Análisis en el Dominio z de Sistemas LTI

■ Introducción

- Se utiliza la función de transferencia H(z) para obtener la respuesta de un sistema (con y sin condiciones iniciales) a una entrada.
- Se estudia la estabilidad de los sistemas LTI y se describe un test para determinar la estabilidad en función de los coeficientes del polinomio de H(z).
- Se analizan detalladamente los sistemas de segundo orden, que constituyen los bloques elementales para la implementación de sistemas de orden mayor.
- Un sistema LTI se describe por una ecuación de diferencias de coeficientes constantes por,

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

y su función de transferencia se obtiene directamente calculando, a ambos lados, la transformada z.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}} \qquad \text{o equivalentemente,} \qquad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

Respuesta de Sistemas con Función de Transferencia Racional

- Los **sistemas** descritos por e.d.c.c. presentan una función de transferencia racional:

$$H(z) = \frac{B(Z)}{A(Z)}$$

- La mayoría de **señales** de interés práctico tienen transformadas z racionales:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{Q(Z)}$$

Respuesta del Sistema en Reposo

- Si se consideran las condiciones iniciales cero, la transformada z de la señal de salida tiene la forma:

$$Y(z) = H(z)\ X(z) = \frac{B(z)\ N(z)}{A(z)\ Q(z)}$$

Respuesta del Sistema en Reposo…

- **Polos Simples** (sin cancelación de polos y ceros)
  - Polos del sistema: p_1, p_2, ..., p_N ;   Polos de la señal de entrada: q_1, q_2, ..., q_L
  - Por expansión en fracciones parciales se obtiene,

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

  - La transformada inversa de Y(z) es de la forma,

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

  la cual puede descomponerse en:
    - **y_{nat}(n): respuesta natural,** función de los polos de H(z).
      - →La inluencia de X(z) es a través de los coeficientes $\{A_k\}$
    - **y_{for}(n): respuesta forzada,** función de los polos de la señal de entrada X(z).
      - →La inluencia de H(z) es a través de los coeficientes $\{Q_k\}$
    - Los factores $\{A_k\}$ y $\{Q_k\}$ son funciones de ambos conjuntos de polos $\{p_k\}$y $\{q_k\}$

Respuesta del Sistema en Reposo…

- **Polos Múltiples** (sin cancelación de polos y ceros)

  - Cuando X(z) o H(z) tienen uno o más polos en común, o cuando X(z) y/o H(z) tienen polos de orden múltiple, **la salida Y(z) tendrá polos de orden múltiples.**

  - En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de Y(z) contendrá factores de la forma,

$$\frac{1}{\left(1 - p_l \, z^{-1}\right)^k} \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

  donde **m** es el orden del polo.

  - La transformada z inversa de estos factores producirá en la salida y(n) del sistema, términos de la forma,

$$n^{k-1} \, p_l^n$$

Respuesta del sistemas NO en Reposo

- Señal de entrada x(n) causal $\rightarrow$ Los efectos de las señales de entradas anteriores se reflejan en las **condiciones iniciales.**
- Se busca obtener y(n) para $n \geq 0$ ante una entrada x(n) causal y condiciones iniciales no nulas $\rightarrow$ **transformada z unilateral.**
- La transformada z unilateral del sistema LTI descrito por ecuaciones de diferencia es ahora,

$$Y^{+}(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}\left[Y^{+}(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}\, X^{+}(z)$$

- Dado que x(n) es causal, $X^{+}(z)=X(z)$

$$Y^{+}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

$$Y^{+}(z) = H(z) X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \qquad \text{donde} \qquad N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}$$

la cual puede descomponerse en dos partes,

- $Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$: respuesta del sistema en estado nulo
- $Y_{zi}^{+}(z)=N_0(z)/A(z)$: respuesta del sistema con entrada cero y condiciones iniciales no nulas

- La respuesta total en el dominio del tiempo, y(n), puede obtenerse como la suma de las transformadas inversas individuales de $Y_{ZS}(n)$ y $Y_{zi}(n)$:

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

- Como el denominador de $Y_{zi}^{+}(z)$ es A(z), sus polos son $p_1, p_2, \ldots p_N$. Por lo tanto, $y_{zi}(n)$ tiene la forma,

$$y_{zi}(n) = \sum_{K=1}^{N} D_K (p_K)^n u(n)$$

- Lo anterior puede añadirse a la respuesta y(n) obtenida para el caso del sistema en reposo inicial, y los términos en que aparecen los polos $\{p_K\}$ pueden combinarse para generar la respuesta total,

$$y(n) = \sum_{K=1}^{N} (A_K + D_K)(p_K)^n u(n) + \sum_{K=1}^{L} Q_K (q_K)^n u(n)$$

- Se obseva que el **efecto de las condiciones iniciales** es **alterar la respuesta natural** del sistema a través de la modificación de los factores de escala $\{A_K\}$
  - Las c.i. **no introducen polos nuevos** en el sistema.
  - Las c.i. **no tienen efecto sobre la respuesta forzada** del sistema.

Respuesta Transitoria y en Régimen Permanente

- La respuesta de un sistema a una entrada determinada puede descomponerse en respuesta natural y forzada:

$$y(n) = y_{nat}(n) + y_{for}(n)$$

  - **Respuesta natural**:

$$y_{nat}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n)$$

    - » polos de H(z): p_k, k=1, 2, ..., N
    - » coeficientes: A_k, factores que dependen de las condiciones iniciales y de la entrada.
    - » Si $|p_k| < 1$ para todo k, $y_{nat}(n)$ decae hacia cero cuando n aumenta $\Rightarrow$ *respuesta transitoria*.
    - » La tasa de decaimiento de $y_{nat}(n)$ depende inversamente de la magnitud de los polos.

  - **Respuesta forzada:**

$$y_{for}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

    - » polos de X(z): q_k, k=1, 2, ..., L
    - » coeficientes: Q_k, factores que dependen de las condiciones iniciales y del sistema.
    - » Si los *polos de la señal de entrada (transitoria)* $\boldsymbol{|q_k| < 1}$ $\forall$ k y $\boldsymbol{y_{for}(n)}$ decae hacia cero cuando *n* aumenta.
    - » Si la entrada *causal es permanente y acotada*, la respuesta también será acotada y permanente $\Rightarrow$ *respuesta en régimen permanente*.

Causalidad y Estabilidad en el Dominio z

- **Causalidad**
  - Un sistema LTI causal es aquel que satisface la condición: $h(n) = 0, \quad n < 0$
  - La ROC de una secuencia causal es el exterior de un círculo.
  - *Un sistema LTI es causal si y sólo si la ROC de H(z) es el exterior de un círculo de radio r < ∞, incluyendo el punto z= ∞.*

Causalidad y Estabilidad en el Dominio z

Estabilidad

- Condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI sea estable BIBO es,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad \text{se deduce que} \quad |H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \, |z^{-n}|$$

Si se evalúa en |z| = 1, se obtiene

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

- Lo anterior implica que H(z) debe contener a la circunferencia unidad dentro de su ROC.
- ***Un sistema LTI es estable BIBO si y sólo si la ROC de H(z) incluye a la circunferencia unidad.***

Estabilidad para un sistema causal

- Se tiene:
  - Un sistema causal tiene como ROC el exterior de un círculo de radio r.
  - Un sistema estable debe contener la circunferencia unidad.

- De lo anterior, un sistema causal y estable debe tener la función H(z) que converge para **$|z| > r < 1$**.

- Dado que la ROC no puede contener ningún polo de H(z), se deduce que
  - ***Un sistema LTI causal es estable BIBO si y sólo si todos los polos de H(z) están dentro de la circunferencia unidad.***

Ejemplo.

Para el sistema $$H(z) = \frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2}{1-3\,z^{-1}}$$

con polos en 0.5 y 3, especifique la ROC de H(z) y determine h(n) para las siguientes condiciones:

(a) Sistema estable:

La ROC debe incluir el círculo unidad: $0.5 < |z| < 3$

El sistema es no causal $\Rightarrow$ $$h(n) = (0.5)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$$

(b) Sistema causal:

La ROC es $|z| > 3$.

El sistema es inestable $\Rightarrow$ $$h(n) = (0.5)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$$

(c) Sistema anticausal:

La ROC es $|z|<0.5$.

El sistema es inestable $\Rightarrow$ $$h(n) = -\left[(0.5)^n + 2\,(3)^n\right] u(-n-1)$$

Cancelaciones polo-cero

- Se presenta cuando una transformada z contiene polos y ceros en la misma posición, bien sea en H(z) o en H(z)X(z).
- Cuando el zero y el polo no coinciden exactamente en la misma posición, el término de la respuesta tiene una amplitud muy pequeña.
- Estabilizar un sistema inherentemente inestable colocando un cero de la señal de entrada en la misma posición del polo del sistema, puede presentar problemas debidos a falta de precisión numérica en la representación del sistema.

Polos de orden múltiple y estabilidad

- La estabilidad BIBO requiere que los polos del sistema estén estrictamente dentro del círculo unidad.
- Si H(z) es estable y X(z) contiene uno o más polos que coinciden con los del sistema, la salida Y(z) contendrá polos de orden múltiple *m*, que dan origen a términos de la forma,

$$A_k\, n^b \left(p_k\right)^n u\left(n\right) \qquad 0 \le b \le m-1$$

- Si $|p_k| < 1$, estos términos tienden a cero a medida que n tiende a infinito porque el factor exponencial $(p_k)^n$ domina al término n^b.
- No existe ninguna señal de entrada acotada que pueda producir una salida no acotada si todos los polos del sistema están dentro del círculo unidad.

Test de Estabilidad de Schür-Cohn

Introducción

- La estabilidad de un sistema está determinada por la posición de los polos de H(z).
- Los polos son las raíces del polinomio denominador de H(z))=B(z)/A(z), es decir de,

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$$

- Un sistema es causal y estable si todas las raíces de A(z) están dentro del círculo unidad.

Notación

- Polinomio de grado m: $A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} \qquad a_m(0) = 1$
- Polinomio inverso: $B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} a_m(m-k) z^{-k}$

Procedimiento

- Deben calcularse los *coeficientes de reflexión*, K_1, K_2, …, K_N a partir de los polinomios $A_m(z)$:
  - » Inicialmente se escribe, $A_N(z) = A(z) \quad y \quad K_N = a_N(N)$
- Luego se calculan los polinomios de grado menor $A_m(z)$, m=N, N-1, N-2, …, 1, de acuerdo con la ecuación recursiva,

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}$$ donde los coeficientes K_m se definen como $K_m = a_m(m)$

Test de estabilidad de Schür-Cohn…

- *El polinomio A(z) tiene todas sus raíces dentro de la circunferencia unidad si y sólo si los coeficientes de K_m satisfacen la condición $|K_m| < 1$ para m=1, 2, …, N.*
  - Algoritmo recursivo fácil de implementar en computador
  - El cálculo de los coeficientes K_m presenta gran aplicación en el procesado de voz.
- **Ejemplo:** determine si es estable el sistema cuya función de transferencia es,

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- **Solución.** Se comienza con $A_2(z)$ y K_2,

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \qquad K_2 = -\frac{1}{2}$$

- Luego $B_2(z)$,

$$B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

- Por lo tanto, se puede calcular $A_1(z)$ y K_1,

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1} \qquad K_1 = -\frac{7}{2}$$

- Puesto que $|K_1| > 1$ el sistema es inestable.