Análisis por ecuaciones en diferencia

Justificación:

- La ecuación de la convolución sugiere la forma de realizar cualquier sistema discreto.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Para un sistema **FIR**, la realización a través de la convolución implica un número finito de sumadores, de multiplicadores y de posiciones de memoria.

- Una implementación práctica **IIR** basada en la convolución es imposible, ya que se requeriría un número infinito de componentes.

- La descripción de sistemas **IIR** con ecuaciones de diferencia, permite la realización de un familia importante de sistemas IIR de forma práctica y eficiente, desde un punto de vista computacional.

Sistemas LTI Caracterizados por Ecuaciones de Diferencia con Coeficientes Constantes (edcc)

Ecuación de diferencia

- Descripción matemática de la relación entrada/salida de un sistema discreto.

- Forma general de la edcc para un sistema recursivo:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k)$$

donde, N orden de la ecuación o del sistema; *y(n-k)*condiciones iniciales.

- La respuesta *y(n)* es el resultado de la condición inicial del sistema y de la repuesta del sistema a la señal de entrada.

Respuesta en estado nulo (forzada)

- Respuesta del sistema a la entrada x(n) con condiciones iniciales iguales a cero.

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k)$$

Respuesta con entrada nula (natural)

- Respuesta del sistema con condiciones iniciales diferentes de cero y entrada x (n)=0.

$$y_{zi}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k)$$

Linealidad

- Un sistema es lineal si satisface los tres requisitos siguientes:
  - $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$
  - Si el principio de superposición se aplica a la respuesta en estado nulo
  - Si el principio de superposición se aplica a la respuesta a la entrada nula

Invarianza en el tiempo

- Un sistema recursivo descrito por una ecuación en diferencia lineal de *coeficientes constantes* es lineal e invariante en el tiempo.

Estabilidad

- Un sistema es estable si y sólo si para toda entrada acotada y toda condición inicial acotada la respuesta total del sistema es acotada.

Observación

- Los sistemas descritos por edcc son una subclase de sistemas recursivos y no recursivos.

Solución de Ecuaciones de Diferencia con Coeficientes Constantes

Objetivo

- Encontrar una forma explícita de la salida *y(n)* de un sistema LTI dada una ecuación de diferencia con coeficientes constantes lineal como relación de entrada/salida del mismo.
- Existen dos técnicas principales
  - Método directo : Solución homogénea más particular
  - Método indirecto : Transformada z

Método directo

- La solución *y(n)* es dada por la suma de dos partes:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

donde, $y_h(n)$ *solución homogénea;* $y_p(n)$ solución particular

- La ecuación general puede escribirse como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad con\ a_0 \equiv 1 \quad y \quad n \geq 0$$

Solución homogénea de la ecuación de diferencia

Procedimiento

- Considerar x(n)=0, por lo que se obtiene: $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

- Suponer que la solución homogénea $y_h(n)$ es exponencial, es decir: $$y_h(n) = \lambda^n$$

- Sustituir $y_h(n)$ en la ecuación anterior y formar el *polinomio característico* del sistema.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0$$

- Calcular las N raíces λ del polinomio característico.

- Expresar la solución de $y_h(n)$ como:
  - Sin raices repetidas: $$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots C_N\lambda_N^n$$
  - Con raices repetidas:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \ldots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + \ldots. + C_{N-1}\lambda_{N-1}^n + C_N\lambda_N^n$$

- Determinar los coeficientes de ponderación C_i a partir de las condiciones iniciales.

- **Observación:**
  Se puede utilizar la **solución homogénea** para obtener la respuesta a la entrada nula del sistema, $y_{zi}(n)$.

- **Ejemplo 1: Determine el orden y la respuesta $y_h(n)$ del siguiente sistema:**

$$\mathbf{y(n)+a_1 y\,(n-1)= x(n)} \qquad \mathbf{[ec.1]}$$

  - *Orden* :1   *Solución tentativa:* $y_h\,(n)=\lambda^n$ con $x(n)=0$

    entonces, $\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1}=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^{n-1}(\lambda + a_1)=0 \quad \rightarrow \lambda=-a_1$

    Luego $\mathbf{y_h(n)= C\,\lambda^n= C(-a_1)^n}$ **[*ec*.2]**

- **Ejemplo 2: Determine la respuesta a la entrada nula, $y_{zi}(n)$, del sistema anterior.**
  - De [*ec*.1] con $x(n)=0$ y $n=0$, $y(0)=-a_1 y\,(-1)$
  - De [*ec*.2] con $x(n)=0$ y $n=0$, $y_h(0)= C$
  - Igualando los dos resultados anteriores: $C=-a_1 y(-1)$
  - Reemplazando la expresión de C en la solución homogénea: $y_{zi}(n)= (-a_1)^{n+1}\, y(-1)$

- **Ejemplo 3:** Determine la repuesta a la entrada nula del sistema descrito por la ecuación de diferencia homogénea de segundo orden:

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=0 \qquad \text{[ec.1]}$$

- **Solución**: determinar la solución homogénea
  - Considerando: $y_h(n)= \lambda^n$ [ec.2]
  - Reemplazando [ec.2] en [ec.1] se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^n-3\lambda^{n-1}-4\lambda^{n-2}=0$$

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2-3\lambda-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=-1, \quad \lambda_2=4.$$

Por lo que la solución homogénea es de la forma:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

$$= C_1(-1)^n + C_2(4)^n \qquad \text{[ec.3]}$$

  - La **respuesta del sistema a la entrada nula** se puede obtener a partir de $\mathbf{y_h(n)}$ evaluando las constantes en [ec.3], dadas las condiciones y(-1), y(-2).

De [ec.1] $\Rightarrow$ $y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1)$$

$$= 13y(-1) + 12y(-2)$$

De [ec.3] $\Rightarrow$ $y(0) = C_1 + C_2$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2$$

- Igualando estos dos conjuntos de relaciones, resulta

$$\begin{aligned} C_1 + \quad C_2 &= 3y(-1) + 4y(-2) \\ -C_1 + 4C_2 &= 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned}$$

- De donde

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2) \\ C_2 &= \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{zi}(n) = \left[-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)\right](-1)^n + \left[\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)\right]4^n \qquad n \geq 0$$

Solución particular de la ecuación de diferencia

Procedimiento

- Se considera que la solución particular $\boldsymbol{y_p(n)}$ es de la misma forma que la señal de entrada $\boldsymbol{x(n)}$ escalada por una constante **K**:
- En caso que la solución homogénea $y_h(n)$ presente en algunos de sus términos la misma forma de *x(n)*, entonces la solución particular se trata de igual forma que el caso para raíces múltiples.
- Determinar los factores de escala **K** a partir de la ecuación de diferencia para valores de **n ≥ orden del sistema.**

Ejemplo: Detemine el orden y la solución particular de la ecuación

$$y(n)+a_1\,y(n-1)=x(n) \quad \text{con} \quad x(n)=u(n)$$

- Orden: 1. Solución tentativa : $y_p(n)=K\,u(n)$
  - Evaluando la ecuación de diferencia para n ≥ 1, (ningún término se anula)

$$K+a_1K=1,\ de \quad donde \quad K=\frac{1}{1+a_1}$$

$$\text{Luego:} \qquad y_p(n)=\frac{1}{1+a_1}u(n)$$

- **Ejemplo:** Derminar la solución particular de la ecuación de diferencia

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

Cuando la entrada $x(n) = 2^n u(n)$

- **Solución:**
  - Consideración: $y_p(n) = K\,2^n\,u(n)$
  - Al sustituir, se obtiene:

$$K2^n u(n) = \frac{5}{6}K\;2^{n-1}u(n-1) - \frac{1}{6}K2^{n-2}u(n-2) + 2^n u(n)$$

  - Para determinar el valor de K, se evalúa para $n \geq 2$ donde ningún término se anula

$$4K = \frac{5}{6}(2K) - \frac{1}{6}K + 4$$

$$\Rightarrow K = \frac{8}{5}$$

  - La solución particular es: $$y_p(n) = \frac{8}{5}2^n \qquad n \geq 0$$

Solución total de la ecuación de diferencia

- **Observación**

  - La propiedad de linealidad de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes permite obtener la solución total $\boldsymbol{y_t(n)}$ como:

$$y_t(n) = y_h + y_p(n)$$

  - La respuesta en estado nulo $\mathbf{y_{zs}(n)}$ puede obtenerse a partir de la solución total $y_t(n)$, conociendo $y_{zi}(n)$, ya que $y_{zs}(n)=y_t(n)-y_{zi}(n)$. *Y determinando las constantes Ci al evaluar* $\boldsymbol{y_t(n)}$ *con condiciones iniciales iguales a cero.*

- **Ejemplo 1:** Determine la solución total del sistema

  $y(n)+a_1\, y(n-1)=x(n)$ para $n\geq 0$, cuando $x(n)=u(n)$

  - De los ejemplos anteriores, se tiene:

$$y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n \qquad\qquad y_p(n) = \frac{1}{1+a_1}u(n)$$

  - Luego:

$$y_t(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}u(n) \qquad\qquad n \geq 0$$

  - donde C se determina para satisfacer la condición inicial $y(-1)$ al evaluar las dos expresiones para valores de n.

$$y_t(-1) = y(-1) = C(-a_1)^{-1} + \frac{1}{1+a_1}u(-1) \qquad \Rightarrow \quad C = y(-1)(-a_1)$$

Ejemplo 2.

- Calcular la respuesta en estado nulo $y_{zs}(n)$ *(Condiciones iniciales consideradas cero)* del sistema del ejemplo anterior, cuando $x(n)=u(n)$.

- Se tiene:

$$y(n)+a_1 y(n-1)=x(n) \qquad [ec.1]$$

$$y_t(n)=C(-a_1)^n+\frac{1}{1+a_1}u(n) \qquad n\geq 0 \quad [ec.2]$$

- Evaluando la [ec.1] para $y(-1)=0$ y n = 0, se obtiene, y (0)=1

- Evaluando [ec.2] para n=0, se obtiene $\quad y_t(0)=C+\frac{1}{1+a_1}$

- Igualando los dos resultados anteriores, $\quad C=\frac{a_1}{1+a_1}$

- Para obtener $y_{zs}(n)$, se reemplaza C en [ec.2],

$$y_{zs}(n)=\frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n\geq 0$$

◆ **Ejemplo 3:** Calcular la solución total que incluya la respuesta en estado nulo y la respuesta a la entrada nula del sistema $y(-1) \neq 0$, con $x(n)= u(n)$.

- **Sistema:** $y(n) + a_1\, y(n-1) = x(n)$ [ec.1]

$$n = 0 \Rightarrow \quad y(0) + a_1 y(-1) = 1$$
$$y(0) = -a_1 y(-1) + 1$$

- **Solución total:**

$$y(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1} \qquad n \geq 0 \qquad \text{[ec.2]}$$

$$n = 0 \;\Rightarrow\; \quad y(0) = C + \frac{1}{1+a_1}$$

- **Igualando se obtiene** $C = -a_1 y(-1) + \dfrac{a_1}{1+a_1}$

- **Al sustituir este valor de C en** [ec.2]

$$y(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1) + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n \geq 0$$
$$= y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

Respuesta Impulsional de un Sistema Recursivo LTI

h(n) a partir de $y_{zs}(n)$

- La respuesta al impulso, *h(n)*, de un sistema LTI recursivo es igual a la respuesta de estado cero cuando la entrada $x(n)=\delta(n)$ (sistema inicialmente en reposo)
- La respuesta de estado cero, $y_{zs}(n)$ en términos de convolución se expresa como

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) \qquad n \geq 0$$

y cuando la entrada $x(n)=\delta(n)$ se obtiene,

$$y_{zs}(n) = h(n)$$

h(n) a partir de la ecuación de diferencias con coeficientes constantes

- La respuesta del sistema está dada por

$$y_{total}(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

Puesto que $x(n) = \delta(n)$, entonces $y_p(n)=0$ para n>0

- Por consiguiente, *h(n)* es determinada por la **solución de la ecuación homogénea** con los parámetros $\{C_k\}$ calculados a partir de las **condiciones iniciales impuestas por el impulso**.

Ejemplo: Determinar h(n)

- Ecuación de diferencias: $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \quad [1]$
- Solución homogénea: $y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \qquad n \geq 0 \qquad [2]$
- Puesto que *$x(n)=\delta(n)$*, entonces *$y_p(n)=0$* para *$n>0$*, y *con condiciones iniciales cero* la respuesta *$h(n)$* está dada por

$$h(n) = y_h(n)\Big|_{c_k} \rightarrow x(n) = \delta(n)$$

- Con n=0 y n=1, de [1] se obtiene,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 3y(0) + 2 = 5 \end{cases}$$

- Con n=0 y n=1, de [2] se obtiene,

$$\begin{cases} y_h(0) = C_1 + C_2 \\ y_h(1) = -C_1 + 4C_2 \end{cases}$$

- Resolviendo para C_1 y C_2, se llega a:

$$C_1 = -\frac{1}{5}, \qquad C_2 = \frac{6}{5}$$

- Por lo tanto, la respuesta impulsional es: $h(n) = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}(4)^n \right] u(n)$

Estabilidad de un Sistema IIR Causal a partir de la Ecuación de Diferencias

- La solución de la ecuación homogénea para un sistema lineal de orden N cuando las raíces λ_k del polinomio característico son distintas es:

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n$$

Por lo tanto, la respuesta impulsional presenta la misma forma, es decir,

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n$$

donde los C_k se determinan haciendo las condiciones iniciales iguales a cero.

- Dado que la estabilidad BIBO de un sistema exige que h(n) sea absolutamente sumable, se tiene para un sistema causal,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |C_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k^n|$$

Por lo tanto, para que el sistema sea sumable debe cumplirse que $|\lambda_k| < 1$.

- *Un sistema IIR causal descrito por una e.d.l.c.c. es estable si todas las raíces del polinomio característico son menores que 1 en valor absoluto.*
- *Condición igualmente válida para el caso de raíces con multiplicidad m.*

Implementación de Sistemas Discretos

Introducción

- Estructuras para la realización de sistemas LTI recursivos descritos mediante ecuaciones de diferencia de coeficientes constantes.
- Ecuación general,

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{K=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Forma directa I

- La ecuación anterior puede descomponerse en dos sub-sistemas en serie: Un sistema ***no recursivo*** y un ***sistema recursivo***:

$$v(n) = \sum_{K=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n)$$

- Requerimientos : M+N retardadores y N+M+1 multiplicaciones.

Forma directa II o Canónica

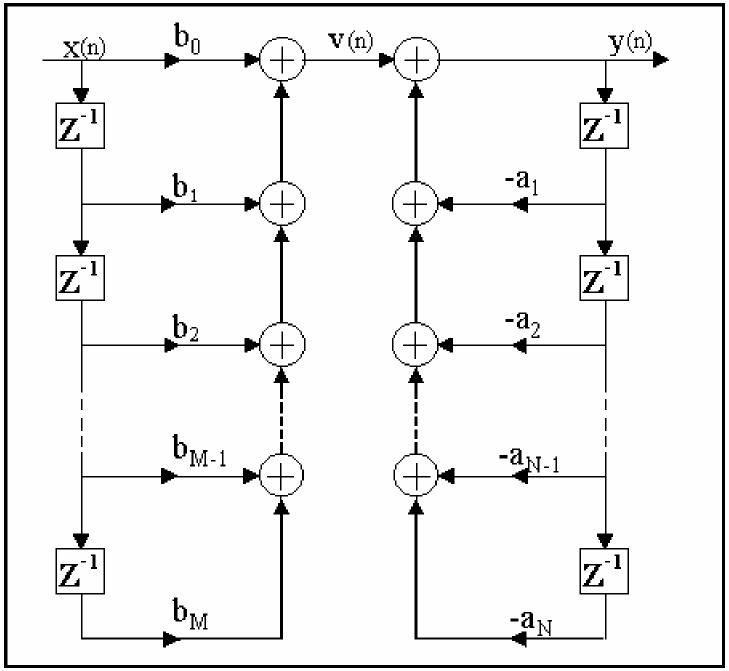
- Se obtiene invirtiendo el orden de los dos sub-sistemas de la forma I.

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n) \qquad y(n) = \sum_{K=0}^{M} b_k w(n-k)$$

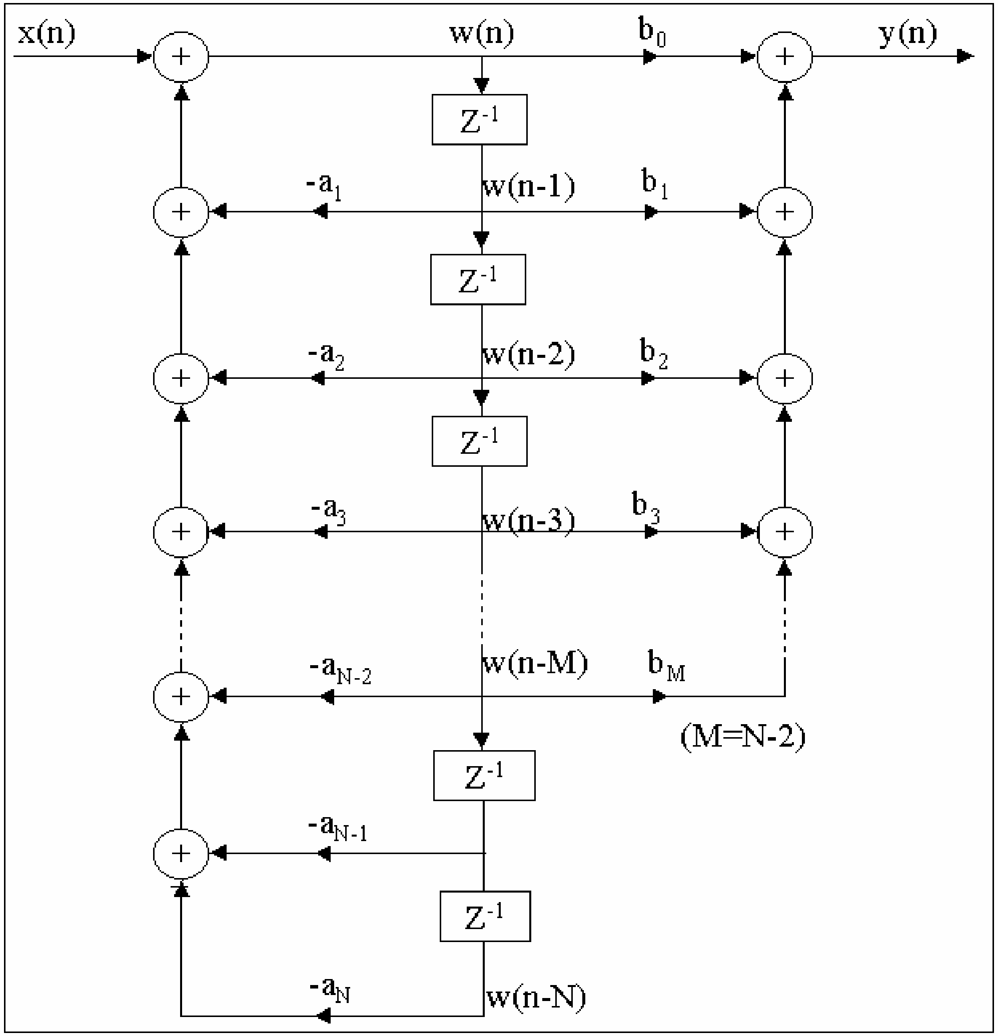
- Requerimientos: max{N,M} ratardadores y N+M+1 multiplicaciones.

Implementación de Sistemas Discretos

Forma Directa I



Forma Directa II



Ejemplo:

- Obtenga la realización en forma canónica I y II del sistema de primer orden:

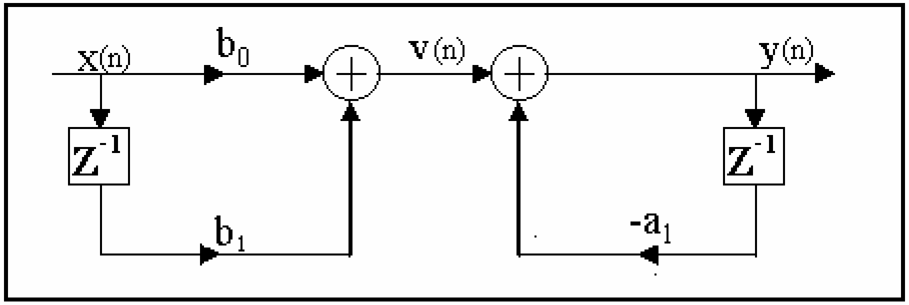
$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Solución:

- **Forma canónica I**

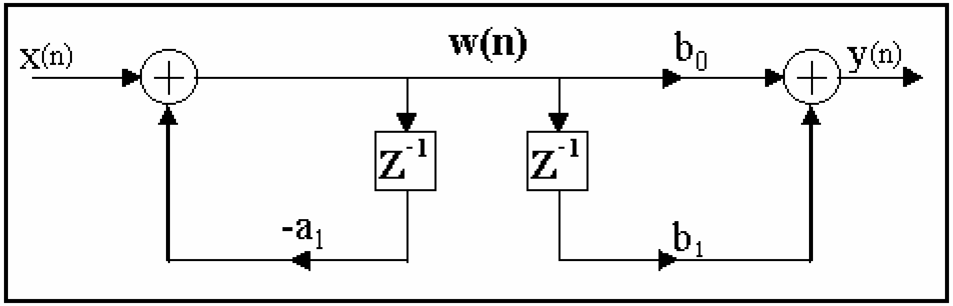
$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad \text{no recursivo}$$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \quad \text{recursivo}$$

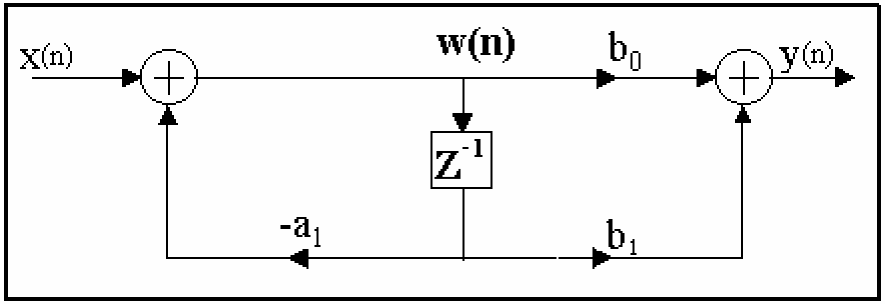


Forma canónica II

Se intercambia el orden de los sistemas recursivos y no recursivos:



$$\left\{\begin{aligned} w(n) &= -a_1 w(n-1) + x(n) \\ y(n) &= b_0 w(n) + b_1 w(n-1) \end{aligned}\right\}$$



Implementación de Sistemas FIR Recursivos y No Recursivos

Introducción

- Los sistemas FIR siempre pueden implementarse como sistemas no recursivos.
- Manipulando la ecuación de diferencia de un sistema FIR siempre es posible llegar a una implementación recursiva.

Ejemplo

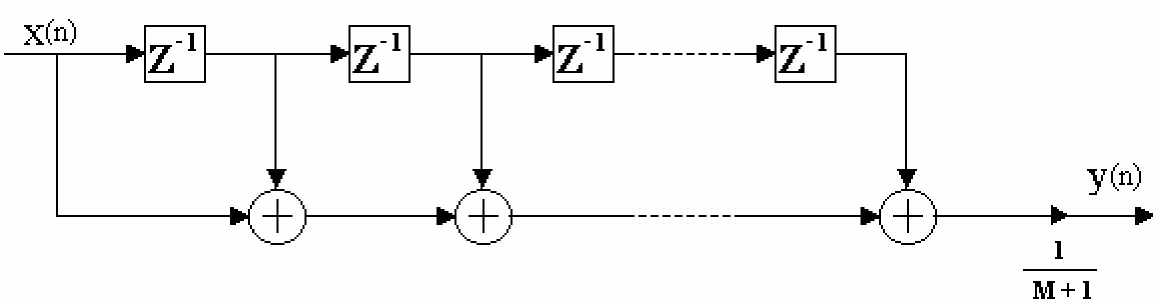
- Obtener la implementación no-recursiva y recursiva del siguiente sistema FIR,

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

- Evidentemente, *h(n)* está dado por

$$h(n) = \frac{1}{M+1} \qquad 0 \le n \le M$$

- **Implementación no recursiva:**



Implementación recursiva:

- Para obtener la forma recursiva, debe manipularse la ecuación del sistema, con lo que se obtiene:

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k) + \frac{1}{M+1}\left[x(n) - x(n-1-M)\right]$$

$$= y(n-1) + \frac{1}{M+1}\left[x(n) - x(n-1-M)\right]$$