Capítulo 1 – Matrizes

Definição 1.1

Seja K um corpo arbitrário. Uma disposição da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde os a_{ij} são escalares em K, é chamada matriz sobre K.

Duas matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{r \times s}$ são iguais, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s), e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Exercício 1.1

Faça um programa FORTRAN que leia duas matrizes e verifique se elas são iguais.

Definição 1.2

i) Matriz quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas (m = n).

ii) Matriz nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

iii) Matriz coluna é aquela que possui uma única coluna (n= 1).

Iv) Matriz linha é aquela onde m =1.

v) Matriz diagonal é uma matriz quadrada (m = n) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal são nulos.

vi) Matriz identidade é aquela em que $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplo 1.1

Matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.2

Matriz identidade

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vii) Matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

viii) Matriz triangular inferior é aquela em que m = n e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

ix) Matriz simétrica é aquela onde m = n e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos 1.3

Matriz triangular superior

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplos 1.4

Matriz triangular inferior

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplos 1.5

Matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição 1.3

Operações com matrizes

i) A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{r \times s}$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m \times n}$.

ii) Seja $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e k um escalar, então definimos uma nova matriz $kA = \left[ka_{ij}\right]_{m \times n}$.

Teorema 1.1

Seja V o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ sobre o corpo K. Então, para quaisquer matrizes $A, B, C \in V$ e quaisquer escalares $k_1, k_2 \in K$,

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$
ii) $A + 0 = A$
iii) $A + (-A) = 0$
iv) $A + B = B + A$
v) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2\,B$
vii) $(k_1k_2)A = k_1\,(k_2A)$
viii) $1 \cdot A = A$ e $0 \cdot A = 0$

Exercício 1.2

Faça um programa FORTRAN que faça a soma e subtração de matrizes e o produto de uma matriz por um escalar.

iii) Dada uma matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = \left[b_{ij} \right]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji} \cdot A^t$ é denominada transposta de A.

Exercício 1.3

Faça um programa FORTRAN que leia uma matriz e calcule sua transposta.

Teorema 1.2

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

ii) $(A^t)^t = A$

iii) $(kA)^t = kA^t$

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

Observação

A é simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$

iv) Sejam $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{rs} \right]_{n \times p}$. Definimos $AB = \left[C_{uv} \right]_{m \times p}$, onde

$$C_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + a_{u2} b_{2v} + \ldots + a_{un} b_{nv}$$

Teorema 1.3

i) $IA = AI = A$

ii) $A\,(B + C) = AB + AC$

iii) $(A + B)\,C = AC + BC$

iv) $(AB)\,C = A\,(BC)$

v) $0 \cdot A = A \cdot 0$

Observação

Em geral, $AB \neq BA$.

Exemplo 1.6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2(-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1\_2 \cdot 0 & 4(-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5(-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.4

Faça um programa FORTRAN que calcule o produto de matrizes.

Capítulo 2 – Sistemas de Equações Lineares

Definição 2.1

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

com $a_{ij} \in \mathrm{IR},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

Uma solução do sistema acima é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações.

Podemos escrever o sistema numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou $A \cdot X = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos matriz ampliada do sistema.

Definição 2.2

Operações elementares

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas.

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um $k \in IR^*$.
iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha.

Podemos representar essas operações por:

$$\text{i) } i \leftrightarrow j$$
$$\text{ii) } L_i \to kL_i$$
$$\text{iii) } L_i \to L_i + kL_j$$

Teorema 2.1

Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se

i) o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;
ii) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
iii) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
iv) se as linhas $1, ..., r$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

Observações

a) Diz-se também que a matriz é escalonada reduzida por linhas.

b) O termo reduzir por linhas significará transformar por operações elementares com linhas.

c) A condição iv impõe a forma escada à matriz.

Teorema 2.2

Toda matriz A_{mn} é linha-equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Dada uma matriz A_{mn}, seja B_{mn} a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A_{mn}. O posto de A_{mn}, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B_{mn}. A nulidade de A_{mn} é o número n – p.

Capítulo 3 – Solução de Sistemas Lineares

3.1 – Métodos diretos

Definição 3.1

Métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações aritméticas.

Observação

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

Não é aconselhável o cálculo de A^{-1}, pois a matriz obtida pode diferir muito da verdadeira A^{-1}.

Exemplo 3.1

$$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6.$$

Se escrevemos $x = (3)^{-1} \cdot 18 = (0{,}33333) \cdot 18 = 5.99994$.

Definição 3.2

Os métodos de eliminação evitam o cálculo direto da matriz inversa de A e, além disso, não apresentam problemas com tempo de execução como a regra de Cramer.

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz do coeficiente triangular superior.

Resolução de sistemas triangulares

Seja o sistema $AX = B$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Observação

$$A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$$

Da última equação,

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Da penúltima equação,

$$a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

E assim sucessivamente, até obtermos,

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \ldots - a_{1n} x_n}{a_{11}}.$$

Algoritmo – substituição retroativa

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$ são obtidos da seguinte forma:

Entrada $\rightarrow$ número de incógnitas e n equações; matriz expandida $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$.

Saída $\rightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Passo 1

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Passos 2, 3, ...

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{kj} \cdot x_j}{a_{kk}}$$

Com $k = n - 1, n - 2, ..., 3, 2, 1.$

Descrição do Método de eliminação de Gauss.

Exemplo 3.2

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 2y + z = 7 \\ 2z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Passo 1 (n = 3)

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \Rightarrow x_3 = \frac{6}{2} = 3$$

Passo 2 (k = 2,1)

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{23} \cdot x_3}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{3} \frac{a_{ij} \cdot x_j}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12} x_2}{a_{11}} - \frac{a_{13} x_3}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{7}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 1$$

Definição 3.3

Dois sistemas lineares, $AX = B$ e $\tilde{A}X = \tilde{B}$, são equivalentes se qualquer solução de um é também solução do outro.

Teorema 3.3

Seja $AX = B$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações uma seqüência de operações, escolhidas entre

i) trocar duas equações $(L_i \leftrightarrow L_j)$,

ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula $(L_i \rightarrow kL_i, k \in IR^*)$,

iii) adicionar o múltiplo de uma equação a uma outra equação,

obtemos um novo sistema $\tilde{A}X = \tilde{B}$ e os sistemas $AX = B$ e $\tilde{A}X = \tilde{B}$ são equivalentes.

Notação

$a_{ij}^{(k)}$ → coeficiente da linha i e coluna j no final da k-ésima etapa.

Seja o sistema $AX = B$, com $\det A \neq 0$. Dessa forma, podemos reescrever esse sistema de forma que o elemento a_{11} seja diferente de zero.

Considere a seguinte matriz estendida do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

Passo 1

$$a_{11}^{(0)} \rightarrow \text{pivô desse passo}$$

Eliminamos a variável x_1 das linhas 2, 3, ..., n substituindo a i-ésima linha por ela mesma, menos a primeira linha multiplicada pelo fator m_{i1}. Isto é,

$$L_i \rightarrow L_i - m_{i1}L_1$$

com

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}};\ i = 2, \ldots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix},$$

onde

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}, \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

e

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}; \quad \begin{array}{l} i = 2, ..., n \\ j = 1, ..., n \end{array}$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)};\ \ i = 2, ..., n$$

Passo 2

$$a_{22}^{(1)} \rightarrow \text{Pivô}$$

Vale observar que, como $\det A \neq 0$, $\det A^{(1)} \neq 0$, pelo menos um elemento $a_{i2}^{(1)} \neq 0$ para $i = 2, ..., n$. Temos que

$$L_i \to L_i - m_{i2} L_2$$

com

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, i = 3, ..., n$$

Obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

onde

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \text{ para } i = 1,2 \text{ e } j = 1, 2, ..., n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} \text{ para } i = 1,2$$

Passo n-1

No final desse passo obteremos o sistema linear

$$A^{(n-1)} \cdot X = B^{(n-1)}.$$

Esse sistema é triangular superior, equivalente ao sistema linear original.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_{1}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & b_{2}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(n-1)} & b_{3}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_{n}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Algoritmo

Seja o sistema linear $AX = B$. Supor que $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0, k = 1, ..., n - 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Para } k = 1, \ldots, n-1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ik} = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \text{Para } j = k+1, \ldots, n \\ a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj} \end{array}\right. \\ b_i = b_i - m b_k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Para } p = n-1, \ldots, 2.1 \\ x_p = \dfrac{1}{a_{pp}} \left(b_p - \sum\limits_{j=p+1}^{n} a_{pj} \cdot x_j \right) \end{array}\right.$$

Exercício 3.1

Encontre a solução do sistema linear que segue, utilizando o algoritmo dado.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Resposta: $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exercício 3.2

Faça um programa FORTRAN que encontre a solução de um sistema linear através do método de substituição retroativa.

Exercício 3.3

Faça um programa FORTRAN que calcule a solução de sistemas lineares utilizando o método de Gauss.

Exemplo 3.3

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 15 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 14 \;\Rightarrow\; \text{Existe solução!}$$

Passo 1 Eliminar x_1 das equações 2, 3 e 4

$$a_{11}^{(0)} = -1 \;\rightarrow\; \text{pivô;} \quad a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(0)},\; b_1^{(1)} = b_1^{(0)}.$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}};\ i = 2,3,4$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$m_{41} = \frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{2}{-1} = -2$$

- $L_2 \quad \to \quad L_2 - m_{21}L_1$

$$a_{21}^{(1)} = a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} = 1 - (-1)\cdot(-1) = 0$$
$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} = 9 - (-1)\cdot 3 = 12$$
$$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} = 8 - (-1)\cdot 5 = 13$$
$$a_{24}^{(1)} = a_{24}^{(0)} - m_{21}a_{14}^{(0)} = 4 - (-1)\cdot 2 = 6$$
$$b_{2}^{(1)} = b_{2}^{(0)} - m_{21}b_{1}^{(0)} = 15 - (-1)\cdot 10 = 25$$

• $L_3 \quad \rightarrow \quad L_3 - m_{31}L_1$

$$a_{31}^{(1)} = a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} = 0 - 0 \cdot (-1) = 0$$
$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} = 1 - 0 \cdot 3 = 1$$
$$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} = 0 - 0 \cdot 5 = 0$$
$$a_{34}^{(1)} = a_{34}^{(0)} - m_{31}a_{14}^{(0)} = 1 - 0 \cdot 2 = 1$$
$$b_{3}^{(1)} = b_{3}^{(0)} - m_{31}b_{1}^{(0)} = 2 - 0 \cdot 10 = 2$$

• $L_4 \quad \rightarrow \quad L_4 - m_{41}L_1$

$$a_{41}^{(1)} = a_{41}^{(0)} - m_{41}a_{11}^{(0)} = 2 - (-2) \cdot (-1) = 0$$
$$a_{42}^{(1)} = a_{42}^{(0)} - m_{41}a_{12}^{(0)} = 1 - (-2) \cdot 3 = 7$$
$$a_{43}^{(1)} = a_{43}^{(0)} - m_{41}a_{13}^{(0)} = 1 - (-2) \cdot 5 = 11$$
$$a_{44}^{(1)} = a_{44}^{(0)} - m_{41}a_{14}^{(0)} = -1 - (-2) \cdot 2 = 3$$
$$b_{4}^{(1)} = b_{4}^{(0)} - m_{41}b_{1}^{(0)} = -3 - (-2) \cdot 10 = 17$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 12 & 13 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Passo 2 Eliminar x_2 das equações 3 e 4

$a_{22}^{(1)} = 12 \quad \to \quad$ pivô; $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)}$, $b_2^{(2)} = b_2^{(1)}$.

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};\ i = 3,4$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{12}$$

$$m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{7}{12}$$

$\bullet\ L_3 \quad \to \quad L_3 - m_{32}L_2$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - m_{32}a_{21}^{(1)} = 0 - \frac{1}{12}\cdot 0 = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - m_{32}a_{22}^{(1)} = 1 - \frac{1}{12}\cdot 12 = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} = 0 - \frac{1}{12}\cdot 13 = -\frac{13}{12}$$

$$a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - m_{32}a_{24}^{(1)} = 1 - 0\cdot 2 = 1$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{()} - m_{32}b_2^{(1)} = 2 - \frac{1}{12}\cdot 25 = -\frac{1}{12}$$

• $L_4 \rightarrow L_4 - m_{42}L_2$

$$a_{41}^{(2)} = a_{41}^{(1)} - m_{42}a_{21}^{(1)} = 0 - \frac{7}{12}\cdot 0 = 0$$
$$a_{42}^{(2)} = a_{42}^{(1)} - m_{42}a_{22}^{(1)} = 7 - \frac{7}{12}\cdot 12 = 0$$
$$a_{43}^{(2)} = a_{43}^{(1)} - m_{42}a_{23}^{(1)} = 11 - \frac{7}{12}\cdot 13 = \frac{41}{12}$$
$$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} - m_{42}a_{24}^{(1)} = 3 - \frac{7}{12}\cdot 6 = -\frac{1}{2}$$
$$b_{4}^{(2)} = b_{4}^{(1)} - m_{42}b_{2}^{(1)} = 17 - \frac{7}{12}\cdot 25 = \frac{29}{12}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 12 & 13 & 6 & 25 \\ 0 & 0 & -13/12 & 1/2 & -1/12 \\ 0 & 0 & 41/12 & -1/2 & 29/12 \end{bmatrix}$$

Passo 3 Eliminar x_3 da equação 4

$$a_{33}^{(2)} = -\frac{13}{12} \quad \rightarrow \quad \text{pivô; } a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)},\ b_3^{(2)} = b_3^{(2)}$$

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{41/12}{-13/12} = -\frac{41}{13}$$

- $L_4 \rightarrow L_4 - m_{43}L_3$

$$a_{41}^{(3)} = a_{41}^{(2)} - m_{43}a_{31}^{(2)} = 0 - \left(-\frac{41}{13}\right) \cdot 0 = 0$$

$$a_{42}^{(3)} = a_{42}^{(2)} - m_{43}a_{32}^{(2)} = 0 - \left(-\frac{41}{13}\right) \cdot 0 = 0$$

$$a_{43}^{(3)} = a_{43}^{(2)} - m_{43}a_{33}^{(2)} = \frac{41}{12} - \left(-\frac{41}{13}\right) \cdot \left(-\frac{13}{12}\right) = 0$$

$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - m_{43}a_{34}^{(2)} = -\frac{1}{12} - \left(-\frac{41}{13}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{13}$$

$$b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - m_{43}b_3^{(2)} = \frac{29}{12} - \left(-\frac{41}{13}\right) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{28}{13}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 12 & 13 & 6 & 25 \\ 0 & 0 & -13/12 & 1/2 & -1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 14/13 & 28/13 \end{bmatrix}$$

O sistema linear $A^{(3)}X = B^{(3)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear $AX = B$.

Observação

A fase de eliminação envolve $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ e o número de operações efetuadas para resolver o sistema triangular é n^2.

Total de operações: $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

Estratégia de pivoteamento parcial

Não é possível trabalhar com um pivô nulo. Trabalhar com um pivô próximo de zero pode conduzir a resultados imprecisos, porque eles dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade, e estes dão origem a ampliação dos erros de arredondamentos.

i) No início de cada etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes $a_{ik}^{(k-1)}$, $i = k, k+1, \ldots, n;$

ii) Trocar as linha k e i se for necessário.

Exemplo 3.4

n = 4 e k = 2

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Início do segundo passo:

a) Escolher o pivô

$$\max_{j=2,3,4} \left[a_{j2}^{(1)} \right] = \left[a_{32}^{(1)} \right] = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{pivô} = -3$$

b) Trocar linhas 2 e 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \qquad m_{42} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Exercício 3.4

Faça um programa FORTRAN que calcule a solução de sistemas lineares utilizando o método de Gauss com a estratégia de pivoteamento parcial.

Fatoração LU

Dedinição 3.4

Seja o sistema linear $AX = B$. O processo de fatoração consiste em decompor a matriz A em um produto de dois ou mais fatores.

Se pudermos realizar, por exemplo, a fatoração A = CD, podemos escrever $(CD)X = B$. Se $Y = DX$, então o sistema linear $AX = B$ é equivalente a resolver o sistema linear $CY = B$ e, em seguida, o sistema linear $DX = Y$.

A fatoração LU é o processo em que a matriz L é triangular inferior, com diagonal unitária, e U é triangular superior. Obteremos os fatores L e U através do método de Gauss.

Consideremos $n = 3$. Nesse caso,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

e

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

No passo 1, supondo $a_{11}^{(0)} \neq 0$,

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{e} \quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}.$$

Eliminamos x_1 das linhas 2 e 3 fazendo

$$L_2 \quad \to \quad L_2 - m_{21}L_1 \qquad \text{e} \qquad L_3 \quad \to \quad L_3 - m_{31}L_3 .$$

Isto é,

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(1)}, \; j = 1,2,3$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}, \; i = 2,3 \quad \text{e} \quad j = 1,2,3$$

Esta operações correspondem ao produto $M^{(0)} \cdot A^{(0)}$, onde

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$M^{(0)}A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} & a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

Para eliminar x_2 da linha 3, fazemos

$$L_3 \quad \rightarrow \quad L_3 - m_{32} L_2 \ ,$$

ou seja,

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \ j = 1,2,3$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}, \ j = 2,3$$

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - m_{32}^{(1)}, \ j = 2,3$$

Estas operações correspondem ao produto $M^{(1)} \cdot A^{(1)}$, onde

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

pois

$$M^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - m_{32} a_{22}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - m_{32} a_{23}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

Temos então que

$$A = A^{(0)}$$
$$A^{(1)} = M^{(0)} A^{(0)} = M^{(0)} A \quad .$$
$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A^{(0)} = M^{(1)} M^{(0)} A$$

Observação:

$A^{(2)}$ é triangular superior.

Podemos também escrever que

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \left(M^{(1)} \cdot M^{(0)} \right)^{-1} A^{(2)} =$$
$$= \left(M^{(0)} \right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)} \right)^{-1} \cdot A^{(2)},$$

com

$$\left(M^{(0)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(M^{(1)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{(0)} \right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A = LU$, onde

$$L = \left(M^{(0)} \right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad U = A^{(2)} .$$

Seja o sistema linear $AX = B$ e a fatoração LU de A. Temos então que

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad (LU)X = B .$$

A solução do sistema linear pode ser obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

$$\begin{aligned} &\text{i) } LY = B \\ &\text{ii) } UX = Y \end{aligned}.$$

Considerando $LY = B$, podemos escrever que $Y = L^{-1}B$. Mas,

$$L = \left(M^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad L^{-1} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} .$$

Logo,

$$Y = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot B^{(0)}, \quad \text{onde } B^{(0)} = B .$$

Temos que

$$Y = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot B^{(0)} = M^{(1)} \cdot B^{(1)} = B^{(2)}$$

Exemplo 3.5

Resolver o sistema linear que segue através da fatoração LU.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolveremos o sistema, $L(UX) = B$.

Usando o processo de Gauss,

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{3} \qquad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{4}{3} \qquad m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1$$

Passo 1

$$L_1 \to L_1$$
$$L_2 \to L_2 - m_{21}L_1$$
$$L_3 \to L_3 - m_{31}L_1$$

Passo 2

$$L_1 \to L_1$$
$$L_2 \to L_2$$
$$L_3 \to L_3 - m_{32}L_2$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Assim, os fatores L e U são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

onde usamos o processo de Gauss, sem estratégia de pivoteamento parcial.

i – $LY = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Temos então que

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3\, y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3\, y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) $UX = Y$

Finalmente, obtemos a solução do sistema,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3\, x_2 + 2x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial

Em primeiro lugar estudaremos a matriz de permutação, uma vez que a estratégia de pivoteamento parcial envolve permutação de linhas da matriz $A^{(0)}$.

Definição 3.5

Uma matriz quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas ou suas colunas.

Exemplo 3.6

Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} .$$

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Note que o resultado do produto das duas matrizes equivale a permutar as linhas em A, da mesma forma que se deve permutar as linhas da matriz identidade para se obter a matriz P.

Seja $AX = B$ e as matrizes L e U obtidas pelo processo de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial. Seja A' definida por $A' = PA$. Como $AX = B$, devemos ter que $B = PB$.

O sistema $A'X = B'$ é equivalente ao sistema original $AX = B$. Além disso, se $A' = LU$, teremos

$$A'X = B' \quad \Rightarrow \quad PAX = PB \quad \Rightarrow \quad LUX = PB \ .$$

Resolução do sistema: $\begin{matrix} \text{i) } LY = PB \\ \text{ii) } UX = Y \end{matrix}$

Exemplo 3.7

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Passo 1

$$\text{pivô} \quad \rightarrow \quad a_{13}^{(0)} = 4$$

Observação

$$L_1 \quad \leftrightarrow \quad L_3$$

$$A^{'(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{'(0)} = P^{(0)} A^{(0)},$$

onde

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em $A^{'(0)}$,

$$\begin{matrix} L_2 & \rightarrow & L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 & \rightarrow & L_3 - m_{31} L_1 \end{matrix},$$

onde

$$m_{21} = \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad m_{31} = \frac{3}{4}.$$

Ficamos com

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 11/4 \\ 0 & -4 & 13/4 \end{bmatrix}.$$

Passo 2

$$\text{pivô} \quad \to \quad a_{32}^{(1)} = -4$$

Observação

$$L_2 \quad \leftrightarrow \quad L_3$$

$$A^{'(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

$A^{'(1)} = P^{(1)} A^{(1)}$,

onde

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em $A^{'(1)}$,

$L_3 \quad \to \quad L_3 - m_{32} L_2$,

com

$m_{32} = -\frac{1}{2}$.

Ficamos com

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}.$$

Os fatores L e U são então

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}.$$

Resolução do sistema

i) $LY = PB$

$$P = P^{(1)}P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ 3/4\, y_1 + y_2 = 9 \\ 1/4\, y_1 - 1/2\, y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

ii) $UX = Y$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = -2 \\ -4x_2 + 13/4\,x_3 = 21/2 \\ 35/8\,x_3 = 35/4 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Algoritmo – resolução de AX = B através da fatoração LU com pivoteamento parcial.

As permutações de linha realizadas durante a fatoração podem ser representadas através de um vetor $[p]_{n \times 1}$, definido por $p(k) = i$ se na etapa k a linha i da matriz original $A^{(0)}$ for a linha pivotal.

No exemplo anterior:

Inicialmente $\rightarrow \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Passo 1 $\rightarrow \quad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Passo 2 $\rightarrow \quad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Observação

p representa as permutações realizadas durante a fatoração.

i) Cálculo dos fatores

$$
\begin{array}{l}
\text{Para } i = 1, \ldots, n \\
\left[\, p(i) = i \right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Para } k = 1, \ldots, n-1 \\
\left[\begin{array}{l}
pv = |a(k,k)| \\
r = k \\
\quad \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\
\quad \left[\begin{array}{l}
\text{Se } |a(i,k)| > pv, \text{ faça:} \\
\quad \left[\begin{array}{l}
pv = |a(i,k)| \\
r = i
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\quad \text{Se } pv = 0, \text{ parar; A é singular!} \\
\quad \text{Se } r \neq k, \text{ faça:} \\
\quad \left[\begin{array}{l}
aux = p(k) \\
\; p(k) = p(r) \\
\; p(r) = aux \\
\; \text{Para } j = 1, \ldots, n \\
\; \left[\begin{array}{l}
aux = a(k,j) \\
a(k,j) = a(r,j) \\
a(r,j) = aux
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\quad \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\
\quad \left[\begin{array}{l}
m = a(i,k)/a(k,) \\
a(i,k) = m \\
\text{para } j = k+1, \ldots, n \\
a(i,j) = a(i,j) - m a(k,j)
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

ii) Resolução dos sistemas triangulares

$$\text{Para } i = 1, \dots, n$$
$$C = BP \begin{bmatrix} r = p(i) \\ c(i) = b(r) \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } i = 1, \dots, n$$
$$LY = C \begin{bmatrix} \text{soma} = 0 \\ \text{Para } j = 1, \dots, i-1 \\ [\text{soma} = \text{soma} + a(i,j)\, y(j) \\ y(i) = c(i) - \text{soma} \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } i = n, n-1, \dots, n$$
$$UX = Y \begin{bmatrix} \text{soma} = 0 \\ \text{Para } j = i+1, \dots, n \\ \text{soma} = \text{soma} + a(i,j)\, x(j) \\ x(i) = (y(i) - \text{soma})/a(i,i) \end{bmatrix}$$

Exercício 3.5

Fatore as matrizes que seguem na decomposição LU.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

Respostas:

$$\text{a) } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$b)\ U = \begin{bmatrix} 2.175600 & 4.023099 & -2.172199 & 5.196700 \\ 0 & 13.43947 & -4.018660 & 10.80698 \\ 0 & 0 & -0.892951 & 5.091692 \\ 0 & 0 & 0 & 12.03614 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.849190 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4596433 & -0.2501219 & 1 & 0 \\ 2.768661 & -0.3079435 & -5.352283 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 3.6

Faça um programa FORTRAN que decomponha uma matriz A dada no exemplos 3.6 e 3.7 e no exercício 3.5 em matrizes L e U.

Exercício 3.7

Faça um programa FORTRAN que resolva sistemas lineares utilizando a decomposição L e U.

Exercício 3.8

Refaça o programa do exercício anterior, utilizando também a estratégia de pivoteamento parcial.

Fatoração de Cholesky

Definição 3.6

Uma matriz $A_{n \times n}$ é definida positiva se

$$X^t AX > 0, \forall X \in IR^n, X \neq 0.$$

Veremos mais tarde que uma matriz simétrica é definida positiva se e somente se seus autovalores são todos positivos. Esse tipo de matriz aparece com frequência na solução numérica de problemas de valor inicial pelo método de diferenças finitas.

Exemplo 3.8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é definida positiva. De fato:

$$\begin{aligned} X^t A X &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + -2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

A menos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0 \ .$$

O teorema que segue fornece algumas características das matrizes definidas positivas.

Teorema 3.4

Se A for uma matriz $n \times n$ definida positiva, então:

(a) A tem uma inversa;
(b) $a_{ii} > 0$, para cada $i = 1, \ldots n$;
(c) $\max\limits_{1 \le k, j \le n} |a_{kj}| \le \max\limits_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$;
(d) $(a_{ij})^2 < a_{ii} a_{jj}$, para cada $i \ne j$.

Observação

Este teorema não assegura que uma matriz que satisfaça essas condições seja definida positiva.

Observação

O comando Maple na biblioteca LinearAlgebra

>IsDefinite(A, querry = ´positive_definite´);

retorna a firmação *true* se A for definida positiva; do contrário retorna *false*.

Definição 3.7

Uma matriz A, simétrica e definida positiva, pode ser escrita na forma

$$A = G \cdot G^t,$$

onde $G_{n \times n}$ é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos. Esta fatoração é conhecida como fatoração de Cholesky.

Seja A uma matriz $n \times n$ que pode ser escrita como $A = LU$. A pode ser fatorada, de forma única, como

$$A = LD\overline{U},$$

onde

$L \rightarrow$ matriz triangular inferior $(n \times n)$ com diagonal unitária,
$D \rightarrow$ matriz diagonal $(n \times n)$,
$\overline{U} \rightarrow$ matriz triangular superior $(n \times n)$.

Se a matriz for simétrica, é possível demonstrar que

$$\overline{U} = L^t$$

e

$$A = LDL^t.$$

Exemplo 3.9

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{bmatrix}$$

Cálculo das matrizes L e U.

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{1}{4} \qquad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{3}{4} \qquad m_{41} = \frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} & L_1 \to L_1 \\ & L_2 - m_{21}L_1 \to L_2 \\ & L_3 - m_{31}L_1 \to L_3 \\ & L_4 - m_{41}L_1 \to L_4 \end{aligned}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 2 \qquad m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 0$$

$$\begin{aligned} & L_1 \to L_1 \\ & L_2 \to L_2 \\ & L_3 - m_{32}L_2 \to L_3 \\ & L_4 - m_{42}L_2 \to L_4 \end{aligned}$$

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 1$$

$L_1 \to L_1$
$L_2 \to L_2$
$L_3 \to L_3$
$L_4 - m_{43}L_3 \to L_4$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

Os fatores L, D e $\overline{U}$ são:

$$A = L \cdot D \cdot \overline{U} = LDL^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{bmatrix}$$

Observação

A é simétrica $\to$ $\overline{U} = L^t$

Se A for simétrica definida positiva, então A pode ser fatorada na forma LDL^t, com L triangular inferior com diagonal unitária e D matriz diagonal com elementos na diagonal estritamente positivos.

Podemos escrever então que

$$A = LDL^t = L\overline{D}\overline{D}L^t \; ,$$

onde

$$\overline{d_{ii}} = \sqrt{d_{ii}}\,.$$

Além disso, se $G = L\overline{D}$, obtemos

$$A = GG^t,$$

onde G é triangular inferior com diagonal estritamente positiva.

Exemplo 3.10

Consideremos novamente a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{bmatrix}$$

e sua fatoração LDL^t; D é tal que $d_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, 4$. Fazendo $\overline{D} = D^{1/2}$, teremos

$$A = LDL^t = L\overline{D}\overline{D}L^t = (L\overline{D})(\overline{D}L^t) = GG^t,$$

onde

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

e

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.8

A matriz G, triangular inferior com diagonal positiva, é o fator de Cholesky da matriz A. Este fator pode ser determinado diretamente da equação $A = GG^t$.

Exercício 3.9

Fatore a matriz dada em um produto LDL^t, onde L é triangular inferior, com todos os elementos diagonais iguais a 1, e D é uma matriz a diagonal.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Respostas

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cálculo do fator Cholesky

$$A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$$ → simétrica e definida positiva.

O fator $G = \left[g_{ij} \right]_{n \times n}$, triangular inferior com diagonal positiva, será obtido a partir da equação

$$A = G \cdot G^T,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Coluna 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^2 \\ g_{21}g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ e } g_{j1} = \frac{a_{j1}}{g_{11}}, \; j = 2, \ldots, n.$$

Coluna 2

$$\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}g_{21} \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow g_{21}^2 + g_{22}^2 a_{22} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$$

e

$$g_{j1}g_{21} + g_{j2}g_{22} = a_{j2}, \; j = 3, \ldots, n$$

Como os elementos g_{j1} já estão calculados,

$$g_{j2} = \frac{1}{g_{22}}(a_{j2} - g_{j1}g_{21}),\ j = 3, \ldots, n$$

.
.
.

Coluna k

$$a_{kk} = g_{k1}^2 + g_{k2}^2 + \ldots + g_{kk}^2$$

$$g_{kk} = \left[a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ki}^2 \right]^{1/2}$$

$$a_{jk} = g_{j1}g_{k1} + g_{j2}g_{k2} + \ldots + g_{jk}g_{kk},\ j = k+1, \ldots, n.$$

Como todos os elementos $g_{ik}, i = 1, \ldots, k - 1$ já estão calculados, temos que

$$g_{jk} = \frac{1}{g_{kk}} \left[a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ji}g_{ki} \right],\ j = k+1, \ldots, n\ .$$

Exemplo 3.10

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{bmatrix}$$

Solução

Coluna 1

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{16} = 4$$

$$g_{j1} = \frac{a_{j1}}{g_{11}} = \frac{a_{j1}}{4}, \ \ j = 2, 3, 4$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$g_{41} = \frac{a_{41}}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Coluna 2

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$g_{j2} = \frac{1}{g_{22}}(a_{j2} - g_{j1}g_{21}), \ j = 3, 4$$

$$g_{32} = \frac{1}{g_{22}}(a_{32} - g_{31}g_{21}) = \frac{1}{1}(-1 - 3(-1))$$
$$= -1 + 3 = 2$$

$$g_{42} = \frac{1}{g_{22}}(a_{42} - g_{41}g_{21}) = \frac{1}{1}(1 - (-1)(-1))$$
$$= 1 - 1 = 0$$

Coluna 3

$$a_{33} = g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2}$$

$$g_{33} = \sqrt{14 - 9 - 4} = 1$$

$$g_{43} = \frac{1}{g_{33}}(a_{43} - g_{41} \cdot g_{31} - g_{42} \cdot g_{32})$$

$$= \frac{1}{1}(-2 - (-1)3 - 0 \cdot 2) = -2 + 3 = 1$$

Coluna 4

$$a_{44} = g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2 + g_{44}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{44} = \sqrt{a_{44} - g_{41}^2 - g_{42}^2 - g_{43}^2}$$

$$g_{44} = \sqrt{83 - (-1)^2 - 0^2 - 1} = \sqrt{81} = 9$$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Algoritmo – Fatoração de Cholesky (FC)

Para $k = 1, \ldots, n$

$$
\left[\begin{array}{l}
soma = 0 \\
\text{Para } j = 1, \ldots, (k-1) \\
\left[\; soma = soma + g_{kj}^{2} \right. \\
r = a_{kk} - soma \\
g_{kk} = r^{1/2} \\
\text{Para } i = (k+1), \ldots, n \\
\left[\begin{array}{l}
soma = 0 \\
\text{Para } j = 1, \ldots, k-1 \\
\left[\; soma = soma + g_{ij} g_{kj} \right. \\
g_{ik} = \dfrac{1}{g_{kk}} (a_{ik} - soma)
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Observações

i) A FC é usada para verificar se uma determinada matriz simétrica é definida positiva.

ii) Se em alguma etapa $r \leq 0$, a matriz original não é definida.

iii) A FC requer aproximadamente metade do número de operações necessárias na fase de eliminação da fatoração LU.

iv) $AX = B \quad \Leftrightarrow \quad (GG^T)X = B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } GY = B \\ \text{ii) } G^T X = Y \end{cases}$

Exercício 3.10

Use o algoritmo de Cholesky para encontrar uma fatoração da forma $A = GG^T$ para as matrizes que seguem.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Exercício 3.11

Use a fatoração de Cholesky para resolver os sistemas que seguem:

a) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0{,}65 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0{,}05 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 0{,}5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = \text{-}1 \\ \text{-}x_1 - x_3 + 3x_4 = \text{-}2 \end{cases}$

Respostas:

$1-(a)\ G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.7537785 & 1.087113 & 0 \\ 0.5 & 0.4522671 & 0.08362442 & 1.240346 \end{bmatrix}$

$$(b)\ G = \begin{bmatrix} 2.449489 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8164966 & 1.825741 & 0 & 0 \\ 0.4082483 & 0.3651483 & 1.923538 & 0 \\ -0.4082483 & 0.1825741 & -0.4678876 & 1.606574 \end{bmatrix}$$

$2-(a)\ x_1 = 0{,}2$
$x_2 = -0{,}2$
$x_3 = -0{,}2$
$x_4 = 0{,}25$

$(b)\ x_1 = -0{,}8586874$
$x_2 = 2{,}4188482$
$x_3 = -0{,}95811518$
$x_4 = -1{,}2722513$

Exercício 3.12

Faça um programa FORTRAN que resolva sistemas lineares utilizando a decomposição de Cholesky.

Cálculo do fator Cholesky

Observação

$$A = GG^t \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & 0 \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} & g_{51} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & g_{42} & g_{52} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{43} & g_{53} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & g_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{54} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{matrix} g_{11}^2 & g_{21}g_{11} & g_{31}g_{11} & g_{41}g_{11} \\ g_{21}g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \\ g_{31}g_{11} & g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 & g_{41}g_{31} + g_{42}g_{32} + g_{43}g_{33} \\ g_{41}g_{11} & g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} & g_{41}g_{31} + g_{42}g_{32} + g_{43}g_{33} & g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2 + g_{44}^2 \\ g_{51}g_{11} & g_{51}g_{21} + g_{52}g_{22} & g_{51}g_{31} + g_{52}g_{32} + g_{53}g_{33} & g_{51}g_{41} + g_{52}g_{42} + g_{53}g_{43} + g_{54}g_{44} \end{matrix}\right.$$

Coluna 1

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$g_{j1} = \frac{a_{j1}}{g_{11}}, \ \ j = 2, 3, 4, 5$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}}$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}}$$

$$g_{41} = \frac{a_{41}}{g_{11}}$$

Coluna 2

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$$
$$g_{j2} = \frac{1}{g_{22}}(a_{j2} - g_{j1}g_{21}),\ \ j = 3, 4,5$$

$$g_{32} = \frac{1}{g_{22}}(a_{32} - g_{31}g_{21})$$
$$g_{42} = \frac{1}{g_{22}}(a_{42} - g_{41}g_{21})$$
$$g_{52} = \frac{1}{g_{22}}(a_{52} - g_{51}g_{21})$$

Coluna 3

$$a_{33} = g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2}$$

$$g_{43} = \frac{1}{g_{33}}(a_{43} - g_{41} \cdot g_{31} - g_{42} \cdot g_{32})$$
$$g_{53} = \frac{1}{g_{33}}(a_{53} - g_{51} \cdot g_{31} - g_{52} \cdot g_{32})$$

Coluna 4

$$a_{44} = g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2 + g_{44}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{44} = \sqrt{a_{44} - g_{41}^2 - g_{42}^2 - g_{43}^2}$$

$$g_{54} = \frac{1}{g_{44}}(a_{54} - g_{51} \cdot g_{41} - g_{52} \cdot g_{42} - g_{53} \cdot g_{53})$$

Coluna 5

$$a_{55} = g_{51}^2 + g_{52}^2 + g_{53}^2 + g_{54}^2 + g_{55}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{55} = \sqrt{a_{55} - g_{51}^2 - g_{52}^2 - g_{53}^2 - g_{54}^2}$$

3.2 – Métodos Iterativos

Métodos de Jacobi

Definição 3.9

Para sistemas de equações lineares algébricas de pequeno a médio porte, os algoritmos diretos não levam em consideração que muitas operações não necessitam ser feitas. No entanto, nos métodos iterativos isso é levado em conta.

A idéia mais simples de um algoritmo iterativo para resolver $AX = B$ é obtida resolvendo-se a primeira equação para x_1, a segunda para x_2, a terceira para x_3 e assim por diante. Generalizando, temos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{11}}(b_i - a_{i1}x_{i1} - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{in}x_n)$$

O método de Jacobi consiste em dado $X^{(0)}$, solução inicial, obter $X^{(k)}$ através da relação recursiva

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - a_{i2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - a_{in}x_n^{(k)}\right)$$

Teste de Parada

Definição 3.10

O processo iterativo é repetido até que o vetor $X^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $X^{(k-1)}$.

i) Distância entre $X^{(k)}$ e $X^{(k-1)}$

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

Se $d^{(k)} < \varepsilon, \bar{x} = x^{(k)}$ é a solução aproximada da solução exata.

ii) Erro relativo

$$e_r = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

$$e_r < \varepsilon \Rightarrow \bar{x} = x^{(k)}$$

Observação

Um outro método de parada importante e que deve estar presente no programa, além de um desses mencionados, é o estabelecimento de um número máximo de iterações.

Exemplo 3.11

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = 0.05$$

Solução

Processo iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{33}x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,7 - 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -1,6 - 0,2x_1^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0,6 - 0,2x_1^{(k)} - 0,3x_2^{(k)} \end{cases}$$

$k = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,7 - 0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} = 0,96 \\ x_2^{(1)} = -1,6 - 0,2x_1^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} = -1,86 \\ x_3^{(1)} = 0,6 - 0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} = 0,94 \end{cases}$$

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 0,26$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0,26 \qquad d^{(1)} = 0,34$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = 0,34$$

$$e_r = \frac{0,34}{1,86} = 0,1828 > \varepsilon$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 0,7 - 0,2x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} = 0,978 \\ x_2^{(2)} = -1,6 - 0,2x_1^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} = -1,98 \\ x_3^{(2)} = 0,6 - 0,2x_1^{(1)} - 0,3x_2^{(1)} = 0,966 \end{cases}$$

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0,018$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = -0,12 \qquad d^{(2)} = 0,12$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = 0,026$$

$$e_r = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > \varepsilon$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = 0,7 - 0,2x_2^{(2)} - 0,1x_3^{(2)} = 0,9994 \\ x_2^{(3)} = -1,6 - 0,2x_1^{(2)} - 0,2x_3^{(2)} = -1,9888 \\ x_3^{(3)} = 0,6 - 0,2x_1^{(2)} - 0,3x_2^{(2)} = 0,9984 \end{cases}$$

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0,0214$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = -0,0088 \qquad d^{(3)} = 0,0324$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0,0324$$

$$e_r = \frac{0,0324}{1,9888} = 0,0163 < \varepsilon$$

$$\overline{X} = X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.5

Seja o sistema linear $AX = B$ e seja

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}.$$

Se $\alpha = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método de Jacobi gera uma seqüência $\{X^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial.

Exemplo 3.12

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2,3} |a_{1j}| = \frac{1}{10}(2+1) = 0{,}3$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{a_{22}} \sum_{j=1,3} |a_{2j}| = \frac{1}{5}(1+1) = 0{,}4$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{a_{33}} \sum_{j=1,2} |a_{3j}| = \frac{1}{10}(2+3) = 0{,}5$$

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0{,}5 < 1$$

Pelo teorema, temos garantia de convergência para o método de Jacobi.

Observação

Se $\{X^{(k)}\}$ é uma seqüência convergente $\not\Rightarrow \alpha < 1$. Isto significa que é possível encontrar $\alpha \geq 1$ e o método de Jacobi gerar uma seqüência convergente.

Exercício 3.13

1) Obtenha as duas primeiras iterações do método de Jacobi para os seguintes sistemas lineares, usando $X^{(0)} = 0$.

$$(a)\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases};\quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}5208333 \\ -0.0416667 \\ -0.2166667 \\ -0.4166667 \end{bmatrix}\ \text{Resposta}$$

$$(b)\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases};\quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}325 \\ -1{,}6 \\ 1{,}6 \\ 1{,}675 \\ 2{,}425 \end{bmatrix}\ \text{Resposta}$$

2) Faça um programa FORTRAN para resolver os sistemas lineares do exercício 1, com $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$(a)\ X^{(14)} = \begin{bmatrix} -0.7529267 \\ 0.04078538 \\ -0.2806091 \\ 0.6911662 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ X^{(12)} = \begin{bmatrix} 0.7870883 \\ -1.003036 \\ 1.866048 \\ 1.912449 \\ 1.985707 \end{bmatrix}$$

Algoritmo

$$A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$$

Entrada: $X^{(0)}$

$TOL \rightarrow \text{tolerância} \, (\varepsilon)$

$ITMAX \rightarrow \text{número máximo de iteração} \, (N)$

Passo 1: Faça $k = 1$

Passo 2: Enquanto $k \le N$, siga os passos de 3 a 6

Passo 3: Para $i = 1, ..., N$

$$x_i = \frac{1}{a_{11}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} a_{ij} x_{0j} \right)$$

Passo 4: $e_r < \varepsilon$, então

$\overline{X} = X^{(k)}$
Pare

Passo 5: Faça $k = k + 1$

Passo 6: Para $i = 1, ..., N$ faça $x_{0i} = x_i$

Passo 7: Saída→ "Excedeu ITMAX"
Pare

Método de Gauss-Seidel

Definição 3.11

Considere, mais uma vez o sistema de n equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{11}}\left(b_i - a_{i1}x_{i1} - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1} - \ldots - a_{in}x_n\right).$$

O método de Gauss-Seidel consiste em, dado $X^{(0)}$, solução inicial, obter $\overline{X}$ através do sistema

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

Exemplo 3.13

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} ; \; X^{(0)} = 0; \; \varepsilon = 5\times 10^{-2}$$

Solução

$$x_1^{(k+1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = -0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)}$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$x_2^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75 \times 1 - 0 = 0{,}75 \qquad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = -0{,}5 \times 1 - 0{,}5 \times 0{,}75 = \text{-}0{,}875$$

$$\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| = 1$$
$$\left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| = 0{,}75 \qquad e_r = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon$$
$$\left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| = 0{,}875$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2 \times 0{,}75 + 0{,}2 \times 0{,}875 = 1{,}025$$

$$x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75 \times 1{,}025 \text{ - } 0{,}25 \times (-0{,}875) = 0{,}95 \qquad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = -0{,}5 \times 1{,}025 - 0{,}5 \times 0{,}95 = \text{-}0{,}9875$$

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0{,}025$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = 0{,}20 \qquad e_r = \frac{0{,}2}{1{,}025} = 0{,}1951 > \varepsilon$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = 0{,}1125$$

$$k = 2$$

$$x_1^{(3)} = 1 - 0{,}2 \times 0{,}95 + 0{,}2 \times (-0{,}9875) = 1{,}0075$$

$$x_2^{(3)} = 1{,}5 - 0{,}75 \times 1{,}0075 - 0{,}25 \times (-0{,}9875) = 0{,}9912 \qquad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = -0{,}5 \times 1{,}0075 - 0{,}5 \times 0{,}9912 = -0{,}9993$$

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 1{,}0075$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}0412 \qquad e_r = \frac{0{,}0412}{1{,}0075} = 0{,}0409 > \varepsilon$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0{,}0118$$

$$\overline{X} = X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}$$

Convergência – Critério de Sassenfeld

Definição 3.12

Seja $X*$ a solução exata do sistema $AX = B$ e seja $X^{(k)}$ a k-ésima aproximação de $X*$.

Sejam

$$\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|}\left(|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|\right),$$

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \ldots + |a_{ii-1}|\beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \ldots + |a_{in}|\right)$$

e

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \beta_j.$$

Se $\beta < 1$, o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente, qualquer que seja $X^{(0)}$. Esta condição nos garante que

$$\lim_{k \to \infty} \left| x_i^{(k)} - x_i^* \right| = 0$$

Vale mencionar que o critério de Sassenfeld é apenas suficiente, isto é, o método de Gauss-Seidel pode gerar uma seqüência convergente e o critério não ser satisfeito. Uma outra observação importante é que, assim como no critério das linhas, sempre que o critério não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas; algumas vezes obtemos uma configuração em que o critério passa a ser satisfeito.

Exemplo 3.14

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 = 0{,}2 \\ 0{,}2x_1 + x_2 - 0{,}2x_3 - 0{,}1x_4 = -2{,}6 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}2x_1 = 1{,}0 \\ 0{,}1x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + x_4 = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\beta_1 = 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$$

$$\beta_2 = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}44$$

$$\beta_3 = 0{,}1 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}44 + 0{,}2 = 0{,}358$$

$$\beta_4 = 0{,}1 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}44 + 0{,}2 \times 0{,}358 = 0{,}2736$$

$\beta = 0,7 < 1 \Rightarrow$ O método de Gauss-Seidel vai gerar uma seqüência convergente.

Exercício 3.14

1) Obtenha as duas primeiras iterações pelo método do Gauss-Seidel para os sistemas lineares que seguem, usando $X^{(0)} = 0$.

$$
(a)\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}
$$

$$
(b)\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}
$$

2) Faça um programa FORTRAN para resolver sistemas lineares pelo método de Gauss-Seidel. Resolva os dois sistemas do exercício 1, considerando $\varepsilon = 10^{-3}$.

Algoritmo

Entrada: $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$

$X^{(0)}$, TOL, ITMAX $\rightarrow$ número máximo de iteração (N)

Passo 1: Faça $k = 1$

Passo 2: Enquanto $k \leq N$, siga os passos de 3 a 6

Passo 3: Para $i = 1, \ldots, N$

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_{0j} - b_i \right)$$

Passo 4: $e_r < TOL$, então

$$\overline{X} = X^{(k)}$$

Pare

Passo 5: Faça $k = k + 1$

Passo 6: Para $i = 1, \ldots, n$ faça $x_{0i} = x_i$

Passo 7: Saída→ “Excedeu ITMAX”
Pare

3.3 – Comentários sobre os métodos vistos.

i) Os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Os métodos iterativos têm a convergência garantida apenas sob determinadas condições.

ii) Os métodos iterativos são, em geral, mais eficientes para os sistemas esparsos de grande porte do que os métodos diretos. Deve ser lembrado que os métodos iterativos preservam os zeros da matriz primitiva.

iii) Uma outra vantagem dos métodos iterativos é que como eles utilizam a matriz na forma original para as iterações, tende a corrigir-se e minimizar o erro de arredondamento.

iv) Havendo convergência, é possível se obter alta exatidão mais rapidamente com um método iterativo.

v) Os métodos diretos são mais eficientes para matrizes densas de pequeno porte.

vi) Em geral, o método de Gauss-Seidel apresenta uma convergência mais rápida do que o método de Jacobi. No entanto, é errado concluir que o método de Jacobi é sempre inferior ao método de Gauss-Seidel.

vii) O método de Cholesky é o mais eficiente no caso de matrizes simétricas.

3.4 – Sistemas mal condicionados

Definição 3.13

Um sistema é dito mal condicionado se pequenas alterações nos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final.

Considere o sistema

$$\begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7w = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5w = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9w = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10w = 31 \end{cases}.$$

Substituindo

$$x = 9{,}2 \quad , \quad y = -12{,}6 \quad , \quad z = 4{,}5 \quad , \quad w = -1{,}1 \ .$$

No sistema, obteremos

$$b_1 = 32{,}1 \quad , \quad b_2 = 22{,}9 \quad , \quad b_3 = 33{,}1 \quad , \quad b_4 = 30{,}9.$$

Esses resultados nos levam a crer que os valores sugeridos para x, y, z e w formam uma boa aproximação do sistema.

Entretanto, fazendo

$$x = 1{,}82 \quad , \quad y = -0{,}36 \quad , \quad z = 1{,}35 \quad , \quad w = 0{,}75$$

obtemos

$$b_1 = 32{,}01 \quad , \quad b_2 = 22{,}99 \quad , \quad b_3 = 33{,}01 \quad , \quad b_4 = 30{,}99$$

Mas, esta aproximação também está longe da solução correta que é $x = y = z = w = 1$.

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}119 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases}$$

A solução do sistema é $x = 1$ e $y = 1$.

Suponhamos que esse sistema seja obtido experimentalmente e que os termos independentes sejam resultados de medidas e que possam variar de $\pm 0{,}001$.

Assim, temos que

$$\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}120 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases},$$

cuja solução é $x = 0{,}815$ e $y = 0{,}789$. Isto significa que para um erro de 1% aproximadamente nos dados de entrada, temos um erro de até 18% nos dados de saída:

$$e_e = \frac{|0{,}119 - 0{,}120|}{0{,}119} = 0{,}008 = 0{,}8\%$$

$$e_s = \frac{|0{,}815 - 1{,}0|}{1{,}0} = 0{,}185 = 18{,}5\% \ .$$

A razão para o mal condicionamento é o fato de que o determinante dos coeficientes é muito pequeno (quase zero). No segundo exemplo, ele vale $-0{,}002281$.

Capítulo 4 – Autovalores e autovetores

Definições e teoremas básicos

Definição 4.1

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V, v \neq 0$ e $\lambda \in k$ tais que $Tv = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v um autovetor de T associado com λ.

Exemplos 4.1

$$T: IR^3 \to IR^3, \alpha \neq 0$$
$$v \to \alpha\, v$$

Uma transformação como essa tem α como autovalor e qualquer $v \neq (0,0)$ como autovetor correspondente. Note que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção de v.

Observação

a) $\alpha > 0$, T inverte o sentido do vetor

b) $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor

c) $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor

d) $\alpha = 1$, T é a identidade.

$$T: IR^2 \to IR^2$$
$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

Observação

T representa uma rotação de 90º em torno da origem T não tem nem autovalores nem autovetores, pois nenhum vetor diferente de zero é levado por T num múltiplo de si mesmo.

Teorema 4.1

Dada uma transformação $T: V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha\, v \, (\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ.

Demonstração

$$T(\alpha\, v) = \alpha\, T(v) = \alpha\, (\lambda\, v) = \lambda(\alpha\, v)$$

Definição 4.2

O subespaço $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ é chamado de subespaço associado ao autovalor λ.

Teorema 4.2

Um operador linear $T : V \to V$ pode ser representado por uma matriz diagonal B se, e somente se, V tem uma base consistindo de autovetores de T. Nesse caso, os elementos diagonais de B são os autovalores correspondentes.

Comentários sobre o teorema

Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço vetorial V com dimensão finita n. T pode ser representado por uma matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

se, e somente se, existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V para a qual

$$\begin{aligned} T(v_1) &= k_1 v_1 \\ T(v_2) &= k_2 v_2 \\ &\vdots \\ T(v_n) &= k_n v_n \end{aligned}$$

isto é, tal que os vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ são autovetores de T pertencentes, respectivamente, a autovalores $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Definição 4.3

Seja A uma matriz de ordem n sobre um corpo k. Os autovalores e autovetores de A são aqueles que satisfazem a equação $Av = \lambda v$ ou $Av = (\lambda v)$ ou ainda $(A - \lambda I)v = 0$. Para encontrarmos os autovetores v devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$.

Impondo a condição $\det(A - \lambda I) = 0$ determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. O determinante da matriz $A - \lambda I$ forma um polinômio em λ do grau n que é chamado polinômio característico da matriz A. Chamamos $\det(A - \lambda I) = 0$ a equação característica de A.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn}\lambda) + \text{termos de grau} < n.$$

Os autovalores procurados são as raízes deste polinômio.

Exemplo 4.3

Para cada matriz, encontre todos os autovalores e uma base de cada auto-espaço:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Qual matriz pode ser diagonalizável e por quê?

Solução

(i)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda)+18]+3[3(4-\lambda)-18]+3[-18+6(5+\lambda)] \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)+18(1-\lambda)+9(4-\lambda)-54-54+90+18\lambda \\
&= (4-\lambda)[9-(1-\lambda)(5+\lambda)] \\
&= (4-\lambda)[9-(5+\lambda-5\lambda+\lambda^2)] \\
&= (4-\lambda)\,(\lambda^2+4\lambda+4) \\
&= (4-\lambda)\,(\lambda+2)^2
\end{aligned}
$$

$P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=4, \lambda=-2 \rightarrow$ autovalores de A

$\lambda=-2$

$$
\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} 3x-3y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ 6x-6y+6z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}
$$

O sistema tem duas soluções independentes, por exemplo, $x=1, y=1, z=0$ e $x=1, y=0, z=-1$. Assim, $u=(1,1,0)$ e $v=(1,0,-1)$ são autovetores independentes que geram o auto-espaço de -2. Isto quer dizer que u e v formam uma base do auto-espaço de -2.

$\lambda=4$

$$
\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} -3x-3y+3z=0 \\ 3x-9y+3z=0 \\ 6x-6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} 2y-z=0 \\ x=y \end{cases}
$$

Como o sistema tem apenas uma variável livre, qualquer solução particular não nula, por exemplo, $x = 1, y = 1, z = 2$, gera seu espaço das soluções. Assim, $w = (1,1,2)$ é um autovetor que gera o auto-espaço de 4.

Observação

Como A tem três autovetores linearmente independentes, A é diagonalizável. De fato, seja D a matriz cujas colunas são os três autovetores independentes. Os elementos diagonais de $D^{-1}AD$ são os autovalores de A correspondentes às colunas de D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D^{-1}AD = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii) } A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - [-7(-2-\lambda)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)[-10-5\lambda+2\lambda+\lambda^2+6] - [(14+7\lambda-6] - [-42+30-6\lambda] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - (7\lambda+8) - (-6\lambda-12) \\ &= 9\lambda+12-\lambda^3+4\lambda-7\lambda-8+6\lambda+12 \\ &= -\lambda^3+12\lambda+16) \\ &= (\lambda+2)^2(-\lambda+4) \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 4 \rightarrow \text{autovalores de A}$$

$\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -7x+7y-z=0 \\ -6x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ \\ x-y=0 \end{cases}$$

O sistema tem apenas uma solução independente, por exemplo, $x=1, y=1$ e $z=1$. Assim, $u=(1,1,0)$ forma uma base do auto-espaço de -2.

$\lambda=4$

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -7x+y-z=0 \\ -7x+y-z=0 \\ -6x+6y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

O sistema tem apenas uma solução independente, por exemplo, $x=0, y=1$e $z=1$. Assim, $v=(0,1,1)$ forma uma base do auto-espaço de 4.

Note que neste caso A não é semelhante a uma matriz diagonal, pois A tem somente dois autovalores independentes. Além disso, apenas das matrizes dos itens (i) e (ii) terem os mesmos polinômios característicos, elas não são matrizes semelhantes.

Exercício 4.1

1) Para cada matriz, encontre todos os autovalores e uma base para cada auto-espaço:

$$\text{(i) } A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii) } C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando possível, encontre matrizes invertíveis $P_1, P_2 \text{ e } P_3$ tais que $P_1^{-1}AP_1, P_2^{-1}BP_2 \text{ e } P_3^{-1}CP_3$ são diagonais.

2) Para cada um dos seguintes operadores $T: IR^3 \to IR^3$ encontre todos os autovalores e uma base para cada auto-espaço:

(i) $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$;

(ii) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$;

(iii) $T(x, y, z) = (x - z, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$.

Respostas

(i) $\lambda_1 = 2; u = (1,-1,0), v = (1,0,-1)$

$\lambda_2 = 6; w = (1,2,1)$

(ii) $\lambda_1 = 3; u = (1,1,0), v = (1,0,1)$

$\lambda_2 = 1; w = (2,-1,1)$

(iii) $\lambda_1 = 1; u = (1,0,0), v = (0,0,1)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2)

(i) $\lambda_1 = 1; u = (1,0,0)$

$\lambda_2 = 4; v = (1,1,2)$

(ii) $\lambda_1 = 1; u = (1,0,0)\ v = (1,0,1)$. Não há outros autovalors em IR

(iii) $\lambda_1 = 1; u = (1,0,-1)$

$\lambda_2 = 2; v = (2,-2,-1)$

$\lambda_3 = 3; w = (1,-2,-1)$

Definição 4.4

O raio espectral $\rho(A)$ de uma matriz A é definido por

$$\rho(A) = \text{máx}|\lambda|,$$

onde λ é um autovalor de A.

Notação

$C_{m\times n} \rightarrow$ espaço das matrizes $m\times n$ complexas
$IR_{m\times n} \rightarrow$ espaço das matrizes $m\times n$ reais

$$IR_{m\times n} \subset C_{m\times n}$$

Definição 4.5

Uma norma matricial sobre o conjunto de todas as matrizes $n\times n$ é uma função de valor real definida nesse conjunto e que satisfaz, para todas as matrizes A e B e todos os reais α:

$(i)\ \|A\| \geq 0$

$(ii)\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$(iii)\ \|\alpha\, A\| = |\alpha|\, \|A\|$

$(iv)\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$(v)\ \|A\, B\| \leq \|A\|\, \|B\|$

Definição 4.6

Uma norma de vetor em IR^n é uma função de IR^n em IR com as seguintes propriedades:

$(i)\ \|x\| \geq 0\ \forall\ x \in IR^n$

$(ii)\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(iii)\ \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|\ \forall\ \alpha \in IR \text{ e } x \in IR^n$

$(iii)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall\ x, y \in IR^n$

Notação

$$x \in IR^n \rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Definição 4.7

As normas N_2 e N_∞ para o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são definidas, respectivamente, por

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

Exemplo 4.4

$$x = (-1, 1, -2) \in IR^3$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2$$

Definição 4.8

A distância entre as matrizes A e B de $IR_{n \times n}$ é dada por $\|A - B\|$.

Teorema 4.3

Se $\|x\|$ é uma norma vetorial de IR^n, então

$$\|A\| = \max_{\|x\| = 1} \|Ax\|$$

é uma norma matricial. Ela se chama norma matricial natural.

As normas matriciais que consideraremos aqui tem a forma

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty ,$$

(norma N_∞) e

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|AX\|_2 ,$$

(norma N_2).

Teorema 4.4

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$,

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| .$$

Teorema 4.5

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$,

(i) $\|A\|_2 = (\rho\,(A^t A))^{1/2}$

(ii) $\rho(A) \le \|A\|$, para qualquer norma natural

Exemplo 4.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left|a_{1j}\right| = |1| + |1| = 2 \qquad \sum_{j=1}^{3} \left|a_{3j}\right| = |-1| + |1| + |2| = 4$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left|a_{2j}\right| = |1| + |2| + |1| = 4$$

$$\|A\|_{\infty} = \text{máx}\{2,4,4\} = 4$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^t A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda) - 16]$$

$$= -2[2(5-\lambda) + 4] - 1[8 + 6 - \lambda]$$

$$= (3-\lambda)[30 - 6\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 16] - 2[10 - 2\lambda + 4] - [14 - \lambda]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 14) - 2(14 - 2\lambda\lambda - 14 + \lambda$$

$$= 3\lambda^2 - 33\lambda - \lambda^3 + 11\lambda^2 - 14\lambda + 4\lambda + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42)$$

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 7 - \sqrt{7} \text{ ou } \lambda = 7 + \sqrt{7}$$

$$\rho(A^t A) = \text{máx}\{0, 7 - \sqrt{7}, 7 + \sqrt{7}\} = 7 + \sqrt{7}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{7 + \sqrt{7}} \cong 3{,}106$$

Definição 4.9

Chamamos convergente a uma matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ se

$$\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = 0,$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$ e $j = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 4.6

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \ldots \quad A^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 0 \,.$$

A é uma matriz convergente.

Teorema 4.6

As seguintes informações são equivalentes:

(i) A é uma matriz convergente;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\| = 0$;

(iii) $\rho(A) < 1$;

(iv) $\lim\limits_{n \to \infty} A^n x = 0$, para todo x

Exercício 4.2

1) Encontre o raio espectral para cada matriz que segue:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Resposta

a) $\rho(A) = 3$ c) $\rho(C) = 5$

b) $\rho(B) = 7$ d) $\rho(D) = 4$

2) Quais das matrizes que seguem são convergentes?

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 16 & 1/2 \end{bmatrix}$

Resposta: A_1

3) Encontre a norma $\|M\|_2$ para as matrizes do exercício 1.

Resposta:

a) 3 c) 5.2035

b) 8.2243 d) 5.6012

Definição 4.10

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é chamado de ortogonais se $v_i^t \cdot v_j = 0$, para todo $i \neq j$. Se, além disso, $v_i^t \cdot v_j = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, então o conjunto é ortonormal.

Teorema 4.7

Um conjunto ortogonal de vetores diferentes de zero é linearmente independente.

Definição 4.11

Diz-se que um matriz A é ortogonal se $A^{-1} = A^t$.

Exemplo 4.7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como também $A^t \cdot A = I$, $A^t = A^{-1}$.

Definição 4.12

Duas matrizes A e B são chamadas de matrizes similares se existe uma matriz C não singular tal que $A = C^{-1}BC$.

A característica importante das matrizes similares é que elas têm os mesmos autovalores.

Teorema 4.8

Suponha A e B como sendo matrizes similares, com $A = C^{-1}BC$ e λ um autovalor de A com autovetor x. Então, λ é um autovalor de B com autovetor associado Cx.

Demonstração

Suponha que x seja tal que

$$C^{-1}BC \cdot x = Ax = \lambda x.$$

Multiplicando o lado esquerdo da equação por C, temos

$$BCx = \lambda Cx.$$

Como $x \neq 0$ e C é não singular, $Cx \neq 0$. Portanto, Cx é um autovetor de B, correspondente a seu autovalor λ.

Teorema 4.9 (Schur)

Seja A uma matriz arbitrária. Existe uma matriz não singular U tal que

$$T = U^{-1}AU,$$

onde T é uma matriz triangular superior, cujas entradas diagonais consistem nos autovalores de A.

A matriz U satisfaz a condição $\|U\,x\|_2 = \|x\|_2$ para qualquer vetor x. As matrizes com essa propriedade são chamadas de matrizes unitárias.

Observação

Muitas vezes U é difícil de ser determinada.

Teorema 4.10

Se A é uma matriz simétrica e D é uma matriz diagonal cujas entradas diagonais são os autovalores de A, então existe uma matriz ortogonal B tal que $D = B^{-1} \cdot A \cdot B = B^{t} \cdot A \cdot B$.

Teorema 4.11 (Corolário)

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existem n autovetores de A que formam um conjunto ortonormal, e os autovalores de A são números reais.

Demonstração

Sejam $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ uma matriz simétrica, $D = \left[d_{ij}\right]_{n \times n}$ uma matriz diagonal e $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times n}$ uma matriz ortogonal tais que

$$D = B^{-1}AB$$

Isso implica que

$$AB = BD.$$

Seja $1 \le i \le n$ e $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{ni})^t$ a i-ésima coluna de B. Então,

$$Av_i = d_{ii}v_i,$$

e d_{ii} é um autovalor de A com autovetor v_i, a i-ésima coluna de B. Como as colunas de B são ortonormais, os autovetores de A são ortonormais.

Multiplicando o lado esquerdo dessa equação por v_i^t, obteremos

$$v_i^t A v_i = d_{ii} v_i^t v_i .$$

Como $v_i^t A v_i$ e $v_i^t v_i$ são números reais, $v_i^t v_i = 1$, o autovalor $d_{ii} = v_i^t A v_i$ é um número real, para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Teorema 4.12

Uma matriz A é definida positiva se e somente se todos os autovalores de A são positivos.

Teorema 4.13 (círculo de Gerschgorin)

Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ e que R_i indique o círculo no plano complexo com centro a_{ii} e raio

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| ;$$

isto é,

$$R_i = \left\{ z \in C ; |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\} ,$$

onde C indica o plano complexo. Os autovalores de A estão contidos em $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. Além disso, a união de qualquer k desses círculos que não interseccionam o $(n-k)$ restante contém precisamente k (contando as multiplicidades) dos autovalores.

Exemplo 4.8

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Os círculos no teorema de Gerschgorin são

$$R_1 = \{x \in C \| z - 4| \le 2\}$$
$$R_2 = \{x \in C \| z - 2| \le 1\}$$
$$R_3 = \{x \in C \| z - 9| \le 2\}$$

Como R_1 e R_2 estão separados de R_3, há precisamente dois autovalores em $R_1 \cup R_2$ e um em R_3.

ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 se encontram na união dos discos:

$$|\lambda - 3| \le 1$$
$$|\lambda - 2| \le 1$$
$$|\lambda - 4| \le 1$$

Demonstração

Suponha que λ seja um autovalor de A com autovetor associado x, onde $\|x\|_\infty = 1$. Como $Ax = \lambda x$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i ,$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Se k é um número inteiro com $|x_k| = \|x\|_\infty = 1$, essa equação, com $i = k$, implica que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k .$$

Dessa forma,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j = \lambda\, x_k - a_{kk} x_k = (\lambda - a_{kk}) x_k$$

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_j| \,.$$

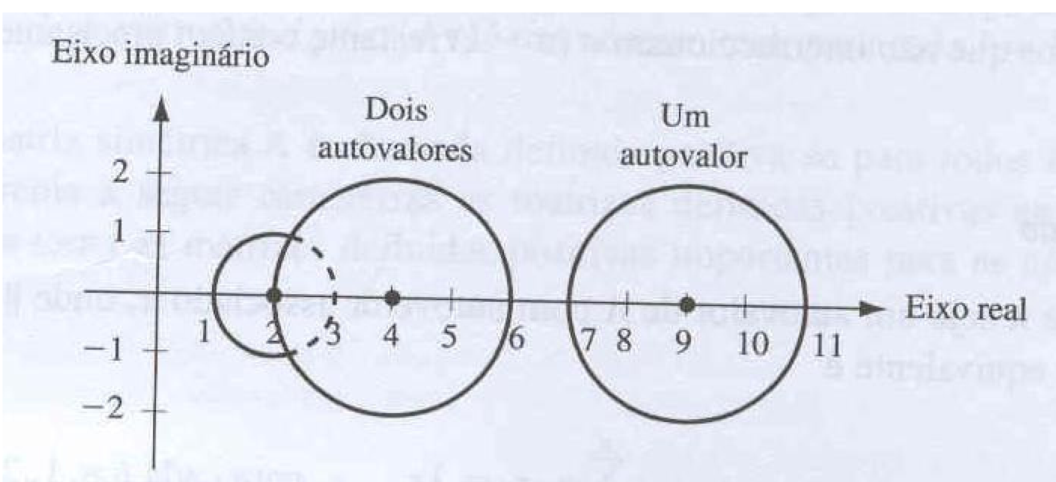
Como $|x_j| \leq |x_k| = 1$, para todo $j = 1, 2, ..., n$,

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \,.$$

Assim, $\lambda \in R_k$, o que prova a parte do teorema.

Observação

Construímos os círculos que têm por centro os elementos da diagonal de A e, respectivamente, por raio, a soma dos demais elementos fora da diagonal, na correspondente linha. A união desses círculos contém todos os autovalores de A, que é chamada o espectro de A, denotado $\sigma(A)$.



O método da Potência

Definição 4.12

O método da potência é uma técnica iterativa para determinar o autovalor que tem o maior módulo. Ele produz não só um autovalor, mas também um autovetor associado.

Hipóteses:

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$
- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são autovetores independentes associados $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$

Se x é um vetor de IR^n, o fato de que $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}\}$ é linearmente independente implica que existem constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ com

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v^{(j)} \quad . \tag{4.1}$$

Multiplicando ambos os lados de (4.1) por $A, A^2, \ldots, A^k$, temos

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j v^{(j)} \\ A^2 x &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 v^{(j)} \\ &\vdots \\ A^k x &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k v^{(j)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Podemos reescrever (4.2) como

$$A^k x = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k v^{(j)} \quad . \tag{4.3}$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, para todo $j = 2, 3, ..., n$,

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k} \right)^k = 0$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} A^k x = \lim_{k \to +\infty} \lambda_1^k \beta_1 v^{(1)} . \qquad (4.4)$$

Essa seqüência converge para zero se $|\lambda_1| < 1$ e diverge se $|\lambda_1| > 1$.

As potências de $A^k x$ devem ser escaladas de modo a assegurar que os limites em (4.4) sejam finitos e diferentes de zero. A escala começa escolhendo-se x para ser um vetor unitário $x^{(0)}$ relativo a $\|\cdot\|_\infty$ e escolhendo-se o componente $x_{c0}^{(0)}$ de $x^{(0)}$ com

$$x_{c0}^{(0)} = 1 = \left\| x^{(0)} \right\|_\infty .$$

Seja $y^{(1)} = Ax^{(0)}$ e definimos $\mu^{(1)} = y_{c1}^{(1)}$. Temos então que

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} = y_{c0}^{(1)} = \frac{y_{c0}^{(1)}}{y_{c0}^{(0)}} &= \frac{\beta_1 \lambda_1 v_{c0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{c0}^{(j)}}{\beta_1 v_{c0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{c0}^{(j)}} \\ &= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{c0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1) v_{c0}^{(j)}}{\beta_1 v_{c0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v_{c0}^{(j)}} \right] \end{aligned} . \qquad (4.5)$$

Seja c_1 o menor número inteiro tal que

$$y_{c1}^{(1)} = \left\| y^{(1)} \right\|_{\infty},$$

e

$$x^{(1)} = \frac{1}{y_{c1}^{(1)}} y^{(1)} = \frac{1}{y_{c1}^{(1)}} Ax^{(0)} . \tag{4.6}$$

Temos então que

$$x_{p1}^{(1)} = 1 = \left\| x^{(1)} \right\|_{\infty} .$$

Agora vamos definir

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{1}{y_{c1}^{(1)}} A^2 x^{(0)} . \tag{4.7}$$

$$\mu^{(2)} = y_{c1}^{(2)} = \frac{y_{c1}^{(2)}}{y_{c1}^{(2)}} = \frac{\left(\beta_1 \lambda_1^2 v_{c1}^{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j^2 v_{c1}^{(j)} \right) \Big/ y_{c1}^{(1)}}{\left(\beta_1 \lambda_1 v_{c1}^{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{c1}^{(j)} \right) \Big/ y_{c1}^{(1)}}$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{c1}^{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1)^2 v_{c1}^{(j)}}{\beta_1 v_{c1}^{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1) v_{c1}^{(j)}} \right] . \tag{4.8}$$

Seja c_2 o menor valor inteiro com

$$\left| y_{c2}^{(2)} \right| = \left\| y^{(2)} \right\|_{\infty},$$

e

$$x^{(2)} = \frac{1}{y_{c2}^{(2)}} y^{(2)} = \frac{1}{y_{c2}^{(2)}} A^2 x^{(1)} . \tag{4.9}$$

De forma análoga, definiremos seqüência de vetores $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}$ e $\left\{y^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, e uma seqüência de escalares $\left\{\mu^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ por

$$y^{(m)} = Ax^{(m-1)} \tag{4.10}$$

$$\mu^{(m)} = y_{c_{(m-1)}}^{(m)} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{c_{(m-1)}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1)^m \beta_j v_{c_{(m-1)}}^{(j)}}{\beta_1 v_{c_{(m-1)}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j / \lambda_1)^{m-1} \beta_j v_{c_{(m-1)}}^{(j)}} \right] \tag{4.11}$$

e

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{y_{c_m}^{(m)}} = \frac{A^m x^{(0)}}{\prod_{k=1}^{m} y_{c_k}^{(k)}} , \tag{4.12}$$

onde, a cada passo, c_m é utilizado para representar o menor valor interno para o qual

$$\left| y_{cm}^{(m)} \right| = \left\| y^{(m)} \right\|_{\infty} .$$

Exemplo 4.9

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 2$

Seja

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$y^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\left\| y^{(1)} \right\|_\infty = 10, \mu^{(1)} = y_1^{(1)} = 10, x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 7{,}2 \\ 5{,}4 \\ -0{,}8 \end{bmatrix},$$

$$\left\| y^{(2)} \right\|_\infty = 7{,}2\ , \mu^{(2)} = y_1^{(2)} = 7{,}2\ , x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{7{,}2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}111 \end{bmatrix}.$$

$$y^{(3)} = Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} 6{,}5 \\ 4{,}75 \\ -1{,}227220 \end{bmatrix}$$

$$\left\| y^{(3)} \right\|_\infty = 6{,}5 \;, \mu^{(3)} = y_1^{(3)} = 6{,}5 \;\;, x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{6{,}5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}730769 \\ -0{,}188803 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$y^{(12)} = Ax^{(11)} = \begin{bmatrix} 6{,}000837 \\ 4{,}286454 \\ -1{,}499579 \end{bmatrix}$$

$$\left\| y^{(12)} \right\|_\infty = 6{,}000837 \;, \mu^{(12)} = y_1^{(12)} = 6{,}000837$$

$$x^{(12)} = \frac{1}{6{,}000837} y^{(12)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}714316 \\ -0{,}249895 \end{bmatrix}$$

Valores corretos:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}714286 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 6$$

Métodos Δ^2 de Aitken

Definição 4.12

É uma técnica que pode ser utilizada para acelerar a convergência de uma seqüência que é linearmente convergente.

Supondo que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ seja uma seqüência convergente com limite p. construiremos uma seqüência $\left\{\hat{p}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ que convirja mais rapidamente para p do que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. Admitiremos que

$$p_n - p,\ p_{n+1} - p \text{ e } p_{n+2} - p$$

tenham o mesmo sinal e que n seja grande. Temos então que

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p)$$

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1} + p^2 \approx p_{n+2}p_n - (p_n + p_{n+2}) + p + p^2$$

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})p \approx p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2$$

$$p \approx \frac{p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \quad . \qquad (4.13)$$

Somando e subtraindo os termos p_n^2 e $2p_n p_{n+1}$ no numerador, e agrupando apropriadamente os termos, vem que

$$p \approx \frac{p_n^2 + 2p_n p_{n+1} + p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2 - p_n^2 - 2p_n + p_{n+1}}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

$$= \frac{(p_{n+2}p_n - 2p_n p_{n+1} + p_n^2) - (p_n^2 - 2p_n p_{n+1} + p_{n+1}^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

$$= p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \quad . \qquad (4.14)$$

Para o exemplo anterior,

$$\hat{\mu}^{(m)} = \mu^{(m)} - \frac{(\mu^{(m+1)} - \mu^{(m)})^2}{\mu^{(m+2)} - 2\mu^{(m+1)} + \mu^{(m)}} \quad . \tag{4.15}$$

Veja a comparação com a tabela que segue.

m	μ	$\hat{\mu}^{(m)}$
0		
1	10	6,266667
2	7,2	6,062473
3	6,5	6,015054
4	6,230769	6,004202
5	6,111000	6,000855
6	6,054546	6,000240
7	6,027027	6,000058
8	6,013453	6,000017
9	6,006711	6,000003
10	6,003352	6,000000
11	6,001675	
12	6,000875	

$$x^{(10)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}714405 \\ -0{,}249579 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.3

1 – Faça um programa que leia uma matriz e determine um dos seus autovalores e o autovetor correspondente pelo método das potências.

2 – Insira no programa do método das potências o método de Aitken.

Algoritmo

Entrada:

$A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$; vetor x ; TOL (ε); ITMAX (N)

Passo 1: $k = 1$

Passo 2: Encontrar o menor inteiro p, $1 \le p \le n$, $\left| x_p \right| = \| x \|_\infty$

Passo 3: $x = \dfrac{x}{x_p}$

Passo 4: Enquanto $k \le n$, siga os passos 5 → 11

Passo 5: $y = Ax$

Passo 6: $\mu = y_p$

Passo 7: Encontrar o menor inteiro p, $1 \le p \le n$, $\left| y_p \right| = \| y \|_\infty$

Passo 8: Se $y_p = 0$, então SAÍDA: x (autovetor);

Saída: A tem um autovalor 0, seleciona um outro vetor x e reinicia.

PARE

Passo 9: ERRO = $\left\| x - (y / y_p) \right\|_\infty$

$x = y / y_p$

Passo 10: Se ERRO < ε , então SAÍDA → μ, x

PARE

Passo 11: $k = k + 1$

Passo 12: SAÍDA → “O número máximo de iterações (N) foi excedido”

PARE

Implementação do procedimento Δ^2 de Aitken no algoritmo

Passo 1: $k = 1$

$\mu_0 = 0,\ \mu_1 = 0$

Passo 6:

$$\mu = y_p$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\mu - 2\mu_1 + \mu_0}$$

Passo 10: Se ERRO < ε e $k \geq 4$, então, SAÍDA → μ, x.
PARE

Passo11: $k = k + 1$

$\mu_0 = \mu_1,\ \mu_1 = \mu.$

Maple

Função → E i g e n v a l s

Calcula os autovalores e, de maneira opcional, os autovetores de uma matriz.

>with (l i n a l g);
>A: = matrix (3,3,[1,0,2,0,1,-1,-1,1,1]);
>e v a l f (E i g e n v a l s (A));

[1,000000000 + 1,732050807 I, 1,000000000 – 1,732050807 I, 1,000000000]

>e v a l f (E i g e n v a l s (A, B));

Observação:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}\,i,\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}\,i$