La Transformada Z en sistemas LTI

Introducción

- La transformada Z es al análisis de señales y sistemas discretos LTI como la transformada de Laplace es al análisis de señales y sistemas contínuos LTI.
- La convolución de dos señales en el dominio del tiempo corresponde a una multiplicación de sus transformadas Z.
- La transformada z proporciona una manera de caracterizar sistemas LTI y sus respuestas a varias señales mediante la localización de sus polos y ceros.

La Transformada Z directa

- La transformada z de una señal discreta x(n) se define como la serie de potencias

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

donde z es una variable compleja.

- La relación entre x(n) y X(z) se indica mediante

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Región de convergencia (ROC)

- Dado que la transformada z es una serie infinita de potencias, ésta existe sólo para aquellos valores de z para los que la serie converge.
- La ROC de X(z) es el conjunto de todos los valores de z para los que X(z) es finita.
- Siempre que se determine una trasformada z debe inidicarse su ROC.

Ejemplo: encuentre la transformada z de las siguientes señales de duración finita.

- $x_1(n)=\{\underline{1},2,5,7,0,1\}$ ROC: plano z, excepto z=0
- $x_2(n)=\{1,2,\underline{5},7,0,1\}$ ROC: plano z, excepto z=0 y $z=\infty$
- $x_3\,(n)=\delta\,(n)$ ROC: plano z complejo

Observación

- La ROC de señales de ***duración finita*** es todo el plano z, excepto quizás z=0 y/o $z = \infty$.
- Desde el punto de vista matemático, la transformada z es una forma alternativa de representar una señal discreta.

Partes causales y anticausales de la ROC

- El problema de encontrar la ROC de X(z) es equivalente a **determinar el rango de valores de r** para los que la secuencia $x(n)\, r^{-n}$ es **absolutamente sumable**.

$$z = re^{j\theta} \Rightarrow \quad X(z)\Big|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

- La magnitud de X(z) está dada por,

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

- Reorganizando la sumatoria,

$$|X(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(-n) r^{n} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^{n}} \right|$$

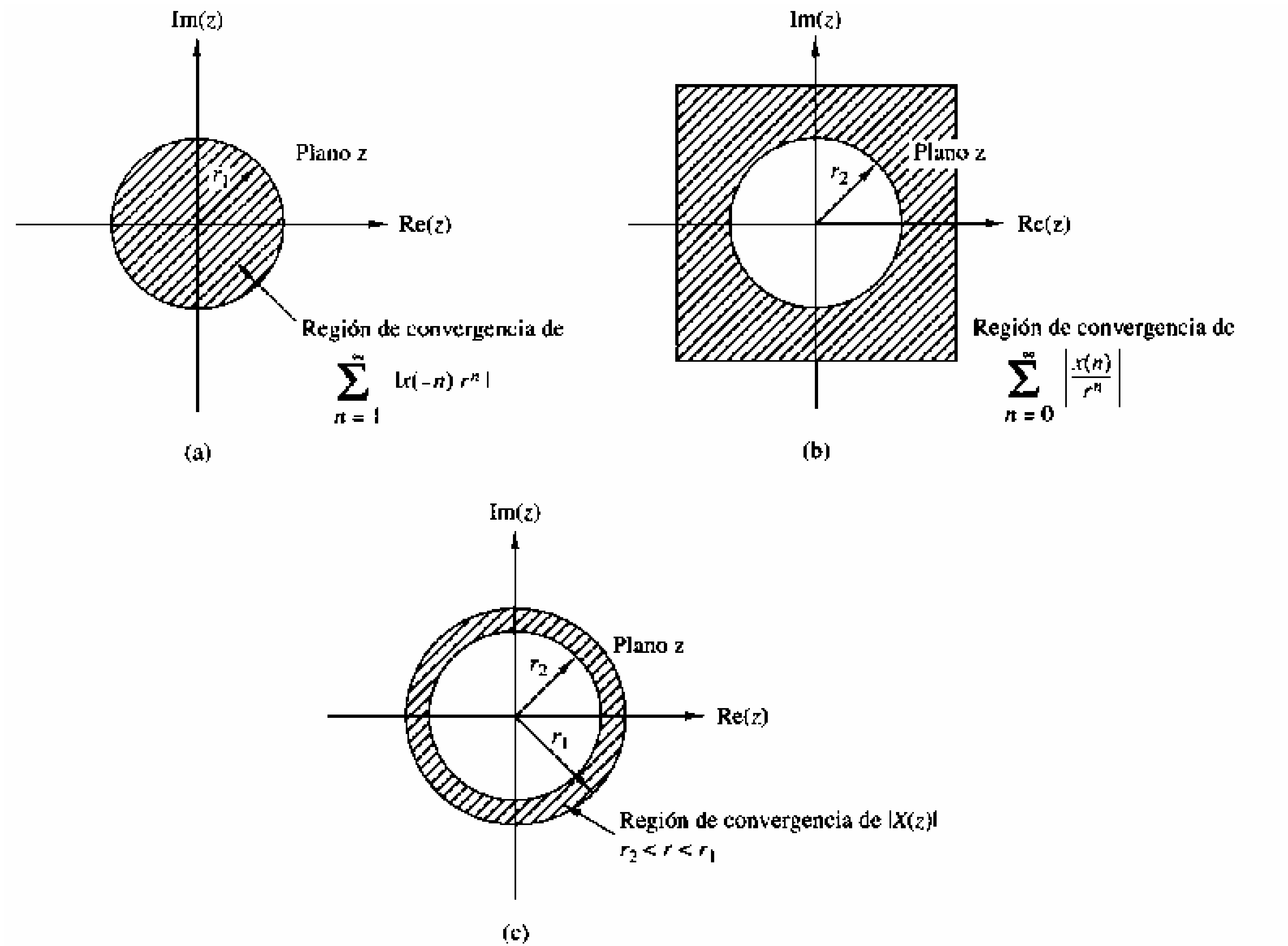
- Entonces, X(z) converge si,

  - **anticausal:** $\sum x(-n) r^{n} \leq \infty, \qquad 1 \leq n < \infty \qquad \Rightarrow r < r_1 < \infty$

  - **causal:** $\sum \frac{x(n)}{r^{n}} \leq \infty, \qquad 0 \leq n < \infty \qquad \Rightarrow r > r_2$

- **En general la ROC de X(z) es una región anular del plano z, tal que $r_2 < r < r_1$**

- **Si $r_2 > r_1$ ⌫ ROC no existe ⌫ X(z) no existe**



ROC de X(z) y sus correspondientes partes causales y anticausales

Ejemplo 1.

- Determine la transformada Z de la señal $x(n)=\alpha^n u(n)$

- Solución:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

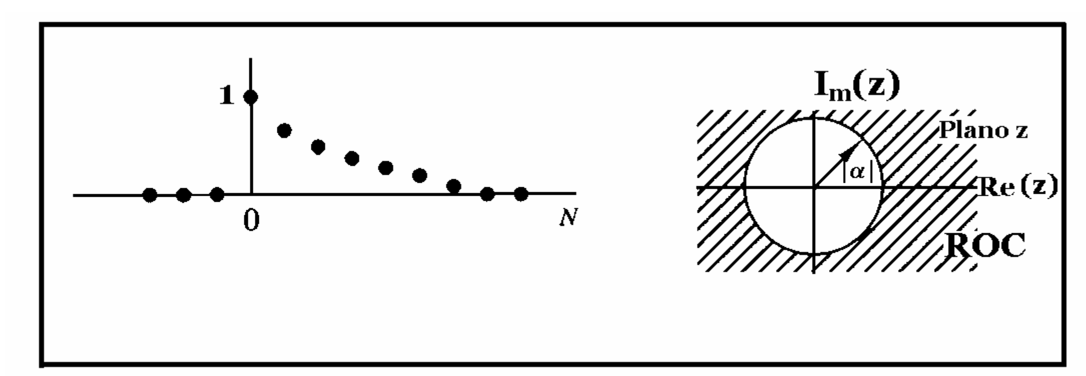
Si $|\alpha z^{-1}| < 1$ ó $|z| > |\alpha|$, esta serie converge a:

$$\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})}$$

Por lo tanto,

$$x(n) = \alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha Z^{-1}}$$

y la ROC $|z| > |\alpha|$



Ejemplo 2.

- Determine la transformada Z de la señal $x(n) = -\beta^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\beta^n & n \leq -1 \end{cases}$

- Solución: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\beta^n\right) z^{-n} = -\sum_{L=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^L$$

donde L = - n. Usando la serie,

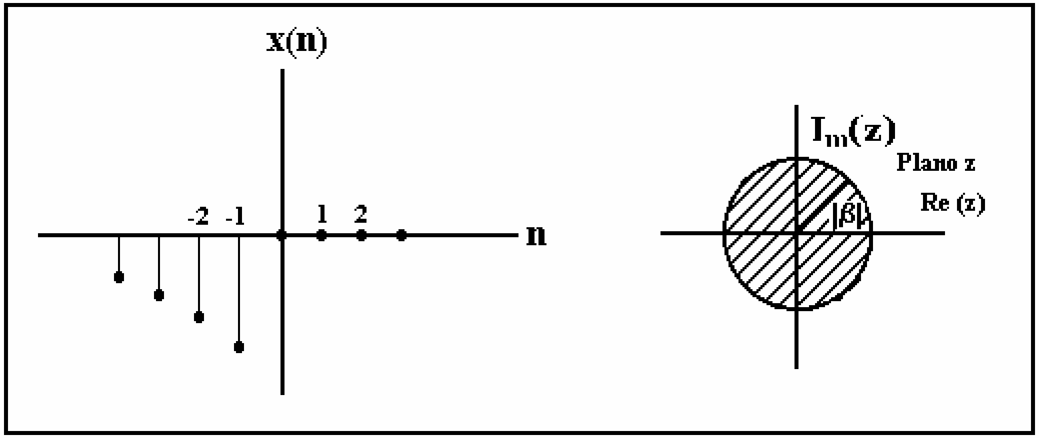
$$A + A^2 + A^3 + \ldots = A\left(1 + A + A^2 + \ldots\right) = \frac{A}{(1-A)}$$

cuando |A|<1, se tiene:

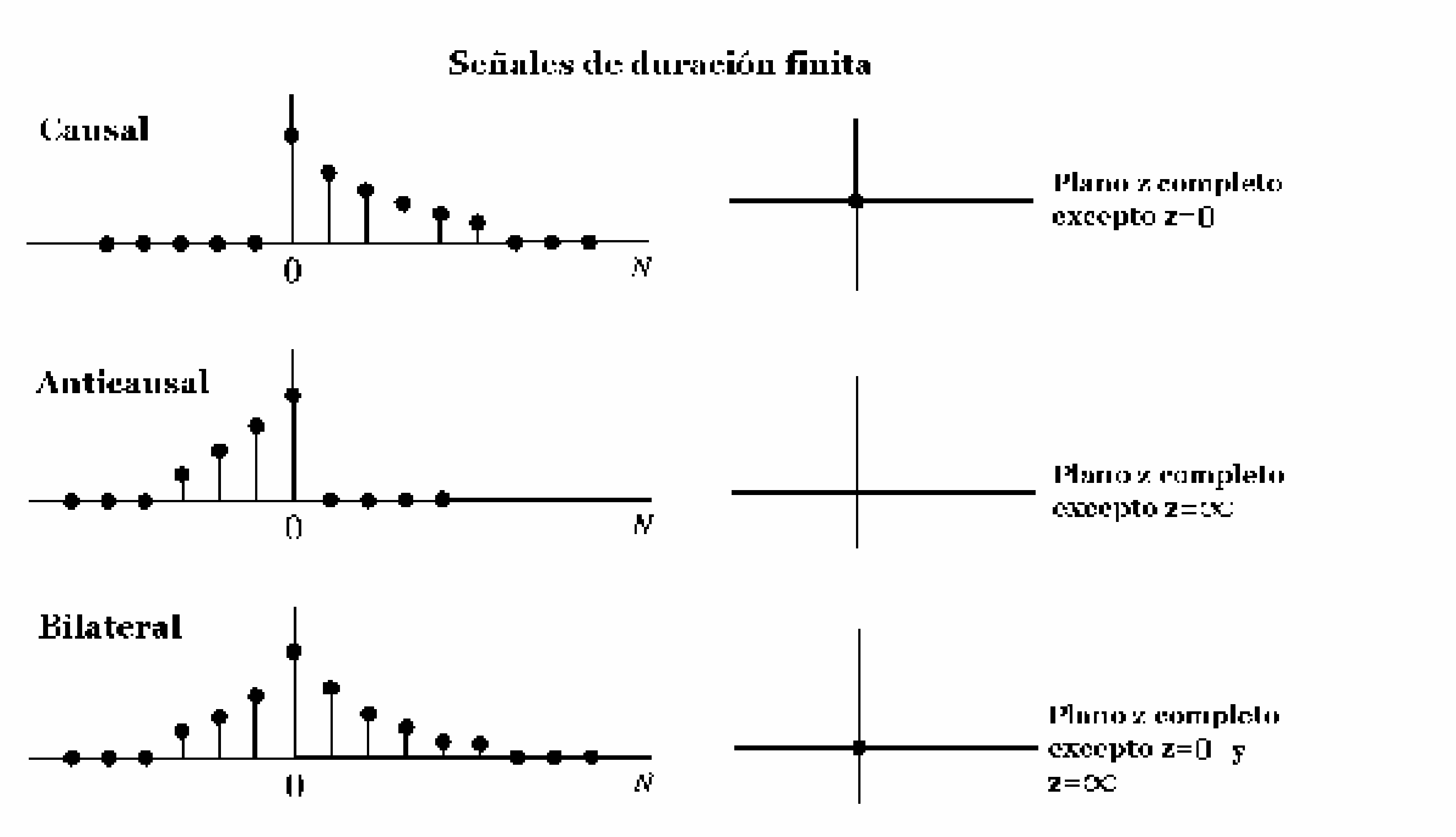
$$X(z) = -\frac{\beta^{-1} z}{1-\beta^{-1} z} = \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

siempre que $|\beta^{-1} z| < 1$ ó $|z| < |\beta|$

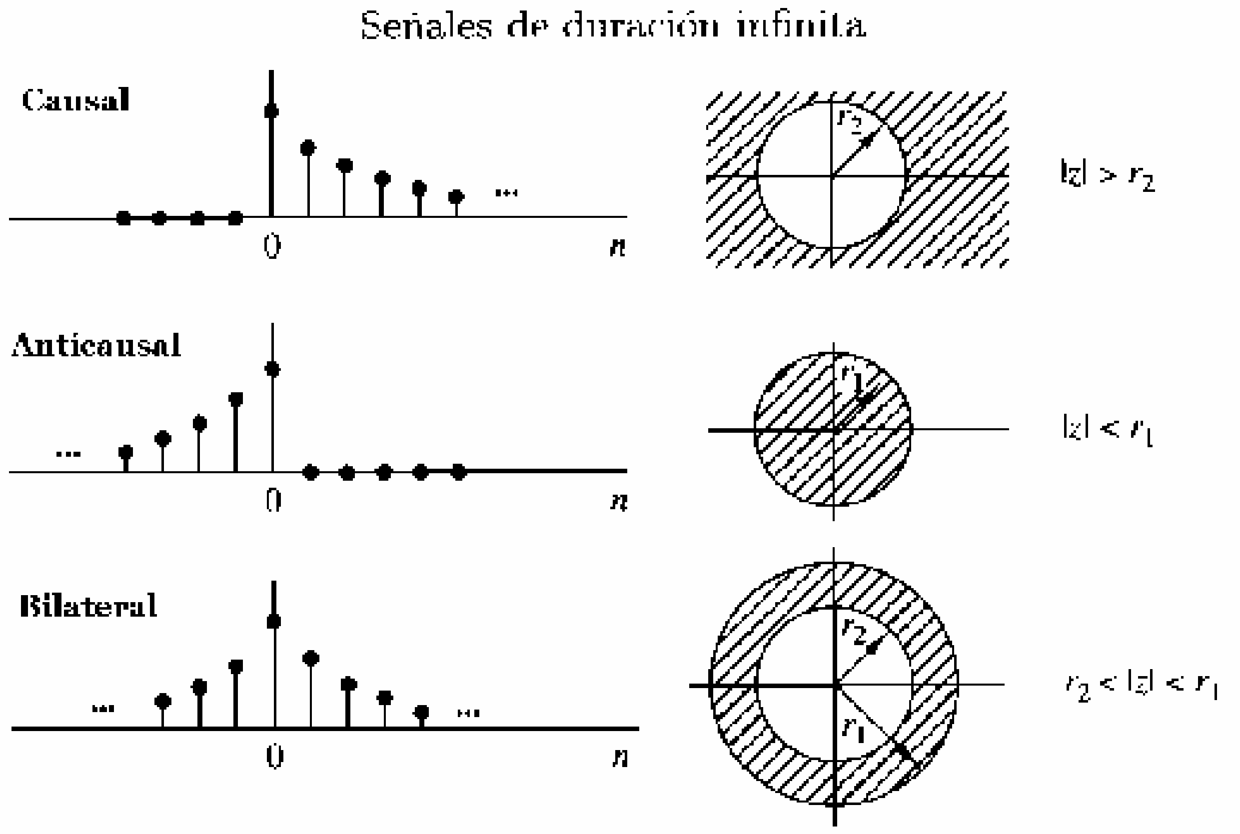
Por tanto, la ROC está dada por $|z| < |\beta|$



Señales típicas y sus respectivas ROC



Señales típicas y sus respectivas ROC



Propiedades de la transfromada Z

Propiedad	Domnio del tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$	$X(z)$	ROC:$r_2<\|z\|<r_1$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	ROC_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	ROC_2
Linealidad	$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1 X_1(z)+a_2 X_2(z)$	Como mínimo la intersección de ROC_1 y ROC_2
Desplazamiento en el tiempo	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	La de X(z), excepto z=0 si k>0 y z=∞ si k<0
Escalado en el dominio z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2< \|z\| < \|a\|r_1$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$1/r_1< \|z\| < 1/r_2$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte real	Re{x(n)}	$½[X(z)+X^*(z^*)]$	Incluye a la ROC
Parte imaginaria	Im{x(n)}	$½[X(z)-X^*(z^*)]$	Incluye a la ROC
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$r_2< \|z\| <r_1$
Convolución	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)\,X_2(z)$	Como mínimo la intersección de ROC_1 y ROC_2
Correlación	$r_{x_1x_2}(l)=x_1(l)*x_2(-l)$	$R_{x1x2}(z)=X_1(z)X_2(z^{-1})$	Como mínimo la intersección de las ROC de $X_1(z)X_2(z^{-1})$
Teorema del valor inicial	Si x(n) causal	$x(0)=\lim_{x\to\infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\dfrac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	Como mínimo, $r_{1l}r_{2l}<\|z\|<r_{1u}r_{2u}$
Relación de Parseval	$\sum_{-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

Pares comunes de transformadas z

Señal, $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$Todo \quad z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
$(\cos w_0 n) u(n)$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos w_0}{1 - 2z^{-1}\cos w_0 + z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$(sen\, w_0 n) u(n)$	$\dfrac{z^{-1} senw_0}{1 - 2z^{-1}\cos w_0 + z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$(a^n \cos w_0 n) u(n)$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos w_0}{1 - 2az^{-1}\cos w_0 + a^2 z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$(a^n sen\, w_0 n) u(n)$	$\dfrac{az^{-1} sen\, w_0}{1 - 2az^{-1}\cos w_0 + a^2 z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$

Transformadas z racionales

Introducción

- X(z) es una función racional si se puede expresar como el cociente de dos polinomios en z^{-1} (ó z).

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z - k}$$

- Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ se tiene,

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \quad \frac{z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \ldots + (b_M/b_0)}{z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \ldots + (a_M/a_0)}$$

- Dado que N(z) y D(Z) son polnomios, X(z) se pueden expresar como un producto de factores,

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

  - $z_k \cong$ **Ceros** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = 0
  - $P_k \cong$ **Polos** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = ∞
  - Por definición, la ROC de X(z) **no puede contener ningún polo**.

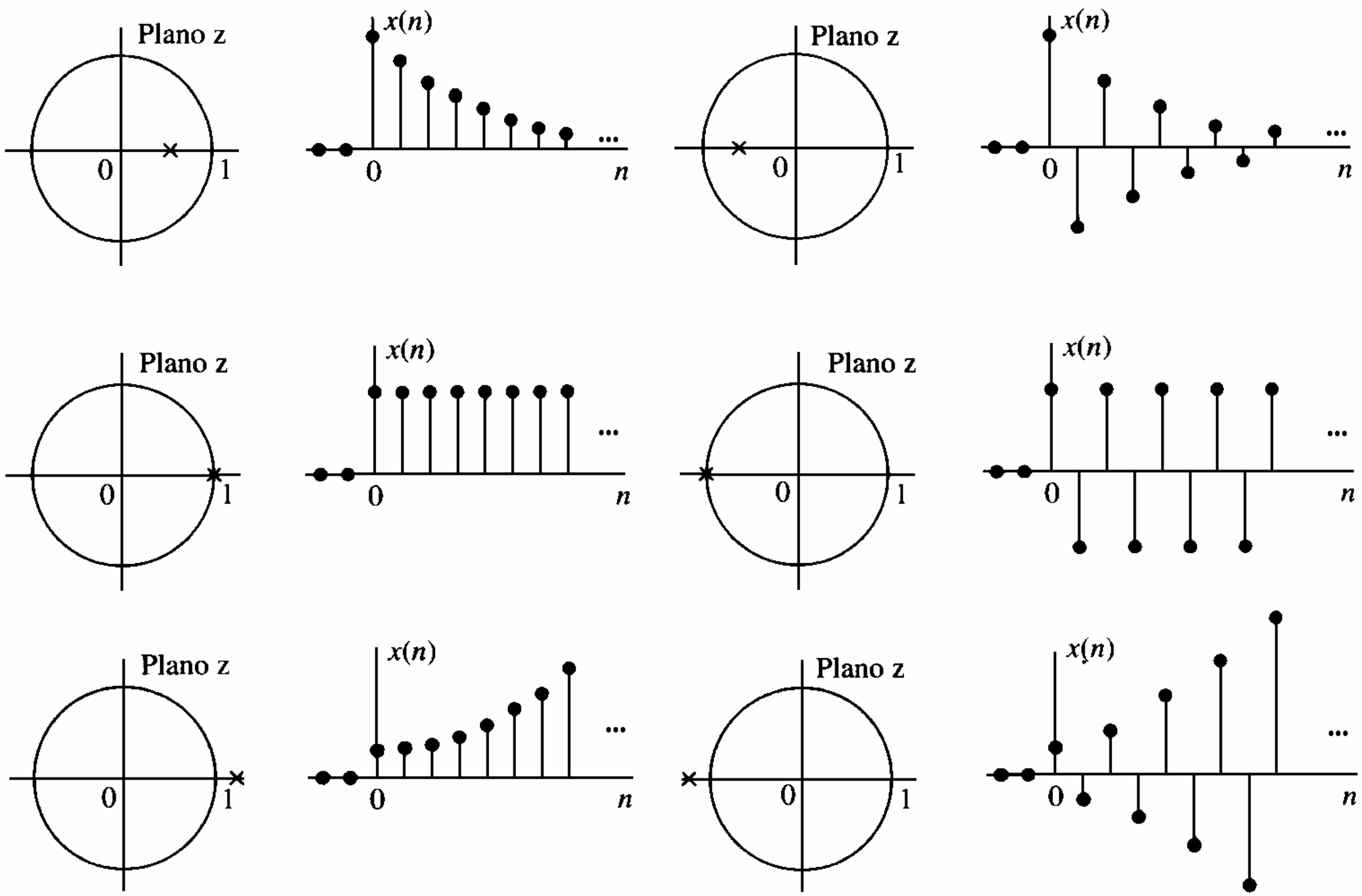
Polos vs. Comportamiento Temporal

- **Existe una relación directa entre la localización de los polos (en relación con el círculo |z| = 1) y la forma de la señal discreta correspondiente en el dominio del tiempo.**

$$x(n) = a^n u(n)$$

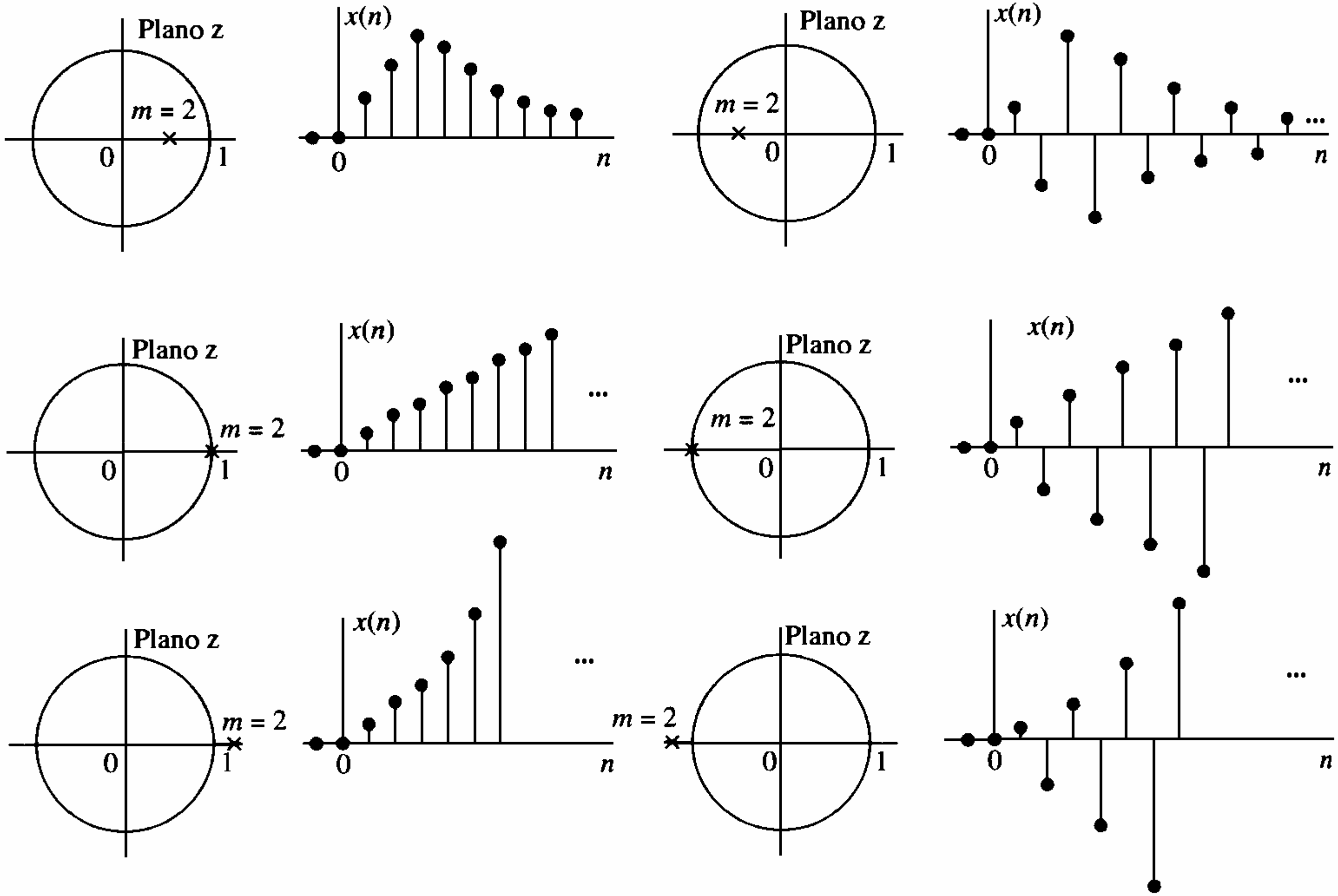
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$ROC : |z| > |a|$$

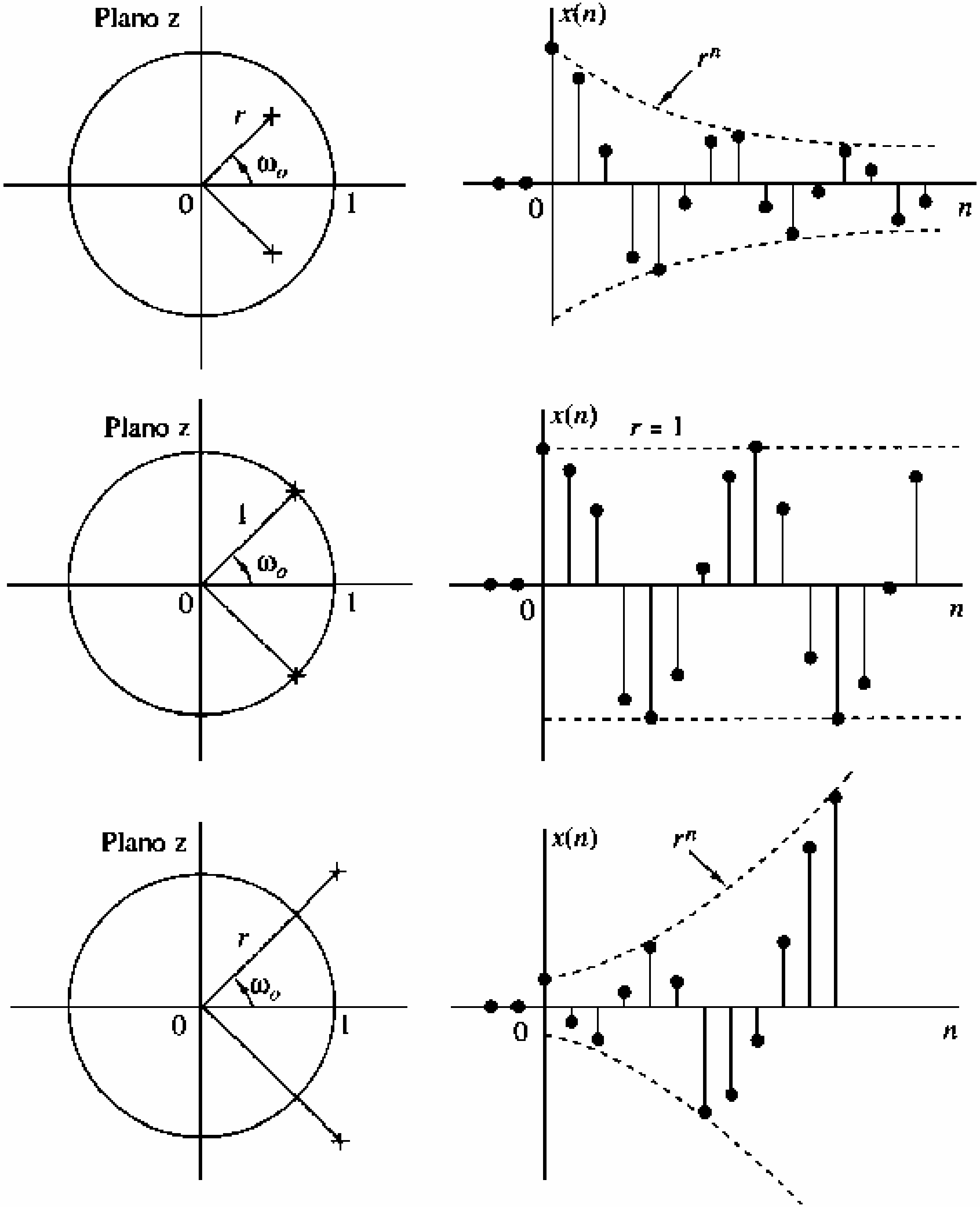


Comportamiento de una señal causal con un solo polo.

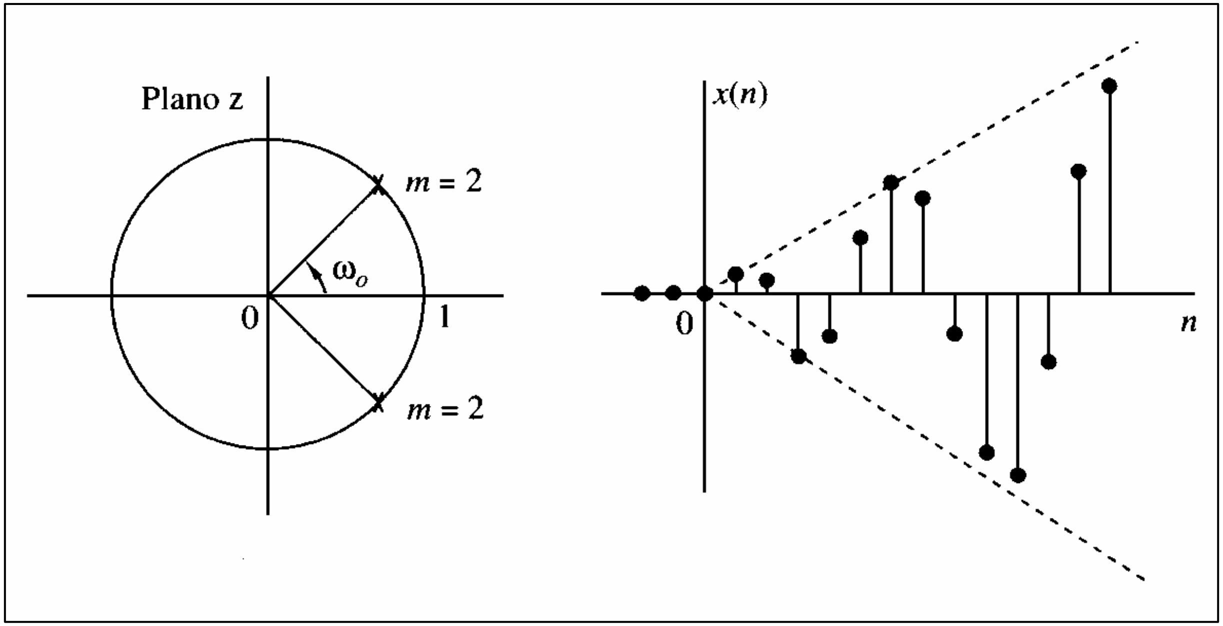
$$x(n) = n\,a^n u(n) \qquad X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2} \qquad ROC: |z| > |a|$$



Comportamiento de una señal causal con un polo doble.



Comportamiento de una señal senoidal causal con un par de polos conjugados



Señal causal correspondiente a un par de polos conjugado doble sobre la circunferencia unidad.

Resumen

- Señal decreciente ⌫ polos dentro del círculo unitario
- Señal creciente ⌫ polos fuera del círculo unitario
- Señal constante o creciente ⌫ polos sobre el círculo

Observación

- Todo lo dicho sobre las señales causales se aplica a sistemas LTI, dado que la h(n) es causal.

Función de transferencia de Sistemas LTI

- **Para un sistema LTI, se cumple que,** $y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{z} Y(z) = H(z)X(z)$

- **Luego, la transformada z de h(n) puede determinarse como,** $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

- **H(z) recibe el nombre de Función de Transferencia del sistema, y describe el sistema en el dominio z.**

- **Para un sistema descrito en ecuaciones de diferencia con coeficientes constantes,**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \xleftrightarrow{z} Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

- **luego,**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{K=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \begin{cases} Sistema\ \ de\ \ todo\ \ ceros \rightarrow FIR \\ Si\ a_k = 0\ para\ \ 1 \le\ k \le M \Rightarrow H(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-K} \\ Sistema\ \ de\ \ todo\ \ polos \rightarrow IR \\ Si\ b_k = 0,\ para\ 1 \le k \le M \Rightarrow H(z) = \dfrac{b_0 z^n}{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} a_k z^{N-k}} \qquad ,\quad a_0 \equiv 1 \end{cases}$$

Transformada z inversa

- Procedimiento para pasar del dominio z al dominio temporal.
- Definición: está dada por la integral de contorno sobre el camino cerrado C que encierra el origen y se encuentra en la ROC de X(z) en el plano z.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Existen tres métodos para el cálculo de la transformada z inversa
  - **Cálculo directo**
    - » Resolver la integral del contorno usando el Teorema de Residuo de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} dz = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial z^{z-1}} \right|_{z=z_0} & Si \quad z_0 \quad está \quad dentro \quad de \quad C \\ 0 & Si \quad z_0 \quad está \quad fuera \quad de \quad C \end{cases}$$

  - **Expansión de X(z) en serie de potencias** de la forma,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \quad \xleftrightarrow{z} x(n) = c_n \quad para \quad todo \quad n$$

    - » Cuando X(z) es racional, la expansión en serie se obtiene efectuando divisiones entre el numerador y el denominador de X(z).
    - » No existe una solución cerrada.
  - **Expansión en fracciones parciales**

Transformada z inversa por expansión en fracciones parciales

- Método que expresa X(z) como una combinación lineal de transformadas z simples, tal que sus transformadas inversas sean conocidas:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \ldots + \alpha_k X_k(z)$$

- Por la propiedad de linealidad , la transformada inversa puede obtenerse como,

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \ldots + \alpha_k x_k(n)$$

- Método bastante útil cuando X(z) es una función racional.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

  - F. Racional **Propia** si $a_N \neq 0$ y $M < N \rightarrow$ **No. de ceros finitos < No. de polos finitos**
  - F. Racional **Impropia** si $M \geq N$
    - » Una F. Racional Impropia siempre puede expresarse como la suma de un polinomio y una función racional propia $\rightarrow$ caso de estudio:F. Racional Propia.
  - La expansión en fracciones parciales para X(z) con polos diferentes es de la forma,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{b_k}{1 + a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

  - En el caso de polos de orben l, la expansión ha de contener términos de la forma múltiples

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \ldots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l}$$

Transformada z unilateral

Introducción

- La transformada directa también recibe el nombre de transformada *bilateral*.
- La transforamada z *unilateral* es de gran utilidad en el análisis de sistemas causales especificados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero.

Definición y propiedades

- La transformada z unilateral $X^+(z)$ de una señal x(n) se define como,

$$X^+(z) = Z^+\{x(n)\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad x(n) \stackrel{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

- Debido a que el límite inferior de la transformada unilateral es siempre cero, presenta las siguientes propiedades:
  - No contiene información sobre la señal x(n) para valores negativos del tiempo (n<0).
  - Es **única** sólo para señales causales, ya que x(n)=0 para n<0.
  - La transformada z unilateral $X^+(z)$ de x(n) es idéntica a la transformada z bilateral X(z) de la señal x(n) u(n). Puesto que x(n) u(n) es causal, ***la ROC de X(z) y X^+ (z) es siempre exterior a un círculo .***
    - » De lo anterior se desprende que no es necesario especificar la ROC cuando se trabaja con transformadas z unilaterales.

Observación

- Casi todas las propiedades de la transformada z bilateral se extienden a la transformada z unilateral con la excepción de la propiedad de *desplazamiento temporal*.
- Esta propiedad facilita la solución de ecuaciones de diferencia con coeficientes constantes y condiciones iniciales distintas de cero para sistemas recursivos LTI.

Propiedad de desplazamiento temporal

- **Retardo temporal**

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z) \quad entonces$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}\right] \quad k>0$$

$$En \quad caso\ que\ x(n)\ \ sea\ causal, \quad entonces$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k} X^+(z)$$

- **Avance temporal**

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z) \quad entonces$$

$$x(n+k) \xleftrightarrow{z^+} z^{+k}\left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}\right] \quad k>0$$

Solución de Ecuaciones en Diferencias vía Transformada z

Introducción

- Método indirecto efectivo para la solución de ecuaciones de diferencia con condiciones iniciales distintas de cero.

Procedimiento

- La solución se logra reduciendo la ecuación de diferencias a una ecuación algrebraica equivalente en el dominio z .
- Esta ecuación algebraica se resuelve fácilmente para obtener la transformada z de la señal deseada.
- La señal en el dominio del tiempo se obtiene invirtiendo la transformada z resultante.

Ejemplo: determine la repuesta del sistema a la entrada escalón

$$y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n) \quad -1 < \alpha < 1 \quad y(-1) = 1 \quad Z^{+}\{u(n)\} = X^{+}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

- **Solución.** Calculando la transformada z unilateral a ambos lados de la ecuación, se obtiene,

$$Y^{+}(z) = \alpha\left[z^{-1}Y^{+}(z) + y(-1)\right] + X^{+}(z)$$

- Reemplazado la condición inicial, se llega a

$$Y^{+}(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

- Luego,

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+2})u(n)$$