UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
TALLER DSP Febrero de 2022.

1. EJERCICIO DE EJEMPLO FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA

Dado un filtro FIR de fase lineal de longitud *M=17* que tiene una respuesta impulsional simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface las condiciones

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{17}\right)=\begin{cases}1 & k=0,1,2,3,4\\ 0 & k=5,6,7,8\end{cases}$$

a) Determine los coeficientes

Solución. Como h(n) es simétrica y las frecuencias se seleccionan correspondiendo al caso α=0, se usa las formulas de la tabla 8.3 para evaluar *h(n).* En este caso

$$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad k=0,1,2,3,\ldots,8$$

$$h(n)=\frac{1}{M}\left\{G(0)+2\sum_{k=1}^{U}G(k)\cos\left(\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right\} \qquad U=\frac{M-1}{2}=8$$

$$h(0)=\frac{1}{17}\left\{1+2\left(-1*\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)+1*\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)-1*\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right)+1*\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\right)\right\}=3.979893073E-2=h(16)$$

siguiendo estos cálculos se obtienen los demás coeficientes

h(1)= -4.880530080812121e - 002= *h*(15)
h(2)= -3.459323915018796e - 002= *h*(14)
h(3)= 6.598437025829422e - 002= *h*(13)
h(4)= 3.154170577784391e - 002= *h*(12)
h(5)= -1.074743965127885e - 001= *h*(11)
h(6)= -2.992123051519975e - 002= *h*(10)
h(7)= 3.187632778664535e - 001= *h*(9)
h(8)= 5.294117647058824e - 001

b) Obtenga la magnitud del espectro determinado por los coeficientes *h(n)*

Solución. Se usa la DCT evaluada en *h(n)* para obtener H(*k*)

$$H(k)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

En este caso, *M*=17=*N*

$$H(0)=\sum_{n=0}^{16}h(n)=1 \quad abs(H(0))=1$$

$$\begin{aligned}H(1)=&\,h(0)\left(1+e^{-j2\pi(16/17)}\right)+h(1)\left(e^{-j2\pi(1/17)}+e^{-j2\pi(15/17)}\right)+h(2)\left(e^{-j2\pi(2/17)}+e^{-j2\pi(14/17)}\right)+h(3)\left(e^{-j2\pi(3/17)}+e^{-j2\pi(13/17)}\right)\\&+h(4)\left(e^{-j2\pi(4/17)}+e^{-j2\pi(12/17)}\right)+h(5)\left(e^{-j2\pi(5/17)}+e^{-j2\pi(11/17)}\right)+h(6)\left(e^{-j2\pi(6/17)}+e^{-j2\pi(10/17)}\right)\\&+h(7)\left(e^{-j2\pi(7/17)}+e^{-j2\pi(9/17)}\right)+\quad h(8)e^{-j2\pi(8/17)} \quad abs(H(1))=1\end{aligned}$$

siguiendo estos cálculos se obtienen los demás valores del espectro de *H(k)*

abs(*H*(2)*)=1 abs*(*H*(9))=0
abs(*H*(3))=1 *abs*(*H*(10))=0
abs(*H*(4))=1 *abs*(*H*(11))=0
abs(*H*(5))=0 *abs*(*H*(12))=0
abs(*H*(6))=0 *abs*(*H*(13))=1
abs(*H*(7))=0 *abs*(*H*(14))=1
abs(*H*(8))=0 *abs*(*H*(15))=1
abs(*H*(9))=0 *abs*(*H*(16))=1

c) ¿Que se puede concluir entre los puntos a) y b)?

Solución. Es de esperarse que la magnitud de la DFT de *h(n)* genere el espectro que determina las condiciones de filtrado dadas por *H*r como se observa en las siguientes figuras.

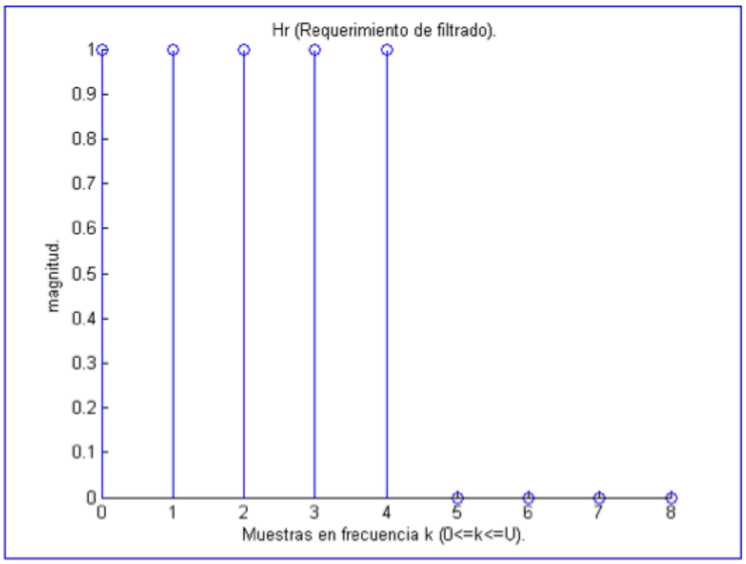

Figura 1.

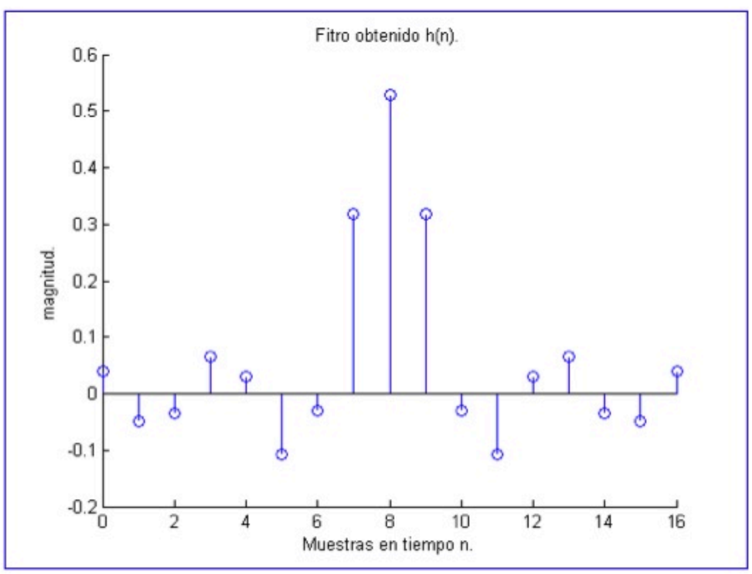

Figura 2.

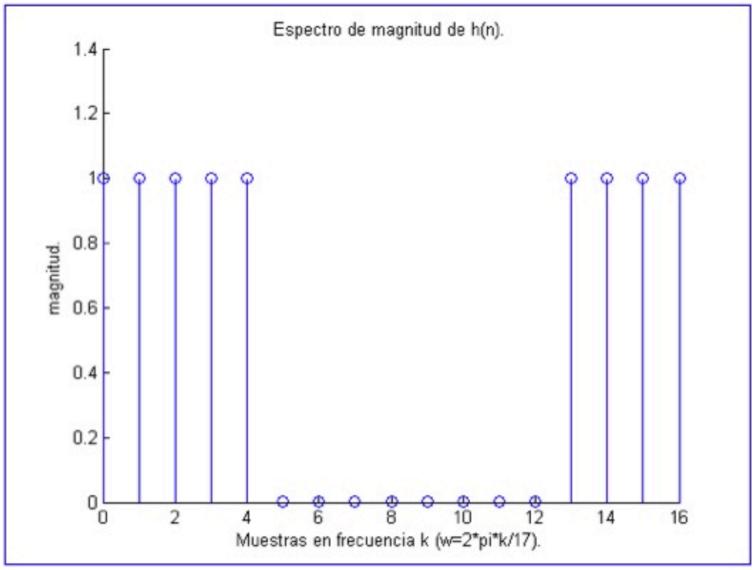

Figura 3.

2. EJERCICIOS PROPUESTOS FILTRO FIR MUESTREO EN FRECUENCIA.

a) Determine la respuesta impulsional {h(n)} de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M=4$ para el cual la respuesta en frecuencia en $\omega=0$ y $\omega=\pi/2$ se especifica como

$$H_r(0)=1 \quad H_r\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

b) Repita el problema del ejemplo considerando antisimetría (β=1).

c) Dado un filtro FIR de fase lineal de longitud $M=13$ que tiene una respuesta impulsional simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface las condiciones

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{13}\right)=\begin{cases} 0 & k=2,4,6 \\ 5.0e-1 & k=0 \\ 3.18310\text{e-}1 & k=1 \\ 1.06103\text{e-}1 & k=3 \\ 6.36620\text{e-}2 & k=5 \end{cases}$$

determine los coeficientes h(n) y obtenga H_r a partir de los h(n) hallados.

d) Repita el problema c) considerando los demás casos para α y β.

3. EJERCICIO CONCEPTUAL DE FILTRADO DE EJEMPLO

En la Figura 4, se muestra la respuesta impulsional de un filtro analógico.

a) Sea $h(n)=h_a(nT)$, donde T=1, la respuesta impulsional del filtro discreto. Determine la función de transferencia $H(z)$ y la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para este filtro.

Solución.

h(n) es simétrico, M=11 impar.

$$H(z)=(a/5)z^{-1}+(2a/5)z^{-2}+(3a/5)z^{-3}+(4a/5)z^{-4}+(5a/5)z^{-5}+(4a/5)z^{-6}+(3a/5)z^{-7}+(2a/5)z^{-8}+(a/5)z^{-9}$$

$$H(z)=(5a/5)z^{-5}+(a/5)\left[z^{-1}+z^{-9}\right]+(2a/5)\left[z^{-2}+z^{-8}\right]+(3a/5)\left[z^{-3}+z^{-7}\right]+(4a/5)\left[z^{-4}+z^{-6}\right]$$

$$H(z)=z^{-5}\left\{(5a/5)+(a/5)\left[z^{4}+z^{-4}\right]+(2a/5)\left[z^{3}+z^{-3}\right]+(3a/5)\left[z^{2}+z^{-2}\right]+(4a/5)\left[z^{1}+z^{-1}\right]\right\}$$

$$H(\omega)=e^{-5j\omega}\left\{(5a/5)+(a/5)\left[e^{4j\omega}+e^{-4j\omega}\right]+(2a/5)\left[e^{3j\omega}+e^{-3j\omega}\right]+(3a/5)\left[e^{2j\omega}+e^{-2j\omega}\right]+(4a/5)\left[e^{1j\omega}+e^{-1j\omega}\right]\right\}$$

$$H(\omega)=\left\{(5a/5)+(2a/5)\cos(4\omega)+(4a/5)\cos(3\omega)+(6a/5)\cos(2\omega)+(8a/5)\cos(\omega)\right\}e^{-5j\omega}$$

$$H(\omega)=(5a/5)e^{-5j\omega}+(a/5)\left[e^{-j\omega}+e^{-j9\omega}\right]+(2a/5)\left[e^{-2j\omega}+e^{-j8\omega}\right]+(3a/5)\left[e^{-j3\omega}+e^{-j7\omega}\right]+(4a/5)\left[e^{-j4\omega}+e^{-j6\omega}\right]$$

b) Dibuje $|H(\omega)|$ y de una buena conclusión.

Solución.

Se calcula la respuesta del filtro para valores notables en frecuencia.

$H(\omega=0)$=(5a/5)+(2a/5)+(4a/5)+(6a/5)+(8a/5)=5a.

Usando la ecuación

$$H(\omega)=\left\{(5a/5)+(2a/5)\cos(4\omega)+(4a/5)\cos(3\omega)+(6a/5)\cos(2\omega)+(8a/5)\cos(\omega)\right\}e^{-5j\omega}$$

se puede observar facilmente que

$$|H(\omega)|=(5a/5)+(2a/5)\cos(4\omega)+(4a/5)\cos(3\omega)+(6a/5)\cos(2\omega)+(8a/5)\cos(\omega)$$

$$\langle H(\omega)=-5\omega$$

y se obtienen los siguientes valores (calcularlos).

ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
Mag(H(ω))					
Ángulo(H(ω))					

Se puede concluir que, para los valores tipicos en frecuencia este filtro tiene una respuesta pasabajo. Es muy fácil darse cuenta que la respuesta de fase es lineal cuya gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente -5.

Analicen las funciones de este código elemental; al ejecutarlo, ¿que pueden concluir?

```
a=1;
Bd=[0 a/5 2*a/5 3*a/5 4*a/5 5*a/5 4*a/5 3*a/5 2*a/5 a/5 0];
Ad=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
freqz(Bd,Ad,128);
figure;
impz(Bd,Ad);
```

c) Obtenga $h(n)$ a partir de la especificación de $H(\omega_k)$ y compare el resultado obtenido con $h(n)=h_a(nT)$ del punto a) dando una buena conclusión.

Solución.

$$H_r\left(\omega_k = \frac{2\pi k}{11}\right) = \left\{(5a/5) + (2a/5)\cos\left(4\frac{2\pi k}{11}\right) + (4a/5)\cos\left(3\frac{2\pi k}{11}\right) + (6a/5)\cos\left(2\frac{2\pi k}{11}\right) + (8a/5)\cos\left(\frac{2\pi k}{11}\right)\right\}$$

$$H_r(k=0) = 5a,\quad H_r(k=1) = 2.4687a,\quad H_r(k=2) = 0.0543a,\quad H_r(k=3) = 0.2897a,\quad H_r(k=4) = 0.0707a,\quad H_r(k=5) = 0.1166a$$

$$h(n) = \frac{1}{11}\left\{5a + 2\sum_{k=1}^{5} G(k)\cos\frac{2\pi k}{11}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$h(0) = \frac{1}{11}\left\{5a + 2a\left[-2.4687 * \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\right] + 0.0543 * \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) - 0.2897 * \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 0.0707 * \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) - 0.1166 * \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\right\} = 0$$

$$h(1) = \frac{1}{11}\left\{5a + 2a\left[-2.4687 * \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)\right] + 0.0543 * \cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) - 0.2897 * \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) + 0.0707 * \cos\left(\frac{12\pi}{11}\right) - 0.1166 * \cos\left(\frac{15\pi}{11}\right)\right\} = \frac{a}{5}$$

$$h(2) = \frac{2a}{5},\quad h(3) = \frac{3a}{5},\quad h(4) = \frac{4a}{5},\quad h(5) = a$$

Al comparar los coeficientes obtenidos son iguales a la respuesta impulsional discretizada con T=1 del filtro analógico del punto a).

Conclusión: El método de diseño de filtros FIR mediante el método de muestreo en frecuencia esta basado en la transformada inversa de Fourier discreta.

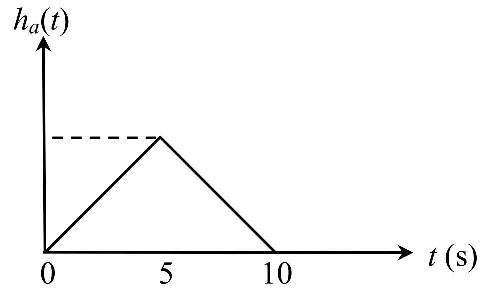

Figura 4

4. EJERCICIOS PROPUESTOS FILTROS IIR

Considere el filtro paso bajo de un polo simple $H(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha} \Leftrightarrow h_a(t) = e^{-\alpha t}$.

a) Halle la funcion de transferencia digital $H(z)$ usando el método de varianza impulsional para el filtro analógico. Valor 0.5 puntos. Usando $|H(z)|$calcule la ganancia en continua. Usando $|H(z)|$ calcule el valor de frecuencia digital para la cual la respuesta en frecuencia es cero.
b) Halle la funcion de transferencia digital $H(z)$ usando el método de la transformación bilineal para el filtro analógico. Usando $|H(z)|$calcule la ganancia en continua. Usando $|H(z)|$ calcule el valor de frecuencia digital para la cual la respuesta en frecuencia es cero.

DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k=0,1,2,\ldots,N-1 \quad Ec.(1)$$

IDFT

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi kn/N} \quad k=0,1,2,\ldots,N-1 \quad Ec.(2)$$

$$H(k)=G(k)e^{j\pi k/M} \quad k=0,1,2,\ldots,M-1 \quad Ec.(3)$$

$$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad Ec.(4)$$

$$h(n)=\frac{1}{M}\left\{G(0)+2\sum_{k=1}^{U}G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\} \qquad U=\begin{cases}\frac{M-1}{2} & M \text{ impar}\\ \frac{M}{2}-1 & M \text{ par}\end{cases} \quad Ec.(5)$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)z^{-k}\ Ec.(6) \quad H(\omega)=\sum_{n=0}^{M-1}h(n)e^{-j\omega n}\ Ec.(7) \quad z=e^{sT}=re^{j\omega}\ Ec.(8) \quad s=\sigma+j\Omega\ Ec.(9)$$

Diseño varianza impulsional

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{s-p_k}\ Ec.(10) \quad h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{p_k t},\ t\ge 0\ Ec.(11) \quad H(z)=\sum\frac{c_k}{1-e^{p_k T}z^{-1}}\ Ec.(12)$$

Diseño transformacion bilineal

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}\ Ec.(13) \quad s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)Ec.(14)$$

5. ALGUNAS FUNCIONES DE FILTRO EN MATLAB

Normalización de frecuencia en el Toolbox de Procesamiento de Señales

Todas las funciones del Signal Processing Toolbox operan con frecuencias normalizadas por defecto, por lo que estas funciones no requieren de argumentos de entrada adicionales para especificar la frecuencia de muestreo del sistema. En este Toolbox se adopta la frecuencia unidad como la *frecuencia de Nyquist,* definida como la mitad de la frecuencia de muestreo. Por lo tanto, la frecuencia normalizada se expresa en el rango de $0 \le fa \le 1$.

Por ejemplo, para un sistema con frecuencia de muestreo de 1000 Hz, su frecuencia Nyquist es 500. Con estos datos, la frecuencia de 300 Hz equivale en frecuencia normalizada a 300/500=0.6.

Para convertir de frecuencia normalizada en frecuencia angular alrededor del círculo unitario solo basta por multiplicarla por π. Para convertir la frecuencia normalizada en Hertz, solo es necesario la multiplicación por la mitad de la frecuencia de muestreo.

Funciones prácticas de Matlab

a) Funciones para análisis de filtros

abs: Valor absoluto – magnitud
angle: Cálculo de la fase
freqs: Respuesta en frecuencia de filtros análogos
freqspace: Genera el espaciamiento enfrecuencia (ejehorizontal) para respuestas en frecuencias
freqz: Respuesta en frecuencia de filtros digitales
freqzplot: Gráfico de la respuesta en frecuencia de datos
grpdelay: Calcula el retardo promedio del filtro (retardo de grupo)

impz: Calcula la respuesta impulsional de filtros digitales
unwrap: Corrige ángulos de fase adicionando múltiplos de $\pm 2\pi$
zplane: Gráfico de polos y ceros

b) **Funciones para la implementación de filtros**

conv: Convolución y multiplicación de polinomios
conv2: Convolución de dos dimensiones
deconv: De-convolución y división de polinomios Aplicación de filtrado digital con técnicas recursiva (IIR) o no-recursiva (FIR)
fftfilt: FFT basada en el filtrado FIR que usa el método overlap-add
filter: Aplicación de filtrado digital con técnicas recursiva (IIR) o no-recursiva (FIR)
filter2: Filtrado digital en dos dimensiones
filtfilt: Filtrado digital de fase cero
filtic: Encuentra condiciones iniciales para implementación de filtros en forma directa II transpuesta
latcfilt: Implementación de filtros en celosías y celosías-escalera (lattice, lattice-ladder)
medfilt1: Filtro mediana unidimensional
sgolayfilt: filtro Savitzky-Golay
sosfilt: Filtro digital IIR de segundo orden (bicuadrático)
upfirdn: Aplica las operaciones de interpolación, filtrado con FIR, y diezmado

c) **Diseño de filtros digitales FIR**

convmtx: Convolución con matrices
cremez: Diseño de filtros FIR equi-rizado de fase no-lineal y complejo
fir1: Diseña un filtro FIR mediante el método de enventanado
fir2: Diseña un filtro FIR mediante el método de muestreo en frecuencia
fircls: Diseña un filtro FIR por mínimos cuadrados para filtros multibanda
fircls1: Igual que el anterior, pero para paso-bajos y paso-altos de fase lineal.
firls: Diseño de filtros de fase lineal por mínimos cuadrados
firrcos: Diseño de filtros FIR de fase lineal con banda de transición coseno en relieve
intfilt: Diseño por interpolación de filtros FIR de F-L
kaiserord: Estima parámetros de un filtro FIR diseñado con ventana Kaiser
remez: Calcula el filtro óptimo FIR mediante Parks-McClellan
remezord: Estimación del orden óptimo de filtros según Parks-McClellan
sgolay: Diseño de filtros Savitzky-Golay de alisamiento

d) Diseño de filtros IIR

butter: Diseño de filtros Butterworth analogos y digitales
cheby1: Diseño de filtros Chebyshev Tipo I (Banda de paso con rizado)
cheby2: Diseño de filtros Chebyshev Tipo II (Banda de rechazo con rizado)
ellip: Diseño de filtros Elípticos (Cauer)
maxflat: Diseño de filtros digitales Butterworth generalizados
prony: Diseño de filtros IIR por el método de Prony
stmcb: Cálculo de modelo lineal usando la iteración de Steiglitz-McBride
yulewalk: Diseño de filtros digitales recursivos

e) Estimación del orden de filtros IIR

buttord: Calcula el orden y frecuencia de corte de un filtro Butterworth
cheb1ord: Calcula el orden para un filtro Chebyshev Tipo I
cheb2ord: Calcula el orden para un filtro Chebyshev Tipo II
ellipord: Calcula el mínimo orden para filtros elípticos

f) Transformación de filtros analógicos

lp2bp: Transforma filtros análogos paso-bajos a banda de paso
lp2bs: Transforma filtros análogos paso-bajos a banda de rechazo
lp2hp: Transforma filtros análogos paso-bajos a paso-altos
lp2lp: Cambia la frecuencia de corte de un filtro análogo paso-bajo

g) Discretización de filtros

bilinear: Transformación Bilineal para convertir filtros análogos a digital
impinvar: Método de invarianza impulsional para convertir filtros análogos a digital

h) Parámetros para el diseño de filtros por Enventanado

barthannwin: Calcula los parámetros de la ventana Bartlett-Hann
bartlett: Calcula los parámetros de la ventana Bartlett
blackman: Calcula los parámetros de la ventana Blackman
blackmanharris: Calcula los parámetros de la ventana Blackman-Harris
bohmanwin: Calcula los parámetros de la ventana Bohman
chebwin: Calcula los parámetros de la ventana Chebyshev
gausswin: Calcula los parámetros de la ventana Gaussian
hamming: Calcula los parámetros de la ventana Hamming
hann: Calcula los parámetros de la ventana Hann (Hanning)
kaiser: Calcula los parámetros de la ventana Kaiser window
nuttallwin: Calcula los parámetros de la ventana Nuttall-defined /Blackman-Harris
rectwin: Calcula los parámetros de la ventana rectangular
triang: Calcula los parámetros de la ventana triangular
tukeywin: Calcula los parámetros de la ventana Tukey
window: Función pasarela para calcular los parámetros de diferentes ventanas

6. RECOMENDACIONES

Se recomienda a los estudiantes haber realizado este taller y el siguiente trabajo independiente listo para el ocho de febrero de 2022.

a) Estudiar el análisis y diseño de filtros IIR digitales con sus respectiva técnicas: Transformación Bilineal, Invarianza impulsional y Técnica de Aproximación por Derivadas. Esta teoría la pueden estudiar del libro de Proakis.
b) Usando la ayuda de Matlab, estudiar cuidadosamente las funciones `abs`, `angle`, `freqs`, `freqz`, `impz`, `filter`, `fir1`, `fir2`, `butter`, `cheby1`, `cheby2`, `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord`, `bilinear`, `impinvar`.

Por: I.E. Vladimir Mosquera Cerquera Ms. C.