Diseño de Filtros Digitales LTI

Introducción

- **Filtro**. Proceso o algoritmo computacional que convierte una secuencia de números (señal de entrada) en otra secuencia de números (señal de salida), y en el cual la conversión cambia el caracter de la señal en una forma predeterminada.
- **Diseño.** Determina los coeficientes del algoritmo de entrada/salida por algún proceso de aproximación. O de otra forma, se determina la función de transferencia, la respuesta al impulso o la ecuación de diferencia que pueda cumplir los requerimientos para el filtrado de señal.

- **Clasificación**
  - De acuerdo con las *características de su respuesta en frecuencia*
    - » Filtros Paso-Bajo
    - » Filtros Paso-Alto
    - » Filtros Banda de Paso
    - » Filtros Banda de Rechazo
  - Dependiendo de la *duración de la respuesta al impulso*
    - » Filtros de Respuesta Impulsional Infinita (IIR)
    - » Filtros de Respuesta Impulsional Finita (FIR)

- **Realizaciones**
  - Dominio del Tiempo
    - » Realización Recursiva (preferido para Filtros IIR)
    - » Realización No-Recursiva (preferido para Filtros FIR)
  - Dominio Frecuencial: Realización vía Transformada de Fourier

Consideraciones de Causalidad en los Filtros Digitales

- El teorema de Paley-Wiener permite establecer las condiciones suficientes y necesarias que debe satisfacer una característica de respuesta en frecuencia H(*w*) para que el filtro resultante sea causal.

- **Tma. de Paley-Wiener**. Si h(n) tiene energía finita y h(n)=0 para n<0, entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln|H(w)| \right| dw < \infty$$

Recíprocamente, si |H(*w*)| es *cuadráticamente integrable* y si la integral de la ecuación anterior es finita, entonces se puede asociar a |H(*w*)| una respuesta en fase Θ(*w*), de tal forma que el filtro resultante con respuesta en frecuencia,

$$H(w) = |H(w)| e^{j\Theta(w)} \quad \text{es causal}$$

- El teorema de Paley-Wiener implica que:
  - **H(w) puede ser cero en algunas frecuencias, pero no puede ser cero sobre cualquier banda finita de frecuencias.** (la integral se hace infinita)
  - **|H(w)| no puede ser constante sobre nigún rango finito de frecuencias y la transición de la banda de paso a la banda de rechazo no puede ser infinitamente abrupta.** (fenómeno de Gibss)

⇒ cualquier filtro ideal es no causal⇐

⇒ los filtros ideales no son físicamente realizables ⇐

- **Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$.** Para ilustrar la relación se descompone h(n) en una secuencia par y otra impar,

$$h(n)=h_e(n)+h_o(n) \qquad h_e(n)=\frac{1}{2}[h(n)+h(-n)] \qquad h_o(n)=\frac{1}{2}[h(n)-h(-n)]$$

- Si h(n) es causal, es posible recuperarla sólo a partir de su parte par o impar.
  - **par:** $h(n)=2\,h_e(n)\,u(n)-h_e(0)\delta(n) \qquad n\geq 0$
  - **impar:** $h(n)=2\,h_o(n)\,u(n)+h(0)\delta(n) \qquad n\geq 1$
- De lo anterior se desprende que $\mathbf{h_o(n)=h_e(n)}$ para $n\geq 1$, lo que implica una fuerte relación entre $h_o(n)$ y $h_e(n)$.
- Si h(n) es **absolutamente sumable** (estable BIBO), existe la respuesta H(w) dada por,

$$H(w)=H_R(w)+j\,H_I(w)$$

- Si h(n) es **real y causal**, las propiedades de simetría de la transformada de Fourier implican que,

$$h_e(n)\xleftrightarrow{F}H_R(w) \qquad h_o(n)\xleftrightarrow{F}H_I(w)$$

- Si el sistema es causal $H_R(w)$ y $H_I(w)$ son interdependientes y no se pueden especificar independientemente. Equivalentemente, la respuesta en magnitud y fase están interrelacionadas.

Transformada de Hilbert Discreta. $$H_I(w)=-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_R(\lambda)\,\cot\left(\frac{w-\lambda}{2}\right)d\lambda$$

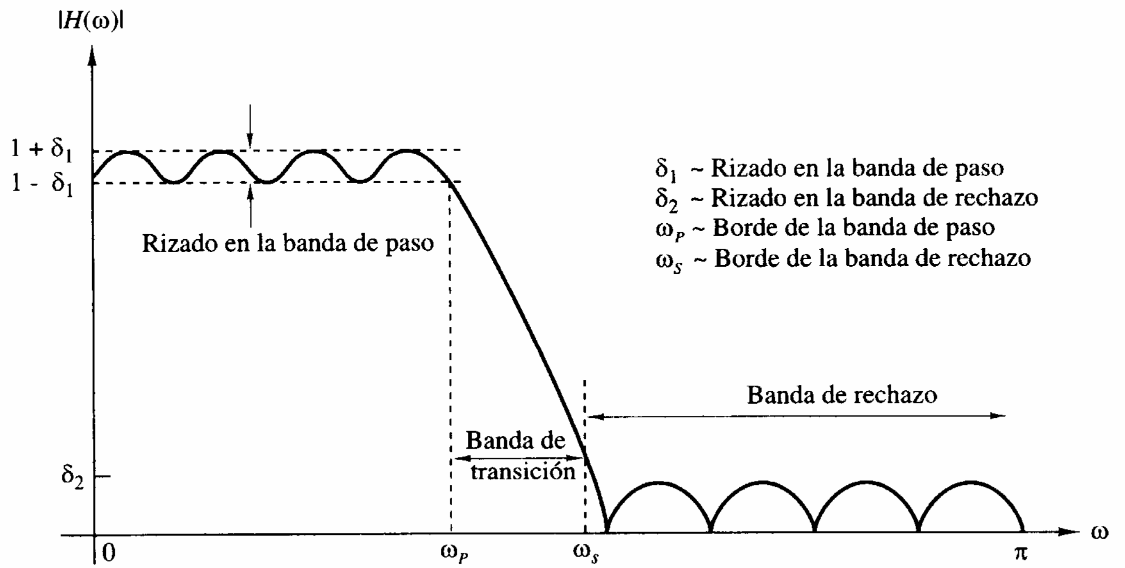
Características de Filtros Prácticos

■ Observaciones

- Los filtros ideales no son causales y por lo tanto físicamente irrealizables.
- H(w) no puede ser cero excepto en un conjunto finito de puntos en el rango de frecuencias.
- H(w) no puede tener una transición infinitamente abrupto entre las bandas de paso y de rechazo.
- | H(w) | no puede ser constante en ningún rango finito de frecuencias.

■ Especificaciones de diseño

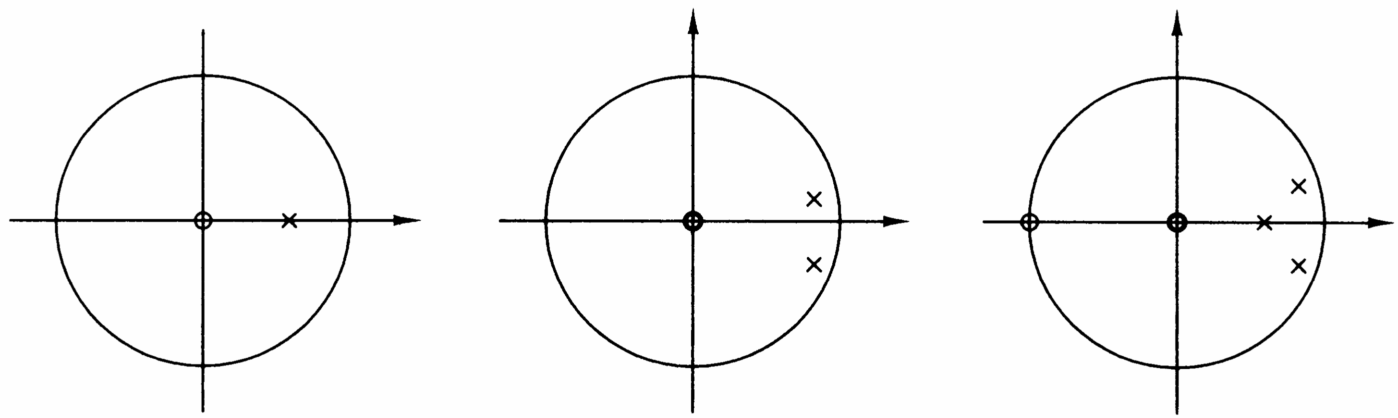
- Máximo rizado en la banda de paso [δ_1]
- Máximo rizado en la banda de rechazo [δ_2]
- Frecuencia de corte en la banda de paso [w_p]
- Frecuencia de corte en la banda de rechazo [w_s]



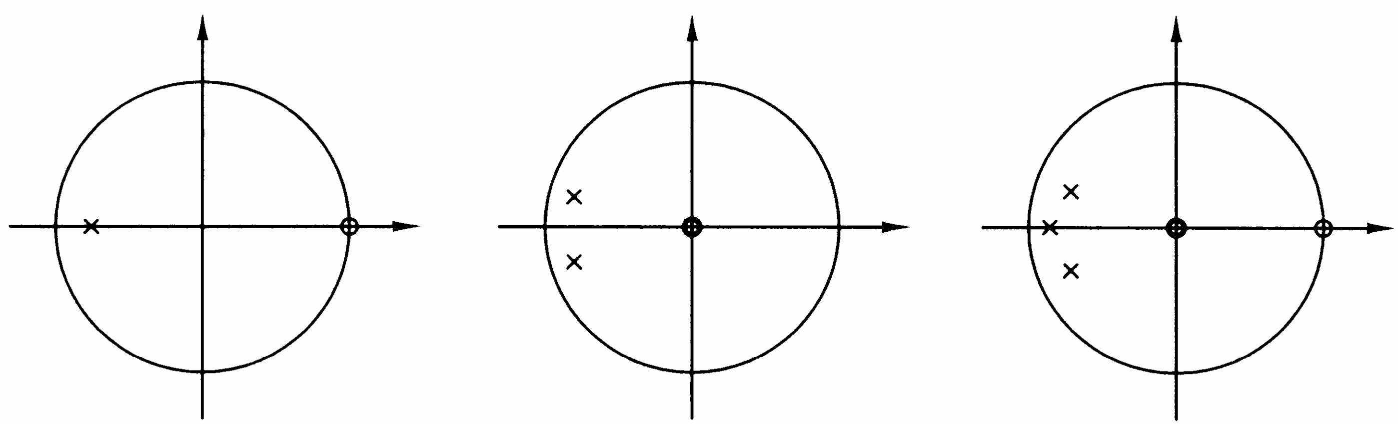
■ Exactitud

- Criterio utilizado para determinar los coeficientes del filtro.
- El orden del numerador y denominador de la función de transferencia.

Ubicación de polos y ceros para distintos filtros paso alto y paso bajo.



Paso bajo



Paso alto

Diseño de Filtros FIR

Introducción

- El problema de diseño de filtros FIR consiste en determinar los coeficientes de su función de transferencia, H(z) o de su respuesta al impulso, h(n).
- Al disponer de sólo un polinomio numerador en la función de transferencia del filtro FIR hace más restrictivo el problema de diseño.

Propiedades generales de los filtros FIR

- Implementación no-recursiva o realización por medio de la convolución directa.
- Implementación por convolución de alta velocidad mediante la transformada rápida de Fourier o por técnicas recursivas.
- Errores producidos por cuantización, redondeo e imprecisiones en los coeficientes son menos críticos en realizaciones no-recursivas de filtros FIR que en filtros IIR.→ Filtros FIR no-recursivos no tienen realimentaciones.
- La función de transferencia de un filtro FIR no-recursivo tiene todos los polos en el origen y siempre es estable.

Diseño de Filtros FIR (suite)

■ Propiedades generales de los filtros FIR...

- Filtros FIR pueden diseñarse con características de fase lineal. (Poco posible para filtros IIR).
- El "orden" (longitud) de un filtro FIR es más alto que de uno IIR para obtener las mismas prestaciones.
- El retardo de tiempo incrementa con el número de términos y puede hacerse muy grande para filtros de ordenes relativamente altos.
- En general los métodos de diseño de filtros FIR son más tediosos que para filtros IIR

Filtros FIR Simétricos y Antisimétricos

- Un filtro FIR con longitud M, entrada *x*(n) y salida *y*(n) puede describirse por,

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + \ldots + b_{M-1}\, x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k\, x(n-k)$$

donde $\{b_k\}$ es el conjunto de coeficientes del filtro.

- De forma alternativa,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)\, x(n-k)$$

donde $h(k)=b_k$, k=0, 1, ..., M-1. $\Rightarrow$ h(k) es un filtro causal de duración finita.

- El filtro también puede caracterizarse por su función de transferencia,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

la cual se puede interpretar como un polinomio de grado M-1 en la variable z^{-1}.

- **Un filtro FIR tiene fase lineal si su respuesta impulsional satisface la condición de simetría (+) y antisimetría (-):**

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

- Incorporando las condiciones de simetría y antisimetría en la función de transferencia, se tiene:

$$H(z) = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \ldots + h(M-2)\, z^{-(M-2)} + h(M-1)\, z^{-(M-1)}$$

$$= z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\} \qquad M \;\; impar$$

$$= z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \qquad M \;\; par$$

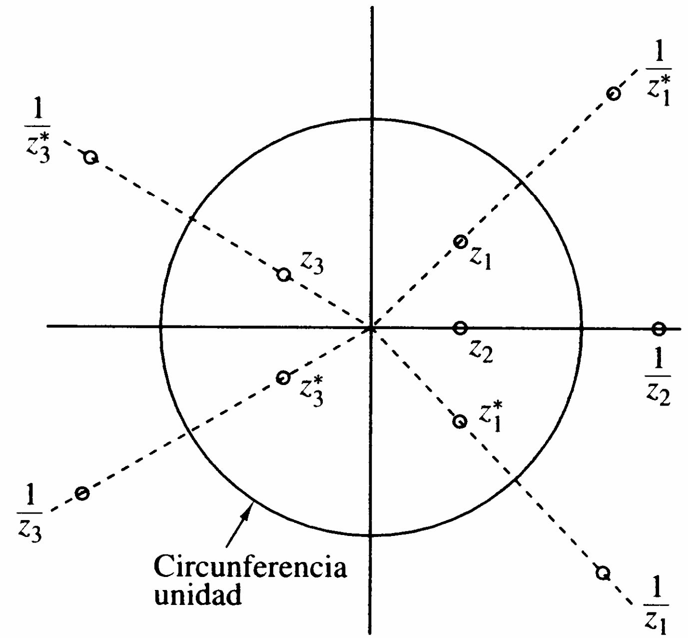
  - Al evaluar esta expresión en la circunferencia unitaria, $z=e^{jw}$, se obtienen las características de respuesta en frecuencia, H(w), de los filtros FIR de fase lineal.

Simetría en la localización de las raíces de un filtro FIR de fase lineal

- Sustituyendo z^{-1} por z y multiplicando por $z^{-(M-1)}$ se obtiene,

$$z^{-(M-1)} H\left(z^{-1}\right) = \pm H(z)$$

- Esto implica que las raíces de H(z) son idénticas a las raíces de $H(z^{-1})$
- Las raíces de H(z) deben ocurrir en pares recíprocos $\Rightarrow$ si z_1 es raíz, $1/z_1$ también es raíz.
- Si h(n) es real y compleja, las raíces se presentan en pares conjugados $\Rightarrow$ si z_1 es raíz compleja, z_1^* también es raíz.



Filtros Simétricos

- Cuando **h(n) = h(M-1-n)**, H(w) puede expresarse como,

$$H(w) = H_r(w)\, e^{-jw(M-1)/2}$$

donde $H_r(w)$ es una función real de w y está dada por,

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; impar$$

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; par$$

La característica de fase del filtro para M par e impar es,

$$\Theta(w) = \begin{cases} -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si \;\; H_r(w) > 0 \\ -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + \pi & si \;\; H_r(w) < 0 \end{cases}$$

- Número de coeficientes: M impar = (M+1)/2 ; M par = M/2

Filtros Antisimétricos

- Cuando **h(n) = - h(M-1-n)**, H(w) puede expresarse como, $H(w) = H_r(w)\, e^{j[-w(M-1)/2 + \pi/2]}$ donde $H_r(w)$ es una función real de w y está dada por,

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \operatorname{sen} w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \ impar$$

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \operatorname{sen} w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \ par$$

La característica de fase del filtro para M par e impar es,

$$\Theta(w) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si \ \ H_r(w) > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} - w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si \ \ H_r(w) < 0 \end{cases}$$

- Punto central de la antisimetría de h(n) es n=(M-1)/2, donde h(n)=0.
- Número de coeficientes: M impar = (M-1)/2 ; M par = M/2

Selección: Simétrico o Antisimétrico?

- Depende de la aplicación: cada función de transferencia, $H_r(w)$, simétrica o antisimétrica, tiene características particulares en el dominio frecuencia.
- **Ejemplo.** No puede emplearse un h(n) antisimétrico para el diseño de un filtro FIR paso bajo de fase lineal $\rightarrow H_r(0) = 0$.

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas

Metodología

- Se especifica la respuesta en frecuencia deseada $\mathbf{H_d(w)}$ y posteriormente se determina la correspondiente respuesta impulsional $\mathbf{h_d(n)}$, mediante la transformada de Fourier.

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-jwn} \qquad \text{donde} \qquad h_d(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H_d(w) e^{jwn}\, dw$$

- En general, la respuesta $\mathbf{h_d(n)}$ luego de evaluar la integral, es de ***duración infinita*** y debe ser ***truncada*** en algún punto, **n=M-1,** para producir un filtro **FIR** de longitud **M**.
- El truncamiento de $\mathbf{h_d(n)}$ es equivalente a multiplicar $\mathbf{h_d(n)}$ por una ***ventana rectangular*** de longitud **M**, definida como,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0, & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

- Así, la respuesta impulsional del filtro FIR se convierte en,

$$h(n) = h_d(n)\, w(n) \; = \begin{cases} h_d(n), & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0, & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

y por la convolución en el dominio frecuencial se llega a,

$$H(w) = H_d(w) * W(w) \; = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v)\, W(w-v) \;\partial v$$

La transformada de Fourier de la **ventana rectangular** es,

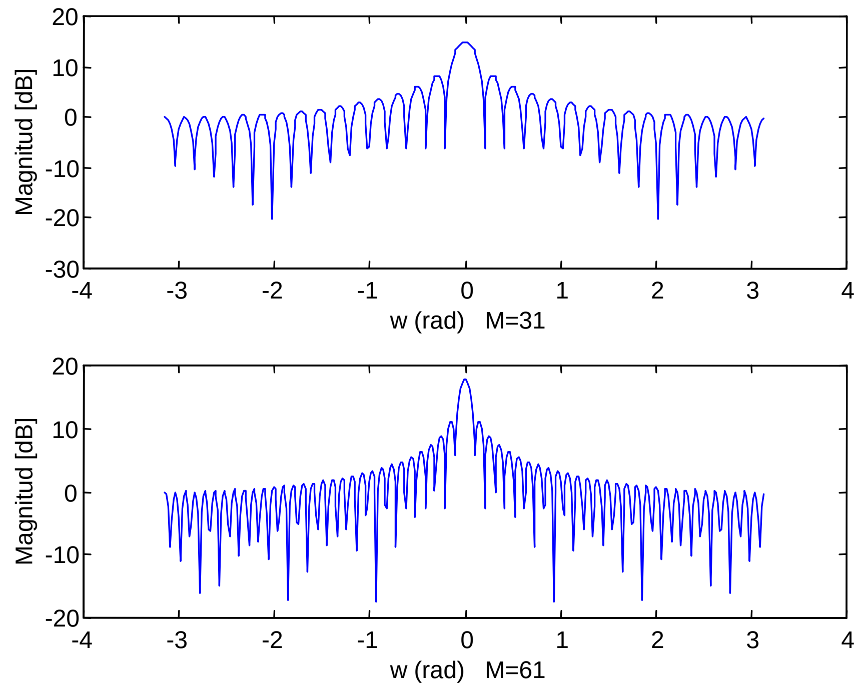
$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n)\, e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2}\,\frac{sen(wM/2)}{sen(w/2)}$$

con respuesta en ***magnitud*** y **fase *lineal a tramos***

$$|W(w)| = \frac{|sen(wM/2)|}{|sen(w/2)|}, \quad -\pi \le w \le \pi \qquad \Theta(w) = \begin{cases} -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{cuando} \quad sen(wM/2) \ge 0 \\ -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + \pi, & \text{cuando} \quad sen(wM/2) < 0 \end{cases}$$

Respuesta en magnitud de W(*w*)

- El lóbulo principal se hace más estrecho a medida que M crece.
- El área de cada lóbulo lateral se conserva con variaciones de M.



Magnitud (dB) de W(*w*) para una ventana rectangular

Observaciones

- Las características de la *ventana* ayudan a determinar la respuesta en frecuencia H(w) del filtro FIR al truncar $h_d(n)$ a la longitud M.
  - La convolución de $H_d(w)$ con $W(w)$ tiene el efecto de *suavizar* $H_d(w)$
  - A medida que M crece, los lóbulos laterales de $W(w)$ se estrechan más y el suavizado producido por $W(w)$ se reduce.
  - Los lóbulos laterales grandes de $W(w)$ producen rizado y lóbulos grandes en $H(w)$.
  - El truncamiento de las series de Fourier introduce rizado en H(w), particularmente en la vecindad de discontinuidades → Fenómeno de Gibbs.
  - Para garantizar la fase lineal es necesario conservar las características de simetría del filtro resultante → Introducir un desplazamiento durante el diseño.

Observaciones…

- La utilización de ventanas sin **discontinuidades abruptas** en sus características del dominio temporal, producen lóbulos laterales bajos en sus respuestas frecuenciales, que contribuyen a aliviar los efectos indeseables.

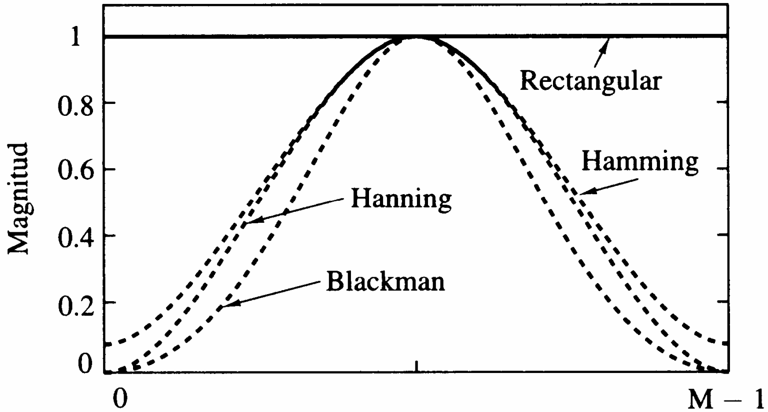
- Las ventanas "suavizadas" al compararse con la rectangular producen:
  - Lóbulos laterales más bajos.
  - Un lóbulo central más amplio para el mismo valor de M.
  - Mayor suavizado a través de la convolución en el dominio de la frecuencia.
  - Región de transición de la respuesta del filtro FIR más amplia.
    - » Puede reducirse incrementando la longitud de la ventana

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

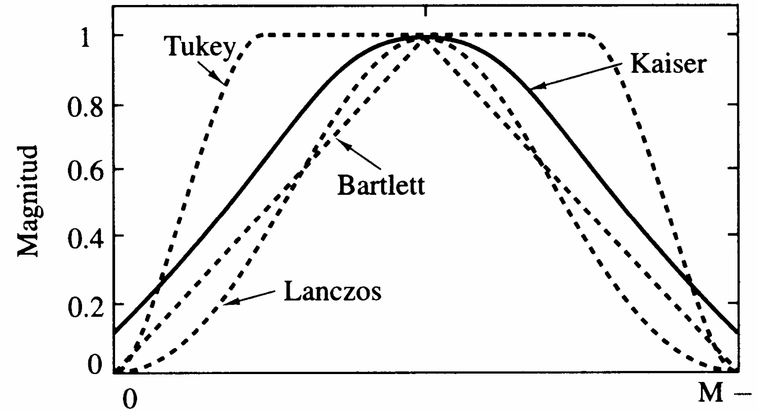
Nombre de la ventana	Secuencia en el dominio temporal, $h(n), 0 \leq n \leq M-1$
Barlett (triangular)	$1-\dfrac{2\left\lvert n-\dfrac{M-1}{2}\right\rvert}{M-1}$
Blackman	$0.42-0.5\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}+0.08\cos\dfrac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54-0.46\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}\right)$
Kaiser	$\dfrac{I_0\left[\alpha\sqrt{\left(\dfrac{M-1}{2}\right)^2-\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)^2}\,\right]}{I_0\left[\alpha\left(\dfrac{M-1}{2}\right)\right]}$

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR (suite)

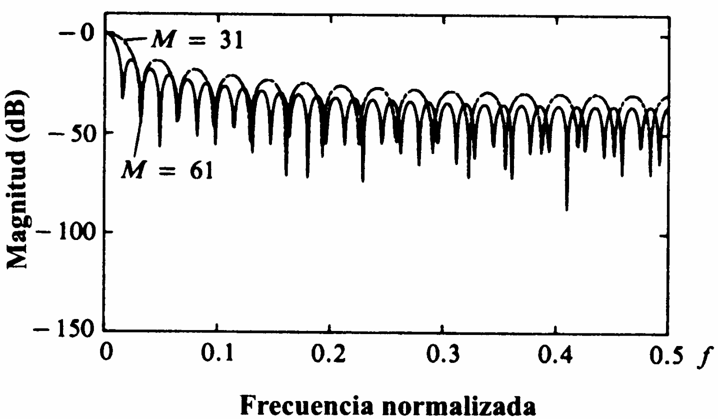
Nombre de la ventana	Secuencia en el dominio temporal, $h(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$
Lanczos	$\left\{ \dfrac{sen\left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \Big/ (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \Big/ \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^{L} \qquad L > 0$
	$1, \qquad \left\lvert n - \frac{M-1}{2} \right\rvert \leq \alpha \frac{M-1}{2} \qquad 0 < \alpha < 1$
Tukey	$\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{n-(1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right]$
	$\alpha(M-1)/2 \leq \left\lvert n - \frac{M-1}{2} \right\rvert \leq \frac{M-1}{2}$



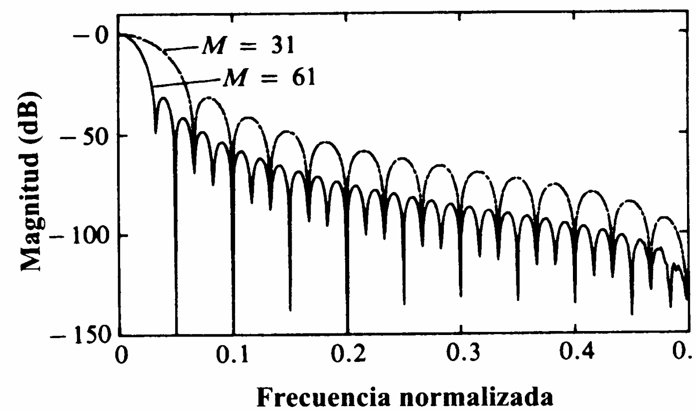
← **Ventanas** →



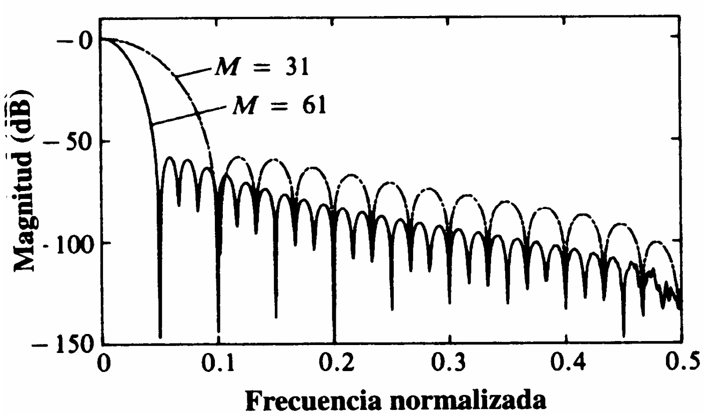
V. Rectangular



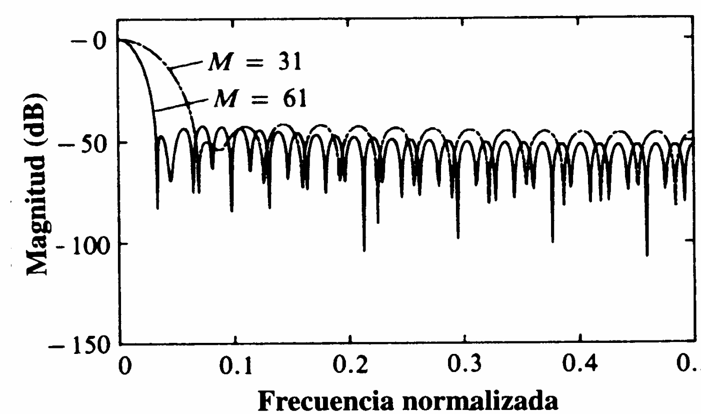
V. Hanning



V. Blackman



V. Hamming



- **Ejemplo.** Diseñar un filtro FIR paso bajo de fase lineal, con una respuesta en frecuencia deseada,

$$H_d(w) = \begin{cases} 1 e^{-jw(M-1)/2} & 0 \leq |w| \leq w_c \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

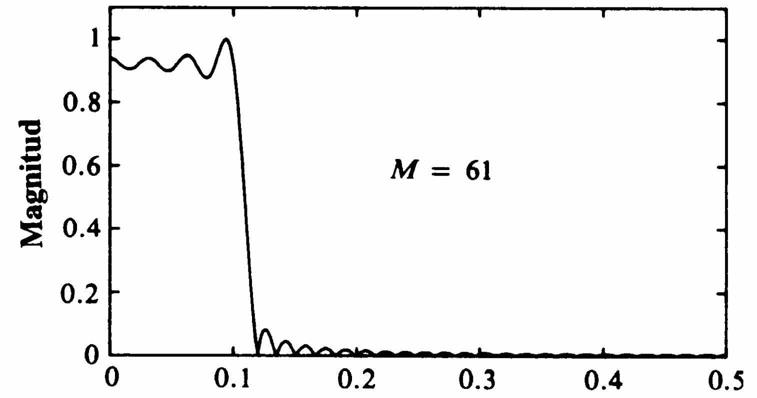
- Al aplicar la transformada inversa de Fourier,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n-\frac{M-1}{2}\right)} \partial w$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left[w_c\left(n-\frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right)} \qquad n \neq \frac{M-1}{2}$$

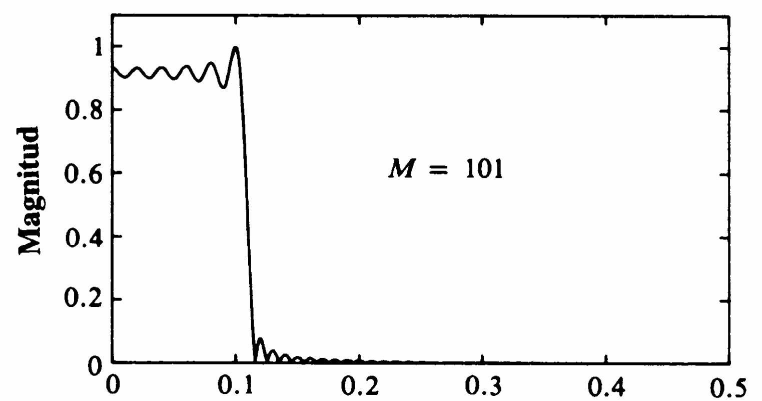
- Claramente, h(n) es no causal y de duración infinita. Si se multiplica $h_d(n)$ por la ventana rectangular, se obtiene el filtro FIR h(n) de longitud M:

$$h(n) = \frac{\operatorname{sen}\left[w_c\left(n-\frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right)} \quad , \quad 0 \leq n \leq M-1, \qquad n \neq \frac{M-1}{2}$$



(a)

Filtro PB FIR diseñado con una ventana rectangular



Frecuencia normalizada

(b)

Filtros FIR paso-bajo diseñados con ventanas