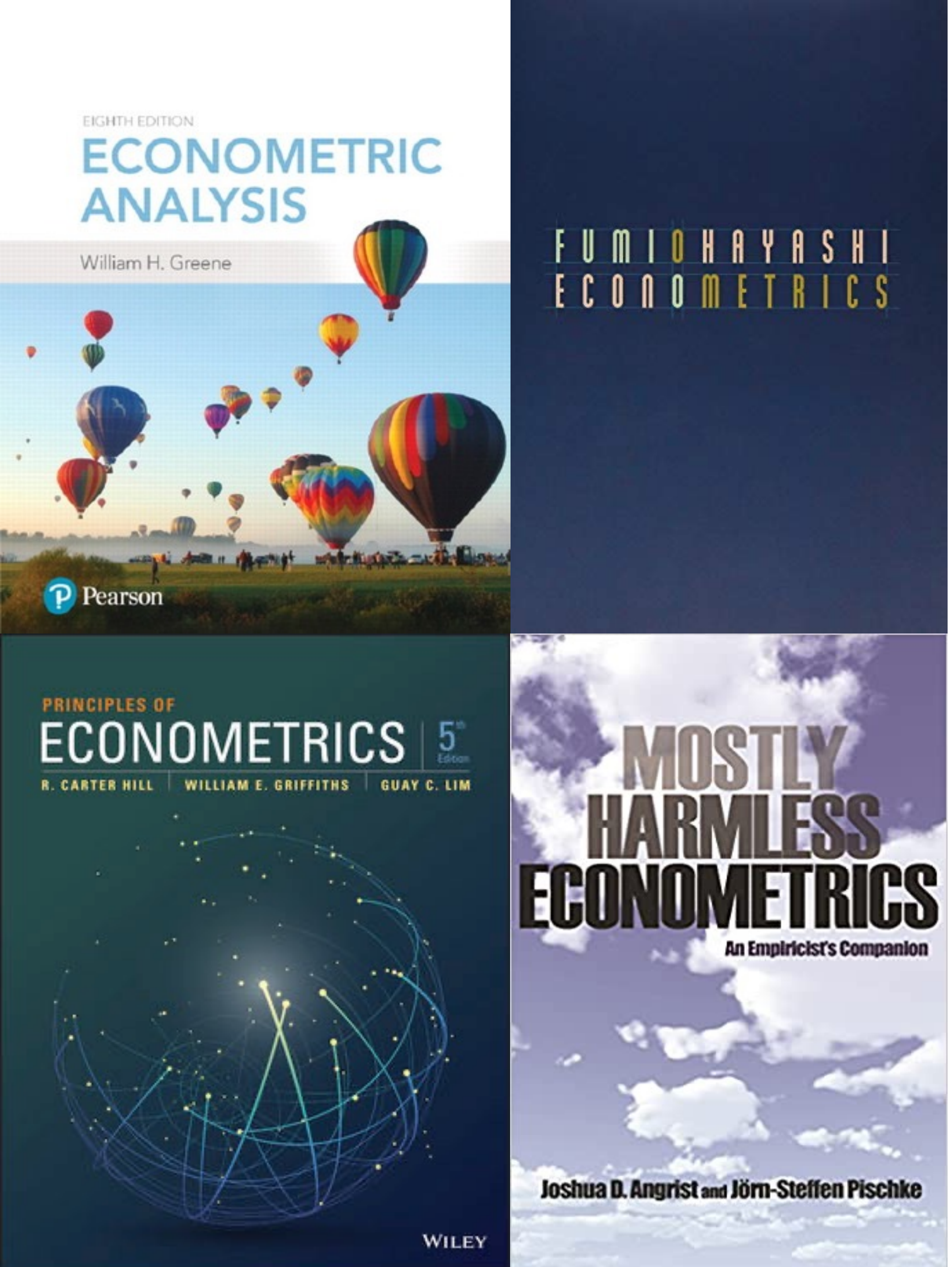
PUCP



MAESTRÍA EN ECONOMÍA
ECONOMETRÍA INTERMEDIA
ECO743 – MÓDULO 2

Sesión 4
Ecuaciones Simultáneas

Docente: Juan Palomino

PUCP

Índice

1. Modelos de Ecuaciones Simultáneas

Modelos de Ecuaciones Simultáneas

Algunos ejemplos son:

- **Modelo de oferta y demanda**: hay dos ecuaciones donde se trata de determina el precio y cantidad de equilibrio
- **Modelo IS-LM**: hay dos ecuaciones, IS (equilibrio de mercado de bienes) y LM (equilibrio mercado monetario) y se trata de hallar la tasa de interés y la producción nacional.

Estos modelos de **ecuaciones simultáneas** difieren de los que hemos visto hasta ahora porque:

- Consisten en un conjunto de ecuaciones
- En cada modelo hay dos o más variables dependientes en lugar de una sola.

Los modelos de ecuaciones simultáneas, que contienen más de una variable dependiente y más de una ecuación, requieren un tratamiento estadístico especial.

Ejemplo 1: Modelo de Oferta y Demanda

Función de Demanda → $Q_t^d = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D$

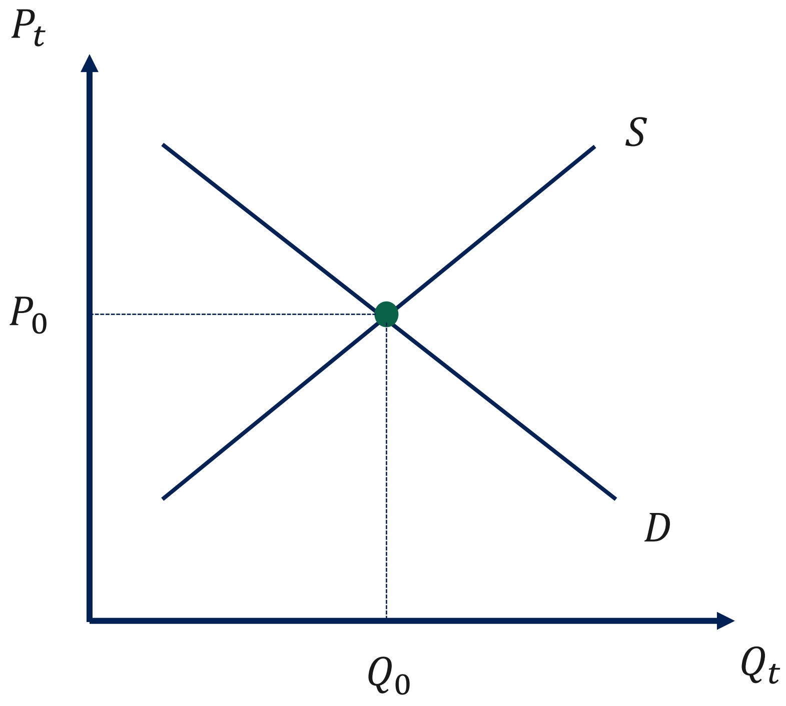
Función de Oferta → $Q_t^s = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \epsilon_t^S$

Condición de Equilibrio → $Q_t^d = Q_t^s = Q$

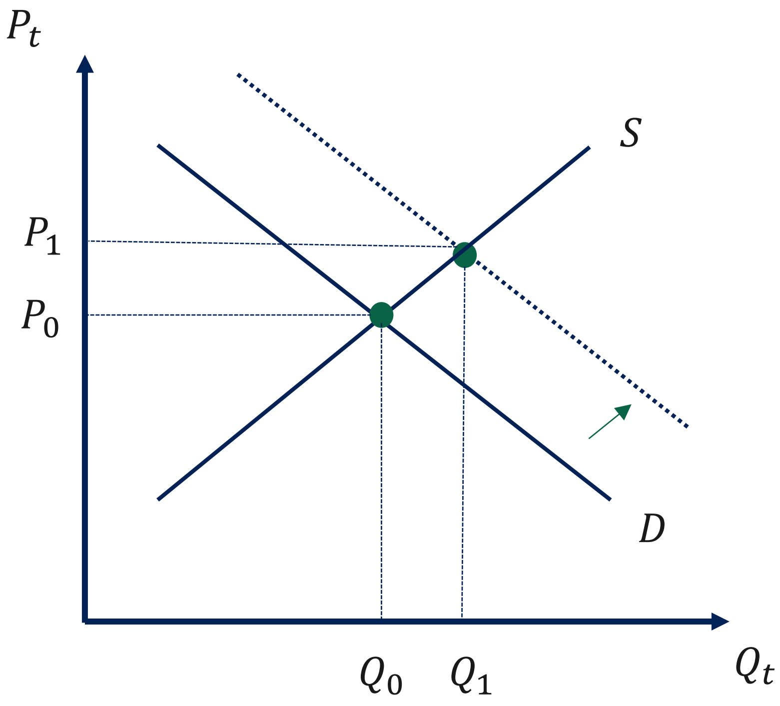
Basado en teoría económica, se espera que $\gamma_1 < 0$ y $\gamma_2 > 0$.

Modelos de Ecuaciones Simultaneas

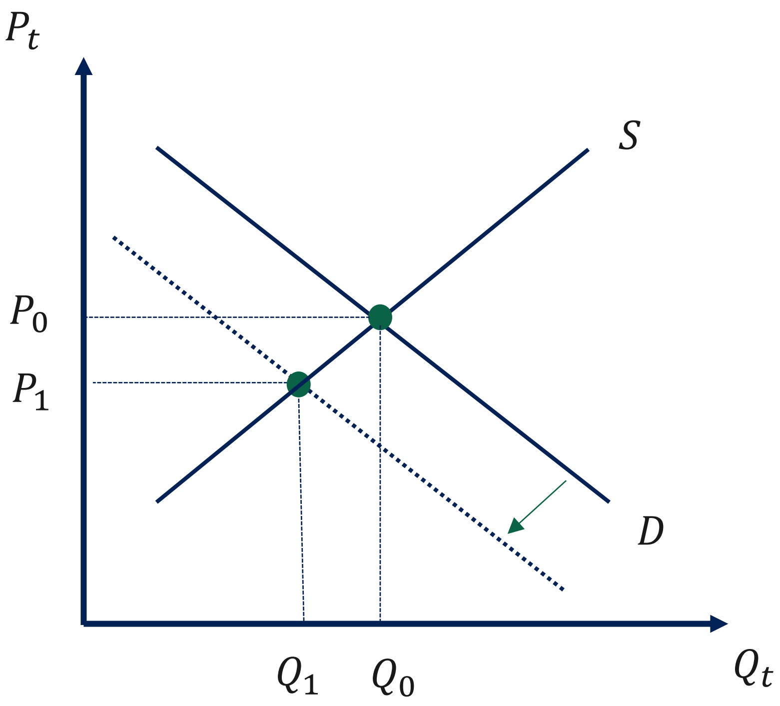
Equilibrio Demanda y Oferta



Aumento de la Demanda

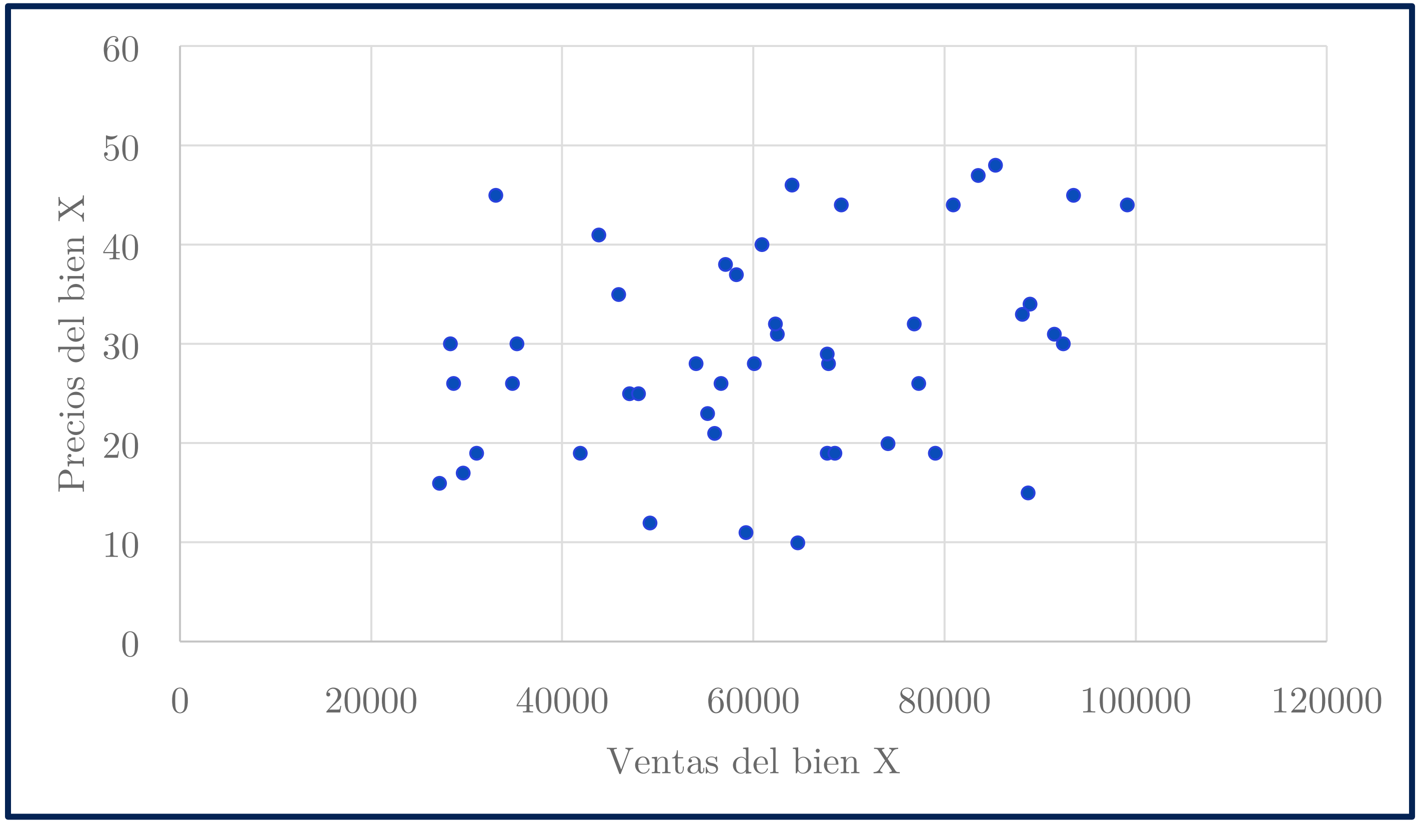


Disminuye la Demanda



Modelos de Ecuaciones Simultaneas

Tenemos datos de precios y ventas de un bien X



Modelos de Ecuaciones Simultaneas

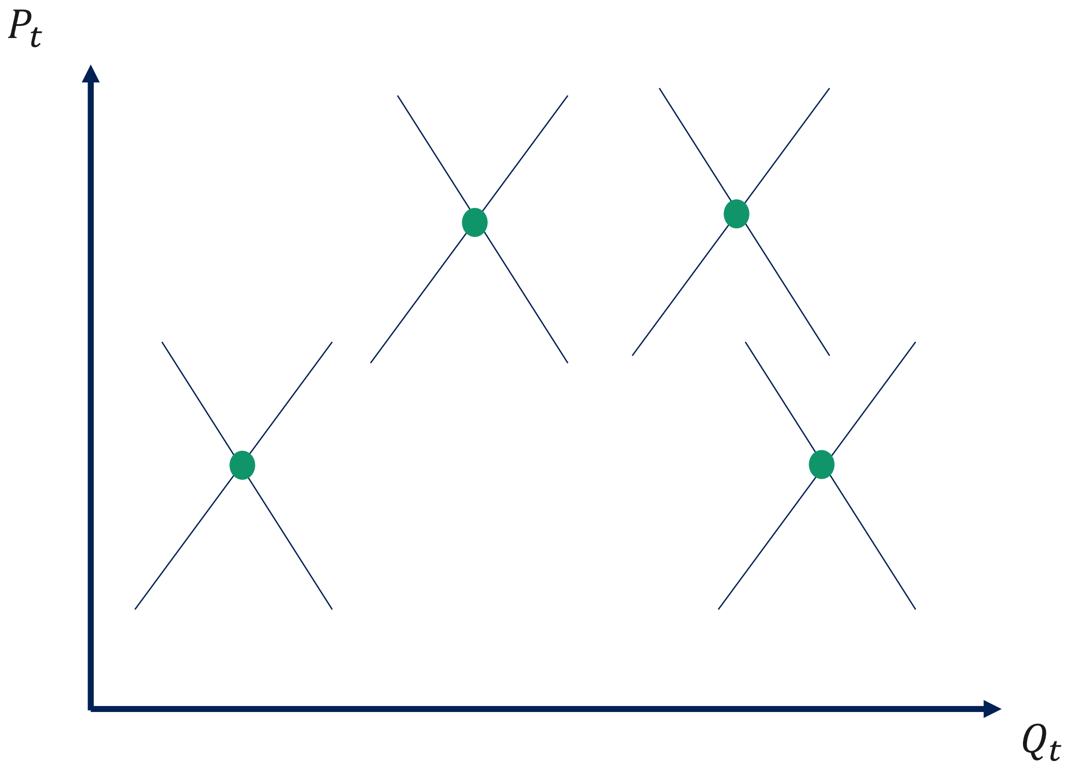
Estimando el modelo de demanda.

```
> ols <- lm_robust(Ventas ~ Precio, base, se_type="stata")
> summary(ols)

Call:
lm_robust(formula = Ventas ~ Precio, data = base, se_type = "stata")

Standard error type:  HC1

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value     Pr(>|t|) CI Lower CI Upper DF
(Intercept)    49568     8383.1   5.913 0.0000004531  32673.3  66463.4 44
Precio           256      293.5   0.872 0.3879687546   -335.6    847.5 44

Multiple R-squared:  0.01663 ,  Adjusted R-squared:  -0.005715
F-statistic: 0.7603 on 1 and 44 DF,  p-value: 0.388
```

Coeficiente del precio es positivo. ¿No debería ser negativo? ¿Será que hemos estimado la oferta?

Modelos de Ecuaciones Simultaneas

- Lo que se ha estimado no es ni la demanda ni la oferta.
- Cada punto del diagrama de dispersión es un punto de equilibrio.



No se puede **identificar** ni la demanda ni la oferta.

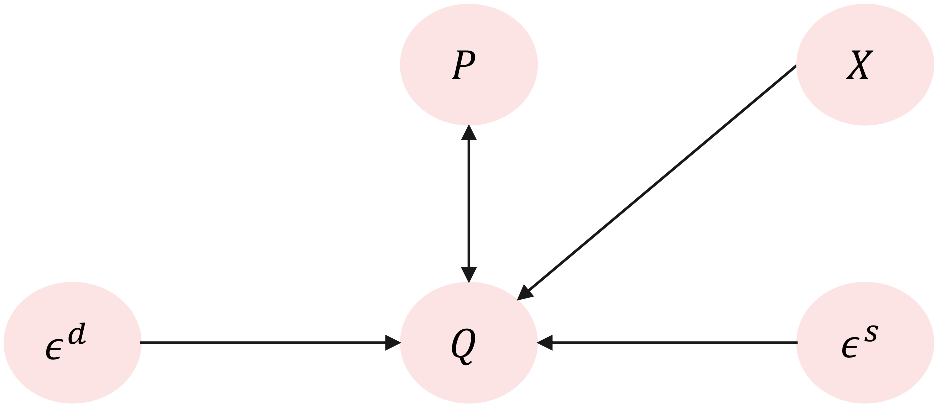
Ejemplo 2: Agregando una variable a la oferta:

Función de Demanda → $Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D$

Función de Oferta → $Q_t = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S$

X_t es el dato de precios de insumos y afecta solo a la oferta (materia primas, salarios).

- Se asume que X_t es exógena, es decir, no correlacionada con los errores: $cov(X_t, \epsilon_t) = 0$



Modelos de Ecuaciones Simultaneas

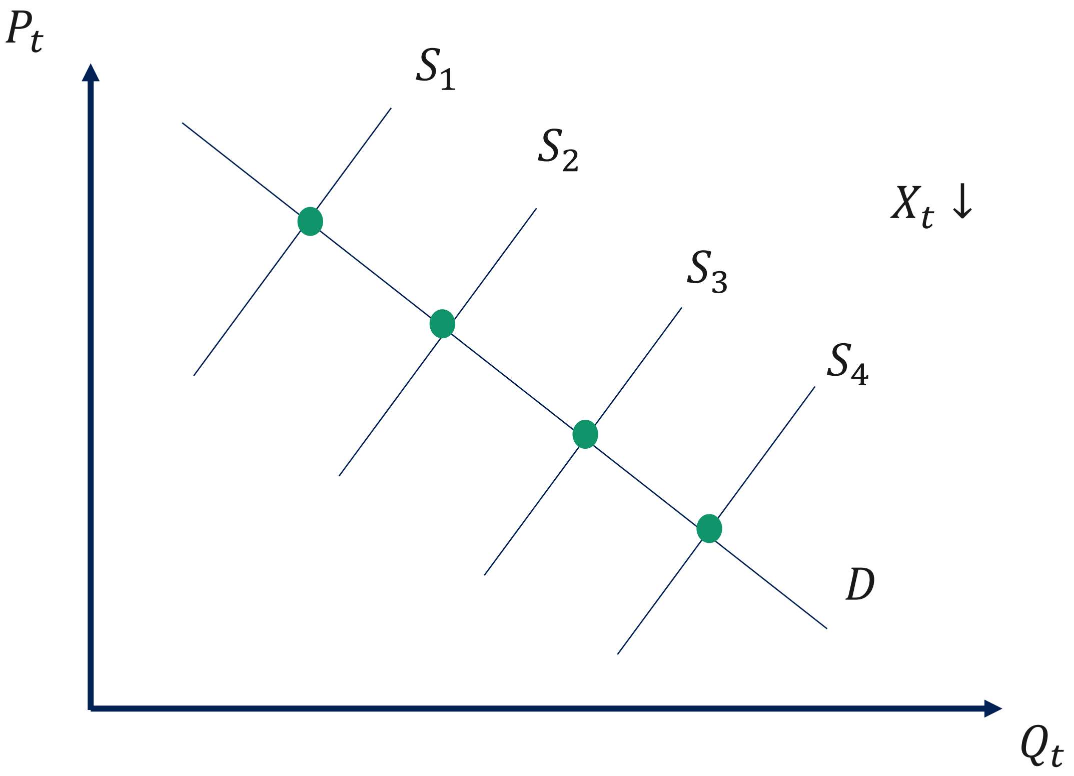
Asumir que X_t afecta solo a la oferta y, por lo tanto, cambio en X_t desplaza a la curva de oferta.

Estos desplazamientos dibujan a la curva de demanda.

Esta variable adicional en la oferta ayuda a **identificar** a la demanda en la dispersión.

Un parámetro está identificado si es posible obtener una estimación de él con datos.

Una ecuación está identificada si sus parámetros también lo están.



2. La Forma Estructural y Reducida

La Forma Estructural

- Vamos a estudiar en más detalle el tema de la **identificación**.
- En los ejemplos 1 y 2, los modelos están presentados en su **forma estructural.**
- En la forma estructural las ecuaciones aparecen tal como las dicta la teoría económica.
- Los parámetros ahí presentes son los **parámetros estructurales.**

La Forma Estructural

En el ejemplo anterior,

Función de Demanda ➔ $Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D$

Función de Oferta ➔ $Q_t = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S$

- Q_t y P_t son las variables endógenas.
- 1 y X_t son las variables exógenas (1 es la constante)
- $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ son parámetros estructurales.
- ϵ_t^D y ϵ_t^S son errores estructurales. Sus varianzas σ_d^2 y σ_s^2 y también son parámetros estructurales.

$$E(\epsilon_t^D) = 0, \qquad Var(\epsilon_t^D) = \sigma_d^2$$
$$E(\epsilon_t^D) = 0, \qquad Var(\epsilon_t^S) = \sigma_s^2$$
$$Cov(\epsilon_t^D, \epsilon_t^S) = 0$$

La Forma Estructural

- En términos matriciales:

$$Q_t - \gamma_1 P_t = \beta_1 + \epsilon_t^D \qquad \text{(demanda)}$$

$$Q_t - \gamma_2 P_t = \beta_2 + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S \qquad \text{(oferta)}$$

- Luego:

Forma Estructural Matricial

$$[Q_t \quad P_t] \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{demanda} & \text{oferta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \end{array} = [1 \quad X_t] \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{demanda} & \text{oferta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \end{array} + [\epsilon_t^D \quad \epsilon_t^S]$$

- Luego, en matrices compactas:

$$\boxed{y_t \Gamma = x_t B + \epsilon}$$

Siendo $y_t = [Q_t \quad P_t]$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}$, $x_t = [1 \quad X_t]$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$, $\epsilon = [\epsilon_t^D \quad \epsilon_t^S]$

La Forma Reducida

- Despejamos las endogenas en función de todos lo demás:

$$y_t\Gamma = x_t B + \epsilon$$

$$y_t\Gamma\Gamma^{-1} = x_t B\Gamma^{-1} + \epsilon\Gamma^{-1}$$

$$y_t = x_t B\Gamma^{-1} + \epsilon\Gamma^{-1}$$

- Sea $\Pi = B\Gamma^{-1}$ y $\nu = \epsilon\Gamma^{-1}$

Forma Reducida Matricial

$$\boxed{y_t = x_t\Pi + \nu}$$

$$[Q_t \quad P_t] = [1 \quad X_t]\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \\ \pi_2 & \pi_4 \end{bmatrix} + [\nu_{1t} \quad \nu_{2t}]$$

La Forma Reducida

- En ecuaciones, la forma reducida es:

$$Q_t = \pi_1 + \pi_2 X_t + v_{1t}$$

$$P_t = \pi_3 + \pi_4 X_t + v_{2t}$$

Comentarios:

- La forma reducida es la **solución o equilibrio** del sistema.
- La forma reducida tiene a cada endógena en función de las exógenas.
- Errores de la forma reducida: v_{1t} y v_{2t}
- Parámetros de la forma reducida: π_1, π_2, π_3, π_4, y también

$$\sigma_{1t}^2 = Var(v_{1t}),\ \sigma_{2t}^2 = Var(v_{2t}),\ \sigma_{12} = Cov(v_{1t}, v_{2t})$$

La Forma Estructural y Reducida

Los parámetros reducidos están en función de los estructurales.

$$\Pi = B\Gamma^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \\ \pi_2 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_2 & -1 \\ \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{bmatrix} -\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 & -\beta_1 + \beta_2 \\ \beta_3\gamma_1 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \\ \pi_2 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} & \frac{-\beta_1 + \beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ \frac{\beta_3\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} & \frac{\beta_3}{\gamma_1 - \gamma_2} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

π_1 : Intercepto de la ecuación de la cantidad

π_2 : Pendiente de la ecuación de la cantidad

π_3 : Intercepto de la ecuación del precio

π_4 : Pendiente de la ecuación del precio

La Forma Estructural y Reducida

- Los errores reducidos también se expresan en función de los estructurales.

$$\nu = \epsilon\Gamma^{-1}$$

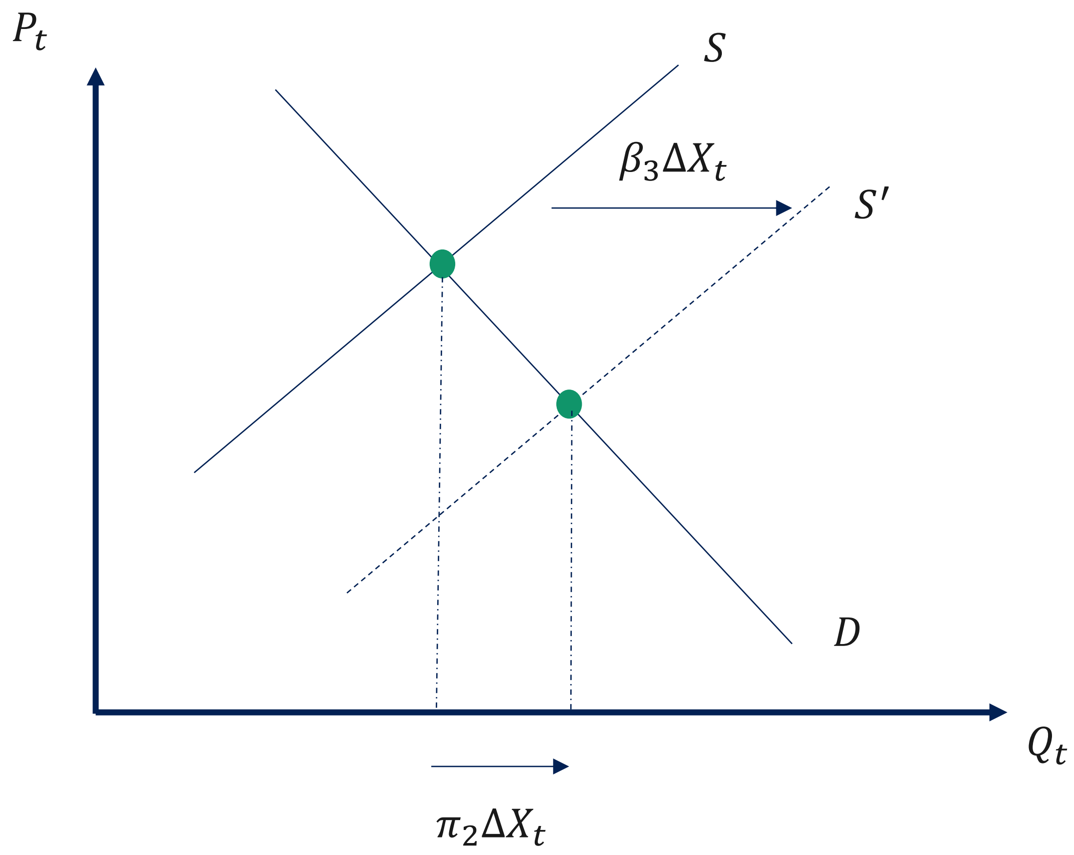
$$\begin{bmatrix} \nu_{1t} & \nu_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_t^D & \epsilon_t^S \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{bmatrix} -\gamma_2 & -1 \\ \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{1t} & \nu_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma_2\epsilon_t^D + \gamma_1\epsilon_t^S}{\gamma_1 - \gamma_2} & \frac{-\epsilon_t^D + \epsilon_t^S}{\gamma_1 - \gamma_2} \end{bmatrix}$$

- Error reducido 1 y 2 es una combinación lineal de los errores estructurales de la oferta y demanda.

- La covarianza entre ν_{1t} y ν_{2t} es distinto de cero.

Supongamos que se reduce (X ↓), esto desplaza la oferta a la derecha.



$$\boldsymbol{Q_t^s = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S}$$

El desplazamiento horizontal es:

$$\Delta Q_t^s = \beta_3 \Delta X_t$$

$$\boxed{\frac{\Delta Q_t^s}{\Delta X_t} = \beta_3}$$

Cuanto cambia la **cantidad ofrecida** si hay un cambio en precio de insumos (ΔX_t)

$$\boldsymbol{Q_t = \pi_1 + \pi_2 X_t + \nu_{1t}}$$

$$\Delta Q_t = \pi_2 \Delta X_t$$

$$\boxed{\frac{\Delta Q_t}{\Delta X_t} = \pi_2}$$

Cambio en la cantidad de **equilibrio de mercado** debido a un cambio en el precio de insumos (ΔX_t)

3. Identificación y Estimación por MCI y MC2E

Estimación de la Forma Reducida

- La forma reducida **puede estimarse consistentemente por MCO**

$$Q_t = \pi_1 + \pi_2 X_t + v_{1t}$$

$$P_t = \pi_3 + \pi_4 X_t + v_{2t}$$

- Se asume que X_t no se correlaciona con ϵ_t^D ni con ϵ_t^S en el modelo estructural, y, por ello, no se correlaciona con v_{1t} ni con v_{2t} en la forma reducida.

$$Cov(X_t, \epsilon_t^D) = 0 \;\rightarrow\; Cov(X_t, v_{1t}) = 0$$
$$Cov(X_t, \epsilon_t^S) = 0 \;\rightarrow\; Cov(X_t, v_{2t}) = 0$$

- Sea $\hat{\pi}_1$, $\hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$ y $\hat{\pi}_4$ los estimadores MCO de la forma reducida.

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

- Si no se puede estimar por MCO los parámetros estructurales, ¿Cómo podemos estimar estos?
- De acuerdo con la ecuación $\Pi = B\Gamma^{-1}$, hallabamos la relación entre parámetros estructurales y reducidos donde:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \\ \pi_2 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2} & \frac{-\beta_1+\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2} \\ \frac{\beta_3\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2} & \frac{\beta_3}{\gamma_1-\gamma_2} \end{bmatrix}} \qquad (1)$$

- Entonces es cierto que la pendiente de la demanda es: $\gamma_1 = \frac{\pi_2}{\pi_4}$ (2)
- El estimador de la pendiente: $\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_4}$
- Este es un estimador consistente de γ_1 pues: $Plim\hat{\gamma}_1 = \frac{Plim\hat{\pi}_2}{Plim\hat{\pi}_4} = \frac{\pi_2}{\pi_4} = \gamma_1$
- Por lo tanto, **la pendiente de la demanda está identificada y es estimable.**

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

- En el caso del intercepto de la demanda β_1, a partir de la ecuación (1) no es tan directo expresarlo en función de los π.
- La forma de hacerlo es a partir de $\Pi = B\Gamma^{-1}$, si pasamos a Γ a la izquierda:

$$\Pi\Gamma = B$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \\ \pi_2 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

- Multiplicando la primera fila de Π por la primera columna de Γ e igualando a la primera casilla de B.

$$\pi_1 - \pi_3\gamma_1 = \beta_1$$

- Usando (2), se tiene que:

$$\beta_1 = \pi_1 - \pi_3 \frac{\pi_2}{\pi_4}$$

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

- Luego, el estimador consistente es:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_3 \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_4}$$

- Estos estimadores obtenidos a partir de los parámetros reducidos son los estimadores de **Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI)**.

- Entonces como β_1 y γ_1 son estimables consistentemente, **la demanda está identificada**.

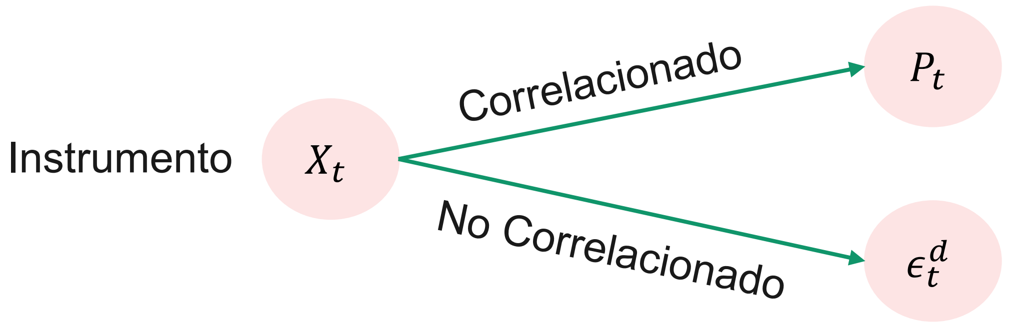
- No ocurre lo mismo con la oferta. No se puede hallar los parámetros de $\gamma_2, \beta_2, \beta_3$ en función de los π.

Estimación por MC2E

- Si deseamos estimar la demanda por MC2E, el instrumento es X_t

$$Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D \qquad \text{(demanda)}$$

$$Q_t = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S \qquad \text{(oferta)}$$



- La primera etapa es la estimación de la forma reducida para P_t, $\hat{P}_t = \hat{\pi}_3 + \hat{\pi}_4 X_t$ y en la segunda etapa se estima $Q_t = \beta_1 + \gamma_1 \hat{P}_t + \eta_t$.
- Notar que **NO** se puede estimar la oferta por MC2E pues X_t no es un instrumento. ¿Por qué? ¿Qué necesitamos?
- Se deduce que si queremos identificar y **estimar la oferta**, tenemos que **agregar regresores exógenos a la demanda**.

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

Ejemplo 3: Agregamos el ingreso de los consumidores C_t

Función de Demanda → $Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \beta_2 C_t + \epsilon_t^D$

Función de Oferta → $Q_t = \beta_3 + \gamma_2 P_t + \beta_4 X_t + \epsilon_t^S$

Forma Estructural Matricial

$$[Q_t \quad P_t]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} = [1 \quad C_t \quad X_t]\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_4 \end{bmatrix} + [\epsilon_t^D \quad \epsilon_t^S]$$

$$y_t \underset{2\times 2}{\Gamma} = x_t \underset{3\times 2}{B} + \epsilon_t$$

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

$$y_t = x_t \underset{3\times 2}{B} \underset{2\times 2}{\Gamma^{-1}} + \epsilon_t \Gamma^{-1}$$

$$y_t = x_t \underset{3\times 2}{\Pi} + \nu_t$$

- En ecuaciones:

$$Q_t = \pi_1 + \pi_2 C_t + \pi_3 X_t + \nu_{1t}$$

$$P_t = \pi_4 + \pi_5 C_t + \pi_6 X_t + \nu_{2t}$$

- Hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior:

$$\Pi = B\Gamma^{-1}$$

$$\Pi\Gamma = B$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_4 \\ \pi_2 & \pi_5 \\ \pi_3 & \pi_6 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{demanda} \quad \text{oferta} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_4 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{demanda} \quad \text{oferta} \end{array}$$

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

Para la **demanda:**

$$\pi_1 - \pi_4\gamma_1 = \beta_1 \qquad \text{(Ia)}$$

$$\pi_2 - \pi_5\gamma_1 = \beta_2 \qquad \text{(Ib)}$$

$$\pi_3 - \pi_6\gamma_1 = 0 \qquad \text{(II)}$$

- De (II), $\gamma_1 = \frac{\pi_3}{\pi_6}$
- Reemplazando en (1a), $\beta_1 = \pi_1 - \pi_4\frac{\pi_3}{\pi_6}$
- Reemplazando en (1b), $\beta_2 = \pi_2 - \pi_5\frac{\pi_3}{\pi_6}$

La demanda está identificada

Identificación de los parámetros estructurales usando la forma reducida

Para la **oferta**:

$$\pi_1 - \pi_4\gamma_2 = \beta_3 \qquad \text{(Ia)}$$

$$\pi_2 - \pi_5\gamma_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\pi_3 - \pi_6\gamma_2 = \beta_4 \qquad \text{(Ib)}$$

- De (II), $\gamma_2 = \frac{\pi_2}{\pi_5}$
- Reemplazando en (1a), $\beta_3 = \pi_1 - \pi_4\frac{\pi_2}{\pi_5}$
- Reemplazando en (1b), $\beta_4 = \pi_3 - \pi_6\frac{\pi_2}{\pi_5}$

La oferta está identificada

- En este ejemplo, tanto la oferta como la demanda están identificadas.
- Pueden ser estimadas por MCI o por MC2E.

Sobreidentificación

Veamos un ejemplo en donde MCI es menos apropiado que MC2E.

Ejemplo 4: El modelo sigue la siguiente estructura:

Función de Demanda → $Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \beta_2 C_t + \beta_3 R_t + \epsilon_t^D$

Función de Oferta → $Q_t = \beta_4 + \gamma_2 P_t + \epsilon_t^S$

- Donde R_t es el precio de otros bienes.
- La demanda no está identificada porque no hay variables de la oferta que provoquen desplazamientos en la oferta que permitan identificarla.
- La oferta si está identificada porque hay variables en la demanda que provoca desplazamientos en la demanda, que permite identificar a la oferta.
- Aquí, la matriz Γ es igual a los ejemplos anteriores pero B no.

Sobreidentificación

Veamos la identificación:

$$\Pi\Gamma = B$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_4 \\ \pi_2 & \pi_5 \\ \pi_3 & \pi_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_4 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Está claro que la demanda no está identificada pues no hay exógenas en la oferta.
- En cambio la oferta sí está identificada, pues hay dos exógenas en la demanda.
- Sin embargo, existe un problema con MCI.

Sobreidentificación

Para la oferta:

$$\pi_1 - \pi_4\gamma_2 = \beta_4 \qquad \text{(I)}$$

$$\pi_2 - \pi_5\gamma_2 = 0 \qquad \text{(IIa)}$$

$$\pi_3 - \pi_6\gamma_2 = 0 \qquad \text{(IIb)}$$

- De (IIa), $\gamma_2 = \frac{\pi_2}{\pi_5}$
- De (IIb), $\gamma_2 = \frac{\pi_3}{\pi_6}$

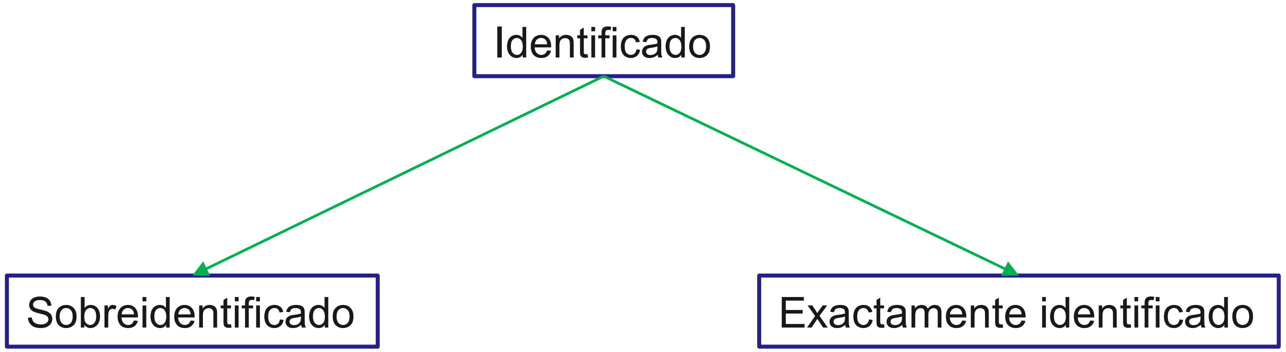
Hay 2 respuestas para γ_2

- Reemplazando γ_2 en (I) también hay 2 respuestas para β_4.

La oferta está **sobreidentificada**

Sobreidentificación

- No es bueno tener dos estimaciones de la oferta y no tener ningún criterio para elegir alguna de ellas.
- Entonces MCI solo sirve cuando el procedimiento produce una respuesta única. A ese caso lo llamamos "**exactamente identificado**".



Sobreidentificación

¿Qué ocurre con MC2E?

- La sobreidentificación no la afecta.
- En la primera etapa se estima la forma reducida por MCO y se calcula la predicción $\hat{P}_t$

$$\hat{P}_t = \hat{\pi}_4 + \hat{\pi}_5 C_t + \hat{\pi}_6 R_t$$

- Y en la segunda etapa se estima por MCO,

$$Q_t = \beta_4 + \gamma_2 \hat{P}_t + \eta_t$$

- Así se obtiene una estimación única de los parámetros de la oferta: $\hat{\beta}_4$ y $\hat{\gamma}_2$

¿MCI o MC2E?

- MCI solo puede emplearse para el caso exactamente identificado.

- MC2E para los casos exactamente identificado y sobreidentificado.

- En la práctica es mejor usar MC2E siempre y cuando exista identificación.

- Lo que hemos aprendido de MCI nos servirá para poder definir un criterio general para decir cuándo una ecuación está o no identificada.

4. Planteamiento General del MES

Planteamiento General del MES

- Asumamos un modelo lineal que contiene g ecuaciones
- Asumiremos que hay g variables endógenas y todas están relacionadas entre sí
- g endógenas: $Y_1, Y_2, \dots, Y_g$
- k exógenas: $X_1, \dots, X_k$
- El sistema de ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$Y_1 = \gamma_{21}Y_2 + \gamma_{31}Y_3 + \cdots + \gamma_{g1}Y_g + \beta_{11} + \beta_{21}X_2 + \cdots + \beta_{k1}X_k + \epsilon_1$$

$$Y_2 = \gamma_{12}Y_1 + \gamma_{32}Y_3 + \cdots + \gamma_{g2}Y_g + \beta_{12} + \beta_{22}X_2 + \cdots + \beta_{k2}X_k + \epsilon_2$$

$$Y_3 = \gamma_{13}Y_1 + \gamma_{23}Y_2 + \cdots + \gamma_{g3}Y_g + \beta_{13} + \beta_{23}X_2 + \cdots + \beta_{k3}X_k + \epsilon_3$$

$$Y_g = \gamma_{1g}Y_1 + \gamma_{2g}Y_2 + \cdots + \gamma_{g-1,g}Y_{g-1} + \beta_{1g} + \beta_{2g}X_2 + \cdots + \beta_{kg}X_k + \epsilon_g$$

Planteamiento General del MES

En notación matricial:

$$
[Y_{1i} \quad Y_{2i} \quad \cdots \quad Y_{gi}]\begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{12} & \cdots & \cdots & -\gamma_{1g} \\ -\gamma_{21} & 1 & \cdots & \cdots & -\gamma_{2g} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \ddots & \cdots & -\gamma_{3g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{g1} & -\gamma_{g2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad X_{2i} \quad \cdots \quad X_{ki}]\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \cdots & \beta_{1g} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \cdots & \beta_{2g} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \ddots & \cdots & \beta_{3g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \cdots & \beta_{kg} \end{bmatrix} + [\epsilon_{1i} \quad \epsilon_{2i} \quad \cdots \quad \epsilon_{gi}]
$$

Ecuación 1 Ecuación 2 Ecuación g

Ecuación 1 Ecuación 2 Ecuación g

Tiene la forma:

$$
\underset{1\times g}{\boldsymbol{y_i}} \quad \underset{g\times g}{\boldsymbol{\Gamma}} = \underset{1\times k}{\boldsymbol{x_i}} \quad \underset{k\times g}{\boldsymbol{B}} + \underset{1\times g}{\boldsymbol{\epsilon_i}}
$$

Planteamiento General del MES

- En el caso de los errores, la matriz de **varianzas y covarianzas entre ecuaciones:**

$$Var(\epsilon_i) = E[\epsilon_i'\epsilon_i] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_g^2 \end{bmatrix} = \Sigma$$

- Notar que si $g = 1$, entonces $\Gamma = 1$ y B solo tiene una columna. Entonces:

$$y_i = x_i\beta + \epsilon_i$$

$$Var(\epsilon_i) = \sigma^2$$

Planteamiento General del MES

- La forma reducida es:

$$y_i = x_i B \Gamma^{-1} + \epsilon_i \Gamma^{-1}$$

$$\underset{}{y_i} = \underset{1\times k}{x_i} \; \underset{\text{k}\times g}{\Pi} + \underset{1\times g}{v_i} \qquad Var(v_i) = \underset{g\times g}{\Omega}$$

- Estudiar la identificación observando cuantos parámetros existen.
- En Π hay $k\times\text{g}$ parámetros reducidos en función de los estructurales y en Ω hay $g(g+1)/2$ parámetros reducidos más.
- La cantidad de parámetros reducidos:

$$k\times\text{g} + g(g+1)/2$$

- La cantidad de parámetros estructurales:

$$\underbrace{g^2 - g}_{\text{En } \Gamma} + \underbrace{k\times g}_{\text{En } B} + \underbrace{g}_{\text{En } \Sigma}$$

$\boxed{\text{Hay más parámetros estructurales que reducidos}}$

Planteamiento General del MES

- En efecto, hay más parámetros estructurales que reducidos.
- Por ello, es imposible que podamos despejar a los parámetros estructurales en función de los reducidos.
- Dejando de lado las varianzas, vimos que la identificación de las pendientes puede estudiarse a partir de $\Pi = B\Gamma^{-1}$ o de $\Pi\Gamma = B$.
- Hay más incógnitas que ecuaciones (notar que cada π_j en Π es una ecuación).

$k\times\mathrm{g}$ ecuaciones y $g^2 - g + k\times g$ incógnitas

- Por tanto, el modelo donde “todo depende de todo” no está identificado.

5. Identificación del Modelo General

Identificación del Modelo General

- Para alcanzar identificación se debe agregar información adicional:
  - **Restricciones de exclusión**: Quitar algunas exógenas o endógenas de algunas ecuaciones.
  - **Restricciones lineales**: Son del tipo $\beta_{21} + \beta_{31} = 1$, por ejemplo.

- En los ejemplos que hemos visto, hemos aplicado restricciones de exclusión, que son las más comunes.

- Vamos a aplicar restricciones de exclusión (“quitar variables”).

Identificación del Modelo General

Definamos:

- g =número de endógenas en el modelo
- g_j =número de endógenas incluidas en la ecuación j
- k =número de exógenas en el modelo
- k_j =número de exógenas incluidas en la ecuación j

Sea la $j-\acute{e}sima$ ecuación así (omitimos los subíndices i)

$$y_j = \gamma_j Y_j + x_j \beta_j + \epsilon_j$$

- Y_j =vector de endógenas incluidas en el lado derecho de "=".

Identificación del Modelo General

En matrices, la ecuación j:

$$[y_j \;\vdots\; Y_j \;\vdots\; Y_{-j}]\begin{bmatrix}1\\ \cdots\\ -\gamma_j\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix} = [x_j \;\vdots\; x_{-j}]\begin{bmatrix}\beta_j\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix} + [\epsilon_j]$$

Donde:

- Y_{-j} =Endógenas excluidas de j
- x_{-j} =Exógenas excluidas de j

Identificación del Modelo General

- Si colocamos a la ecuación j en primer lugar (el orden de las ecuaciones es arbitrario en los MES), el modelo completo es:

$$
[\underbrace{y_j \;\vdots\; \underbrace{Y_j}_{g_j-1}}_{g_j} \;\vdots\; \underbrace{Y_{-j}}_{g-g_j}]
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & \vdots & \Gamma_0 \\ \cdots & & \cdots \\ -\gamma_j & \vdots & \Gamma_1 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \Gamma_2 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ Ec\ j & & \text{Todo lo demás} \end{array}
\end{array}
= [\underbrace{x_j}_{k_j} \;\vdots\; \underbrace{x_{-j}}_{k-k_j}]
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \beta_j & \vdots & B_1 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & B_2 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ Ec\ j & & \text{Todo lo demás} \end{array}
\end{array}
+ \epsilon
$$

- $-\gamma_j$ es una columna $(g_j - 1)\times 1$.
- β_j es una columna $k_j \times 1$ y el 0 debajo es $k - k_j \times 1$

Identificación del Modelo General

- Veamos la identificación de la ecuación j con $\Pi\Gamma = B$,
- Como Γ es particionada 3 × 2 y B es particionada 2 × 2, entonces Π es particionada 2 × 3.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} k_j \\ \\ k-k_j \end{matrix} & \left[\begin{matrix} \Pi_1 & \vdots & \Pi_2 & \vdots & \Pi_3 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \Pi_4 & \vdots & \Pi_5 & \vdots & \Pi_6 \end{matrix}\right] \\ & \begin{matrix} 1 & \quad & g_j - 1 & \quad & g - g_j \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \Gamma_0 \\ \cdots & & \cdots \\ -\gamma_j & \vdots & \Gamma_1 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j & \vdots & B_1 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_j \\ \\ k-k_j \end{matrix}$$

$$\Pi_1 - \Pi_2\gamma_j = \beta_j \qquad (I)$$

$$\Pi_4 - \Pi_5\gamma_j = 0 \qquad (II)$$

Identificación del Modelo General

- De la ecuación (II),

$$\Pi_4 = \Pi_5 \gamma_j \qquad\qquad (II')$$

- Para despejar a γ_j, notar que Π_5 es dimensión $k - k_j \times g_j - 1$.
- Si ven con cuidado, (II') es un sistema de ecuaciones con $k - k_j$ ecuaciones (pues Π_4 es $k - k_j \times 1$) y $g_j - 1$ incógnitas (las γ).
- Evidentemente si $k - k_j < g_j - 1$ ($\#\, ecuaciones\ < \#\, incógnitas$) no habrá solución para los γ.

5. Identificación del Modelo General

5.1 Condición de Orden

Condición de Orden

- **Condición de Orden**: es una condición necesaria para la identificación:

$$k - k_j \geq g_j - 1$$

- En palabras, el número de exógenas excluidas de la ecuación j debe ser **mayor o igual** al número de endógenas incluidas en el lado derecho del signo "=".

- Si $k - k_j < g_j - 1 \rightarrow$ la ecuación j está **subidentificada**.

- Si $k - k_j = g_j - 1 \rightarrow$ la ecuación j está **exactamente identificada**.

- Si $k - k_j > g_j - 1 \rightarrow$ la ecuación j está **sobreidentificada**.

Condición de Orden

Ejemplo 1: En el modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D \qquad \text{(Demanda)}$$
$$Q_t = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \epsilon_t^S \qquad \text{(Oferta)}$$

En ninguna de las dos se cumple la condición de orden pues:

$k - k_j = 1 - 1 = 0$ y $g_j - 1 = 2 - 1 = 1$ en ambas ecuaciones → subidentificadas.

Ejemplo 2: En el modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \epsilon_t^D \qquad \text{(Demanda)}$$
$$Q_t = \beta_2 + \gamma_2 P_t + \beta_3 X_t + \epsilon_t^S \qquad \text{(Oferta)}$$

Para la demanda: $k - k_j = 2 - 1 = 1$ y $g_j - 1 = 2 - 1 = 1$→ exactamente identificada

Para la oferta: $k - k_j = 2 - 2 = 0$ y $g_j - 1 = 2 - 1 = 1$→ subidentificada

Condición de Orden

Ejemplo 3: En el modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \gamma_1 P_t + \beta_2 C_t + \beta_3 R_t + \epsilon_t^D \qquad \text{(Demanda)}$$
$$Q_t = \beta_4 + \gamma_2 P_t + \epsilon_t^S \qquad \text{(Oferta)}$$

Para la demanda: $k - k_j = 3 - 3 = 0$ y $g_j - 1 = 2 - 1 = 1$→ subidentificada

Para la oferta: $k - k_j = 3 - 1 = 2$ y $g_j - 1 = 2 - 1 = 1$→ sobreidentificada

5. Identificación del Modelo General

5.2 Condición de Rango

Condición de Rango

- Cuango $g = 2$ (2 ecuaciones), la condición de orden es suficiente para determinar la identificación.
- Pero para modelos con $g > 2$, se hace necesario tener en cuenta una condición más.
- De (II'), $\Pi_4 = \Pi_5 \gamma_1$, en el caso exactamente identificado Π_5 es cuadrada, por lo que podría existir su inversa si no es singular. Luego:

$$\gamma_1 = \Pi_5^{-1} \Pi_4$$

Condición de Rango

- En el caso sobreidentificado $k - k_j > g_j - 1$ (Π_5 no es cuadrada), se multiplica (II') por Π'_5 y luego se invierte.

$$\boldsymbol{\Pi'_5}\Pi_4 = \boldsymbol{\Pi'_5}\Pi_5\gamma_1$$

$$\gamma_1 = (\Pi'_5\Pi_5)^{-1}\Pi'_5\Pi_4$$

- En ambos casos, para que existan las inversas se requiere que:

$$rango(\Pi_5) = g_j - 1$$

- Esta es la condición de rango, la cual es necesaria y suficiente.
- No es fácil verificar esta condición analizando a Π_5
- Π_5 es una matriz $k - k_j \times g_j - 1$ con elementos que son combinaciones no lineales de los γ y β.

Condición de Rango

- Se puede demostrar que la condición de rango tiene esta expresión equivalente:

$$
\begin{bmatrix} \Gamma \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \Gamma_0 \\ \cdots & & \cdots \\ -\gamma_j & \vdots & \Gamma_1 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \Gamma_2 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \beta_j & & B_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & & B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad rango \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ \cdots \\ B_2 \end{pmatrix} = g - 1
$$

Ecuación j

6. Verificando Condiciones

Verificando ambas condiciones

Ejemplo 1: En el modelo keynesiano

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = \beta_1 + \gamma_1 Y_t + \epsilon_t^C$$

$$I_t = \beta_2 + \gamma_2 Y_t + \beta_3 Y_{t-1} + \epsilon_t^I$$

En matrices,

$$[Y_t \quad C_t \quad I_t]\begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad G_t \quad Y_{t-1}]\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} + [0 \quad \epsilon_t^C \quad \epsilon_t^I]$$

Verificando ambas condiciones

- Para el consumo:
  - **Condición de Orden**: Se cumple con holgura pues

$k - k_j$	$g_j - 1$
$3 - 1$	$2 - 1$

  - **Condición de Rango**

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$rango\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = 2$$

Es igual a $g - 1 = 3 - 1 = 2$. Por lo tanto, se cumple.

La ecuación de consumo está **sobreidentificada**.

Verificando ambas condiciones

➢ Para la inversión:

- **Condición de Orden**: Se cumple exactamente pues

$k - k_j$	$g_j - 1$
$3 - 2$	$2 - 1$

- **Condición de Rango**

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$rango\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Es igual a $g - 1 = 3 - 1 = 2$. Por lo tanto, se cumple.

La ecuación de la inversión está **exactamente identificada**.

No cumplimiento de la condición de rango pero sí la de orden

Ejemplo 2: En este ejemplo, se puede comprobar que en la ecuación (II) no se cumple la condición de rango pero sí la de orden.

$$Y_1 = \beta_1 + \gamma_1 Y_2 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_3 + \epsilon_1 \qquad (I)$$

$$Y_2 = \beta_4 + \gamma_2 Y_1 + \gamma_3 Y_3 + \beta_5 X_2 + \epsilon_2 \qquad (II)$$

$$Y_3 = \beta_6 + \gamma_4 Y_2 + \epsilon_3 \qquad (III)$$

No cumplimiento de la condición de rango pero sí la de orden

Matricialmente, $\Pi\Gamma = B$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_5 & \pi_9 \\ \pi_2 & \pi_6 & \pi_{10} \\ \pi_3 & \pi_7 & \pi_{11} \\ \pi_4 & \pi_8 & \pi_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_2 & 0 \\ -\gamma_1 & 1 & -\gamma_4 \\ 0 & -\gamma_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_5 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la ecuación (II), verificando la condición de orden:

$k - k_j$	$g_j - 1$
$4 - 2$	$3 - 1$

Entonces, se cumple la condición de orden.

No cumplimiento de la condición de rango pero sí la de orden

Verificando la condición de rango:

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_4 \\ 0 & -\gamma_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_5 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rango \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

- Pero $g = 3$ en este modelo, por lo que $g - 1 = 2$.
- Entonces no se cumple la condición de rango.
- Por lo tanto, la ecuación (II) **no está identificada**.

Resumen de las condiciones

Orden	Rango	Resultado
$k - k_j > g_j - 1$	$rango\begin{pmatrix}\Gamma_2 \\ B_2\end{pmatrix} = g - 1$	Sobreidentificado
$k - k_j = g_j - 1$	$rango\begin{pmatrix}\Gamma_2 \\ B_2\end{pmatrix} = g - 1$	Exactamente identificado
$k - k_j < g_j - 1$		Subidentificado
$k - k_j \geq g_j - 1$	$rango\begin{pmatrix}\Gamma_2 \\ B_2\end{pmatrix} < g - 1$	No identificado

Referencias

- Capítulo 18, 19 y 20 - Gujarati, D., & Porter, D. (2010). Econometría (Quinta edición ed.). *& P. Carril Villareal, Trad.) México: Mc Graw Hill educación*.

- Capítulo 16 - Wooldridge, J. M. (2010). Introducción a la Econometría. 4ta. *Edición. Cengage Learning*.

- Hill, R.C., Griffiths, W. E., & Lim, G. C. (2018). Chapter 11 Simultaneous Equations Model. In *Principles of Econometrics (pp. 531-562)*. 5th Edition. John Wiley & Sons.

- Greene, W (2018). Chapter 10.4 Simultaneous Equations Models. In *Econometric Analysis (pp. 346-365).* 8th Edition. New York: McMillan.

PUCP