



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propagación de ondas sísmicas y migración

Saúl Becerra Ospina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2011

Propagación de ondas sísmicas y migración

Saúl Becerra Ospina

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en ciencias - Matemática aplicada

Director:
Dr. rer. nat. Hernán Estrada Bustos

Línea de Investigación:
Matemática Aplicada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2011

A la memoria de mis abuelos

Dedico este trabajo especialmente a mis abuelos Rosalbina, Fidel, Manuel y Hermelinda.

También a la memoria de mi estimado director Hernán, quien nos abandonó, pero no sin antes ayudarme a culminar este trabajo. Agradezco a la vida, que me dio el honor de compartir y trabajar con él.

Los sueños son factibles si respaldamos nuestra esperanza con oportunos y adecuados comportamientos

Agradecimientos

Al profesor Hernán Estrada Bustos (D.E.P), en lo académico por su impulsador apoyo en el planteamiento y desarrollo de este trabajo. En lo personal, por su amistad y sus oportunos consejos. Nunca olvidaré su afectuoso apoyo como director, agradezco a la vida por haber sido uno de sus estudiantes y por haber podido compartir con una persona tan maravillosa.

Al profesor Jorge Mauricio Ruíz Vera por su paciencia y valiosos aportes.

A mis padres por su incondicional apoyo, por todo el amor que me han dado, su ejemplo de honestidad y por todos los esfuerzos que realizan a diario por mi y por mis hermanos.

A mi hermana mayor y segunda madre Nubia Liliana Becerra Ospina por ser un ejemplo de fortaleza, dedicación, seriedad y responsabilidad. Además por apoyarme en los momentos pocos afortunados, esta es mi manera de agradecerle todos sus esfuerzos por mi, trato de ser mejor para que ellos no sean en vano.

A mis hermanos menores Santiago Becerra Ospina y María Paula Becerra Ospina por ser agentes motivadores en mi desarrollo personal.

A mi novia Ana Milena Nemocón Romero, quien está creciendo conmigo y es un motor en mi vida.

Resumen

La técnica de migración es una importante herramienta en el procesamiento de datos sísmicos de reflexión, ya que permite lograr imágenes del subsuelo óptimas. El análisis convencional de secciones sísmicas, asume que los puntos de reflexión, que tienen lugar entre estructuras geológicas con diferentes propiedades elásticas, están en la mitad de cada par fuente-receptor, lo cual no es necesariamente cierto. En este trabajo, mediante experimentación numérica, se estudia la técnica de migración basada en la ecuación de onda escalar, para corregir la posición de los puntos de reflexión y lograr su correcta localización. Primero, se simulan secciones sísmicas apiladas observadas en la superficie, posteriormente se utiliza la migración en tiempo inverso para obtener una posición corregida de los reflectores y lograr imágenes de una configuración geológica escogida a priori. Se analiza la estabilidad para la discretización espacial y temporal y también las condiciones de frontera ficticias para representar límites computacionales no reflectantes y modelar el terreno como un dominio espacial semiinfinito.

Palabras clave: Prospección, Simulación, Modelamiento numérico.

Abstract

In the conventional analysis of seismic sections, it is assumed that the point of reflection, located between geological structures with different elastic properties are in the middle of each source-receiver pair, which is not necessarily true. The technique of migration has become an important tool for reflection seismic prospecting, since it allows to achieve optimal subsurface imaging. In this work, we study seismic migration based on scalar wave equation to re-position the points reflection into their correct positions using simulation and numerical modeling. First of all, we simulate seismic stacked sections. Then we use reverse-time migration to achieve seismic imaging of geological profile chosen a priori. Stability analysis for its space-time discretization is performed as well as review of fictitious boundary conditions to represent non-reflecting boundaries and model the Earth as a 2D semiinfinite spatial domain.

Keywords: Prospecting, Simulation, Numerical modeling

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Modelamiento del subsuelo	3
1.2.1. Estratos geológicos	3
1.2.2. Sísmica de reflexión	4
1.2.3. Corrección geométrica de datos sísmicos de reflexión	9
1.3. Organización del documento	10
2. Propagación de ondas sísmicas	11
2.1. Mecánica de medios continuos	11
2.1.1. Deformación (Strain)	11
2.1.2. Deformaciones infinitesimales tridimensionales	11
2.1.3. Gradiente de desplazamiento y tensor de deformación	13
2.1.4. Esfuerzo (Stress)	15
2.1.5. Relación entre esfuerzos y deformaciones en un material elásticamente isotrópico	17
2.2. Propagación de ondas en medios elásticos	18
2.2.1. Ecuación de Navier	18
2.2.2. Descomposición de Helmholtz, ondas P y ondas S	20
2.2.3. Aproximación acústica	23
3. Modelamiento numérico	24
3.1. Problema directo	24
3.1.1. Planteamiento del problema	24
3.1.2. Discretización del problema	25
3.1.3. Condiciones de frontera	27
3.1.4. Datos sísmicos sintéticos	27
3.2. Migración en tiempo inverso, RTM	29
3.2.1. Planteamiento del problema	29

3.2.2. Discretización y condiciones de frontera	30
3.3. Consistencia, convergencia y estabilidad	31
4. Condiciones de frontera no reflectantes	34
4.1. Fronteras ficticias	34
4.2. El método de Reynolds	35
5. Resultados Numéricos	40
5.1. Programa de cómputo	40
5.1.1. Clase SEISMIC	40
5.1.2. Clase REVTIME	43
5.1.3. Estimación del error de las soluciones numéricas	44
5.1.4. Costo computacional	46
5.2. Modelos simulados	46
5.2.1. Estrato geológico sinclinal	46
5.2.2. Estratos buzados	48
5.2.3. Domo salino	50
6. Conclusiones	54
Bibliografía	55

1 Introducción

1.1. Motivación

Conocer la configuración geológica subsuperficial es un interesante reto para la ciencias puras y aplicadas. Es un campo de estudio que se apoya en la física teórica y experimental, así como en métodos matemáticos analíticos y refinadas aproximaciones numéricas. Las técnicas destinadas a modelar estructuras geológicas del subsuelo son estudiadas por la geofísica.

Dentro de las finalidades de la geofísica se encuentra la búsqueda de minerales o materiales que despiertan interés científico o económico. A la rama de la geofísica que se dedica a esto, se le denomina prospección geofísica y sus métodos se clasifican en cuatro grandes grupos según los principios físicos que aplican, a saber: Magnetometría, gravimetría, geoeléctrica y sísmica.

Uno de los métodos más usados es la prospección sísmica. Particularmente para estudios de poca profundidad (algunos kilómetros) se prefiere la sísmica de reflexión, dado que ofrece una buena resolución y por lo tanto permite lograr modelos del subsuelo exactos. Una de sus mayores desventajas, radica en que sus virtudes sobre otros métodos se traducen en un incremento sensible de costos, lo cual es un obstáculo notable. Adicionalmente, el procesamiento de los datos requiere un basto esfuerzo computacional, inclusive ha sido necesario esperar nuevas generaciones tecnológicas para hacer factibles algunos métodos numéricos orientados a modelar el subsuelo.

Ahora, gracias al acelerado desarrollo de la computación, es posible prescindir de datos de campo para estudiar los métodos matemáticos usados en geofísica y también es posible obtener modelos, que hace a penas un par de décadas no eran realizables por los tiempos de computo demandados. En este trabajo se estudia a través de experimentación numérica la técnica de migración sísmica. Este es un problema propuesto hace más de cincuenta años que puede solucionarse geométricamente (aplicando los principios de la física óptica) o mediante la solución de la ecuación de onda en el dominio frecuencia-espacio o tiempo-espacio. Como los esfuerzos para realizar la migración no son pocos, era considerada como superflua dentro del análisis de datos de reflexión. Actualmente, esta percepción ha cambiado, sobre todo porque ahora la migración no se ve únicamente como método de mejoramiento de imágenes, sino también como herramienta dentro del proceso de inversión sísmica.

En este trabajo se estudia la *Migración en Tiempo Inverso* (RTM por sus siglas en inglés). Este tipo de migración se basa en la ecuación de onda escalar en el dominio espacial y

temporal, es decir que se trata de una ecuación diferencial parcial hiperbólica, con derivadas temporales, cuya solución numérica es dispendiosa en tiempos de cómputo. Además, se presentan dificultades como la dispersión numérica y las fronteras computacionales dado que se tratan dominios espaciales infinitos, pero la memoria computacional es finita. Las técnicas numéricas usadas para RTM son principalmente diferencias finitas y elementos finitos [2, 23, 19]. En este estudio se usa un esquema de diferencias finitas de segundo orden en tiempo y espacio, el cual es implementado en C++ para experimentar numéricamente y producir secciones sísmicas sintéticas y posteriormente realizar la RTM.

El método numérico empleado para solucionar el problema es el método más básico para solucionar ecuaciones diferenciales parciales y el primero utilizado para RTM. Existe otro esquema de diferencias finitas clásico de segundo orden en tiempo y cuarto en espacio. En general para RTM se usan diferentes esquemas, que mejoran el orden de aproximación, pero que incrementan el costo computacional. La modularidad del programa desarrollado en este trabajo permite implementar mejores aproximaciones numéricas, sin embargo, se debe tener en cuenta las capacidades de cómputo disponibles.

En la actualidad, el procedimiento RTM es muy importante en la exploración de petróleo. Soluciones con métodos numéricos refinados para obtener imágenes de alta resolución requieren computación de alto rendimiento. En la última década se emplean plataformas de cómputo distribuidas en paralelo, así como códigos en paralelo. Para realizar los cálculos, RTM se ha adaptado a modernos clusters, se usan procesadores multinúcleo y se han introducido aceleradores por GPU [5, 1].

1.2. Modelamiento del subsuelo

1.2.1. Estratos geológicos

En la cotidianidad se percibe una relativa quietud sobre la Tierra. El paisaje parece ser siempre el mismo, se observan las mismas montañas, valles, colinas, lagos, lagunas, ríos y la misma vegetación. No obstante, la Tierra evoluciona constantemente, de forma lenta, pero no estática y los eventos geológicos son evidencia de esto, son la manifestación de procesos que tardan millones de años, que se llevan a cabo dentro o sobre el planeta y que paulatinamente contribuyen al desarrollo y transformación global.

Todos los procesos que tienen lugar en la Tierra han sido y seguirán siendo determinantes en la configuración de los estratos geológicos. Observando cuidadosamente, es posible apreciar los vestigios dejados por la compleja dinámica terrestre. Por ejemplo, a simple vista parece que los cuerpos montañosos siempre han existido, que son perpetuos, inalterables e indestructibles. Sin embargo, las cadenas montañosas y cordilleras no siempre han existido, son producto de un lento plegamiento de las rocas, que se debe en gran parte a la interacción entre grandes bloques litológicos denominados placas tectónicas. Por otro lado, las montañas también son susceptibles de menoscabo, la erosión junto con fenómenos de remoción pueden

disminuir o incluso desvanecer el relieve.

Para comprender la naturaleza de los estratos geológicos, es útil describir algunos aspectos importantes sobre las rocas y sus mecanismos de formación. Un primer grupo de rocas provienen del enfriamiento del magma, se conocen como ígneas y pueden sufrir cambios dependiendo de las condiciones a las que queden expuestas. En caso de quedar sobre la superficie, el viento y la lluvia producen un desgaste mecánico o erosión, ocasionando el desprendimiento de partículas o fragmentos de la roca, que son transportados a zonas de menor altitud, generalmente valles o depresiones. Los fragmentos acumulados o sedimentos se compactan, convirtiéndose en rocas sedimentarias. Tanto las rocas ígneas, como las sedimentarias, al quedar sometidas a alta presión y temperatura, dan origen a rocas metamórficas. Según su formación, las rocas se clasifican en tres grandes grupos, ígneas, sedimentarias y metamórficas, además pueden fundirse y volver a ser parte del magma, cumpliendo un ciclo. Durante el proceso de sedimentación, se van apilando rocas junto con otros materiales, como agua o materia orgánica y de esta manera se constituyen los diferentes estratos o capas geológicas.

Dentro del proceso de formación de estratos geológicos, se presentan infinidad de factores que dan origen a gran variedad de minerales. Un ejemplo son los depósitos de materia orgánica aportada por los seres vivos que han residido en la Tierra y representada en sus restos, los cuales al ser cubiertos por sedimentos, forman trampas con condiciones adecuadas, muy específicas de permeabilidad y sellamiento, que permiten la formación de reservorios de hidrocarburos.

Se le denominan estratos geológicos, a la disposición de todas las capas geológicas que constituyen la parte exterior de la corteza terrestre. Dada la complejidad de su origen, las capas geológicas varían de un lugar a otro. En algunas oportunidades, bajo ciertas condiciones específicas, se forman materiales que pueden ser provechosos para las actividades sociales, principalmente por el interés económico que representan.

Los lugares donde se pueden ver expuestas las capas geológicas son muy pocos. Pero dada la importancia de algunos minerales que pueden estar bajo la superficie, es necesario desarrollar tecnologías que posibiliten conocer la estructura interna de la Tierra.

1.2.2. Sísmica de reflexión

La prospección geofísica comprende un grupo de técnicas fundamentadas en conceptos físicos y matemáticos para modelar la estructura interna de la Tierra. Algunas se basan en la teoría del potencial, como gravimetría y magnetometría, y otras en propiedades físicas de los materiales, como en la geoelectrica y la sísmica.

El objetivo es obtener imágenes o modelos en tres dimensiones de las capas geológicas que se encuentran bajo la superficie. Lo ideal es apoyarse en varias técnicas buscando complementariedad y así lograr modelos con óptima calidad. Sin embargo, recolectar datos en campo es muy costoso y por lo mismo una de las principales limitantes en los estudios geofísicos. Por

tal razón se debe definir la idoneidad de un método sobre otro, lo cual depende de múltiples factores, como la escala del estudio, su finalidad y así mismo la profundidad hasta la que se desea modelar. Por ejemplo, en la búsqueda de metales podrían preferirse métodos basados en el electromagnetismo.

Un campo de la industria donde son imprescindibles los estudios de prospección es en la búsqueda de petróleo. En estudios exploratorios de escala regional, se prefiere usar gravimetría y en estudios locales se prefiere usar sísmica de reflexión.

La prospección sísmica se fundamenta en el estudio de la propagación de ondas mecánicas. El medio de propagación es la Tierra y en labores de prospección las fuentes son artificiales. El problema se aborda con aproximación elástica o con aproximación acústica. Esto es posible dado que los medios elásticos soportan dos tipos de propagación de ondas y los desplazamientos en las partículas generados por cada uno de dichos tipos son perpendiculares. De manera que dependiendo de la orientación que se da a los aparatos de medición, se observan movimientos debidos a las ondas transversales o a las ondas de presión longitudinales. Esto se presenta con detalle en el capítulo 2.

La idea del funcionamiento de la sísmica de reflexión es sencilla ¹. Se generan ondas artificiales mediante impactos mecánicos sobre la superficie. Mediante explosiones o golpes con camiones vibrando se deforman las partículas vecinas al lugar del impacto para perturbar el medio. Dicha perturbación se propaga en forma de ondas elásticas. En el capítulo 2 se estudian los conceptos de la teoría de la elasticidad, necesarios para modelar la propagación de ondas sísmicas.

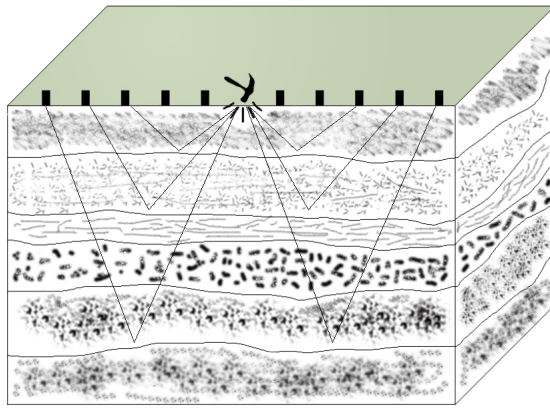


Figura 1-1: Corte de una sección de la corteza terrestre.

Los levantamientos de datos sísmicos de reflexión, son realizados usando dispositivos denominados geófonos. Su finalidad es registrar los movimientos sobre la superficie terrestre producidos por las reflexiones de las ondas que ocurren en las superficies que separan estratos geológicos con propiedades elásticas diferentes y por lo tanto con velocidades de propagación diferentes. Las superficies imaginarias entre las capas geológicas se conocen como reflectores

¹En la Figura 1-1. se esquematiza un levantamiento sísmico

geológicos y lograr una imagen en profundidad de la configuración de ellos, es el principal objetivo de la migración sísmica.

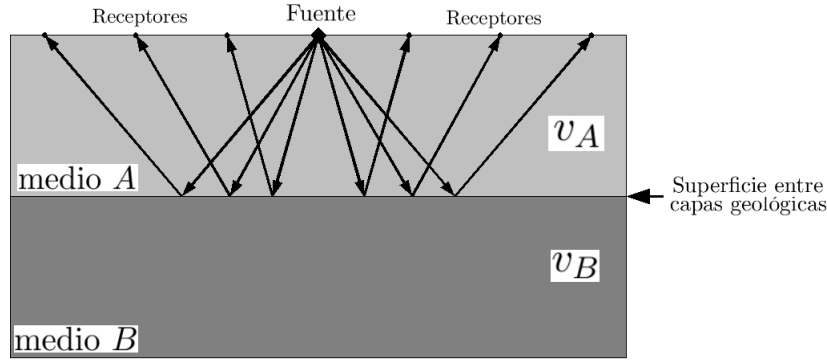


Figura 1-2: Geometría de un levantamiento sísmico de reflexión.

La onda generada es una onda esférica, esquemáticamente se representa dibujando el frente de onda o los rayos de propagación. En un perfil, el frente de onda corresponde con una circunferencia con centro en la fuente y los rayos son segmentos de recta con punto inicial en la fuente y perpendiculares al frente de onda. Estas representaciones facilitan la descripción del fenómeno de dispersión que ocurre en los reflectores geológicos.

Los levantamientos de campo están constituidos por fuentes y receptores localizados de manera muy precisa sobre un sistema de referencia escogido. El diseño de la localización tanto de las fuentes o disparos, como de los instrumentos de medición, se realiza de manera muy cuidadosa buscando evadir dificultades que obedecen a las complejas formaciones geológicas [4]. Sin embargo, el principio es sencillo y para modelar un perfil geológico, es decir un modelo bidimensional, los geófonos se ubican en una serie de puntos alineados e igualmente distanciados sobre la superficie.

Dada la localización de fuentes y receptores, es posible realizar una esquematización de los rayos, que teóricamente viajan desde la fuente hasta cada uno de los receptores. En un medio compuesto de dos estratos geológicos horizontales con respecto al terreno, los rayos se representan como se muestra en la Figura 1-2. El tiempo de viaje del rayo desde la fuente hasta el receptor se da por [4]

$$t = \frac{(x^2 + 4h^2)^{1/2}}{V_1}. \quad (1-1)$$

La ecuación (1-1) relaciona el tiempo t que tarda en llegar la señal generada en la fuente hasta un receptor con la distancia horizontal sobre el terreno x que los separa, denominada offset. h es en unidades lineales el espesor de la capa geológica superior.

En un arreglo de un disparo con varios geófonos, ver Figura 1-4. el arribo de las señales a los geófonos sigue la relación dada por (1-1). Es una curva hiperbólica cuya asíntota es $y = x/V_1$. Se observa que cuando $x \rightarrow \infty$, la diferencia en el tiempo de llegada entre la onda directa, es decir la que viaja sobre la superficie y la onda reflejada se aproxima a cero. Ahora,

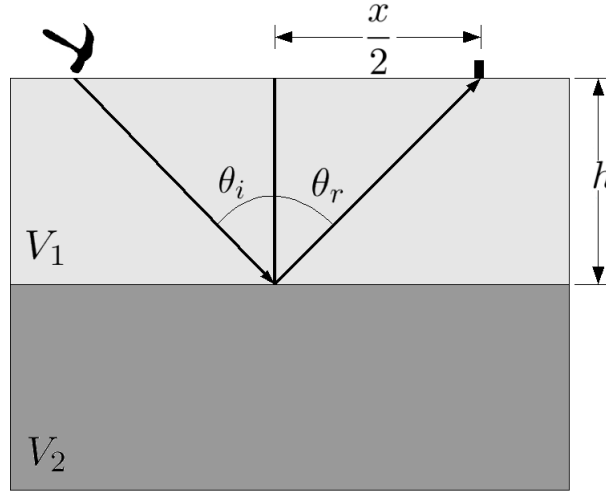


Figura 1-3: Tiempo de viaje para un medio de dos capas geológicas horizontales.

el tiempo de viaje desde la fuente hasta un punto cero-offset es $t(0) = 2h/V_1$, restándolo al tiempo total de viaje $t(x)$, para una x dado, se obtiene el tiempo de viaje desde la fuente hasta un receptor localizado cero-offset, ocurriendo la reflexión justo debajo del receptor. Esta corrección se conoce como *Normal Move-Out*, *NMO* y se expresa de la siguiente forma [4]

$$T_{NMO} = \frac{(x^2 + 4h^2)^{1/2}}{V_1} - \frac{2h}{V_1}. \quad (1-2)$$

En la Figura 1-3. se indica la corrección T_{NMO} para x_7 . Al aplicar la corrección NMO a todos los receptores se obtiene un registro sísmico (sección sísmica) que se asemeja al perfil geológico, pero en el eje de las ordenadas no se tiene la profundidad en unidades lineales, sino el tiempo de arribo cero-offset.

El resultado de aplicar la corrección NMO a la sección sísmica esquematizada en la Figura 1-4 es presentado en la Figura 1-5.

En un levantamiento sísmico es necesario realizar bastantes disparos y disponer suficientes geófonos. Dentro del arreglo de fuentes y receptores, se asume que para varios pares de fuentes y receptores la reflexión sucede en un *punto de profundidad común* (CDP). Tal como se representa en la Figura 1-6. para los pares $S_1 - G_1$, $S_2 - G_2$ y $S_3 - G_3$, el punto donde tiene lugar la reflexión es el mismo. Estas señales, que se asume corresponden al mismo reflector, se superponen y el resultado es la *sección sísmica apilada*, esto es equivalente a que para cada fuente se dispuso en el mismo sitio un receptor, lo cual se designa con el nombre de datos *cero-offset* y que se tienen un registro de las reflexiones que ocurrieron justo debajo de la fuente y el receptor. El apilamiento se realiza para eliminar ruido y mejorar en general la calidad de los datos.

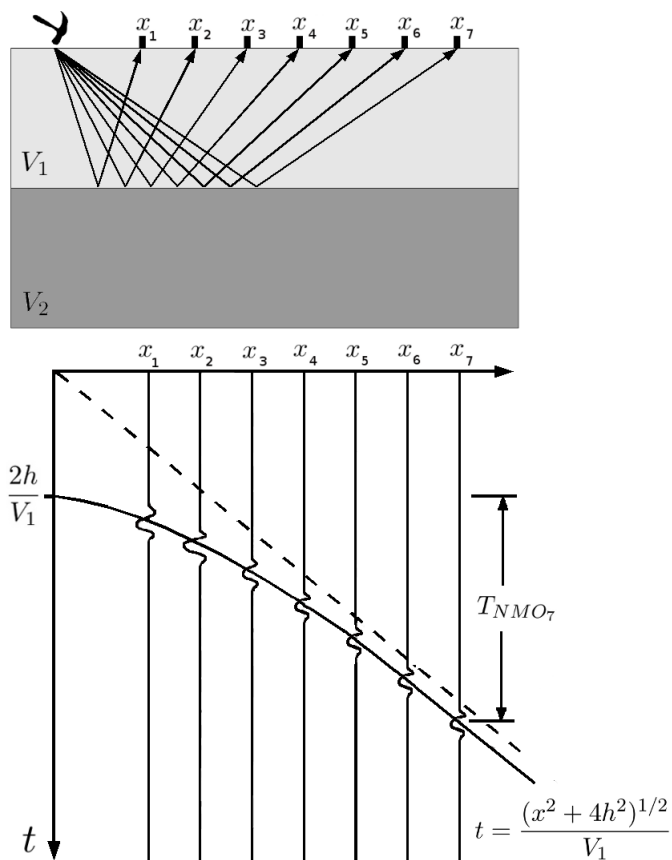


Figura 1-4: Ilustración de levantamiento de datos sísmicos de reflexión. Arreglo de un disparo con siete geófonos.

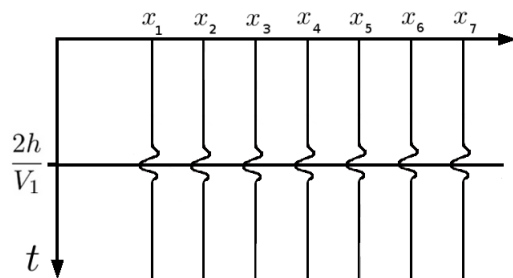


Figura 1-5: Registro de datos sísmicos o sección sísmica después de aplicar la corrección NMO.

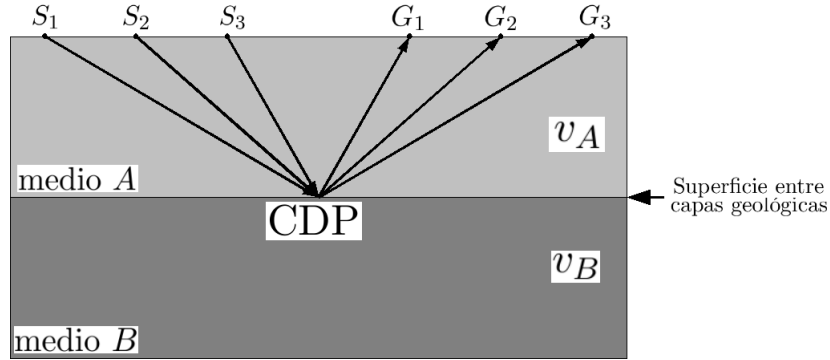


Figura 1-6: Punto medio común entre las fuentes S_i y los geófonos G_i , $i = 1, 2, 3$.

1.2.3. Corrección geométrica de datos sísmicos de reflexión

Cuando se realiza el análisis de velocidades de secciones sísmicas, al aplicar la corrección NMO y realizar el apilamiento, se asume que el reflector geológico se encuentra en la mitad de cada par fuente receptor (ver Figura 1-6.), lo cual no es siempre cierto. Para ilustrar esto, considérese un perfil geológico compuesto de dos estratos que presentan un plegamiento sinclinal ² como el mostrado en la Figura 1-7. Se representa una recta tangente al punto

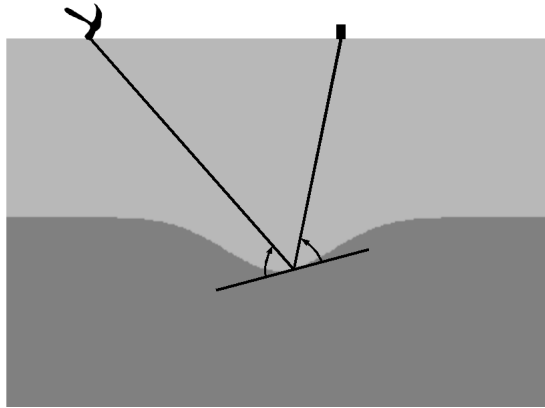


Figura 1-7: Rayo para una onda reflejada en un estrato con plegamiento sinclinal.

de reflexión que sirve como referencia para el ángulo de incidencia y reflejado del rayo. Es evidente que dicho punto no está en la mitad entre la fuente y el receptor, de manera que al realizar el análisis CDP, se obtienen posiciones equivocadas de los reflectores geológicos. El ejemplo de la sección sísmica apilada para el perfil geológico sinclinal se presenta en la Figura 1-8.

El proceso de encontrar la correcta localización de los reflectores geológicos se denomina migración y fue planteado por primera vez en [8].

²Sinclinal se le denomina al plegamiento de las capas geológicas con forma de V

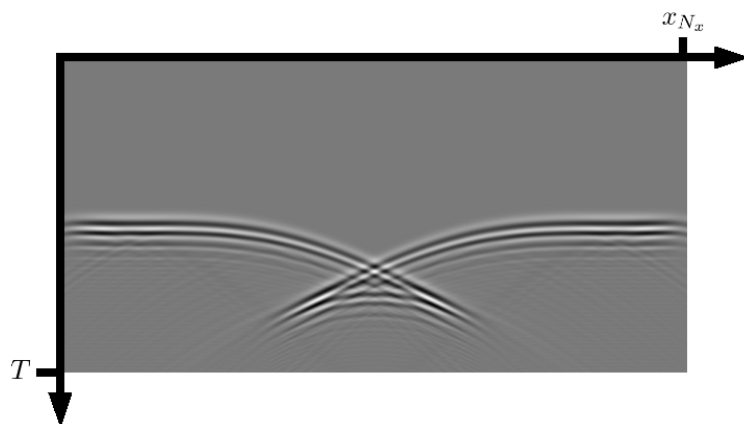


Figura 1-8: Sección sísmica apilada para un perfil geológico sinclinal.

Las técnicas de migración que se encuentran en la literatura son diversas y con diferentes enfoques, desde modelos geométricos hasta modelos basados en las ecuaciones del campo de ondas elásticas o acústicas, en el dominio frecuencia espacio o espacio tiempo. Para la migración basada en las ecuaciones del campo de ondas se utilizan las formulas integrales de Kirchhoff o Rayleigh. En el dominio espectral se aplica por ejemplo el método de Stolt [25]. Actualmente, los algoritmos de migración que más se estudian son basados en métodos de soluciones numéricas de problemas de propagación hacia atrás (por ejemplo [23, 10, 19]).

1.3. Organización del documento

El capítulo 2 es una referencia de los conceptos físicos involucrados en el estudio de la propagación de ondas sísmicas. Se parte desde conceptos de la teoría de la elasticidad hasta llegar al modelo de aproximación acústica. Si el lector esta familiarizado con la física de la propagación de ondas sísmicas, puede omitir la lectura de este capítulo.

En el capítulo 3 se presenta la formulación matemática del problema y el modelamiento numérico para resolverlo. Se discute el problema directo mediante el cual se simulan los datos sísmicos de reflexión denominados datos sintéticos. Adicionalmente se trata el problema de migración en tiempo inverso, que permite corregir la ubicación de los reflectores geológicos. Se hace un análisis introductorio de las condiciones de frontera y se amplía en el capítulo 4. Los resultados de los experimentos realizados son presentados en el capítulo 5. Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y algunas recomendaciones para emprender nuevos trabajos que permitan extender este estudio.

2 Propagación de ondas sísmicas

2.1. Mecánica de medios continuos

2.1.1. Deformación (Strain)

Para comprender el concepto de deformación (strain) se utiliza el ejemplo de una barra recta de longitud l_0 , la cual es sometida a una tensión σ que le produce una elongación hasta una longitud l , tal como se muestra en la Figura 2-1.

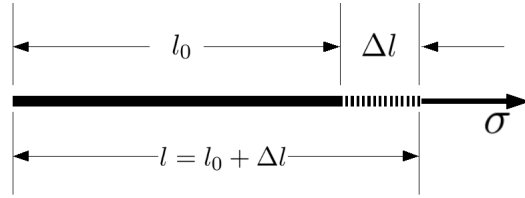


Figura 2-1: Deformación uniaxial de una barra.

La deformación se define por [16]

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2-1)$$

2.1.2. Deformaciones infinitesimales tridimensionales

En cuerpos tridimensionales se definen dos tipos de deformaciones: normal y cortante o de cizalla sin rotación [16]. En esta sección se presentan un análisis geométrico desde el punto de vista de la teoría de pequeñas deformaciones para cuerpos en tres dimensiones. Para explicarlo se utiliza un elemento rectangular con base dx y altura dz , en la Figura 2-2 se ilustra esto.

Se supone un campo vectorial $\mathbf{u}(x_0, z_0) = u_x(x_0, z_0)\mathbf{i} + u_z(x_0, z_0)\mathbf{j}$ que describe los desplazamientos para un punto $P(x_0, z_0)$. Por ejemplo para el punto $A(x, z)$, el desplazamiento está dado por $\mathbf{u}(x, z)$, para el punto $B(x + dx, z)$ por $\mathbf{u}(x + dx, z)$ y de manera análoga se encuentran los desplazamientos para los puntos $C(x, z + dz)$ y $D(x + dx, z + dz)$.

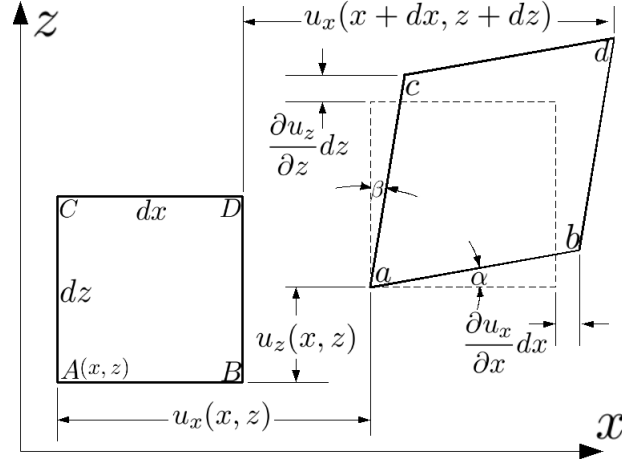


Figura 2-2: Deformación normal y de cizalla en dos dimensiones.

De acuerdo con (2-1) la deformación normal en la dirección de x es¹ (ver Figura 2-2).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\overline{ab} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dx\right)^2} - dx}{dx} \\ &= \frac{dx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} - dx}{dx}.\end{aligned}\quad (2-2)$$

Por la teoría de las pequeñas deformaciones, se pueden despreciar los términos de orden cuadrático [17] y usando la serie binomial se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} &\approx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}} \\ &\approx 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2-3)$$

Reemplazando (2-3) en (2-2) se obtiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) - dx}{dx} = \frac{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - dx}{dx} \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2-4)$$

El otro tipo de deformación es cortante o de cizalla que involucra cambio de ángulos entre las dos direcciones ortogonales originales[17], se define por

$$\gamma_{xz} = \frac{\pi}{2} - \angle cab = \alpha + \beta. \quad (2-5)$$

¹Aquí se supone, por una expansión de Taylor, que $u_x(x + dx, z) = u(x, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, ver la sección 2.1.3

Ahora, para pequeñas deformaciones, $\alpha \approx \tan \alpha$ y $\beta \approx \tan \beta$, entonces (2-5) se puede expresar por

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} dz}{dz + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz} \\ &= \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z}}{1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}}\end{aligned}\quad (2-6)$$

Como se están tratando deformaciones infinitesimales los gradientes de desplazamiento en el denominador se pueden despreciar, ya que $\partial u_x/\partial x \ll 1$ y $\partial u_z/\partial z \ll 1$, entonces

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}.\quad (2-7)$$

Considerando un análisis similar en el plano $x-y$, $y-z$ los resultados (2-4) y (2-7) se pueden extender a tres dimensiones arrojando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2-8)$$

2.1.3. Gradiente de desplazamiento y tensor de deformación

La deformación se describe por cambios en distancias relativas entre puntos en un cuerpo [17, p 27]. En la Figura **2-3** se presenta un cuerpo sin deformación y deformado después de aplicarle una tensión $\boldsymbol{\sigma}$. El desplazamiento de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 está dado por \mathbf{u} y \mathbf{u}_0 respectivamente. Como \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 son puntos vecinos, el vector $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$, puede representarse por una expansión en serie de Taylor alrededor de $\mathbf{u}_0 = u_{x_0} \mathbf{i} + u_{y_0} \mathbf{j} + u_{z_0} \mathbf{k}$ [17, p 28], esto es

$$\begin{aligned}u_x &= u_{x_0} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz + O(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ u_y &= u_{y_0} + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz + O(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ u_z &= u_{z_0} + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + O(dx^2 + dy^2 + dz^2).\end{aligned}\quad (2-9)$$

Dado que los componentes de $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ son muy pequeños, se obtiene una buena aproximación incluyendo solo los términos de primer orden [17, p 29], conforme con esto y en forma matricial (2-9) se convierte en

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (2-10)$$

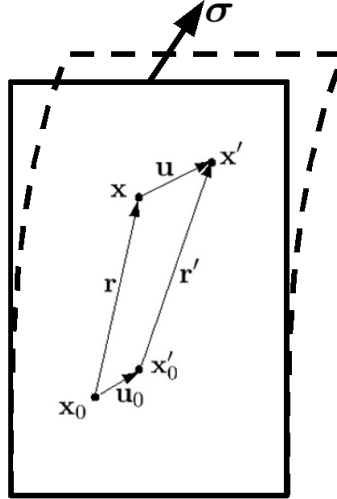


Figura 2-3: Deformación de un cuerpo en términos de distancia entre dos puntos vecinos.

En (2-10) la matriz que contiene las derivadas parciales se conoce como *tensor de gradiente de desplazamientos* y se puede escribir convenientemente de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2-11)$$

lo cual se puede comprobar fácilmente. Por ejemplo para $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u_z}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (2-12)$$

El segundo término de (2-11) es un tensor antisimétrico, es decir tiene la forma[9]

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}\quad (2-13)$$

y se puede resolver en términos de un vector dual [9, p 100]

$$\begin{bmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{32} \\ A_{13} \\ A_{21} \end{bmatrix}.\quad (2-14)$$

De acuerdo con esto se encuentra que el segundo término de (2-11), se puede escribir como

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix},\quad (2-15)$$

es decir que (2-15), es $\boldsymbol{\omega} = (1/2)(\nabla \times \mathbf{u})$ y representa la rotación de un cuerpo rígido [17, p 33] que no contribuye al campo de deformaciones y por consiguiente tampoco afecta los esfuerzos[17, p 30]. Esto quiere decir que la aproximación de pequeñas deformaciones dadas por (2-10) son la suma de dos componentes, uno de deformación y otro de rotación. Entonces el campo de deformación dentro del cuerpo solo está dado por el primer término de (2-10) conocido como *tensor de deformación*. Usando (2-8) en notación matricial se escribe de la siguiente forma

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.\quad (2-16)$$

2.1.4. Esfuerzo (Stress)

Los dos tipos de deformaciones presentadas en la sección 2.1.2, son respuesta a cargas externas aplicadas sobre un cuerpo elástico. Por ejemplo, en un rectángulo (Figura 2-4), se pueden

aplicar diferentes tipos de tracciones que determinan su deformación. Mientras τ produce una deformación de cizalla, σ genera una deformación normal. Si se aplican simultáneamente los dos esfuerzos sobre el cuerpo rectangular las tracciones resultantes son:

$$T_x = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xz} \mathbf{k} \quad (2-17)$$

$$T_z = \tau_{zx} \mathbf{i} + \sigma_z \mathbf{k}. \quad (2-18)$$

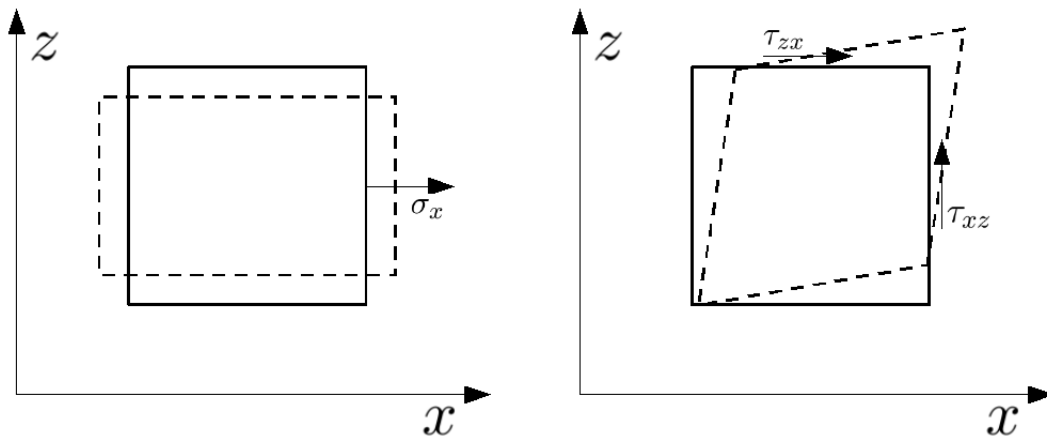


Figura 2-4: Respuesta a la tracción σ_x , τ_{xz} y τ_{zx} .

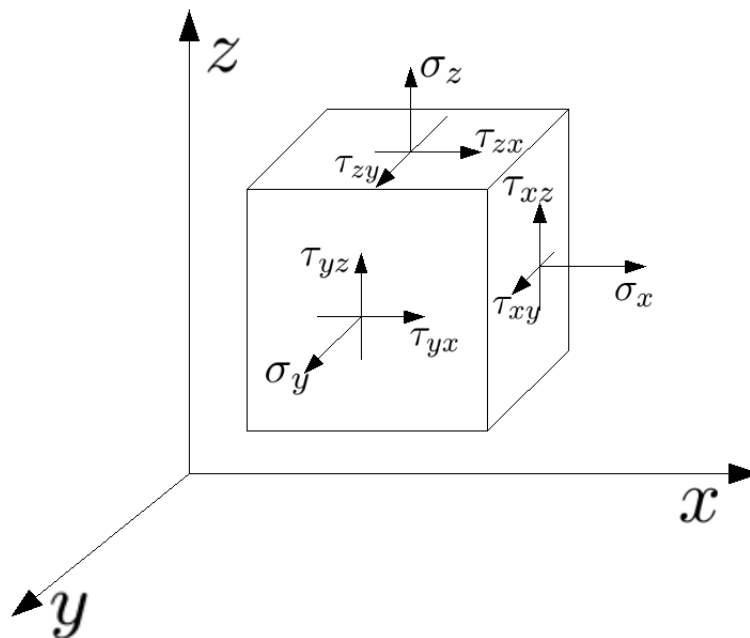


Figura 2-5: Tensor de esfuerzos.

Aplicando este razonamiento al caso de un cubo (Figura 2-5), se encuentra que el tensor de esfuerzos se da por [17, p 52]

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} \\ T_y &= \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k} \\ T_z &= \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Los nueve componentes de (2-19) se conocen como componentes de esfuerzos y conforman un tensor de segundo orden denotado por σ_{ij} [17]. En forma matricial es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2-20)$$

2.1.5. Relación entre esfuerzos y deformaciones en un material elásticamente isotrópico

Dadas las definiciones de \mathbf{e} y $\boldsymbol{\sigma}$, es necesario encontrar una relación entre estas dos cantidades. Dicha relación se conoce como ley constitutiva, corresponde a la ley generalizada de Hooke [12, p 140], que para materiales elásticos lineales asume que cada componente del esfuerzo está relacionado linealmente con cada componente de la deformación [17, p 71]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11}e_x + C_{12}e_y + C_{13}e_z + 2C_{14}e_{xy} + 2C_{15}e_{yz} + 2C_{16}e_{zx} \\ \sigma_y &= C_{21}e_x + C_{22}e_y + C_{23}e_z + 2C_{24}e_{xy} + 2C_{25}e_{yz} + 2C_{26}e_{zx} \\ \sigma_z &= C_{31}e_x + C_{32}e_y + C_{33}e_z + 2C_{34}e_{xy} + 2C_{35}e_{yz} + 2C_{36}e_{zx} \\ \tau_{xy} &= C_{41}e_x + C_{42}e_y + C_{43}e_z + 2C_{44}e_{xy} + 2C_{45}e_{yz} + 2C_{46}e_{zx} \\ \tau_{yz} &= C_{51}e_x + C_{52}e_y + C_{53}e_z + 2C_{54}e_{xy} + 2C_{55}e_{yz} + 2C_{56}e_{zx} \\ \tau_{zx} &= C_{61}e_x + C_{62}e_y + C_{63}e_z + 2C_{64}e_{xy} + 2C_{65}e_{yz} + 2C_{66}e_{zx}, \end{aligned} \quad (2-21)$$

o en notación matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2-22)$$

Un material se define como isotrópico si sus propiedades se describen sin referencia a las direcciones [14, p 207]. La ecuación constitutiva para un material elástico lineal e isotrópico

es [14, p 328]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}, \quad (2-23)$$

de manera que el número de constantes elásticas independientes es 2. Seleccionando las bien conocidas constantes de Lamé λ y μ y haciendo

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = 2\mu \quad (2-24)$$

la ecuación (2-23) se convierte en

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2-25)$$

2.2. Propagación de ondas en medios elásticos

2.2.1. Ecuación de Navier

En esta sección se estudia la ecuación que gobierna la propagación de ondas en un medio infinito linealmente elástico, isótropo y homogéneo. Este fenómeno ocurre cuando se aplican fuerzas variables o fuerzas súbitas produciendo deformaciones que se propagan a través de un cuerpo. Difiere del problema estático ya que la deformación no se transmite de una sola vez a todo el cuerpo [21]. El objetivo es encontrar una ecuación de movimiento considerando la conservación de masa, la segunda ley de Newton y las propiedades del medio (e.g modulo de rigidez μ).

Para explicarlo, se considera un elemento de volumen ΔV con masa Δm . La conservación de masa significa que Δm no cambia en el tiempo, es decir, que si el elemento es dilatado o comprimido cambia la densidad y el volumen pero la masa se mantiene constante [6]

$$\frac{d\Delta m}{dt} = 0. \quad (2-26)$$

Adicionalmente, la segunda ley de Newton establece que el cambio de momentum (se denota por \mathbf{p}) es proporcional a las fuerzas que actúan sobre la región ΔV . En ausencia de fuerzas

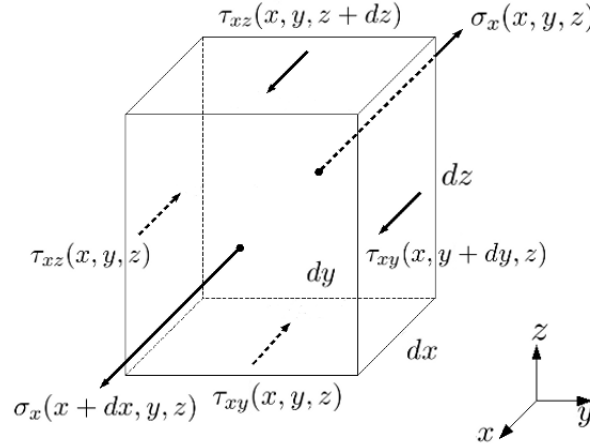


Figura 2-6: Esfuerzos sobre la componente x .

de cuerpo, el campo de deformaciones por unidad de área, son las únicas fuerzas que actúan sobre cada elemento de masa Δm .

En la Figura 2-6, se observa que la segunda ley de Newton para la componente x es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_x &= \sigma_x(x+dx, y, z)dydz + \tau_{xy}(x, y+dy, z)dx dz + \tau_{xz}(x, y, z+dz)dx dy \\ &- \sigma_x(x, y, z)dydz - \tau_{xy}(x, y, z)dx dz - \tau_{xz}(x, y, z)dx dy. \end{aligned} \quad (2-27)$$

Reorganizando términos, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_x &= \frac{\sigma_x(x+dx, y, z) - \sigma_x(x, y, z)}{dx} dx dy dz \\ &+ \frac{\tau_{xy}(x, y+dy, z) - \tau_{xy}(x, y, z)}{dy} dx dy dz \\ &+ \frac{\tau_{xz}(x, y, z+dz) - \tau_{xz}(x, y, z)}{dz} dx dy dz. \end{aligned} \quad (2-28)$$

El momentum se define por $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, entonces (2-28) se convierte en

$$\frac{d}{dt}(\Delta m v_x) = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Delta V. \quad (2-29)$$

Ahora, con una análisis similar para las componentes y - z y usando (2-26) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2-30)$$

De acuerdo con la ley constitutiva (2-25), con el tensor de esfuerzos (2-20) y teniendo en cuenta (2-8), la ecuación (2-30) se puede escribir en términos de los desplazamientos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_x}{dt} &= \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),\end{aligned}\tag{2-31}$$

o en notación vectorial

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}.\tag{2-32}$$

Aproximando la derivada convectiva del lado derecho de (2-32) con una derivada de punto fijo se obtiene

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.\tag{2-33}$$

(2-33) se conoce como la ecuación de Navier. Se debe recordar que la cantidad vectorial \mathbf{u} hace referencia a los desplazamientos producidos por la deformación, mientras λ y μ son los coeficientes de Lamé.

2.2.2. Descomposición de Helmholtz, ondas P y ondas S

En esta sección se estudia el método de potenciales para solucionar (2-33) basado en la descomposición de Helmholtz. El enunciado del teorema de Helmholtz establece que cualquier campo vectorial que, junto con sus primeras derivadas es continuo en una región simplemente conexa², puede ser resuelto en una parte irrotacional y una parte solenoidal [13]

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{S}.\tag{2-34}$$

Se puede demostrar fácilmente que el rotacional de un campo vectorial, que es resultado del gradiente de cualquier campo escalar dado, es cero. Además, que la divergencia de un campo vectorial que es el rotacional de cualquier campo vectorial dado, también es cero. Entonces, si se define $\mathbf{I} = \nabla \phi$ y $\mathbf{S} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}$, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{I} &= \nabla \times \nabla \phi = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{S} &= \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = 0.\end{aligned}\tag{2-35}$$

El campo escalar ϕ es el potencial escalar de \mathbf{I} y el campo vectorial $\boldsymbol{\varphi}$ el potencial vectorial de \mathbf{S} .

²Significa que la región consta de una sola pieza

La representación (2-34) para el campo de desplazamientos \mathbf{u} de (2-33) es

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\varphi}, \quad (2-36)$$

o denotando $\nabla\phi$ y $\nabla \times \boldsymbol{\varphi}$ con \mathbf{u}_P y \mathbf{u}_S respectivamente, la ecuación (2-36) se escribe de la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S. \quad (2-37)$$

A partir de (2-35) y (2-36) se puede verificar que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}_P &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_S &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times \mathbf{u}_S \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u}_P. \end{aligned} \quad (2-38)$$

Ahora, usando la identidad

$$\nabla^2 \mathbf{w} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} \quad (2-39)$$

para \mathbf{u} en la ecuación de movimiento (2-33), se obtiene

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2-40)$$

o por el teorema de Helmholtz (2-37) y dejando todos los términos al lado izquierdo

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S) - \mu \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S) = 0. \quad (2-41)$$

Aplicando el operador divergencia, recordando que $\nabla \cdot \mathbf{u}_S = 0$, se encuentra

$$\nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{u}_P) - \mu \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_P) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_P) \right) = 0. \quad (2-42)$$

Como $\nabla \times \mathbf{u}_P = 0$ el segundo término dentro del paréntesis en (2-42) es cero y de la identidad (2-39) se tiene que $\nabla^2 \mathbf{u}_P = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_P$. Entonces (2-42) se convierte en

$$\nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_P - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_P \right) = 0. \quad (2-43)$$

El rotacional dentro de la expresión en paréntesis es cero, de modo que no tiene fuentes ni vórtices en todo el espacio. Imponiendo un requerimiento natural que este campo se desvanece al infinito, se puede probar que es igual a cero en todo el espacio [25], es decir

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_P - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_P = 0. \quad (2-44)$$

Análogamente, aplicando el operador rotacional a (2-41), sin olvidar que $\nabla \times \mathbf{u}_P = 0$ y como $\nabla \cdot \mathbf{u}_S = 0$, la identidad (2-39) para \mathbf{u}_S es $\nabla^2 \mathbf{u}_S = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_S$, se obtiene

$$\nabla \times \left(\mu \nabla^2 \mathbf{u}_S - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (2-45)$$

Igualmente la divergencia de la expresión entre paréntesis es cero, de manera que no se tienen fuentes escalares ni vectoriales entonces

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}_S - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} = 0. \quad (2-46)$$

Dividiendo en (2-44) y (2-46) por ρ , se tiene

$$c_P^2 \nabla^2 \mathbf{u}_P - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_P}{\partial t^2} = 0 \quad y \quad (2-47)$$

$$c_S^2 \mathbf{u}_S - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} = 0, \quad (2-48)$$

donde

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad y \quad (2-49)$$

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2-50)$$

Como se ve en (2-47) y (2-48), el campo irrotacional \mathbf{u}_P y el campo solenoidal \mathbf{u}_S , son soluciones de la ecuación de onda y se propagan con velocidades c_P y c_S respectivamente. Para explicar mejor esto, considerese la solución parcial de ambas ecuaciones, para la cual es considerablemente fácil encontrar la dirección de desplazamiento y la dirección de propagación [25]:

$$\mathbf{u}_{p,s} = \mathbf{b} f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - c_{p,s} t), \quad |\mathbf{a}| = 1, \quad (2-51)$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, \mathbf{a} es la dirección de propagación y \mathbf{b} determina el vector de desplazamiento de las partículas en la onda. Éstas soluciones pueden ser tratadas como ondas planas viajando en la dirección del vector \mathbf{a} con velocidades c_P y c_S , adicionalmente, el desplazamiento de las partículas ocurren en la dirección del vector \mathbf{b} [25]. Los componentes del potencial del desplazamiento elástico \mathbf{u}_P deben satisfacer la siguiente ecuación [25]:

$$\nabla \times \mathbf{u}_P = f'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - c_P t) [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = 0. \quad (2-52)$$

Como f es arbitraria $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, lo cual significa que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos. Quiere decir que el potencial de ondas \mathbf{u}_P se caracteriza porque la dirección de la propagación es la misma de los desplazamientos de partículas. Este tipo de ondas se conocen como *ondas P*. “Corresponden a perturbaciones elásticas de cambios de volumen sin cambios de forma, son ondas longitudinales” [22].

El potencial solenoidal \mathbf{u}_S cumple

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_S = f'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - c_S t)[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = 0, \quad (2-53)$$

entonces el desplazamiento de partículas ocurre en dirección ortogonal a la dirección de propagación. “Representan cambios de forma sin cambio de volumen, son ondas transversales” [22], se denominan *ondas S*.

Se concluye de aplicar la descomposición de Helmholtz a la ecuación de Navier (2-33), que en terreno es posible observar de manera independiente el campo de desplazamientos generados por las ondas *S* y por las ondas *P*, ya que son ortogonales. Esto posibilita realizar un modelo con aproximación acústica.

2.2.3. Aproximación acústica

Una simplificación de la teoría de propagación de ondas sísmicas es la asunción acústica. Se considera que la Tierra puede ser tratada como un medio, que únicamente soporta ondas de presión, en lugar de uno que soporta los dos tipos, ondas *P* y *S*. Adicionalmente, la influencia de la variación en la densidad puede ser ignorada [25].

Esta consideración es una consecuencia del análisis realizado en la sección 2.2.2. Dado que el movimiento entre los componentes de los potenciales \mathbf{u}_P y \mathbf{u}_S son ortogonales, los geófonos son alineados también en direcciones ortogonales para medir ondas *P* y *S* de manera independiente. Esto justifica tratar la Tierra como un medio acústico, ya que se pueden modelar y observar los movimientos producidos por la propagación de ondas de presión.

Los geófonos permiten registrar los desplazamientos verticales de la superficie terrestre generados por el campo de presión. Tienen un pequeño peso sujetado por un resorte con una imán y una bobina. Los desplazamientos superficiales generan movimientos relativos entre la bobina y el imán produciendo cambios de voltaje proporcionales a la aceleración del terreno. Las ondas elásticas tienen tres componentes de desplazamientos, en el modelamiento acústico solo es de interés una. Esto quiere decir que la ecuación vectorial (2-47) se puede reducir a una ecuación escalar, más exactamente la ecuación de onda acústica

$$c \nabla^2 u_p = \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} \quad (2-54)$$

3 Modelamiento numérico

3.1. Problema directo

3.1.1. Planteamiento del problema

Con aproximación acústica la propagación de ondas dentro de un medio, esta gobernada por la ecuación (2-54), a la cual se debe adicionar una función fuente $S(t)$ que perturba el sistema y que tiene la siguiente forma

$$S(\mathbf{x}, t) = s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (3-1)$$

donde δ es la delta de Dirac, \mathbf{x}_r son las coordenadas donde hay fuentes y

$$s(t) = A \sin(2\pi ft)e^{-2\pi ft^2}. \quad (3-2)$$

En la Figura 3-1. se ilustra un ejemplo de $s(t)$.

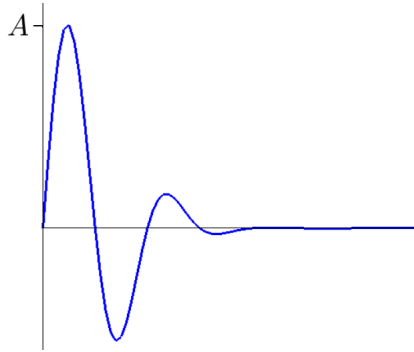


Figura 3-1: Gráfica de la función fuente $s(t)$

También, se debe tener en mente que el medio de propagación es la Tierra y dado que los levantamientos sísmicos de reflexión son de escala local, la superficie terrestre se puede asumir como plana, permitiendo adoptar un sistema de referencia cartesiano. La selección de la orientación de los ejes depende de condiciones específicas de los levantamientos, por ejemplo se pueden orientar según meridianos y paralelos del lugar de observación.

En este trabajo se trata el problema bidimensional (Figura 3-2). Por lo tanto el sistema de referencia es un plano cartesiano, donde uno de sus ejes se hace coincidir con la superficie

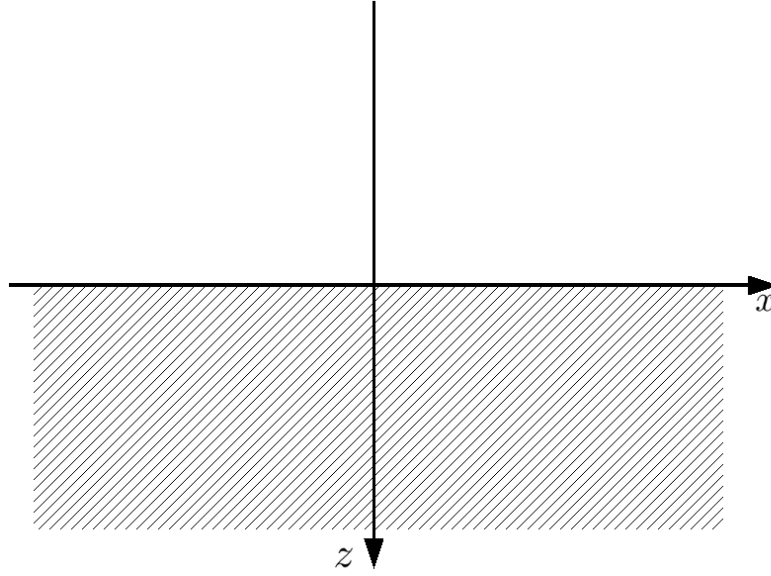


Figura 3-2: Problema que se considera para generar datos sísmicos sintéticos.

terrestre, mientras el otro se escoge ortogonal al terreno y su sentido positivo hacia el interior de la Tierra, lo cual es una convención en la industria petrolera.

De manera que adicionando la función fuente a la ecuación (2-54) y teniendo en cuenta las características físicas ya descritas, el problema que se está considerando es

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(c(x, z))^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, z, t) &= \nabla^2 u(x, z, t) + S(x, z, t), \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq z \\
 u(x, z, 0) &= 0 \\
 u_t(x, z, 0) &= 0 \\
 u(x, z, t) &= 0, \quad z < 0, \quad t \in [0, T],
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

donde la condición inicial significa que el medio está en reposo. Además, se asume que no hay propagación en la atmósfera, dado que su densidad difiere bastante de la densidad de la litósfera, esta condición es importante para formular las condiciones de frontera reflectantes.

3.1.2. Discretización del problema

El problema (3-3) debe ser solucionado. En principio se debe tener en cuenta que la solución numérica se obtiene para un dominio espacial finito, para este caso se considera la región rectangular $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, ver Figura 3-3.

La región es cubierta con una grilla uniforme de puntos, espaciados Δx en la dirección x y Δz en la dirección z . Además

$$\Delta x = \frac{a}{N_x}, \quad \Delta z = \frac{b}{N_z}, \quad N_x, N_z \in \mathbb{Z}. \tag{3-4}$$

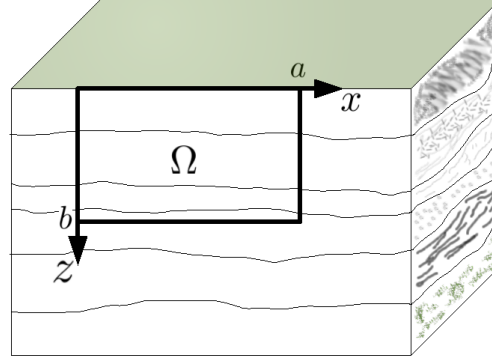


Figura 3-3: Dominio espacial del problema.

Equivalentemente, el tiempo de observación T se divide en N_t partes donde la magnitud de cada paso de tiempo es

$$\Delta t = \frac{T}{N_t}. \quad (3-5)$$

Conforme con esto, la solución aproximada se denota por

$$U_{i,j}^n = u(x_i, z_j, t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_z, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad (3-6)$$

donde $x_i = i\Delta x$, $z_j = j\Delta z$ y $t_n = n\Delta t$. Esto se esquematiza en la Figura 3-4.

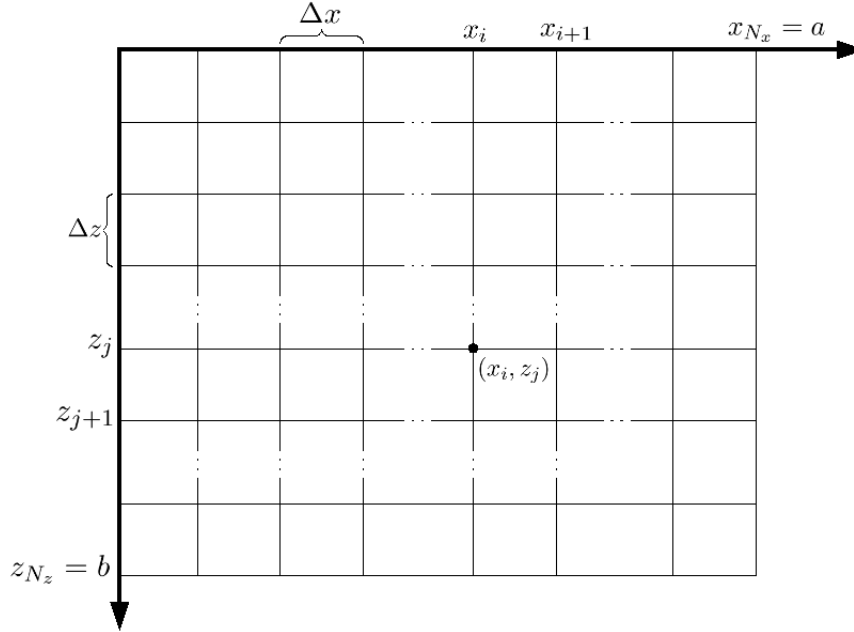


Figura 3-4: Discretización espacial.

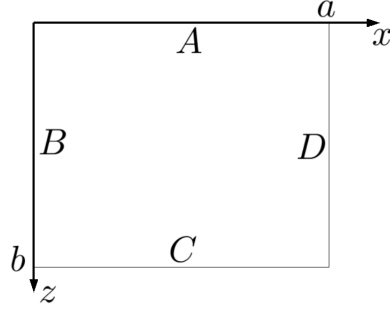


Figura 3-5: Condiciones de frontera.

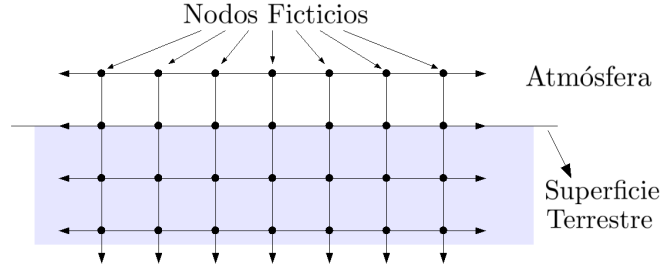


Figura 3-6: Nodos ficticios.

3.1.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son un tema complejo y muy relevante dentro de este estudio, por lo cual se dedica un capítulo completo para este tema. No obstante, es conveniente comentar algunas generalidades.

El dominio espacial tiene geometría rectangular, por lo tanto la frontera del problema se divide en cuatro segmentos, ver la Figura 3-5. La sección *A* corresponde con la superficie terrestre y como $u(x, z, t) = 0$, para $z < 0$, es posible incluir nodos ficticios, como se muestra en la Figura 3-6, que toman valor cero en todos los pasos de tiempo, es decir

$$U_{i,j}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad j = -1. \quad (3-7)$$

Un tema más complejo son las condiciones de frontera para los segmentos *B*, *C* y *D*, ya que corresponden a un límite computacional y no a la física considerada para el planteamiento del problema (3-3). El capítulo 4 está dedicado a estudiar el modelamiento de condiciones apropiadas para las fronteras computacionales.

3.1.4. Datos sísmicos sintéticos

En esta sección se presenta la metodología utilizada para generar secciones sísmicas apiladas mediante experimentación numérica. Para lo cual el principio de Huygens es importante, dado que permite entender el fenómeno de dispersión como la sumatoria de los efectos de

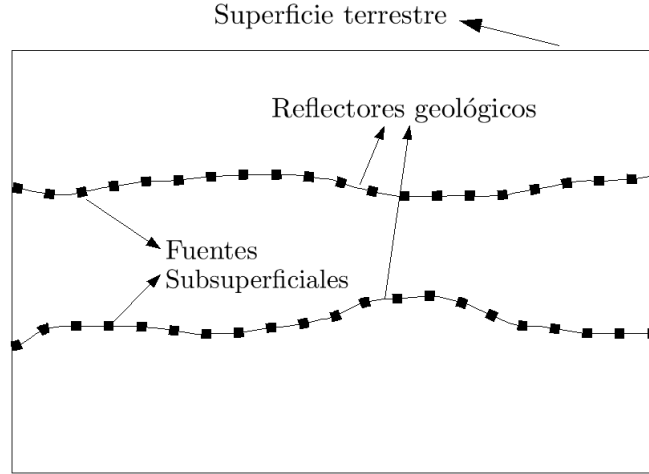


Figura 3-7: Consideración de los reflectores como fuentes.

algunos puntos distribuidos a lo largo del reflector geológico[18]. Esto hace posible discretizar la superficie de separación entre las capas geológicas en un número finito de puntos y asumir que el fenómeno de dispersión ocurre en cada uno de ellos, ver Figura 3-7. Adicionalmente, se considera que dichos puntos son fuentes perturbadas simultáneamente.

Dada la geometría rectangular del dominio espacial, la solución de (3-3) se puede aproximar con el siguiente esquema de diferencias finitas de segundo orden en espacio y tiempo [11, 24]

$$U_{i,j}^{n+1} = 2U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1} + \nu^2 [U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 4U_{i,j}^n] + S_{i,j}^n, \quad (3-8)$$

n , i y j se definen por (3-6). Además

$$\nu = \frac{c_{i,j}\Delta t}{h}, \quad (3-9)$$

siendo $c_{i,j}$ la velocidad de propagación en el punto (x_i, y_j) , $h = \Delta x = \Delta z$ el espaciado de la grilla, Δt se define por (3-5), $S_{i,j}^n$ es

$$S(x_i, z_j, t_n) = s(t_n)\delta(x_i - x_k, y_i - y_l), \quad (3-10)$$

donde (x_k, y_l) , con $k = 0, 1, \dots, M_k$ y $l = 0, 1, \dots, M_l$, son las coordenadas de los puntos de la grilla que se consideran fuentes. Finalmente, tomando las condiciones iniciales y sabiendo que el sistema es perturbado por la función fuente, se tiene que

$$U_{i,j}^0 = 0$$

$$U_{i,j}^1 = \begin{cases} S_{i,j}^1, & \text{si } i = k, j = l \\ 0, & \text{si } i \neq k, j \neq l. \end{cases} \quad (3-11)$$

3.2. Migración en tiempo inverso, RTM

3.2.1. Planteamiento del problema

Tal como se comenta en la sección 1.2.3. existen diversas formulaciones para realizar la migración sísmica. Realizar una evaluación o documentación de cada una de ellas se escapa al alcance de este documento. En este estudio es de particular interés el proceso de migración basado en la ecuación de onda en el dominio espacio tiempo, conocida como migración en tiempo inverso (en inglés Reverse Time Migration, RTM). El concepto es sencillo, consiste en propagar retrocediendo en el tiempo los datos sísmicos de reflexión obtenidos en campo. El modelo que se utiliza es análogo al planteado en (3-2), pero esta vez para un campo $\tilde{u}(x, z, \tau)$, donde se reemplaza el tiempo usual t por el tiempo inverso

$$\tau = T - t, \quad (3-12)$$

donde T es el tiempo total de observación.

Considerando la transformación (3-12), por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (3-13)$$

Aplicando la segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \quad (3-14)$$

En (3-12) se observa que

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1. \quad (3-15)$$

De esta manera se prueba que el procedimiento RTM es posible porque el operador de la ecuación de onda es invariante bajo traslación e inversión de la coordenada temporal.

La función fuente, denotada \tilde{S} , es la sección sísmica apilada¹. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el problema a solucionar es

$$\begin{aligned} \frac{1}{(c(x, z))^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{u}(x, z, \tau) &= \nabla^2 \tilde{u}(x, z, \tau) + \tilde{S}(x, z, \tau), \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq z \\ \tilde{u}(x, z, 0) &= 0 \\ \tilde{u}_t(x, z, 0) &= 0 \\ \tilde{u}(x, z, \tau) &= 0, \quad z < 0, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3-16)$$

¹Ver sección 1.2.2. Para una referencia completa ver por ejemplo [4]

La segunda condición significa que el tiempo de observación T , es suficiente para asumir que el medio se encuentra en estado de equilibrio después del levantamiento. $\tau = T$ no se considera porque es equivalente a $t = 0$, lo cual implica por las condiciones en (3-3) que el medio se encuentra en reposo.

3.2.2. Discretización y condiciones de frontera

La discretización para encontrar la solución numérica aproximada del problema (3-16) es análoga a la presentada para el problema directo. El dominio espacial es cubierto con una grilla exactamente igual a la definida en (3-4). Además, la magnitud del dominio temporal considerado también es $[0, T]$ y si se toma el mismo número de pasos N_t se tiene que

$$\Delta\tau = \Delta t = \frac{T}{N_t}. \quad (3-17)$$

Ahora, aunque la magnitud del tamaño de paso es igual, se debe tener presente que $\tau = T - t$, por lo cual se cumple que

$$\tilde{u}(x, z, \tau) = u(x, z, T - \tau), \quad (3-18)$$

o para el sistema discretizado, si se denota la solución aproximada de \tilde{u} por \tilde{U} , se tiene que

$$\tilde{U}(i\Delta x, j\Delta z, n\Delta\tau) = U(i\Delta x, j\Delta z, T - (N_t - n)\Delta\tau). \quad (3-19)$$

Sobre (3-19) se debe imponer un $n = n_{max} < N_t$, de tal manera que se propague la onda en tiempo inverso hasta un $t > 0$ que permita discriminar los reflectores geológicos, ya que en $t = 0$ o igualmente cuando $n = N_t$ en la solución numérica, se retornaría a las condiciones iniciales del problema (3-3) obteniendo que $u(x, z, 0) = 0$, es decir el medio en reposo, lo cual no se ajusta a los intereses de la migración.

El esquema de diferencias finitas de segundo orden para la migración es

$$\tilde{U}_{i,j}^{n+1} = 2\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i,j}^{n-1} + \nu^2 \left[\tilde{U}_{i+1,j}^n + \tilde{U}_{i-1,j}^n + \tilde{U}_{i,j+1}^n + \tilde{U}_{i,j-1}^n - 4\tilde{U}_{i,j}^n \right] + \tilde{S}_{i,j}^n, \quad (3-20)$$

i, j , se definen como en el problema directo por (3-6), pero esta vez $n = 1, \dots, n_{max}$. Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j}^0 &= 0 \\ \tilde{U}_{i,j}^1 &= \begin{cases} \tilde{S}_{i,j}^1, & \text{si } j = 0 \\ 0, & \text{si } 0 < j. \end{cases} \end{aligned} \quad (3-21)$$

En cuanto a las condiciones de frontera, sobre las fronteras B , C y D se usan las fronteras ficticias presentadas en el capítulo 4. Sobre A se asignan los datos sísmicos $\tilde{S}_{i,j}^n$, es decir que para RTM, sobre la frontera A se disponen las fuentes.

3.3. Consistencia, convergencia y estabilidad

Un esquema de diferencias finitas es consistente con la ecuación diferencial parcial si para una función suave ϕ se cumple que [20]

$$L\phi - L_{\delta,h}\phi \rightarrow 0, \text{ cuando } \delta, h \rightarrow 0. \quad (3-22)$$

Para la ecuación de onda escalar el operador diferencial L se da por

$$L\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Upsilon^2} - c^2 \nabla^2 \phi = \phi_{\Upsilon\Upsilon} - c^2(\phi_{xx} + \phi_{zz}) \quad (3-23)$$

y su aproximación por diferencias finitas es

$$L_{\delta,h}\phi = \frac{\phi_{i,j}^{k+1} - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j}^{k-1}}{\delta^2} - c^2 \left[\frac{\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k}{h^2} \right], \quad (3-24)$$

donde $\phi_{i,j}^k = \phi(x_i, z_j, \Upsilon_k)$, $h = \Delta x = \Delta z$ y $\delta = \Delta \Upsilon$. Se ha introducido Υ como una variable comodín, es decir que $\delta = \Delta t$ o $\delta = \Delta \tau$, de esta manera se prueba consistencia para el problema directo y para la migración en tiempo inverso. Expandiendo ϕ en serie de Taylor alrededor de (x_i, y_i, Υ_k) , se encuentra

$$\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j}^{k-1}}{\delta^2} = \phi_{\Upsilon\Upsilon} + \frac{1}{12}\phi_{\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon}\delta^2 + O(\delta^4) \quad (3-25)$$

$$\frac{\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k}{h^2} = \phi_{xx} + \frac{1}{12}\phi_{xxxx}h^2 + O(h^4) \quad (3-26)$$

$$\frac{\phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k}{h^2} = \phi_{zz} + \frac{1}{12}\phi_{zzzz}h^2 + O(h^4). \quad (3-27)$$

Reemplazando en (3-24)

$$L_{\delta,h}\phi = \phi_{\Upsilon\Upsilon} - c^2(\phi_{xx} + \phi_{zz}) + \frac{1}{12}\phi_{\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon}\delta^2 - \frac{c^2}{12}(\phi_{xxxx}h^2 + \phi_{zzzz}h^2) + O(\delta^4) + O(h^4), \quad (3-28)$$

entonces

$$L\phi - L_{\delta,h}\phi = \frac{1}{12}\phi_{\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon}\delta^2 - \frac{c^2}{12}(\phi_{xxxx}h^2 + \phi_{zzzz}h^2) + O(\delta^4) + O(h^4) \rightarrow 0 \text{ cuando } (\delta^2, h^2) \rightarrow 0. \quad (3-29)$$

Con esto se prueba que los esquemas (3-8) y (3-20) son de segundo orden de consistencia.

Para probar la estabilidad se usa el análisis de Von Neumann. Se sustituye [15]

$$\Phi_{k,l}^n = \lambda^n e^{i\omega_x kh} e^{i\omega_z l\delta} \quad (3-30)$$

en el esquema

$$\frac{\Phi_{k,l}^{n+1} - 2\Phi_{k,l}^n + \Phi_{k,l}^{n-1}}{\delta^2} = c^2 \left[\frac{\Phi_{k+1,l}^n - 2\Phi_{k,l}^n + \Phi_{k-1,l}^n}{h^2} + \frac{\Phi_{k,l+1}^n - 2\Phi_{k,l}^n + \Phi_{k,l-1}^n}{h^2} \right]. \quad (3-31)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{n+1} &= \lambda \Phi_{k,l}^n, & \Phi_{k,l}^{n-1} &= \lambda^{-1} \Phi_{k,l}^n \\ \Phi_{k+1,l}^n &= \Phi_{k,l}^n e^{i\omega_x h}, & \Phi_{k-1,l}^n &= \Phi_{k,l}^n e^{-i\omega_x h} \\ \Phi_{k,l+1}^n &= \Phi_{k,l}^n e^{i\omega_z h}, & \Phi_{k,l-1}^n &= \Phi_{k,l}^n e^{-i\omega_z h}. \end{aligned} \quad (3-32)$$

Reemplazando (3-32) en (3-31) se tiene

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\delta^2} = \lambda c^2 \left[\frac{e^{i\omega_x h} + e^{-i\omega_x h} - 2}{h^2} + \frac{e^{i\omega_z h} + e^{-i\omega_z h} - 2}{h^2} \right], \quad (3-33)$$

o de manera equivalente

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\delta^2} = \lambda c^2 \left[\frac{2 \cos \omega_x h - 2}{h^2} + \frac{2 \cos \omega_z h - 2}{h^2} \right]. \quad (3-34)$$

Ordenando términos

$$\lambda^2 - 2 \left[1 - \frac{c^2 \delta^2}{h^2} (1 - \cos \omega_x h) - \frac{c^2 \delta^2}{h^2} (1 - \cos \omega_z h) \right] \lambda + 1 = 0. \quad (3-35)$$

La ecuación (3-35) tiene la forma $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (3-36)$$

λ se conoce como factor amplificador y para probar estabilidad se debe verificar que $|\lambda| \leq 1$, lo cual no se cumple tomando las raíces reales de (3-36), por lo tanto se deben tomar las raíces imaginarias

$$\lambda = \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (3-37)$$

porque $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + 1 - \alpha^2} = 1 \leq 1$. Entonces, se requiere que $|\alpha| \leq 1$. Por (3-35)

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - \frac{c^2 \delta^2}{h^2} (1 - \cos \omega_x h) - \frac{c^2 \delta^2}{h^2} (1 - \cos \omega_z h) \leq 1 \\ 0 &\leq \left(\frac{c^2 \delta^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega_x h}{2} + \frac{c^2 \delta^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega_z h}{2} \right) \leq 1, \end{aligned} \quad (3-38)$$

y como

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{c^2 \delta^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega_x h}{2} + \frac{c^2 \delta^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega_z h}{2} \\ &\leq \frac{c^2 \delta^2}{h^2} + \frac{c^2 \delta^2}{h^2} \leq 1, \end{aligned} \tag{3-39}$$

se ha encontrado que la condición de estabilidad para el esquema (3-31) es

$$\frac{c\delta}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3-40}$$

El operador diferencial definido en (3-23) es lineal y permite aplicar el teorema de equivalencia de Lax, que establece para una aproximación de diferencias finitas consistente, que la estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia. Se concluye de (3-29) y de la condición (3-40) que el esquema (3-31) es convergente, por lo tanto también los esquemas (3-8) y (3-20).

4 Condiciones de frontera no reflectantes

4.1. Fronteras ficticias

El dominio espacial para la solución de (3-3) es el semi-plano $z \geq 0$. En otros términos, se trata de un dominio infinito. Sin embargo, la memoria computacional es limitada y por lo tanto, una solución numérica, solo es posible para un dominio finito.

El dominio espacial que se considera es $\Omega_\infty = \{(x, z) : -\infty < x < \infty, 0 \leq z < \infty\}$. Pero dada la restricción de memoria computacional, se pretende una partición de Ω_∞ de la siguiente manera: Un dominio computacional limitado Ω , una frontera artificial Γ y un dominio exterior no limitado E . Dichas particiones se definen así

$$\Omega = \{(x, z) : 0 < x < a \wedge 0 < z < b\} \quad (4-1)$$

$$\Gamma = B \cup C \cup D \quad (4-2)$$

$$E = \{(x, z) : (x, z) \notin \Gamma \wedge (x, z) \notin \Omega \wedge z \geq 0\}, \quad (4-3)$$

donde

$$B = \{(x, z) : x = 0 \wedge 0 \leq z \leq b\} \quad (4-4)$$

$$C = \{(x, z) : x = a \wedge 0 \leq z \leq b\} \quad (4-5)$$

$$D = \{(x, z) : z = b \wedge 0 \leq x \leq a\}. \quad (4-6)$$

La unión disyunta de las particiones es

$$\Omega_\infty = E \cup \Omega \cup \Gamma. \quad (4-7)$$

El problema de las condiciones de frontera ficticias, es encontrar alguna condición adecuada sobre Γ , para conseguir una solución en la región Ω , sin conocer la solución en E y evitar que se generen reflexiones sobre las fronteras computacionales Γ que no corresponden a la física del problema ya que en la Tierra no existen dichas fronteras. En este trabajo, las condiciones sobre Γ son modeladas como condiciones de frontera no reflectantes, para lo cual se utiliza el bien conocido método de Reynolds.

4.2. El método de Reynolds

La solución para modelar condiciones de frontera no reflectantes propuesta por Reynolds [3], es ampliamente utilizada en aplicaciones de migración sísmica. Es una aproximación de condición de frontera no reflectante local, tanto espacial como temporal, por lo que no implica un costo adicional de almacenamiento en memoria y tampoco se incrementa el tiempo de computo.

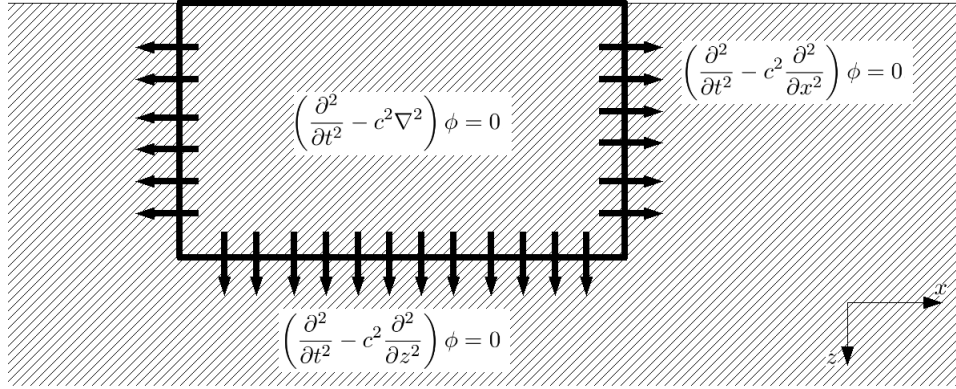


Figura 4-1: Consideraciones físicas del Método de Reynolds.

De los problemas (3-3) y (3-16), se conoce que en el dominio Ω_∞ se satisface la ecuación de onda (2-54), entonces sobre la frontera Γ también se satisface. El método de Reynolds solo tienen en cuenta la propagación normal a las fronteras computacionales (ver Figura 4-1), por lo cual, se asume que sobre dichas fronteras computacionales se satisface la ecuación de onda en una dimensión. En las fronteras B y D respectivamente se cumple

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0 \quad (4-8)$$

y en la frontera C

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0. \quad (4-9)$$

Factorizando el operador diferencial de (4-8) se obtiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0, \quad (4-10)$$

con $c > 0$. En la ecuación (4-10) se tiene el producto de dos operadores diferenciales que actúan sobre ϕ , esto es $L_1 L_2 \phi = 0$. En este caso particular L_1 y L_2 corresponden con el operador de onda en una dimensión, lo cual permite comutarlos, esto es $L_2 L_1 \phi = 0$. Para modelar fronteras no reflectantes, se debe elegir $L_1 \phi = 0$, o bien $L_2 = 0$. En particular, sobre

las fronteras B y D se tiene respectivamente

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0 \quad (4-11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0 \quad (4-12)$$

y para la frontera C

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = 0. \quad (4-13)$$

Las ecuaciones (4-11) y (4-12), se pueden resumir en

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0, \quad (4-14)$$

donde $\alpha = \pm c$. La ecuación (4-14) tiene la forma de una ecuación diferencial parcial hiperbólica (EDPH) de primer orden. No obstante, en el ámbito del método de Reynolds, esta es una aproximación para evitar reflexiones sobre las fronteras y solo se evalúa sobre las mismas. No obstante, para evaluar (4-11), (4-12) y (4-13) numéricamente, es necesario aplicar un esquema de diferencias finitas y por lo tanto se deben tener en cuenta condiciones de estabilidad y orden de consistencia acordes con los presentados en la sección 3.3. Para esto es ilustrativo realizar una analogía con una (EDPH). Siguiendo esta idea, analíticamente, con el método de las características, es sencillo probar que la solución de (4-14) es

$$\phi = \phi_0(x - \alpha t). \quad (4-15)$$

Para α constante, las características son

$$t = \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\alpha}x, \quad (4-16)$$

en otros términos, se trata de rectas paralelas cuya pendiente es

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha}. \quad (4-17)$$

Para los dos casos que se están considerando, se tiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \quad (4-18)$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{c}. \quad (4-19)$$

En la Figura 4-2. se esquematizan las características para las ecuaciones (4-11) y (4-12). Estas rectas con pendiente $\pm 1/c$, se denominan *dominio de dependencia* y la condición CFL establece que, debe estar dentro del dominio de dependencia del esquema numérico [15], esto es (ver Figura 4-3)

$$-c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad \text{o} \quad c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (4-20)$$

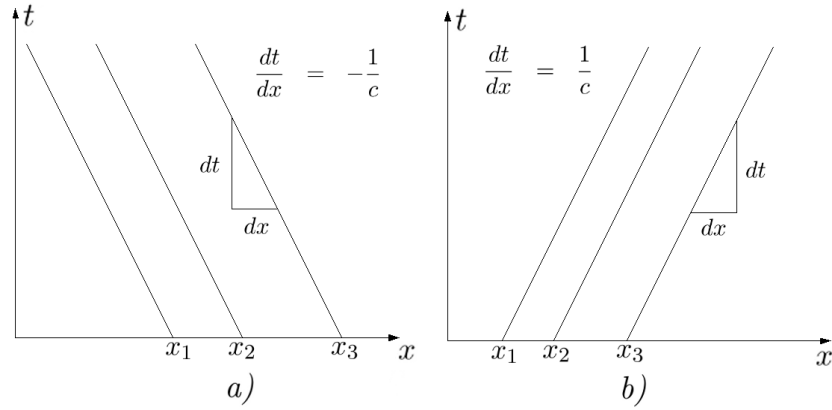


Figura 4-2: Características para las ecuaciones a) (4-11) y b) (4-12)

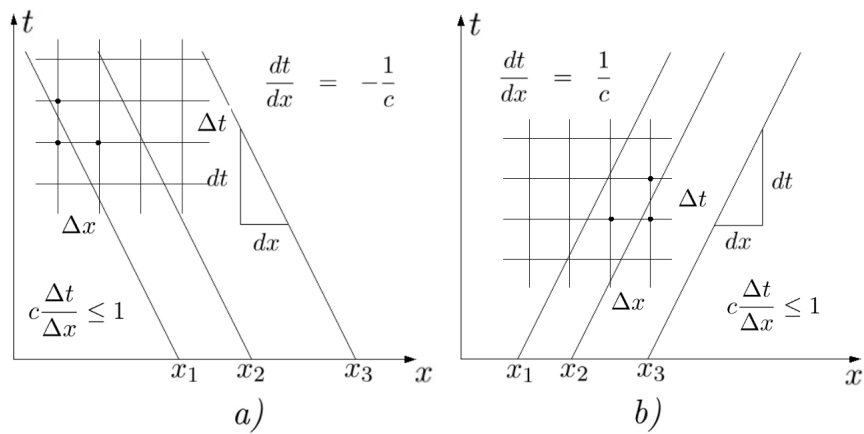


Figura 4-3: Esquematización del dominio de dependencia de la ecuación de advección y de un esquema numérico upwind, para a) $\alpha = -c$ y b) $\alpha = c$.



Figura 4-4: Ejemplo numérico para ilustrar las condiciones de frontera no reflectantes. Se trata de un medio homogéneo perturbado en su centroide. La velocidad de propagación en el medio es 2500 ms^{-1} . El dominio espacial es una región de $2000 \times 2000 \text{ m}$, la frecuencia de la fuente es 30 Hertz y su forma funcional es la misma de (3-1). De izquierda a derecha la solución para 0,3, 0,5 y 0,7 segundos.

donde Δt es el espaciado de la grilla temporal y Δx de la grilla espacial.

Al aplicar la ecuación (4-14) en cada paso de tiempo se comete un error E . Por ejemplo, sobre la frontera B , el error cometido en el paso de tiempo n puede calcularse con

$$E = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=h}^n. \quad (4-21)$$

Para las condiciones de frontera que se están tratando, es posible corregir E en el paso de tiempo $n + 1$, es decir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=0}^{n+1} - E = 0, \quad (4-22)$$

con E dado por (4-21). De esta manera las condiciones de frontera para el problema son

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=0}^{n+1} - \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=h}^n = 0 \quad (4-23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=x_{N_x}}^n - \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{x=x_{N_x}-h}^{n+1} = 0 \quad (4-24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_{z=z_{N_z}}^n - \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_{z=z_{N_z}-h}^{n+1} = 0 \quad (4-25)$$

y sus respectivos esquemas de diferencias finitas son

$$\begin{aligned} U_{0,j}^{n+1} &= U_{0,j}^n + U_{1,j}^n - U_{1,j}^{n-1} + \nu(U_{1,j}^n - U_{0,j}^n + U_{2,j}^{n-1} - U_{1,j}^{n-1}) \\ U_{N_x,j}^{n+1} &= U_{N_x,j}^n + U_{N_x-1,j}^n - U_{N_x-1,j}^{n-1} - \nu(U_{N_x,j}^n - U_{N_x-1,j}^n - U_{N_x-1,j}^{n-1} + U_{N_x-2,j}^{n-1}) \\ U_{i,N_z}^{n+1} &= U_{i,N_z}^n + U_{i,N_z-1}^n - U_{i,N_z-1}^{n-1} - \nu(U_{i,N_z}^n - U_{i,N_z-1}^n - U_{i,N_z-1}^{n-1} + U_{i,N_z-2}^{n-1}) \end{aligned} \quad (4-26)$$

En la Figura **4-4**, se ilustra el funcionamiento de las fronteras no reflectantes. En la sección 5.1.3 se verifica mediante experimentación numérica el orden de exactitud.

5 Resultados Numéricos

5.1. Programa de cómputo

Las aproximaciones numéricas se calcularon con un programa de cómputo escrito en lenguaje C++. Tiene un diseño orientado a objetos, lo cual permite manipularlo y extenderlo fácilmente. Algunas de las clases permiten manipular los datos fácilmente, como la clase Matrix que facilita realizar operaciones sobre matrices. El programa dispone de una clase denominada Base, que controla el flujo de entradas y salidas del programa, es decir que lee archivos, escribe los resultados en ficheros de texto plano e imágenes en formato BMP. Los ejes estructurales del programa son las clases SEISMIC y REVTIME. En este capítulo se especifican detalles sobre el funcionamiento de estas dos últimas clases.

5.1.1. Clase SEISMIC

La clase SEISMIC implementa el modelamiento numérico del problema (3-3). Permite realizar la simulación de datos sísmicos. Los argumentos de entrada son el modelo de velocidad $c(x, z)$, el ancho del perfil sobre terreno x_{N_x} en (3-6), los puntos que se consideran fuentes, la frecuencia de la función fuente (3-2), el tamaño del paso de tiempo y el tiempo de observación T . Dentro del programa se instancian arreglos para los tres pasos de tiempo de la siguiente manera:

```
Matrix u1(nz, nx);
Matrix u2(nz, nx);
Matrix u3(nz, nx);

for (j=1; j<nx-1; j++)
{
    for (i=1; i<nz-1; i++)
    {
        u2(i, j) = u2(i, j) + src(1)*r(i, j);
    } //fin i
} //fin j
```

El constructor de la clase Matrix establece un arreglo bidimensional cuyos elementos son inicializados con ceros. A los puntos que son fuentes se asigna el valor $s(t_1)$, donde s es la

función (3-2). Este procedimiento implementa las condiciones (3-11). Para explicar porque se asume que el campo de desplazamiento es cero en los dos primeros pasos de tiempo para puntos que no se consideran fuentes, se aproxima la derivada temporal de primer orden con diferencias finitas, además, por (3-3) se tiene que $u_t = 0$, conduciendo a que

$$[u_t]_{t=0} = \frac{u^1 - u_0}{h} = 0, \quad (5-1)$$

también por (3-3) $u_0 = 0$, entonces $u_1 = 0$.

El algoritmo para el esquema numérico (3-8) es el siguiente:

```

for ( it = 0; it < nt; it++)
{

    //Establecer el valor del punto fuente en el tiempo it
    for ( j=1;j<nx-1;j++)
    {
        for ( i=1;i<nz-1;i++)
        {
            u2(i , j) = u2(i , j) + src(it)*r(i , j);
        } //fin i
    } //fin j

    alpha = (dt*dt)/(h*h);

    //Obtener U^{k+1}
    for ( j = 1; j < nx - 1; j++ )
    {
        for ( i=1; i < nz-1 ; i++ )
        {
            ala = alpha*v(i , j)*v(i , j);
            ppsix = u2(i , j-1)-2*u2(i , j)+u2(i , j+1);
            ppsiz = u2(i-1,j)-2*u2(i , j)+u2(i+1,j);
            ppsit = -2*u2(i , j)+u1(i , j);
            u3(i , j)= ala*(ppsix+ppsiz)-ppsit;
        } // Fin i
    } // fin j

    // condiciones en la frontera

    for ( j = 1; j < nx-1;j++)
    {

```

```

    cb = v(nz-1,j)*dt/h;
    u3(nz-1,j) = u2(nz-1,j)+u2(nz-2,j)-u1(nz-2,j)
                -cb*(u2(nz-1,j)-u2(nz-2,j)
                - u1(nz-2,j)+u1(nz-3,j));
}

for(j = 1;j<nx-1;j++)
{
    cb = v(0,j)*dt/h;
    u3(0,j) = u2(0,j)+u2(1,j)-u1(1,j)
              +cb*(u2(1,j)-u2(0,j)+u1(1,j)-u1(2,j));
}

for(i=1;i<nz-1;i++)
{
    cb = v(i,0)*dt/h;
    u3(i,0) = u2(i,0)+u2(i,1)-u1(i,1)
              +cb*(u2(i,1)-u2(i,0)-u1(i,2)+u1(i,1));
}

for(i=1;i<nz-1;i++)
{
    cb = v(i,nx-1)*dt/h;
    u3(i,nx-1) = u2(i,nx-1)+u2(i,nx-2)-u1(i,nx-2)
                 -cb*(u2(i,nx-1)-u2(i,nx-2)
                 -u1(i,nx-2)+u1(i,nx-3));
}

//Escribir resultado

for(j=0;j<nx;j++)
{
    seismic(it,j) = u3(3,j);
}

//Establecer los nuevos valores para la siguiente iteracion
u1 = u2;
u2 = u3;
u3.Zeros();

```

```
    }//Fin it
```

Dentro del código se resaltan los aspectos relevantes de las sentencias.

5.1.2. Clase REVTIME

La clase REVTIME permite realizar la propagación en tiempo inverso, para lograr la imagen del perfil geológico a partir de los datos sísmicos sintéticos. Requiere el modelo de velocidades en profundidad, los datos sísmicos sintéticos, el ancho del perfil, el tiempo T de observación y la magnitud del paso de tiempo.

El procedimiento para las condiciones iniciales (3-21) es:

```
Matrix u1(nz,nx);
Matrix u2(nz,nx);
Matrix u3(nz,nx);
```

```
for(j=0;j<nx;j++) u2(0,j) = seismic(0,j);
```

donde se tienen asunciones análogas a las usadas en la sección anterior, pero esta vez dadas por (3-16) y explicadas similarmente por aproximar su la derivada de primer orden y aproximarla por un esquema de diferencias finitas tal como se realiza en (5-1).

El algoritmo para realizar la migración en tiempo inverso es:

```
for(it = nttmax;it<nt;it++)
{
    //Asignar los datos sismicos sobre la frontera A
    for(j=0;j<nx;j++) u2(0,j) = seismic(itrev,j);

    for(i=1;i<nz-1;i++)
    {
        for(j=1;j<nx-1;j++)
        {
            ala=alpha*c2(i,j);
            ppsix = u2(i,j-1)-2*u2(i,j)+u2(i,j+1);
            ppsiz = u2(i-1,j)-2*u2(i,j)+u2(i+1,j);
            ppsit = -2*u2(i,j)+u1(i,j);
            u3(i,j) = ala*(ppsix+ppsiz)-ppsit;
        }
    }

    //Condiciones de frontera
    for(j = 1;j < nx-1;j++)
```

```

    {
        u3(nz-1,j) = u2(nz-1,j)+u2(nz-2,j)-u1(nz-2,j)
                    -cb(nz-1,j)*(u2(nz-1,j)-u2(nz-2,j)
                    -u1(nz-2,j)+u1(nz-3,j));
    }

    for(i=1;i<nz-1;i++)
    {
        u3(i,0) = u2(i,0)+u2(i,1)-u1(i,1)
                +cb(i,0)*(u2(i,1)-u2(i,0)-u1(i,2)+u1(i,1));
    }

    for(i=1;i<nz-1;i++)
    {
        u3(i,nx-1) = u2(i,nx-1)+u2(i,nx-2)-u1(i,nx-2)
                    -cb(i,nx-1)*(u2(i,nx-1)-u2(i,nx-2)
                    -u1(i,nx-2)+u1(i,nx-3));
    }

    u1 = u2;
    u2 = u3;
    u3.Zeros();

    image = u2;

} //Fin iteracion sobre it

```

5.1.3. Estimación del error de las soluciones numéricas

Para comprobar que el programa de cómputo produce resultados correctos con respecto al orden de exactitud esperado, se realiza dos experimentos numéricos, los cuales permiten verificar numéricamente la implementación de los esquemas de diferencias finitas empleados en este trabajo.

La solución analítica incluyendo las condiciones de frontera (4-11), (4-12) y (4-13) no es factible y lograr soluciones para grillas muy finas es computacionalmente costoso y actualmente no realizable con computadores personales. Las anteriores circunstancias conllevan a estimar el error tomando como referencia una solución para una grilla $h/4$. Para esto se comparan las soluciones de la siguiente manera. Se toman tres soluciones para h , $h/2$ y $h/4$

y se define el error relativo entre soluciones de la siguiente manera [11]

$$\tilde{E}_1 = U(h) - U\left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{y} \quad \tilde{E}_2 = U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{h}{4}\right). \quad (5-2)$$

Además

$$\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} \approx 2^p, \quad (5-3)$$

siendo p el orden de exactitud que puede estimarse de la siguiente manera

$$p \approx \log_2 \left(\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} \right). \quad (5-4)$$

La evaluación se realiza para el mismo modelo presentado en la sección 4.2. Un medio homogéneo con velocidad de propagación de 2500 ms^{-1} , la frecuencia de la fuente es 30 Hertz y la longitud del dominio es de 2000×2000 metros. Se realizaron dos comparaciones, para dos tiempos diferentes, para $t = 0,3$ segundos, de tal manera que la solución este contenida dentro del dominio considerado. En un segundo caso la solución se obtiene hasta $t = 0,5$ segundos, tiempo en el cual la onda no se encuentra dentro del dominio considerado, permitiendo evaluar la exactitud sobre las fronteras. Las dos situaciones se aprecian en la Figura 4-4.

N_x	N_t	$\tilde{E}(h) - \tilde{E}(h/2)$	p
100	100	0,4156509	2,1487
200	200	0,0937362	
400	400		

Tabla 5-1: Parámetros numéricos para estimar el orden de exactitud para la solución de un medio homogéneo hasta $t = 0,3$ segundos.

N_x	N_t	$\tilde{E}(h) - \tilde{E}(h/2)$	p
150	200	0,1644325	2,0165
300	400	0,0406412	
600	800		

Tabla 5-2: Parámetros numéricos para estimar el orden de exactitud para la solución de un medio homogéneo hasta $t = 0,5$ segundos.

En las Tablas 5-1. y 5-2. se presentan los parámetros utilizados para la evaluación del orden de exactitud en los dos casos. En ambos, se observa que el orden de exactitud es aproximadamente dos.

5.1.4. Costo computacional

En este trabajo los cálculos realizados se mantienen en una escala local, en dos dimensiones y las aproximaciones no son de alta resolución. No obstante, el tiempo de cálculo es significativo. Para mantener la estabilidad de la solución, se debe tener en cuenta la condición CFL tratada en la sección 3.3, por esta razón a medida que se toma una grilla espacial más fina, es necesario tomar mas pasos de tiempo.

N_x	N_z	N_t	Tiempo (s)
300	150	500	64
600	300	1000	522
1200	600	2000	4320

Tabla 5-3: Costo computacional para diferentes grillas.

En la Tabla 5-3. se presentan los tiempos de computo para diferentes grillas. Se observa que un incremento de $h/2$ en la grilla espacial y $\Delta t/2$ en la temporal, produce un incremento significativo en el tiempo de cálculo. De acuerdo con dicha tabla, se estima que para el procesador Intel(R) Pentium(R) Dual CPU T3200 2.00GHz, usado para realizar los cálculos de este estudio, el rendimiento es del orden de 8 megaflops¹.

Para resaltar la complejidad de esto, supóngase que la longitud del perfil es 3000 metros, en cuyo caso para $N_x = 1200$, el tamaño de paso espacial es $h = 2,5$ metros. Entonces, si se desea tomar una grilla con $h = 1,25$, los calculos tomarían alrededor de 10 horas. Si se buscara una solución en tres dimensiones, para lo cual se incluyera un $N_y = 1200$, el tiempo de computo es del orden de las 12000 horas. Aunque este ejercicio no es preciso, permite ilustrar que el problema que se resuelve en migración en tiempo inverso es realmente costoso computacionalmente.

5.2. Modelos simulados

5.2.1. Estrato geológico sinclinal

Un ejemplo muy ilustrativo de las finalidades de la migración es un perfil geológico compuesto de dos capas, cuya interface entre ellas tiene forma sinclinal (ver Figura 5-1). La sección sísmica apilada no representan directamente el modelo del perfil, Figura 5-2. Sin embargo, después de realizar la migración en tiempo inverso, Figura 5-3., se observa que la imagen es comparable directamente con el perfil de entrada.

En la Tabla 5-4. se listan los parámetros empleados para la simulación. El parámetro dt_{max} es estimado con la condición CFL de la siguiente manera. El criterio de estabilidad se da por

¹10⁶ operaciones de punto flotante (Floating point operations per second, flops)

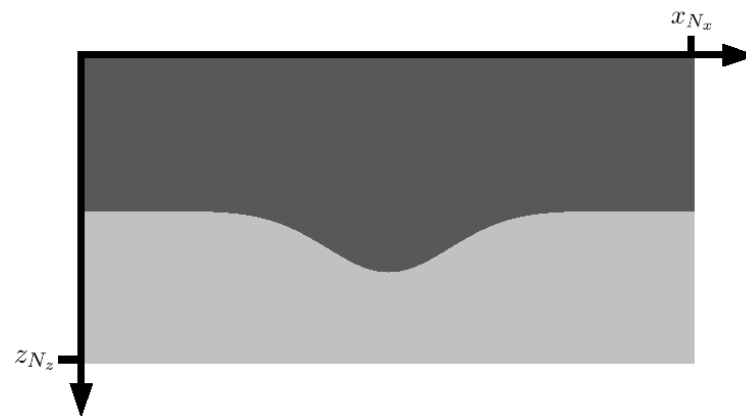


Figura 5-1: Perfil geológico sinclinal.

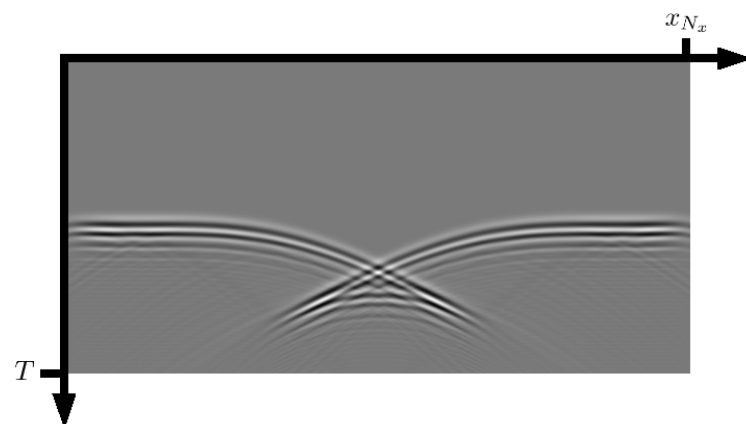


Figura 5-2: Datos sísmicos para un perfil con un estrato geológico sinclinal.

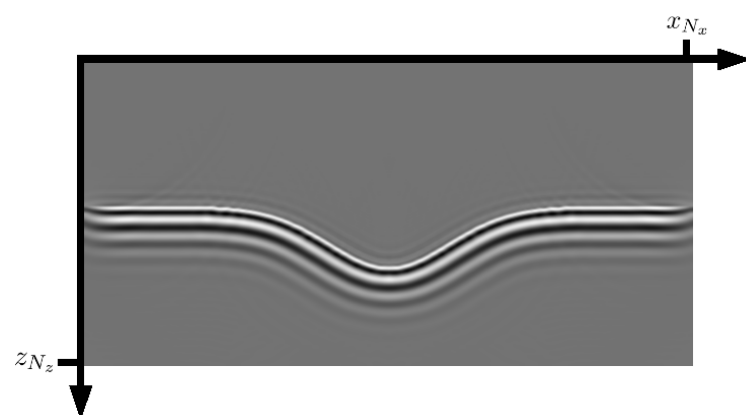


Figura 5-3: Imagen obtenida para el perfil sinclinal.

Parámetro	Valor	Unidades
x_{N_x}	3000	metros
z_{N_z}	1500	metros
T	1	segundos
ω	30	Hertz
h	5	metros
dt	0,001	segundos
dt_{max}	0,00141421	—
N_x	600	—
N_t	1000	—
N_{tmax}	20	—

Tabla 5-4: Parametros numéricos usados para el modelo sinclinal.

(3-40) y despejando δ , que corresponde al tamaño del paso de tiempo, se obtiene

$$\delta \leq \frac{h}{c_{max}\sqrt{2}}, \quad (5-5)$$

donde c_{max} es la máxima velocidad dentro del modelo de velocidades definido por el respectivo perfil. Entonces, se define la siguiente condición para mantener estabilidad en la aproximación numérica

$$dt_{max} = \frac{h}{c_{max}\sqrt{2}}. \quad (5-6)$$

Esta notación se emplea en el resto de tablas en las que se indican los parámetros numéricos usados para las simulaciones, es decir, Tablas 5-6 y 5-7. Dentro de las soluciones estimadas, se aprecia que en todos los casos $dt < dt_{max}$.

5.2.2. Estratos buzados

Otro ejemplo es un perfil compuesto de seis estratos geológicos. Sus velocidades de propagación varían entre los 1500 y los 3500 ms^{-1} , las interfaces entre estratos tienen algún grado de buzamiento ². En la Tabla 5-5. se presentan los valores de las pendientes para cada una de las interfaces de las capas y su correspondiente velocidad. El modelo se presenta en la Figura 5-4.

En la Tabla 5-6. se presentan los parámetros numéricos utilizados para simular la sección sísmica apilada de la Figura 5-5. La metodología empleada es la descrita en la sección 3.1.4. En el eje horizontal se tiene la distancia en metros y en el eje vertical el tiempo.

La imagen corregida del perfil geológico se muestra en la Figura 5-6.

²Quiere decir que las interfaces presentan algún grado de inclinación con respecto a la horizontal del terreno

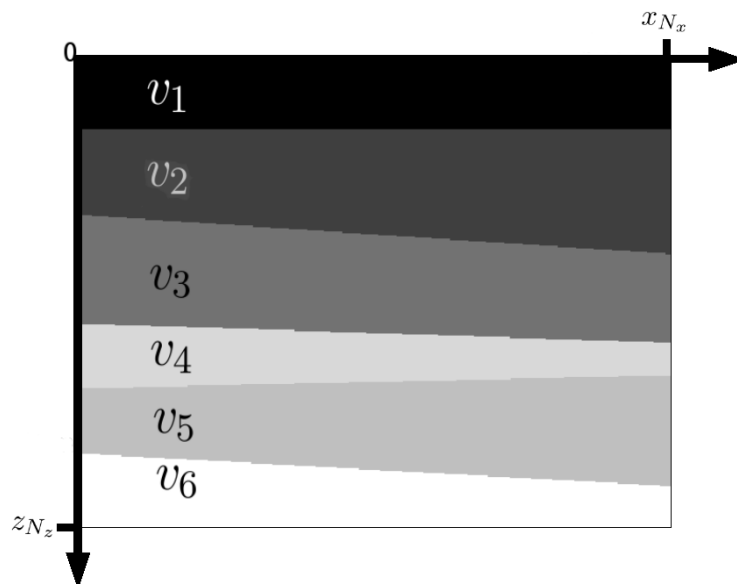


Figura 5-4: Modelo con estratos geológicos inclinados.

Estrato	v_i (ms^{-1})	pendiente
1	1500	0
2	2000	0,06
3	2400	0,03
4	3200	-0,02
5	3000	0,05
6	3500	

Tabla 5-5: Velocidades y pendientes de las interfaces del modelo de capas buzadas.

Parámetro	Valor	Unidades
x_{N_x}	3000	metros
z_{N_z}	3000	metros
T	1,5	segundos
ω	30	Hertz
h	5	metros
dt	0,001	segundos
dt_{max}	0,0010085	—
N_x	600	—
N_t	1500	—
N_{tmax}	5	—

Tabla 5-6: Parametros numéricos usados para el modelo de capas buzadas.

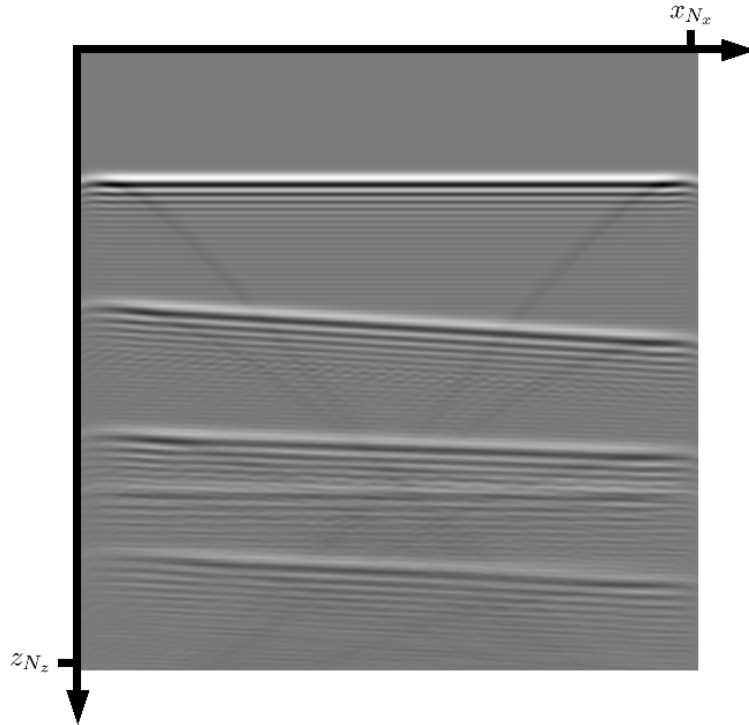


Figura 5-5: Datos sísmicos para un perfil con estratos geológicos inclinados.

5.2.3. Domo salino

Por último, se presenta la simulación de un ejemplo más complejo. Se trata de un perfil geológico compuesto de varias capas y que además presenta una falla y la formación de un domo salino, ver Figura 5-7. Este tipo de modelos son empleados para mostrar la potencia del método de migración basado en la ecuación de onda. La resolución obtenida es bastante precisa, teniendo en cuenta que sobre la sección sísmica apilada no es posible discriminar ninguna de las capas geológicas. Esto se puede ver en la Figura 5-8. La imagen migrada se presenta en la Figura 5-9.

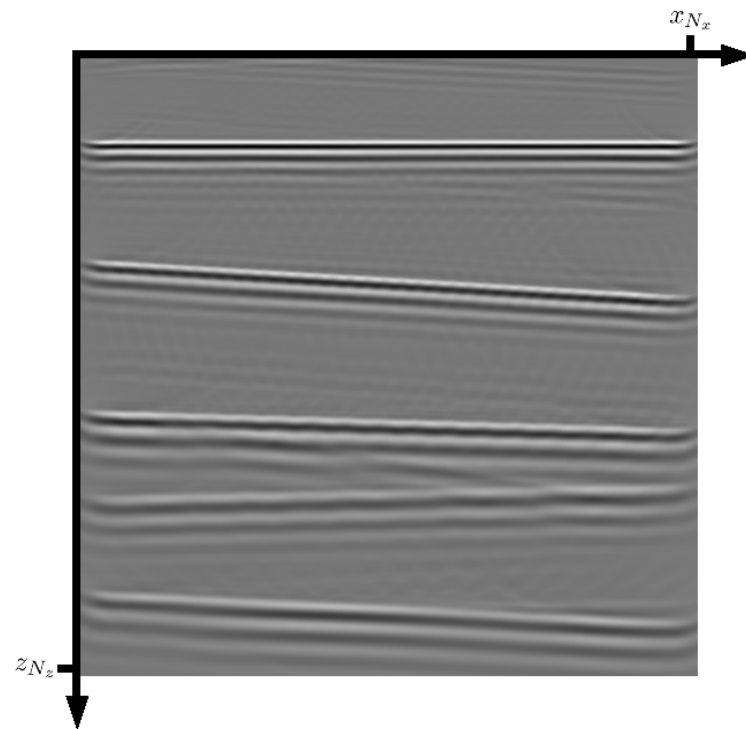


Figura 5-6: Imagen obtenida para un perfil con estratos geológicos inclinados.

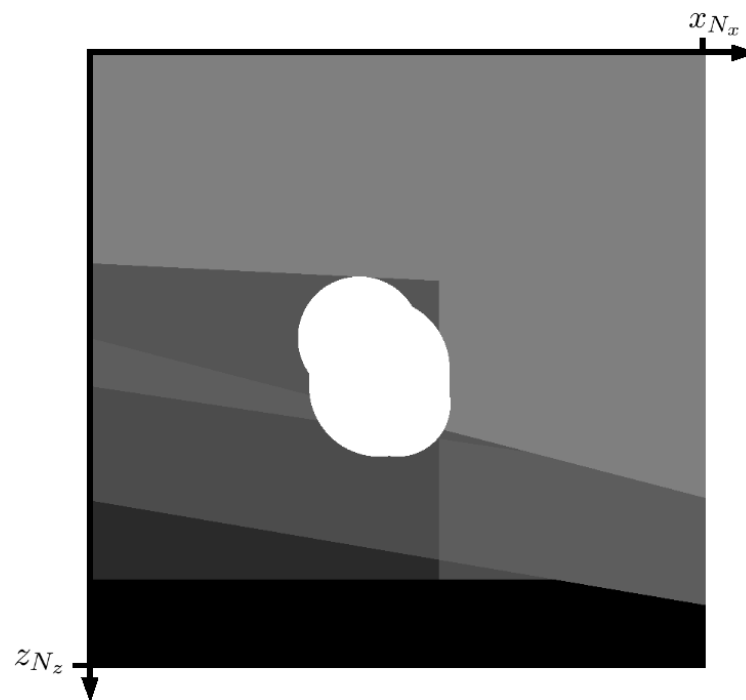


Figura 5-7: Modelo de velocidades de un perfil con un domo salino.

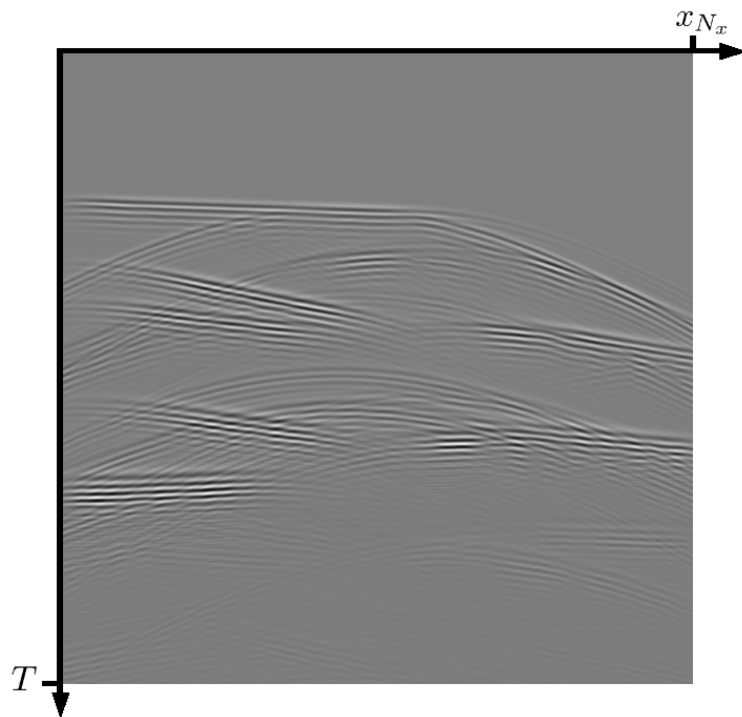


Figura 5-8: Sección sísmica apilada para el perfil de un domo salino.

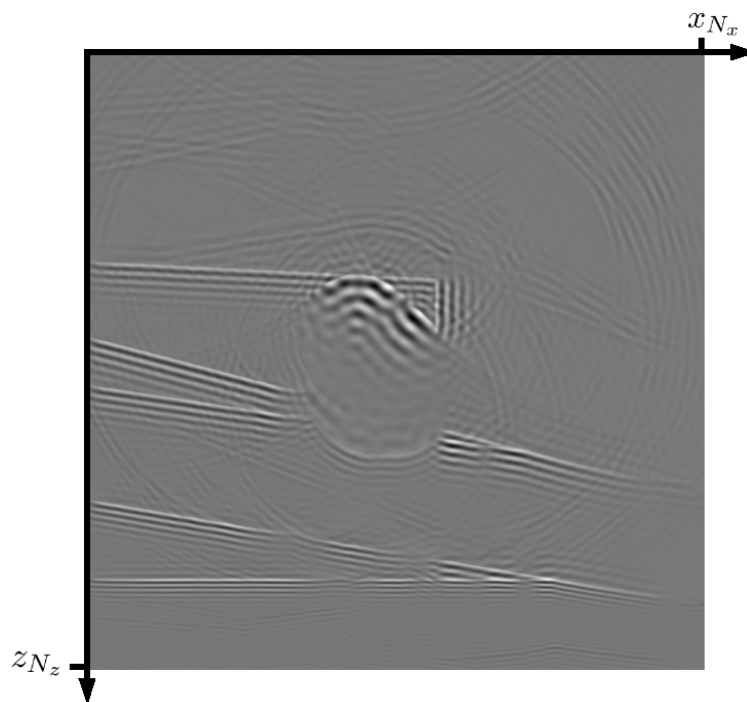


Figura 5-9: Imagen obtenida con RTM para un perfil con un domo salino.

Parámetro	Valor	Unidades
x_{N_x}	3000	metros
z_{N_z}	3000	metros
T	1,5	segundos
ω	60	Hertz
h	3.75	metros
dt	0,0005	segundos
dt_{max}	0,000589	—
N_x	800	—
N_t	3000	—
N_{tmax}	10	—

Tabla 5-7: Parametros numéricos usados para el modelo de un domo salino.

6 Conclusiones

La propagación de ondas sísmicas con aproximación acústica es estudiada numéricamente. Los resultados permiten observar la complejidad física del fenómeno y adicionalmente brindan la posibilidad de conocer algunos de los principales retos para modelar perfiles geológicos con datos reales.

El método de migración basado en la ecuación de onda, de acuerdo con los experimentos numéricos realizados, resulta ser un método óptimo en lo referente a corregir la posición de los reflectores geológicos. Sin embargo, su principal desventaja, radica en que requiere de un modelo de velocidad en profundidad conocido.

Los últimos avances computacionales hacen posible la realización de este tipo de trabajos. No obstante, en algún momento se encuentra limitación en la capacidad de computo. En el desarrollo de este estudio, el principal problema surge cuando se pretende aproximar el campo de desplazamientos con una grilla fina. Soluciones para dominios de varios kilómetros son posibles, pero el tamaño de paso de la grilla es del orden de los metros. Para un modelamiento en tres dimensiones el problema puede escapar a las capacidades actuales de computadores personales.

Las condiciones de frontera no reflectantes constituyen uno de los problemas abiertos más importantes en la migración sísmica. Se han planteado otro tipo de soluciones (por ejemplo las presentadas en [7]), pero no son locales en tiempo ni en espacio, por lo cual el costo computacional se incrementa, acentuando las limitaciones afrontadas. En este trabajo se implementa un método clásico local para modelar fronteras no reflectantes.

Este estudio se realiza para migración después de apilamiento, pero un estudio de migración antes de apilamiento es un buen tema para extender este trabajo. Para ello el desafío computacional se incrementa dado que la cantidad de cálculos se multiplica por el número de disparos tenidos en cuenta en el experimento.

Según los resultados presentados de dispersión numérica, el número de canales (geófonos) es crucial en el modelamiento de datos de campo, dado que se relaciona directamente con el tamaño de paso de la malla espacial. Esto tiene una relación directa con los costos de levantamiento en campo. Pensar un método de densificación de datos de reflexión puede resultar muy conveniente, permitiendo reducir la cantidad de géofonos en campo y mitigando el efecto de la dispersión numérica.

Bibliografía

- [1] ARAYA-POLO, Mauricio ; RUBIO, Félix ; DE LA CRUZ, Raúl ; HANZICH, Mauricio ; CELA, José M. ; SCARPAZZA, Paolo: 3D seismic imaging through reverse-time migration on homogeneous and heterogeneous multi-core processors. En: *Scientific Programming - High Performance Computing with the cell Broadband Engine* 17 Issue 1-2 (2009)
- [2] BALDASSARI, C. ; BARUCQ, H. ; CALANDRA, H. ; DENEL, B. ; DIAZ, J.: The reverse time migration technique coupled with finite element methods. En: *Springer Proceedings in Physics* 128 (2009), p. 207–216
- [3] BORDING, Phil: Seismic Wave Propagation Modeling and Inversion. En: *Computational Science Education Project* (1995)
- [4] BURGER, Robert H. ; BURGER, Douglas C.: *Exploration Geophysics of Shallow Sub-surface*. New Jersey : Prentice Hall, 1992
- [5] CABEZAS, Javier ; ARAYA-POLO, Mauricio ; GELADO, Isaac ; NAVARRO, Nacho ; MORANCHO, Enric ; CELA, José M.: High-Performance Reverse Time Migration on GPU. En: *2009 International Conference of the Chilean Computer Science Society* (2009)
- [6] DOERING, Charles R. ; GIBBON, J. D.: *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations*. New York : Cambridge University Press, 1995
- [7] GROTE, Marcus J. ; KIRSCH, Christoph: Nonreflecting boundary condition for time-dependent multiple scattering. En: *Journal of Computational Physics* (2007), p. 41–62
- [8] HAGEDOORN, Johan G.: A process of seismic reflection interpretation. En: *Geophysical Prospecting* 2, Issue 2 (1954), p. 85–127
- [9] HEINBOCKEL, J.H.: *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. Old Dominion University, 1996
- [10] HO-YONG, Lee ; SEUNG-CHUL, Lim ; DONG-JOO, Min ; BYUNG-DOO, Kwon ; MINKYU, Park: 2D time-domain acoustic-elastic coupled modeling: a cell-based finite-difference method. En: *Geosciences Journal* 13 (2009), p. 407–414

- [11] LEVEQUE, Randall J.: *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia : SIAM, 2007
- [12] MASE, George E.: *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. New York–St. Louis–San Francisco–London–Sydney–Toronto–Mexico–Panama : McGraw-Hill Book Company, 1970 (Schaum's Outline Series)
- [13] MCQUISTAN, Richmond B.: *Campos escalares y vectoriales, interpretación física*. Mexico : Limusa-Wiley, S.A., 1969
- [14] MICHAEL LAI, W. ; RUBIN, David ; KREMPL, Erhard: *Introduction to Continuum Mechanics*. Fourth. Oxford : Elsevier, 2010
- [15] MORTON, K. W. ; MAYERS, D. F.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction*. Second. New York : Cambridge University Press, 2005
- [16] PILKEY, Walter D.: *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*. SECOND. Butterworth-Heinemann, Burlington–Oxford : Elsevier, 2005
- [17] SADD, Martin H.: *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*. Butterworth-Heinemann, Burlington–Oxford : Elsevier, 2005
- [18] SCALES, John A.: *Theory of Seismic Imaging*. Golden : Samizdat Press, 1994
- [19] SHUJUAN, Guo ; LIZHENCHUN ; XIAODONG, Sun ; YUEMING, Ye ; HOUHUA, Teng ; FANG, Li: Post-stack reverse-time migration using a finite difference method based on triangular grids. En: *Applied Geophysics* 5 No. 2 (2008), p. 115–120
- [20] STRIKWERDA, John C.: *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Second. SIAM, 2004
- [21] TIMOSHENKO, S. ; GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1951
- [22] UDIAS, A. ; MEZCUA, J.: *Fundamentos de geofísica*. Bogotá, D.C. : Editorial Alhambra Colombiana, Ltda., 1986
- [23] XIANG-BO, Gong ; LI-GUO, Han ; JIAN-JUN, Niu ; XIAO-PEI, Zhang ; DE-LI, Wang ; LI-ZHI, Du: Combined migration velocity model-building and its application in tunnel seismic prediction. En: *Applied Geophysics* 7 No. 3 (2010), p. 265 – 271
- [24] YU, Wenhua ; MITTRA, Raj ; SU, Tao ; LIU, Yongjun ; YANG, Xiaoling: *Parallel Finite-Difference Time-Domain Method*. London : ARTECH HOUSE, INC., 2006
- [25] ZHDANOV, M. S.: *Geophysical inverse theory and regularization problems*. New York : Elsevier, 2002 (Methods in Geochemistry and Geophysics, 36)