

## Proyecto Cañón contra Incendios

◁ Entregas: Parte 1 (Modelo)=Mié. 28/04/23 (11:30 AM) - Parte 2 (Simulador)=Vie. 28/05/23 (11:30 AM) - Parte 3 (Controlador)=Mié. 7/07/23 (11:30 AM) ▷

### Contenidos

1.	Objetivos . . . . .	2
2.	Descripción del Problema . . . . .	2
3.	Preguntas Parte 1: Modelación . . . . .	5
4.	Preguntas Parte 2: Simulación y Pruebas en Lazo Abierto . . . . .	7
5.	Preguntas Parte 3: Diseño del Controlador y Análisis de Desempeño . . . . .	8
6.	Herramientas a Utilizar . . . . .	8
7.	Informe . . . . .	8
8.	Criterios de Evaluación . . . . .	9
9.	Plazos . . . . .	9
<b>Anexo: Modelamiento del Cañón</b>		<b>10</b>
1.	Consejos Prácticos de Modelación . . . . .	10
1.1.	Ecuaciones de Newton-Euler . . . . .	10
1.2.	Notas sobre el Principio de Lagrange . . . . .	11
2.	Cómo Calculamos la Energía Cinética de un Carro con un Brazo . . . . .	14
2.1.	Alternativa 1: Cálculo de la energía en los pivotes . . . . .	14
2.2.	Alternativa 2: Cálculo de la energía en los centros masa . . . . .	14
3.	Observaciones al Cálculo de la Energía Cinética . . . . .	15
3.1.	Cómo hacer las cosas mal . . . . .	16
4.	Referencias Adicionales . . . . .	16

#### Instrucciones Generales

- Responda las siguientes preguntas utilizando los ejemplos implementados en Python explicados en clases. Utilice también los apuntes del curso, notas tomadas en clases u otras referencias que ud. considere pertinentes (cite toda fuente externa).
- Este proyecto es **individual**.
- El acto de entregar la tarea con su nombre se entiende como una declaración de autoría total de la tarea. Esto significa que ud. no copio el trabajo de sus compañeros ni recibió ayuda indebida. También significa que ud. conoce y respeta el Código de Honor de la Escuela de Ingeniería y los reglamentos de Honestidad Académica de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Cualquier acto de deshonesto o de fraude que sea detectado será sancionado con la reprobación automática del curso, la anotación correspondiente en su hoja de vida, y el resto de acciones contempladas en el reglamento vigente.

## 1. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es reforzar los conceptos y técnicas de análisis adquiridas a través del curso. Para dicho propósito el proyecto considera un problema real de ingeniería de control, como lo es el control de un cañón contra incendios. En la práctica estos pueden ser cañones de chorros de agua a alta presión o descargas aerotransportadas. En el presente proyecto se propone utilizar una bombardera con un agente químico que captura el oxígeno, deteniendo la combustión y generando un enfriamiento casi instantáneo. El éxito de este sistema depende de acertar en el blanco lo más rápido posible antes de que el fuego se propague. La idea de bombas anti-fuego no es nueva, ya en 1930-1939 bomberos italianos hacían demostraciones de estos artefactos (<https://www.youtube.com/watch?v=7aa71Pf9Dkg>). Hoy en día se están desarrollando soluciones basadas en drones (<https://www.youtube.com/watch?v=6KpGRULYGKA>) para realizar quemas controladas e implementar cortafuegos. Sistemas con cañones robotizados para el combate de incendios se están desarrollando en diversas partes del mundo, algunos ejemplos se pueden apreciar en: (<https://youtu.be/OJiHrzdhgNQ?t=249>), (<https://youtu.be/OJiHrzdhgNQ?t=323>), (<https://youtu.be/OJiHrzdhgNQ?t=453>), ([https://www.youtube.com/watch?v=o1y\\_qA5o5ZM](https://www.youtube.com/watch?v=o1y_qA5o5ZM)).

Su misión es desarrollar el sistema de control de tiro para garantizar una puntería efectiva y rápida, idealmente acercándose lo menos posible a la zona de incendio. Como en cualquier proyecto del mundo real, se espera un trabajo de alta calidad.

## 2. Descripción del Problema

El control de tiro y puntería es esencial sistemas de lanzamiento de proyectiles como los de la figura 1 para su automatización. Lanzadores de proyectiles existen desde la antigüedad, desde hondas y catapultas, pasando por morteros, obuses, y cañones, hasta sistemas de misiles, cohetes e incluso sistemas contra incendios con chorros de agua que describen movimientos parabólicos. Varios de los primeros juegos de computador de hace medio siglo se inspiraron en los primeros usos que tuvieron los computadores en la solución del cálculo de trayectorias balísticas para sistemas de defensa y en la carrera espacial. Incluso en la actualidad, el cálculo de trayectorias parabólicas es un elemento común de juegos y es una temática que no pasa de moda, como se muestra en algunos ejemplos de la figura 1. En todos estos casos se requiere acertar en el objetivo en el menor tiempo posible, con una alta exactitud y precisión, así como con un mínimo de oscilaciones que pudiesen resultar en daños colaterales sobre elementos circundantes.

El problema consiste en diseñar el controlador de movimiento de un cañón para bombardas contra incendio, como se muestra en la figura 2, que tiene un motor que mueve el sistema de cables-poleas traslacional ( $x$ ) y un actuador lineal que permite cambiar el largo del gancho ( $q_3$ ). Las articulaciones  $q_1$  y  $q_2$  son rótulas pasivas (no tienen motores) que representan la flexibilidad de un sistema cable-gancho.

Este proyecto le permitirá comprender mejor las tareas que un ingeniero de control debe enfrentar en la práctica, y por otro lado, demostrar la utilidad de las técnicas aprendidas durante el curso. El proyecto se divide en las siguientes etapas:

- Obtención de las ecuaciones de movimiento para el robot móvil considerando la dinámica de movimiento en el plano longitudinal-direccional tangente al terreno.

- Simulación del movimiento a través de un programa desarrollado en Python para resolver las ecuaciones de movimiento.
- Desarrollo de la estrategia de control y análisis de desempeño del controlador bajo distintas condiciones y variaciones de parámetros del sistema. *Ud. tiene la libertad para elegir el tipo de controlador a implementar, pero debe justificar su decisión, tal como si la tuviese que recomendar a una empresa.*

El procedimiento para la obtención del modelo dinámico del cañón puede realizarse en base al principio de Lagrange explicado en clases y los apuntes del curso. También puede utilizar la segunda ley de Newton sobre el equilibrio de fuerzas y momentos. Para un repaso rápido ver los apuntes de la referencias y las indicaciones en el anexo.



Cañón de los Dardanelos o Gran Bombarda Turca fundido en bronce por Munir Alí en 1464. Peso 16.8 ton., largo 8 m, diámetro 630 mm, balas de piedra de 680-850 kg. Utilizado en 1807 por las fuerzas turcas contra la Marina Real Británica. © Royal Armoury.



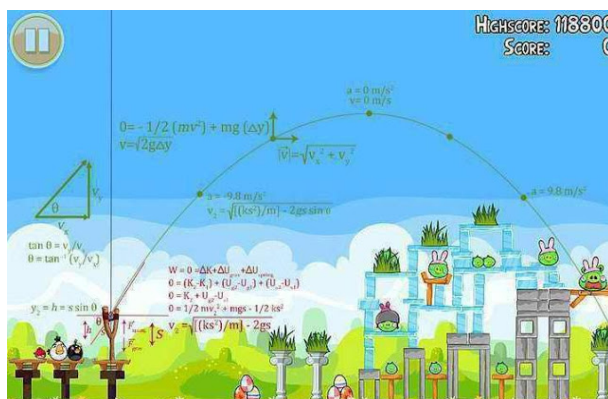
Obús de asedio Gran Berta diseñado por el prof. Fritz Rausenberger y fabricado por las industrias Krupp en 1913. Peso 42.6 ton., largo 5 m, diámetro 420 mm, proyectiles 830 kg. Utilizado en la Primera Guerra Mundial. © CC, 2012.



Firefighting Robot System de Mitsubishi Heavy Industries © Mitsubishi Heavy Industries Ltd., 2019.



Thermite RS3 Robotic Firefighting Vehicle de Howe and Howe Technologies. © Brian van der Brug/Los Angeles Times, 2020.



El movimiento de proyectiles y trayectorias balísticas parabólicas en Angry Birds © Rovio, 2009.



Lanzamiento balístico de bombas congelantes en Horizon Zero Dawn. © Guerrilla Games, 2017.

Figura 1: Ejemplos de sistemas de lanzamiento de proyectiles con movimientos balísticos parabólicos.

### 3. Preguntas Parte 1: Modelación

1. Para el cañón antifuego que se muestra en la figura 2:

- (1 pts.) Identifique las variables controladas, manipuladas, de referencia y perturbaciones.
- (2 pts.) Encuentre las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema.
- (1 pts.) Identifique el o los puntos de equilibrio del sistema.

En la derivación de un modelo simplificado:

- Utilice los parámetros geométricos e inerciales que se resumen en la tabla 1.
- Asuma que el momento de inercia de las barras (brazo y antebrazo) entorno al pivote corresponden a momentos de inercia barras de sección despreciable y largo  $l_c$  indicado en la tabla 1.
- Asuma que el motor de tracción del carro le otorgan una fuerza de desplazamiento  $|F_x| \leq 30000$  N.
- Asuma que el motor de elevación del cañón puede generar un torque  $|F_c| \leq m_c g l_c$  Nm.
- Considere que el movimiento de la bombardita está descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_b \dot{v}_x &= Q\delta(t) \cos(\theta) - dv_x \\ m_b \dot{v}_y &= Q\delta(t) \sin(\theta) - dv_y - m_b g \end{aligned}$$

donde  $m_b$  es la masa de la bombardita,  $(v_x, v_y)$  son las componentes de velocidad horizontal y vertical de la bombardita,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $d$  es el coeficiente de roce aerodinámico, que por simplicidad se asume como correspondiente a la ley de resistencia aerodinámica de Stokes, y no a la de Newton (que debería aplicarse al caso de proyectiles con una alta velocidad y alto número de Reynolds). La fuerza impulsiva que aparece cuando detona el explosivo propelente en el cañón es  $F_b = Q\delta(t)$ , donde  $Q$  representa la cantidad de explosivo cargado en el cañón y  $\delta(t)$  corresponde a un impulso de Dirac. Sin embargo, aproximaremos  $Q\delta(t) \approx \{Q, t \in [0, T_s]; 0, t \in [T_s, \infty)\}$ . Es decir la amplitud del impulso es  $Q$  y dura  $T_s$  segundos, aproximadamente lo que dura un periodo de muestreo  $T_s$ , por lo que  $\int Q\delta(t)dt \approx QT_s$ . Luego, la fuerza impulsiva sobre la bombardita para el cañón cargado con una cantidad  $Q$  de material explosivo será  $Q$  N. Esta fuerza existe solo en el primer periodo de integración de las ecuaciones para  $t \in [0, T_s]$  mientras la bombardita se desplaza en el cañón, y por lo tanto, imprime una velocidad a la bombardita de  $v_b = QT_s/m_b$  m/s. Una vez que la bombardita sale del cañón no existe fuerza impulsiva actuando sobre la bombardita y las ecuaciones anteriores se reducen a ecuaciones similares con  $Q = 0$ .

- Por la tercera ley de Newton, la explosión que genera una fuerza  $Q$  sobre la bombardita, también genera una fuerza de reacción idéntica  $Q$ , pero en dirección opuesta sobre el cañón. Esta fuerza de reacción produce un retroceso o *recoil* del cañón que asumiremos despreciable. Es posible calcular el retroceso a partir de las ecuaciones de conservación de momentum lineal y los diagramas de momentum:

$$(m_x + m_c)\dot{x} + m_b v_x = 0 \Rightarrow \dot{x} = -\frac{m_b}{m_x + m_c} v_x$$

con  $v_x = v_b \cos(\theta) = QT_s/m_b \cos(\theta)$ , en valor de velocidad horizontal máxima se obtiene cuando  $\theta = 0^\circ$ , por lo que  $v_x = v_b = QT_s/m_b$ . Con  $Q = 600000$  N,  $T_s = 0.1$  s,  $v_b = 600000 \cdot 0.1/100 = 600$  m/s. Sin roce aerodinámico, la bombardita alcanzaría 6000 m en 10 s. La velocidad de recoil sería  $\dot{x} = \frac{m_b}{m_x + m_c} QT_s/m_b = \frac{100}{40000 + 4000} 600000 \cdot 0.1/100 = \frac{60000}{44000} = 1.36$  m/s. Despreciando roces y asumiendo una reacción de duración  $T_s = 0.1$  s, la integración de  $\dot{x}$  por  $T_s$  segundos otorgaría un desplazamiento estimado de  $\delta x = \dot{x} T_s \approx 1.36 \cdot 0.1$  m, es decir de 14 cm, lo cual sería aún



menor si se consideran roces y fricciones en el sistema que frenan el movimiento de reacción. Por otro lado, si cada pixel representa 20 metros, 0.14 metros de deberán resprentar por  $0.14/20 = 0.007$  pixeles, lo cual no es posible, ni visible. Por lo tanto, si bien las fuerzas de reacción existen, para este problema son despreciables para efectos prácticos.

- La carga bombarda de masa  $m_b$  se puede asumir como una partícula puntual, sin tensor de inercia.

Para derivar el modelo que describe la dinámica de movimiento del sistema puede apoyarse en el material en el anexo.

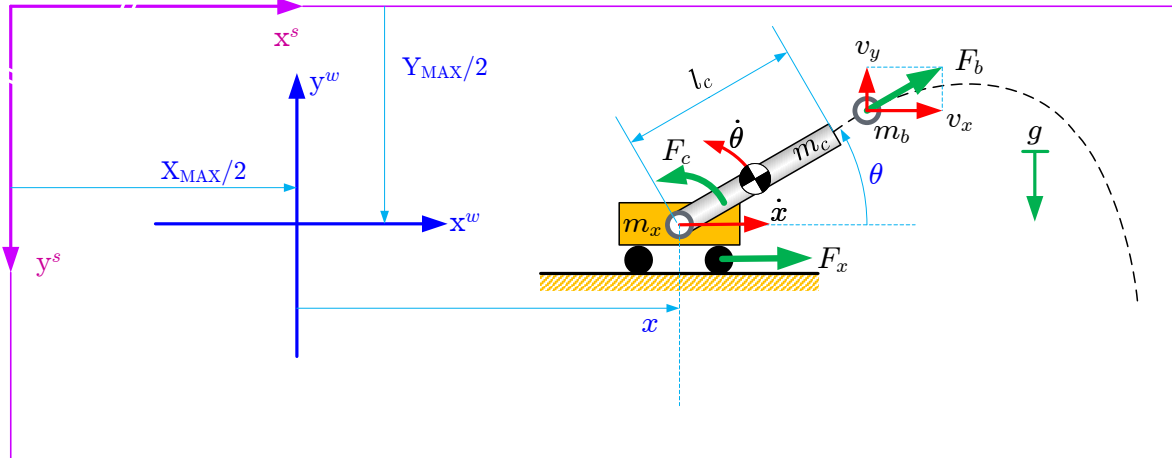


Figura 2: Cañón antifuego IEE2613.

Tabla 1: Parámetros geométricos e inerciales del cañón.

Símbolo	Descripción
$l_c$	6 m, largo del cañón.
$r$	0.1 m, radio de la bomba.
$m_x$	40000 kg, masa del carro.
$m_c$	4000 kg, masa del cañón.
$m_b$	100 kg, masa de la bomba.
$d$	1.15 N/(m/s), coeficiente que incluye efectos de fricción dinámica (roce aerodinámico y resistencia viscosa) de la bomba ( <i>drag</i> ).
$c$	$10^4$ N/(m/s), coeficiente que incluye efectos de fricción dinámica (roce aerodinámico y resistencia viscosa) del carro.
$b$	$10^6$ Nm/(rad/s), coeficiente que incluye efectos de fricción dinámica (resistencia viscosa) del pivote de elevación $\theta$ .
$g$	$9.81 \text{ m/s}^2$ , aceleración de gravedad.
$Q$	Cantidad de carga explosiva en el cañón que produce una fuerza impulsiva máxima $Q_{max} = 6 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

- (2 pts.) Dibuje un diagrama esquemático mostrando todos los componentes del sistema e indicando la señales de salida (controladas), controles (manipuladas), y entradas de referencia (set-points).
- (2 pts.) Obtenga las ecuaciones diferenciales en el *espacio de los estados* que representan la dinámica del sistema.

4. (2 ptos.) Linealice el modelo dinámico en el espacio de los estados entorno a un punto de equilibrio genérico y exprese las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en forma simbólica en torno a dicho punto.
5. (2 ptos.) Evalúe las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en el punto de equilibrio natural del sistema.
6. (2 ptos.) Obtenga las funciones de transferencia para la posición de la carga  $(x, z)$  con respecto a los controles que afectan estas variables.

## 4. Preguntas Parte 2: Simulación y Pruebas en Lazo Abierto

7. Utilizando los ejemplos entregados en el curso, en particular el ejemplo `watertank.py`, implemente un programa usando el lenguaje Python que:
  - (a) (2 ptos.) Grafique el cañón. Las variables gráficas de la pantalla deberían ser  $X_{max} = 1000$  pixeles de ancho,  $Y_{max} = 500$  pixeles de alto, con un factor de escala entre dimensiones del mundo y de la pantalla de  $\lambda = 0.05$  pixeles/m. Es decir,  $\lambda^{-1} = 20$  m/pixel, y por lo tanto, la pantalla representa un mundo de  $\lambda^{-1}X_{max} = 20$  km de largo y  $\lambda^{-1}Y_{max} = 10$  km de ancho. El cañón debe inicializarse en el origen del mundo  $(x^w, y^w) = (0, 0)$ , el cual corresponde a coordenadas de la pantalla  $(x^s, y^s) = (X_{max}/2, Y_{max}/2)$ , como se muestra en la figura 2.
  - (b) (5 ptos.) Actualice la posición del cañón a través de las flechas del teclado del computador usando el modelo dinámico desarrollado en la sección anterior. Para esto debe integrar las ecuaciones usando `odeint` o `solve_ivp` de la librería SciPy, tal como se muestra en: `watertank.py`. Fije el periodo de muestreo para el integrador en  $T_s = 0.1$  s. En modo manual, el simulador debe permitir el uso de las flechas horizontales para el movimiento traslacional del carro a lo largo del eje  $x$  modificando la fuerza  $F_x$ , y las verticales para variar el torque del motor de elevación del cañón  $F_c$  que modifica el ángulo  $\theta$ . Además el programa debe utilizar las teclas '1' y '2' para reducir o aumentar la carga  $Q$  del cañón hasta el máximo  $Q_{max}$ , la barra de espacio para disparar cargas y la tecla 'F' para posicionar focos aleatorios de incendio de acuerdo a:  

```
np.array([10000, 2500, 2000])*2*(np.random.rand(3)+np.array([-0.5, -0.5, -0.5]))
```

donde los términos corresponden a distribuciones uniformes  $x^w \sim U[-10000, 10000]$  m,  $y^w \sim U[-2500, 2500]$  m, y  $r_{fuego} \sim U[-2000, 2000]$  m es el radio de incendio. Si  $r_{fuego} < 0$  se asume que no hay fuego. Otras teclas que deberán implementarse son la tecla 'A' para activar/desactivar el modo de movimiento automático hacia un foco de incendio. La tecla 'S' cumple el rol de freno de emergencia o *e-stop*, y debe funcionar tanto si es presionada cuando el cañón se encuentra en modo de conducción manual o modo automático.
  - (c) (1 pto.) Acepte el input del mouse, específicamente reconozca la posición en la que fue presionado el botón izquierdo. Esta información definirá el lugar donde debe graficarse un punto de destino.
  - (d) (2 pto.) Haga que el cañón se dirija a la posición de destino cuando presiona 'A' para activar el modo de movimiento automático. Estando en este modo, el cañón deberá dirigirse siempre hacia el lugar donde se posicione el punto de destino si se ingresa una nueva ubicación a través del mouse. Si hay un incendio, el cañón contra incendios deberá ir a apagar el incendio primero.
  - (e) (1 pto.) Exporte los datos de modo que los valores de las variables controladas, manipuladas y errores de control puedan ser graficados con otro script en Python que deberá entregar con su código.
  - (f) (1 pto.) Posea comentarios explicativos en el código explicando el propósito de cada sección. La documentación clara y concisa de las funciones es fundamental.
8. (2 ptos.) Realice un diagrama de flujo de su programa y entréguelo con su código.

## 5. Preguntas Parte 3: Diseño del Controlador y Análisis de Desempeño

9. (1 pts.) Determine si el sistema es completamente controlable y verifique la observabilidad del sistema en los siguientes casos:
  - (a) Si solo se mide la velocidad de traslación  $\dot{x}$  y la velocidad angular de elevación  $\dot{\theta}$ .
  - (b) Si solo se mide la configuración geométrica  $(x, \theta)$  del cañón.
10. (2 pts.) Obtenga los diagramas LGR, y Nyquist, Bode para las funciones de transferencia de posición  $x$  y orientación  $\theta$  del cañón.
11. (10 pts.) Diseñe un controlador de tiempo discreto para:
  - (a) Regular el movimiento del cañón hacia una posición y ángulo de elevación de referencia fijadas por el usuario. Se espera que los errores permanentes sean nulos, y que tanto el tiempo de respuesta al escalón, así como el sobrepaso (*overshoot*), sean los menores posibles.
  - (b) Acertar en el foco de incendio y apagarlo en el menor tiempo posible.

Usted tiene libertad de elegir el tipo de controlador a implementar (por ejemplo, PID, relocalización de polos, compensador de adelanto-retardo, LQR), pero usted debe justificar su decisión. Para la justificación puede analizar las respuestas en lazo abierto/cerrado, gráficos de error transitorio y permanente, gráficos del lugar geométrico de las raíces, respuestas de frecuencia del sistema e índices de desempeño (ITAE, ISE, RMSE, etc). Para fundamentar adecuadamente su decisión, puede comparar y mostrar el desempeño del sistema bajo diferentes esquemas de control, distintas entradas de referencia o errores de modelación.
12. (2 pts.) Compare el desempeño del controlador aplicado al modelo original no-lineal y al modelo linealizado para distintos tiempos de muestreo.
13. (2 pts.) Evalúe el comportamiento del cañón realimentado cuando esta se encuentra expuesto a perturbaciones causadas por fuerzas externas y ruido en los sensores. Asuma que las perturbaciones y ruidos pueden modelarse como ruido con distribución Guassiana de media cero y desviación estándar consistente a una situación real.
14. (1 pts.) Encuentre el nivel máximo de perturbaciones y ruido en los sensores que el controlador puede tolerar antes que el control se vuelva inestable. Use señales apropiadas y realice todos los supuestos que estime pertinentes en la modelación de los sensores.

## 6. Herramientas a Utilizar

Para realizar los cálculos, simulaciones y análisis utilice Python y las librerías Matplotlib, numPy, sciPy, PyGame y Python Control Toolbox de acuerdo a las instrucciones y recomendaciones entregadas en el curso.

## 7. Informe

Al desarrollar el proyecto:

- Explique todos los pasos en el proceso de diseño. Comente los defectos y cualidades de su diseño.



- Discuta aquellos supuestos que un sistema real pudiesen no ser satisfechos.
- Ilustre sus resultados mediante gráficos comparativos, por ejemplo, graficando todas las salidas y la referencia en un mismo marco de referencia, cuando el apreciar la diferencia entre las múltiples salidas puede ser de interés.

## 8. Criterios de Evaluación

Los criterios de evaluación tomarán en cuenta los aspectos que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2: Criterios de evaluación.	
Criterio	Porcentaje
Originalidad	10%
Presentación	10%
Análisis y Discusión Crítica	35%
Soluciones y Metodología	45%

## 9. Plazos

**Parte 1** Miércoles 3 de mayo, 2023. Las soluciones de la primera parte deben ser entregadas para verificación de los modelos y asignación de la nota. Esta etapa vale un 20% de la nota del proyecto.

**Parte 2** Miércoles 31 de mayo, 2023. El simulador en lazo abierto. Esta etapa vale un 20% de la nota del proyecto.

**Parte 3** Miércoles 28 de junio, 2023. El informe final del proyecto debe ser entregado usando el modelo corregido de la primera etapa, incluyendo las respuestas corregidas de la primera parte y obviamente las respuestas de la segunda parte. Esta etapa vale un 60% de la nota del proyecto.

# Anexo: Modelación del Cañón

## 1. Consejos Prácticos de Modelación

Realice un balance de fuerzas usando diagrama de cuerpo libre y aplicando la segunda Ley de Newton o aplique el *Principio de Lagrange*.

### 1.1. Ecuaciones de Newton-Euler

En este caso de realizar un balance de fuerzas de Newton Euler, deberá considerar que el marco de referencia  $\mathcal{F}_1 = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1\}$  no es un marco de referencia inercial ya que rota con respecto al marco de referencia inercial  $\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0\}$ . Por esta razón, si realiza un balance de fuerzas y emplea un diagrama de cuerpo libre usando el marco  $\mathcal{F}_1$  sobre el robot, deberá calcular la aceleración inercial equivalente a haber realizado el balance de fuerzas empleando el marco de referencia  $\mathcal{F}_0$ . Para obtener la derivada en el tiempo de un vector  $\mathbf{r} : t \rightarrow \mathbf{r}(t)$  en un marco de referencia rotatorio  $\mathcal{F}_r$  que gira con velocidad angular  $\Omega^r : t \rightarrow \Omega^r(t)$ , recuerde que la derivada satisface la *regla para la derivada de vectores en marcos rotacionales* (RDVMR):

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^r = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right]^r + \Omega^r \times \mathbf{r}^r$$

donde  $[\partial \mathbf{r} / \partial t]^r$  representa la velocidad de movimiento del origen del marco de referencia  $\mathcal{F}^r$  rotatorio expresada en coordenadas del marco de referencia  $\mathcal{F}^r$ . Notar que la velocidad del origen del marco de referencia  $\mathcal{F}^r$  también podría expresarse en coordenadas del marco inercial  $\mathcal{F}^0$ . Sin embargo, al utilizar la fórmula anterior debe tener cuidado de expresar la velocidad del origen del marco  $\mathcal{F}^r$  usando coordenadas en los ejes del marco  $\mathcal{F}^r$  y no  $\mathcal{F}^0$ . Esto último es un error bastante frecuente.

La fórmula anterior permite calcular la *velocidad inercial* de un punto  $\mathbf{r}^r$ , es decir la velocidad inercial  $\mathbf{v}_I^r$  es:

$$\mathbf{v}_I^r = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^r.$$

Para obtener la *aceleración inercial*  $\mathbf{a}_I^r$  de un punto sobre el robot, debe aplicar RDVMR a la velocidad inercial  $\mathbf{v}_I^r$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_I^r &= \left[ \frac{d\mathbf{v}_I^r}{dt} \right]^r \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_I^r}{\partial t} \right]^r + \Omega^r \times \mathbf{v}_I^r \\ &= \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right]^r + \left[ \frac{\partial \Omega^r}{\partial t} \right]^r \times \mathbf{r}^r + 2\Omega^r \times \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right]^r + \Omega^r \times (\Omega^r \times \mathbf{r}^r). \end{aligned}$$

Teniendo la aceleración  $\mathbf{a}_I^r$  de un punto  $\mathbf{r}$  en el cuerpo del robot referido al marco rotatorio  $\mathbf{F}^r$ , entonces si ese punto tiene una masa  $\Delta m$ , podrá realizar un balance de las fuerzas que actúan sobre ese punto, y calcular la fuerza total sumando todos los elementos de masa.

## 1.2. Notas sobre el Principio de Lagrange

El principio de Lagrange establece que las ecuaciones de dinámicas de un cuerpo cuya configuración se describe en términos de  $n$  coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  pueden calcularse a partir de sus energías cinética  $E_k$  y potencial  $E_p$  según:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = F_{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

donde  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el Lagrangiano del sistema, el cual se define como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

El modelamiento se puede realizar considerando la energía de elementos infinitesimales o una discretización de cada cuerpo que compone el sistema o bien empleando modelos agregados y ciertos principios que se resumen a continuación. Recuerde que la energía del sistema es independiente del marco de referencia que se utilice, sin embargo los momentos de inercia y las velocidades no son independientes del marco de referencia que se utilice como referencia, por lo que debe tomar las precauciones necesarias al definir momentos de inercia y velocidades para el cálculo de la energía cinética.

La energía cinética total  $E_K$  de un cuerpo se puede descomponer en la energía traslacional del centro de masa del cuerpo  $E_{Kt}$  y la energía rotacional  $E_{Kr}$  asociada al giro entorno al centro de masa como:

$$\begin{aligned} E_K &= E_{Kt} + E_{Kr} \\ &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_c\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega}_c \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{v}_c$  es la velocidad de traslación del centro de masa,  $\boldsymbol{\omega}_c$  es la velocidad angular de giro entorno a un eje que pasa por el centro de masa,  $m$  es la masa del cuerpo y  $\mathbf{J}_c$  es la matriz de inercia. Si la rotación no es centrodal, es decir el cuerpo gira entorno a un punto 0 en vez de  $c$  como se muestra en la figura 3, entonces para el caso planar en el que:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_0 + \mathbf{r}_i \\ \mathbf{c} &= \mathbf{p}_0 + \mathbf{d} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \\ &= [v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j}] + \omega_z \mathbf{k} \times [r_{ix} \mathbf{i} + r_{iy} \mathbf{j}] \\ &= (v_{0x} - r_{iy} \omega_z) \mathbf{i} + (v_{0y} + r_{ix} \omega_z) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + 2(r_{ix} v_{0y} - r_{iy} v_{0x}) \omega_z + (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \omega_z^2.$$

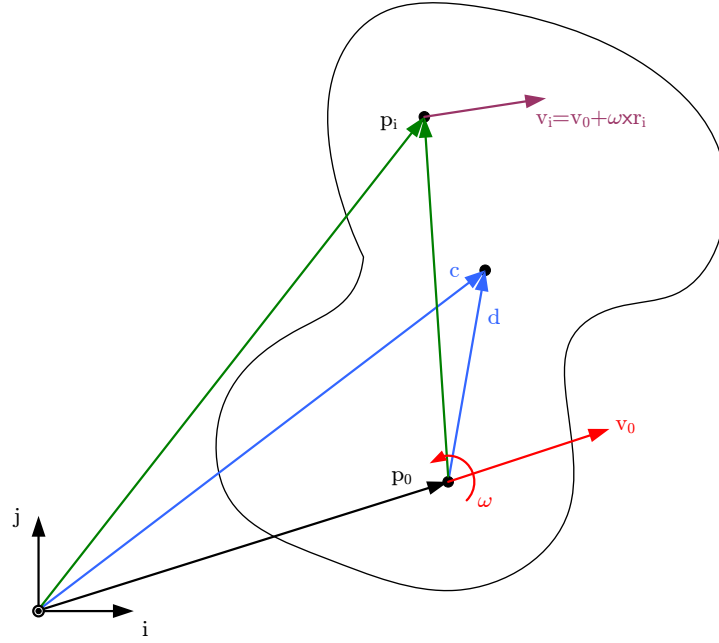


Figura 3: Energía cinética de un cuerpo plano con rotación no centrodal y traslación del punto 0. El centroide se ubica en  $\mathbf{c} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}$ .

Luego, la energía cinética total del cuerpo compuesto por partículas  $dm_i$  será

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \sum_i \|\mathbf{v}_i\|^2 dm_i \\ &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_0\|^2 + m \omega_z (d_x v_{0y} - d_y v_{0x}) + \frac{1}{2} \mathbf{J}_0 \omega_z^2, \end{aligned}$$

ya que

$$m = \sum_i dm_i, \quad \mathbf{J}_0 = \sum_i \|\mathbf{r}_i\|^2 dm_i,$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{\sum_i \mathbf{p}_i dm_i}{\sum_i dm_i} \\ &= \frac{\sum_i (\mathbf{p}_0 + \mathbf{r}_i) dm_i}{\sum_i dm_i} \\ &= \mathbf{p}_0 + \frac{\sum_i \mathbf{r}_i dm_i}{\sum_i dm_i}, \end{aligned}$$

implican que:

$$\frac{\sum_i \mathbf{r}_i dm_i}{\sum_i dm_i} = \mathbf{c} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}.$$

En general, para el caso de la rotación 3D alrededor de un eje que pasa por 0, para un cuerpo que se mueve

con velocidad de traslación  $\mathbf{v}_0$  en el punto 0 no coincidente con el centro de masa  $\mathbf{c}$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E_K &= \frac{1}{2} \sum_i \|\mathbf{v}_i\|^2 dm_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i dm_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i (\|\mathbf{v}_0\|^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i\|^2) dm_i \\
 &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_0\|^2 + m \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_0\|^2 + m \mathbf{d} \cdot (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}
 \end{aligned}$$

La última relación surge al aplicar la regla del producto mixto o producto triple escalar (*scalar triple product*) para vectores en el espacio tridimensional, donde  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$  es el vector de velocidad angular de giro entorno a un eje en la dirección del eje definido por el vector  $\mathbf{n}$  que pasa a través del centro de giro 0,  $\mathbf{d}$  es el vector de centro de masa con respecto al punto 0 y  $\mathbf{J}_0$  es el tensor de inercia con respecto a 0.

Notar que cuando el centro de masa  $\mathbf{c}$  coincide con el centro de giro 0, entonces  $\mathbf{d} = 0$ , y se satisface:

$$E_K = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_c\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega}.$$

Otra manera de demostrar que la energía calculada entorno a cualquier punto 0 debe ser la misma que la energía calculada entorno al centro de masa es notando que:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 E_K &= E_{Kt} + E_{Kr} \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}]^T [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 + m \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} + \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}]^T [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 + m \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} + \frac{1}{2} m [\mathbf{d} \times \boldsymbol{\omega}]^T [\mathbf{d} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 + m \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} + \frac{1}{2} m \boldsymbol{\omega}^T [\mathbf{d} \times] [\mathbf{d} \times] \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 + m \mathbf{d} \cdot (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}
 \end{aligned}$$

donde  $[\mathbf{d} \times]$  es la forma matricial del producto cruz y  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_c + m[\mathbf{d} \times]^T [\mathbf{d} \times] = \mathbf{J}_c + m[\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \mathbf{I}_3 - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}]$  de acuerdo la generalización del teorema de ejes paralelos o teorema de Huygens-Steiner para el tensor de inercia en torno al punto 0 en términos del tensor de inercia con respecto al centro de masa.

Para mayor información consulte textos de mecánica clásica, mecánica analítica o dinámica, o busque en Internet. Ciertamente el resultado anterior, si bien es muy simple, no está explicado en todos los textos físicos o electrónicos. Puede Googlear frases como “kinetic energy for rotating and translating body”, pero tome en cuenta que los resultados que encontrará al principio están dominados por el típico cálculo de la energía cinética para un cuerpo con giro entorno al centro de masa y no para giros excéntricos.

## 2. Cómo Calculamos la Energía Cinética de un Carro con un Brazo

### 2.1. Alternativa 1: Cálculo de la energía en los pivotes

La posición del primer pivote está dada por (ver figura 4):

$$\mathbf{p}_1 = (x, 0, H),$$

luego su velocidad será

$$\mathbf{v}_1 \stackrel{def}{=} \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = (\dot{x}, 0, 0).$$

Empleando la fórmula para la energía cinética de la sección anterior entorno al punto  $\mathbf{p}_1$ , la energía del brazo (eslabón 1 con pivote  $q_1$ ) está dada por:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + m_1 \mathbf{d} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ 0 \\ -\cos(q_1) \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{3} \dot{q}_1^2, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2. \end{aligned}$$

En la expresión anterior se utilizó el momento de inercia de la barra entorno al extremo en el pivote, dado por  $\mathbf{J}_1 = m \frac{l_1^2}{3}$ .

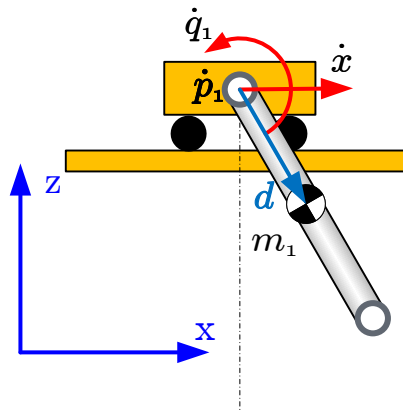


Figura 4: Cálculo de la energía cinética del eslabón 1 en el pivote en  $\mathbf{p}_1$ .

### 2.2. Alternativa 2: Cálculo de la energía en los centros masa

Ahora calcularemos la energía del primer eslabón (brazo), pero utilizando como referencia el centro de masa del eslabón. La posición del centro de masa del primer eslabón está dada por (ver figura 5):

$$\mathbf{p}_c = \left( x + \frac{l_1}{2} \sin(q_1), 0, H - \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \right),$$



luego su velocidad será

$$\mathbf{v}_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} = \left( \dot{x} + \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \dot{q}_1, 0, \frac{l_1}{2} \sin(q_1) \dot{q}_1 \right).$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_c &= \dot{x}^2 + l_1 \cos(q_1) \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{l_1^2}{4} \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + \frac{l_1^2}{4} \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2, \\ &= \dot{x}^2 + l_1 \cos(q_1) \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{l_1^2}{4} \dot{q}_1^2. \end{aligned}$$

Empleando la fórmula para la energía cinética de la sección anterior entorno al punto  $\mathbf{p}_c$ , la energía del brazo (eslabón 1 con pivote  $q_1$ ) está dada por:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega}, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{1}{8} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{12} \dot{q}_1^2, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2. \end{aligned}$$

En la expresión anterior se utilizó el momento de inercia de la barra entorno a su centro de masa, dado por  $\mathbf{J}_c = m \frac{l_1^2}{12}$ .

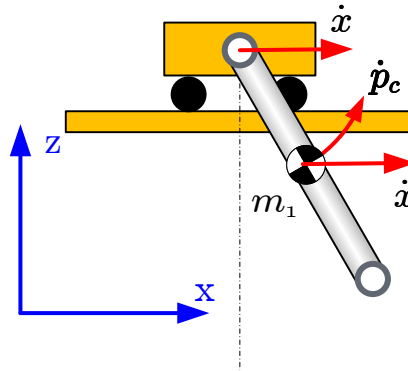


Figura 5: Cálculo de la energía cinética del eslabón 1 en centro de masa  $\mathbf{p}_c$ .

### 3. Observaciones al Cálculo de la Energía Cinética

Es posible observar que la energía cinética para el eslabón calculada usando las velocidades del centro de masa es idéntica a la energía cinética calculada empleando el pivote como punto de referencia. Como era de esperarse la energía del elemento debe ser la misma independiente desde dónde se observe.

Para el cálculo de la energía cinética total el procedimiento realizado para el primer eslabón (brazo) se puede repetir con cada uno de los cuerpos que forman el sistema (carro, antebrazo y carga). Lo importante es ser consistente con el cálculo de la energía cinética, ya sea que esta se calcula entorno al pivote de la articulación o al centro de masa del cuerpo del eslabón.

### 3.1. Cómo hacer las cosas mal

Existen varias maneras de hacer las cosas mal. Tal vez una de las más frecuentes es calculando la energía cinética tomando como referencia el pivote en el punto  $p_1$  y diciendo que esta se compone de una parte traslacional y otra rotacional como:

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}_1\boldsymbol{\omega}.$$

olvidando el término  $m_1\mathbf{d} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\omega})$ , lo cual se traduciría en una energía cinética total de:

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{q}_1^2.$$

que parece correcta, pero en la que claramente falta el término  $m_1\frac{l_1}{2}\cos(q_1)\dot{x}\dot{q}_1$  si se la compara con la energía cinética calculada en las secciones anteriores. La expresión anterior puede ser engañosa, porque a primera vista es tentador argumentar que la expresión contiene una parte de la energía traslacional y otra para la componente rotacional del movimiento del brazo.

## 4. Referencias Adicionales

- Sachin Chitta, E. Gil Jones, Matei Ciorcalie, and Kaijen Hsiao. Mobile Manipulation in Unstructured Environments – Perception, Planning and Execution. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, v. 19, n. 2, pp. 58–71, Junio 2012.
- Robots to the rescue? Dr. Kathleen Richardson. Robotics Japan/Robots in Recovery Efforts. *Engineering & Technology Magazine*, May 2011.
- Rafael Aracil Santoja, Carlos Balaguer, Luis Felipe Peñin, Antonio Barrientos. *Fundamentos de Robótica*, 2ª ed., McGraw-Hill, feb. 2007.
- K. S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee. *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence (Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia)*, McGraw-Hill, 1987.
- Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)*, 3ª ed., Springer, 2011.
- M. Torres Torriti. *Tutorial sobre Modelación de la Dinámica y Simulación de Robots*. diciembre, 2011. [http://www.ing.puc.cl/~mtorrest/downloads.htm#robotics\\_tutorial](http://www.ing.puc.cl/~mtorrest/downloads.htm#robotics_tutorial).