Densidad espectral de potencia de señales *periódicas y discretas*

- La potencia media de una señal periódica en tiempo discreto con periodo N se define como:

$$Px = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left| x(n) \right|^2$$

Al reemplazar la definición de la serie de Fourier se tiene,

$$Px = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, x^*(n) \qquad Px = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \, e^{-j2\pi\, kn/N}\right]$$

$$Px = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi\, kn/N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \left| c_k \right|^2$$

- Lo anterior significa que la potencia media de la señal es la suma de las potencias medias de las componentes individuales en frecuencia.
  - Relación de Parseval para señales periódicas en tiempo discreto.
- **Densidad espectral de potencia** es la secuencia $|\, c_k \,|^2$ para k=0, 1,…, N-1 en función de la frecuencia. $\rightarrow$ espectro discreto y periódico.
- **Energía en un periodo**

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x(n) \right|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} \left| c_k \right|^2$$

Señal periódica en tiempo *discreto* y *real*

- Una señal real cumple que $x^*(n)=x(n)$ por lo tanto,

$$c_k^* = c_{-k} \qquad \text{o de forma equivalente,}$$

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \text{(simetría par)} \qquad \text{y} \qquad -\angle c_{-k} = \angle c_k \quad \text{(simetría impar)}$$

- Las anteriores propiedades tienen importantes consecuencias en el rango de frecuencias de las señales en tiempo discreto.
- Puesto que los coeficientes de Fourier de una señal periódica son también periódicos:

$$\begin{array}{lll}
\textit{Magnitud} & \textit{Fase} & \\
|c_k| = |c_{N-k}| & \angle c_k = -\angle c_{N-k} & \\
|c_0| = |c_N| & \angle c_0 = -\angle c_N = 0 & \\
|c_1| = |c_{N-1}| & \angle c_1 = -\angle c_{N-1} & \\
\vdots & \vdots & \\
|c_{N/2}| = |c_{N/2}| & \angle c_{N/2} = 0 & \text{si N es par} \\
|c_{(N-1)/2}| = |c_{(N+1)/2}| & \angle c_{(N-1)/2} = -\angle c_{(N+1)/2} & \text{si N es impar}
\end{array}$$

- Se puede deducir que para una **señal real, el espectro c_k,** k= 0, 1,…N/2 para N par, ó k= 0, 1,…(N-1)/2 para N impar**, especifíca completamente la señal en el dominio de la frecuencia.** → **La frecuencia relativa más alta representada por una señal discreta es π:**

$$0 \le w_k = 2\pi k / N \le \pi \qquad \text{entonces} \qquad 0 \le k \le N/2$$

▸▸ Forma alternativas para la serie de Fourier de una señal discreta periódica y *real*.

$$x(n) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{L} |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\, n + \theta_k\right)$$

$$x(n) = a_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N} k\, n - b_k\, sen\frac{2\pi}{N} k\, n\right)$$

$$a_0 = c_0,\; a_k = 2|c_k| \cos\theta_k,\;\; b_k = 2|c_k|\, sen\,\theta_k\,,$$

L = N/2 si N es par ó L = (N - 1)/2 si N es impar

▸▸ **Ejemplo.** Determinar los coeficientes de la serie de Fourier y la densidad espectral de potencia de la señal cuadadrada de amplitud A y periodo N.

$$x(n) = \begin{cases} A & n = 0,1,\ldots, L-1 \\ 0 & n = L, L+1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Solución

Aplicando la definición se tiene,

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\, kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j2\pi\, kn/N} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Luego de manipulaciones matemáticas, los coeficientes se expresan como:

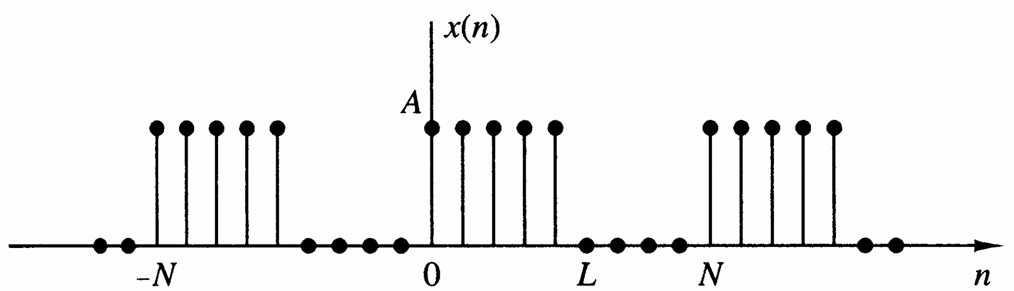
$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0,+N,\pm 2N,\ldots \\ \dfrac{A}{N} e^{-j\pi\, k(L-1)/N} \dfrac{sen(\pi\; k\, L/N)}{sen(\pi\; k/N)} & \text{otro valor de } k \end{cases}$$

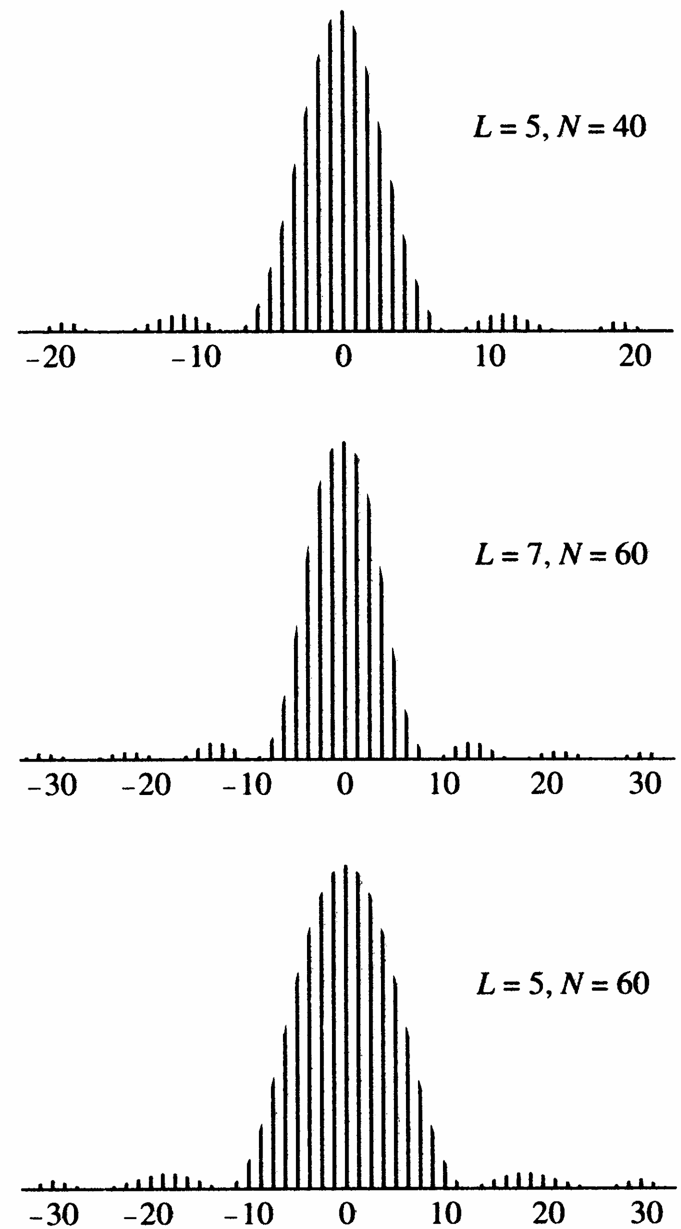
y la densidad espectral queda determinada por:

$$\left|c_k\right|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2 & k = 0,+N,\pm 2N,\ldots \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2 \left(\dfrac{sen(\pi\; k\, L/N)}{sen(\pi\; k/N)}\right)^2 & \text{otro valor de } k \end{cases}$$

Señal periódica cuadrada en tiempo discreto

$$x(n)=\begin{cases} A & n=0,1,\ldots,L-1 \\ 0 & n=L,L+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$





Densidad espectral de potencia $\Rightarrow$

$$|c_k|^2=\begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2 & k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2\left(\dfrac{sen(\pi\ kL/N)}{sen(\pi\ k/N)}\right)^2 & \text{otro valor de } k \end{cases}$$

Transformada de Fourier de Señales *Discretas Aperiódicas*

Introducción

- La transformada de Fourier de una señal de energía finita en tiempo discreto x(n) se define como,

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}$$

- Físicamente, X(w) representa el contenido en frecuencia de x(n). De otro modo, X(w) es una descoposición de x(n) en sus componentes frecuenciales.

- **Diferencias** entre transformadas de Fourier de tiempo discreto y continuo.

  - **Señal continua**

    - La transformada de Fourier tiene un rango de frecuencia que va desde - ∞ hasta + ∞.
    - La transformada de Fourier implica una integral.

  - **Señal discreta**

    - La transformada de Fourier tiene un rango de frecuencia que va desde -π a π (ó de 0 a 2 π).
    - La transformada de Fourier implica una sumatoria.

Periodicidad de la transformada de Fourier de una señal discreta

$$X(w+2\pi k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(w+2\pi k)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}e^{-j2\pi k n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}=X(w)$$

- Esta propiedad es consecuencia del hecho de que cualquier señal en tiempo discreto tiene un rango de frecuencia igual a (-π, π) ó (0, 2 π), y cualquier frecuencia fuera de este intervalo es equivalente a una en su interior.

TRANSFORMADA INVERSA

- De la definición de la transformada de Fourier se observa que X(w) tiene la forma de una serie de Fourier, donde los coeficientes de esta serie son los valores de la secuencia x(n).

$$X(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-jwn}$$

- **Demostración**

Multiplicando la expresión de X(w) por $\mathbf{e^{j\,w\,m}}$ e integrando sobre el intervalo (-π, π) se tiene,

$$\int_{-\pi}^{\pi}X(w)e^{jwm}\,dw=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-jwn}\right]e^{jwm}\,dw$$

Si la **serie converge** puede **intercambiarse** la integral y el sumatorio del <u>**lado derecho**</u>. Con esto se da solución a la integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{jw(m-n)}\,dw=\begin{cases}2\pi & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)}\, dw = \begin{cases} 2\pi\; x(n) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

lo que resulta en la expresión de la **Transformada Inversa de Fourier** para la señal aperiódica

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn}\, dw$$

- **Ejemplo.** Obtener la *transformada inversa* de Fourier de una señal ***rectangular.***

$$X(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq w_c \\ 0 & w_c < |w| \leq \pi \end{cases}$$

$\therefore$ Señal de energía finita con periodo 2π

Aplicando la definición,

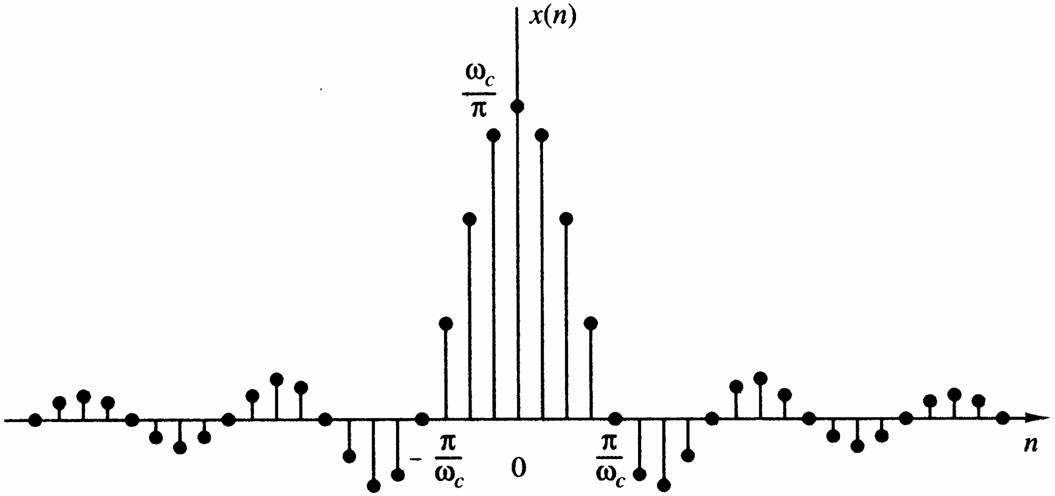
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jwn}\, dw = \frac{sen\,(w_c\, n)}{\pi\, n} \qquad n \neq 0, \qquad\qquad x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} dw = \frac{w_c}{\pi}$$

Finalmente se llega a una señal sinc:

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{w_c}{\pi} & n = 0 \\ \dfrac{w_c}{\pi}\; \dfrac{sen\,(w_c\, n)}{w_c\;\, n} & n \neq 0 \end{cases}$$

Señal sinc en tiempo discreto

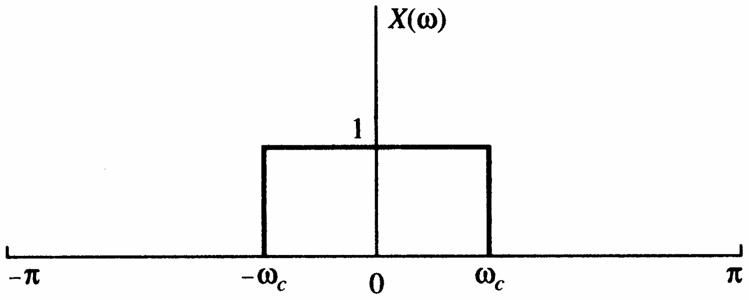
$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{w_c}{\pi} & n = 0 \\ \dfrac{w_c}{\pi} \dfrac{sen\,(w_c\, n)}{w_c\ n} & n \neq 0 \end{cases}$$



(a)

Espectro de Fourier

$$X(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq w_c \\ 0 & w_c < |w| \leq \pi \end{cases}$$



(b)

- **Ejemplo.** Encontrar la transformada de Fourier de la señal

$$x(n)=\frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n} \qquad -\infty < n < \infty \quad \text{con} \quad x(0)=\frac{w_c}{\pi}$$

  - *x*(n) no es absolutamente sumable, pero si es cuadráticamente sumable y por lo tanto es de energía finita igual a $\mathbf{E_x = w_c/\pi}$

- Aplicando la definición,

$$X(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n}\,e^{-jwn}$$

  - De lo anterior se desprende que la serie infinita de la transformada *no converge uniformemente* para todo *w*, pero sí lo hace *de forma cuadrática*.

- Para analizar este comportamiento, se considera la suma sobre un intervalo finito,

$$X_N(w)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n}\,e^{-jwn}$$

  - Se presentan oscilaciones fuertes al rededor de w_c
  - La amplitud de las oscilaciones se mantienen independientemente de N.
  - La frecuencia de las oscilaciones aumenta con N.
  - Cuando N $\rightarrow \infty$ las oscilaciones convergen a la discontinuidad en $w=w_c$
  - **El comportamiento oscilante de $X_N(w)$ que aproxima a la función $X(w)$ en el punto de discontinuidad de $X(w)$ se denomina fenómeno de Gibbs.**

Ilustración de la convergencia de la transformada de Fourier y el fenómeno de Gibbs en la discontinuidad

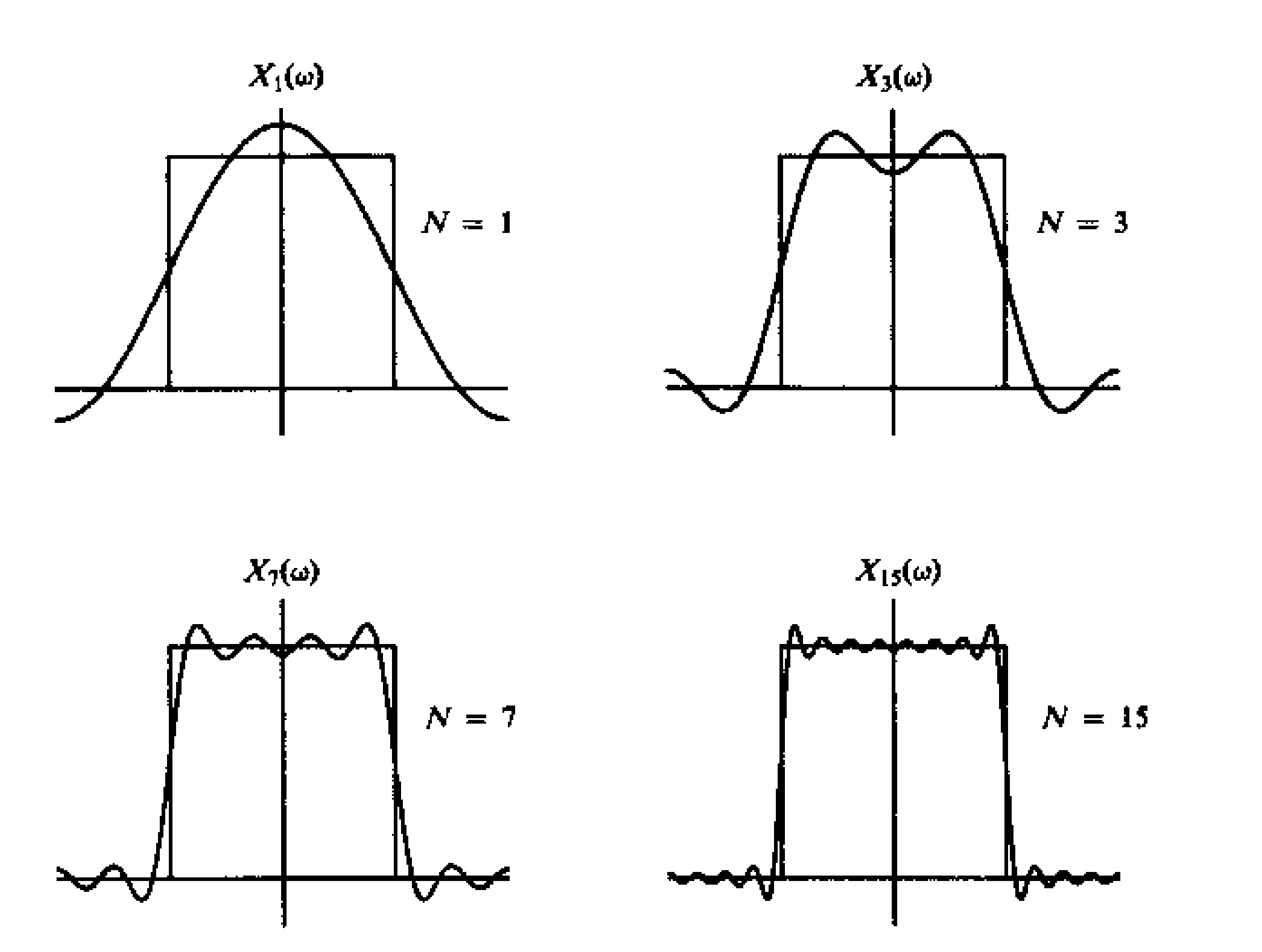
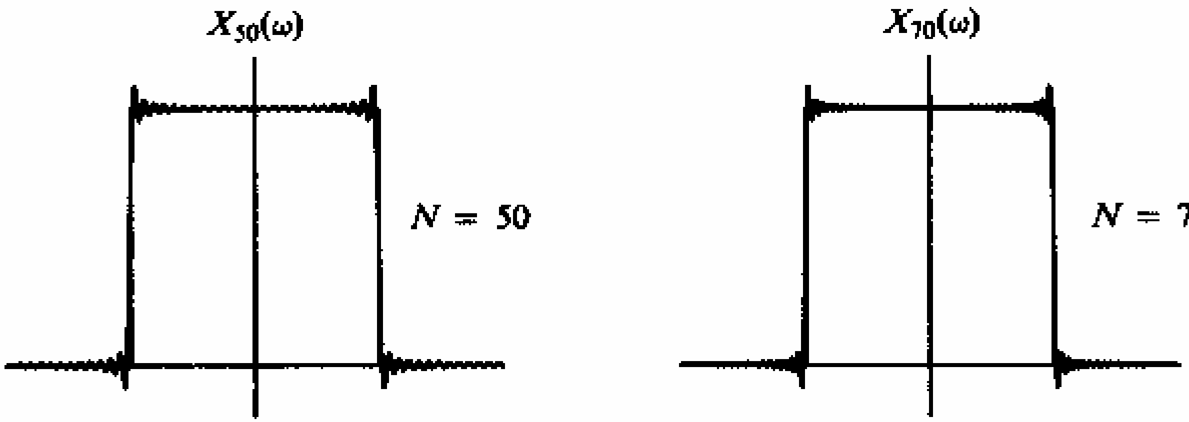


Ilustración de la convergencia de la transformada de Fourier y el fenómeno de Gibbs en la discontinuidad



Densidad espectral de energía de señales *discretas aperiódicas*

- Por definición

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2$$

- Utilizando la definición de la transformada inversa de Fourier,

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(w) e^{-jwn}\, dw \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(w) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn} \right] dw$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(w) \right|^2\, dw$$

- Por lo tanto, la relación de energía entre x(n) y X(*w*) está dada por:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(w) \right|^2\, dw$$

ecuación que expresa la Relación de Parseval para señales discretas aperiódicas.

Densidad espectral de energía $S_{xx}(w)$

- En forma general X(*w*) es complejo, por lo que puede expresarse como

$X(w) = \left| X(w) \right| e^{j\Theta(w)}$ donde $\left| X(w) \right|$ es la magnitud y $\Theta(\mathrm{w}) = \angle X(w)$ es la fase del espectro

- La densidad espectral se define como,

$$S_{xx}(w) = \left| X(w) \right|^2$$

Densidad espectral de energía $S_{xx}(w)$ (suite)

- Si la señal **x(n) es real**, entonces

$$X^*(w) = X(-w)$$

$$|X(-w)| = |X(w)| \qquad \text{(presenta simetría par)}$$

$$\angle X(-w) = -\angle X(w) \qquad \text{(presenta simetría impar)}$$

$$\text{Luego,} \quad S_{xx}(-w) = S_{xx}(w) \qquad \text{(presenta simetría par)}$$

- De las propiedades de simetría se concluye que el rango de frecuencias para señales reales discretas aperiódicas puede limitarse a $0 \leq w \leq \pi$ (la mitad del periodo). La otra mitad puede determinarse a partir de las condiciones de simetría.

Observación

- **Puesto que las condiciones de simetría se conservan para señales discretas *periódicas* y *aperiódicas*, la descripción en el dominio de la frecuencia de una señal real en tiempo discreto se especifica completamente por su espectro en el rango $0 \leq w \leq \pi$**

Ejemplo 1. Determinar la transformada y la densidad espectral de energía de la señal,

$$x(n) = a^n u(n) \qquad -1 < a < 1$$

- Puesto que |a | < 1, la secuencia x(n) es absolutamente sumable,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} \quad < \infty$$

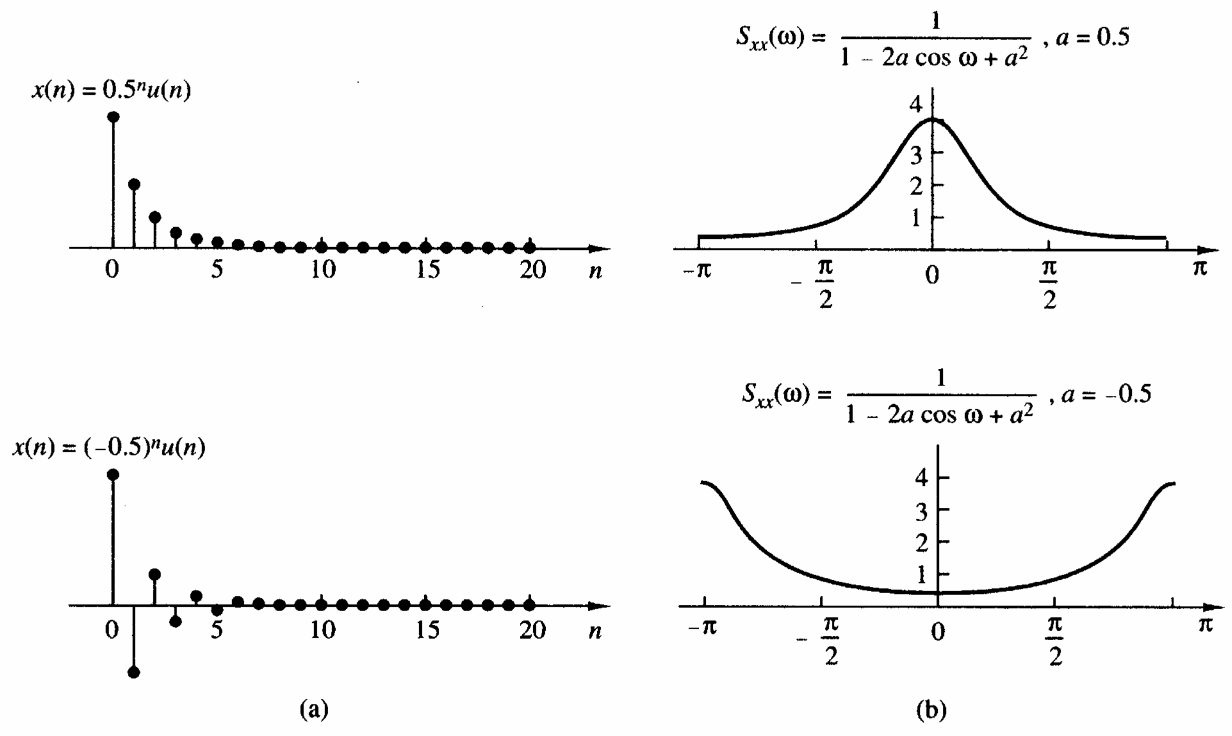
Solución

- La transformada de Fourier de x(n) existe y está dada por,

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\ e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a\ e^{-jw}\right)^n = \frac{1}{1 - a\ e^{-jw}}$$

- La densidad espectral de energía viene dada por,

$$S_{xx}(w) = \left|X(w)\right|^2 = X(w)X^*(w) = \frac{1}{\left(1 - a\ e^{-jw}\right)\left(1 - a\ e^{jw}\right)} = \frac{1}{1 - 2a\cos w + a^2}$$



Ejemplo 2. Determinar la transformada de Fourier y la densidad espectral de energía de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución

- La señal x(n) es de energía finita y es absolutamente sumable $\rightarrow$ su transformada existe.

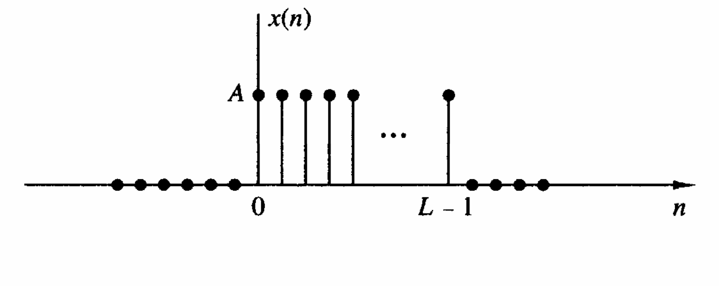
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty \qquad\qquad E_x = L\,|A|^2$$

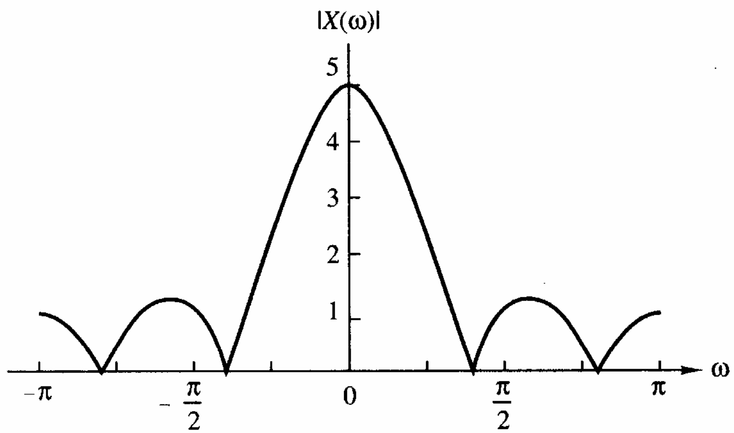
- La transformada de Fourier está dada por,

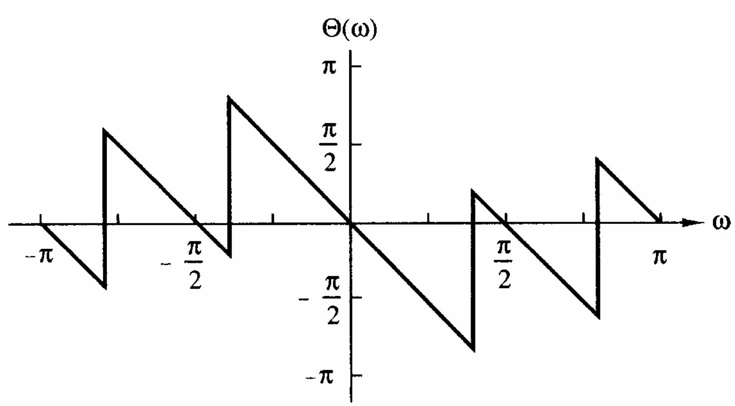
$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} A\, e^{-jwn} = A\frac{1-e^{-jwL}}{1-e^{-jw}} = Ae^{-j(w/2)(L-1)}\frac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}$$

- La magnitud y fase del espectro de x(n) son,

$$|X(w)| = \begin{cases} |A|\,L & w = 0 \\ |A|\left|\dfrac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}\right| & \text{otro } w \end{cases} \qquad \angle X(w) = \angle A - \frac{w}{2}(L-1) + \angle\frac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}$$







- Al evaluar la transformada de Fourier en un conjunto de frecuencias armónicamente relacionadas,

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Ae^{-j(\pi/N)k(L-1)}\frac{sen\left[(\pi/N)kL\right]}{sen\left[(\pi/N)k\right]}$$

- y comparar el resultado con los coeficientes de Fourier de la respectiva onda rectangular *periódica*, se encuentra que

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = N\,c_k \qquad \text{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- **La T.F. de un solo pulso rectangular evaluado en un conjunto de frecuencias armónicas, es simplemente un múltiplo de los Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$ de la correspondiente señal periódica.**

  - Lo anterior se cumple para todas las señales !!

Relación: Transformada de Fourier - Transformada Z

- La transformada z se define como,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad ROC:\ r_2 < |z| < r_1$$

- La variable compleja z puede expresarse en forma polar como **z= r e** ^{jw}, por lo tanto se puede sustituir en X(z) dentro de la ROC.

$$X(z)\,\Big|_{z=re^{jw}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)\, r^{-n}\right] e^{-jwn}$$

- La expresión anterior puede considerarse como la transformada de Fourier de la secuencia x(*n*) r^{-n}. El factor r^{-n} crece con *n* si r<1 y decrece si r>1.
- Si X(z) converge para | z | = 1,

$$X(z)\,\Big|_{z=e^{jw}} \equiv X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\; e^{-jwn}$$

- La T. F. puede interpretarse como la transformada z de la secuencia x(n) evaluada sobre la circunferencia unidad.

  - Si |z| =1 no pertenece a la ROC de X(z) $\rightarrow$ la T.F. X (*w*) no existe.
  - *Existen señales con transformada z pero sin T.F.* *Ej.* $x(n) = a^n\, u(n)$
  - *Existen señales con T.F. y sin transformadas z.* *Ej.* $x(n) = \dfrac{sen\,(w_c\, n)}{\pi\; n}$

Transformada de Fourier de señales con polos en el círculo unitario.

- La T.F. de una secuencia $x(n)$ puede obtenerse evaluando su transformada z sobre la circunferencia unidad, siempre y cuando la circunferencia se encuentre en la ROC.
- Existen secuencias aperiódicas que no son ni absoluta ni cuadráticamente sumables. Por lo tanto su T.F. no existe. Estas secuencias tienen polos sobre la circunferencia unidad. Algunos ejemplos son,

$$x(n) = u(n) \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$x(n) = \cos(w_0\, n)\, u(n) \qquad X(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos w_0}{1 - 2 z^{-1} \cos w_0 + z^{-2}}$$

- **Si se permite que la T.F., X(*w*), tenga *impulsos* en las frecuencias que corresponden a las frecuencias de los polos de X(*z*) sobre la circunferencia unidad, puede calcularse la T.F. de señales que no son ni absoluta ni cuadráticamente sumables.**

- **Ejemplo 1**. Determine la transformada de Fourier de la señal $x_1(n) = u(n)$
  - $x_1(n)$ tiene transformada z dada por, $X_1(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z - 1}$ $\qquad ROC : |z| > 1$
  - luego, $$X_1(w) = \frac{e^{jw/2}}{2\, j\, sen(w/2)} = \frac{1}{2\, sen(w/2)} e^{j(w - \pi/2)} \qquad w \neq 2\pi\ k \quad k = 0,1,\ldots$$
  - $X_1(w)$ contiene impulsos de área π en w=0 y múltiplos de 2 π.

Ejemplo 2. Encuentre la transformada de Fourier de $x_2(n) = (-1)^n \; u(n)$

- $x_2(n)$ tiene transformada z dada por

$$X_1(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \qquad ROC: |z| > 1$$

- Luego,

$$X_2(w) = \frac{e^{jw/2}}{2\cos(w/2)} \quad w \neq 2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right) \quad k = 0,1,\ldots$$

Los impulsos se producen en $w = \pi + 2\pi k$.

- El **módulo** del espectro es,

$$|X_2(w)| = \frac{1}{2|\cos(w/2)|} \quad w \neq 2\pi k + \pi \quad k = 0,1,\ldots$$

y la **fase** está dada por,

$$\angle X_2(w) = \begin{cases} \dfrac{w}{2} & si \;\; \cos(w/2) \geq 0 \\ \dfrac{w}{2} + \pi & si \;\; \cos(w/2) < 0 \end{cases}$$

Relaciones

$$e^{a+jb} = e^a(\cos b + j\,sen\,b)$$

$$e^{a-jb} = e^a(\cos b - j\,sen\,b)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$sen\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$