Diseño de Filtros IIR

- La respuesta en frecuencia H(*w*) de un filtro IIR es una *función racional*, es decir, la razón entre dos polinomios de grado finito en e^{jw} de la forma,

$$H(w) = \frac{B(w)}{A(w)} = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk}}$$

donde N_0 es una constante entera y h(n)≠0 para $N_0 \leq n \leq \infty$. N es el orden del filtro y generalmente N≥ M.

- El diseño de un filtro IIR busca determinar la función racional H(*w*) que **mejor se aproxime** a las especificaciones de diseño.

  - En el dominio frecuencial, esto se logra calculando los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ óptimos según un criterio establecido.

  - El orden del filtro N generalmente se fija desde un principio, pero también puede considerarse como un parámetro.

Diseño de Filtros IIR…

- Para los filtros IIR, la función de transferencia, H(z), también es racional y está dada por:

$$H(z) = H\left(e^{jw}\right)\Big|_{z=e^{jw}} = z^{-N_0}\,\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\ z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\ z^{-k}}$$

de donde se puede apreciar que los filtros IIR, a diferencia de los FIR, pueden ser inestables.

Características de Filtros IIR

- No puede utilizarse la convolución para implementar filtros IIR, por lo tanto se recurre a las ecuaciones de diferencia recursivas.

- Los filtros IIR emplean realimentación y necesitan almacenar muestras de la salida para calcular un nuevo valor.

Características de Filtros IIR…

- No es posible diseñar filtros IIR causales de fase lineal. Para aproximar una fase lineal se puede utilizar la técnica de filtrado *forward-backward*.
- El ruido de la cuantización en los coeficientes puede afectar severamente la respuesta del filtro y su estabilidad, al producir disturbios en las posiciones de los polos y desplazamientos de éstos cerca o sobre el círculo unitario del plano z.
- Las características de ruido de un filtro IIR deben tenerse muy presentes durante la implementación, especialmente en aritmética de punto fijo.
  - La cuantización de los coeficientes degrada la respuesta del filtro (se aleja de la respuesta calculada con software de alta precisión).
  - La sensibilidad al ruido de redondeo puede ser amplificada por las mallas de realimentación en el filtro.
- Comparados con los filtros FIR, los filtros IIR pueden alcanzar las especificaciones de diseño con ordenes relativamente bajos (4 a 6 polos).
- Los filtros IIR se obtienen comúnmente a partir de fórmulas de diseño en forma cerrada correspondientes a filtros clásicos.

Diseño de Filtros IIR a partir de Filtros Analógicos

Introducción

- Técnica basada en convertir un filtro analógico en un filtro digital.
- El diseño de filtros analógicos es un campo ampliamente desarrollado.

Descripción de filtros analógicos

- Por la función de transferencia $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\sum_{K=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$$

donde $\{\alpha\}$ y $\{\beta\}$ son los coeficientes del filtro.

- Por $H_a(s)$ a través de la Respuesta Impulsional h(t)

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} \partial t$$

- Por una Ecuación Diferencial Lineal con Coeficientes Constantes

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

donde x(t) y y(t) indican señal de entrada y de salida del filtro.

- Cada una de estas tres caracterizaciones equivalentes de un filtro analógico conduce a métodos alternativos para convertir el filtro al dominio digital.
- Un sistema analógico LTI con función de transferencia H(s) es estable si todos sus polos yacen en la mitad izquierda del plano s.
- Para que la técnica de conversión sea efectiva debe tener las siguientes propiedades:
  - El eje jΩ en el plano s debe corresponderse con la circunferencia unidad en el plano z. Con esto se logra una relación directa entre las dos variables de frecuencia en los dos dominios.
  - El semiplano izquierdo (LHP) del plano s debe corresponderse con el interior de la circunferencia en el plano z. Esto permite que el filtro digital obtenido sea estable.
- Los filtros IIR estables y físicamente realizables, no pueden tener fase lineal, puesto que la condición de fase lineal establece que:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

  lo que implica que por cada polo dentro de la circunferencia haya un polo especular por fuera.
- Prescindiendo de la restricción de realizabilidad física, computacionalmente es posible, en principio, obtener un filtro IIR de fase lineal. Este método presenta un costo de cómputo alto y no proporciona ventajas sobre los filtros FIR de fase lineal.

Observación

- En el diseño de filtros IIR se especifican las características del filtro sólo para la respuesta en magnitud, y se aceptan las características de fase obtenidas.
- Las respuestas en magnitud y en fase de un filtro causal son **interdependientes** y por lo tanto, no se pueden especificar independientemente.
- Dada una respuesta en magnitud, su respuesta en fase se determina a través de la *transformada de Hilbert discreta*.

Diseño de filtros IIR por aproximación de derivadas

- Se aproxima la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias equivalente.
- La derivada en el tiempo t = nT, se sustituye por la *diferencia hacia atrás*:

$$\left.\frac{\partial\, y(t)}{\partial t}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

Obteniendo las transformadas de Laplace y z en la expresión anterior, se obtiene

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

- Usando el mismo procedimiento, se puede deducir que para la k-ésima derivada de y(t) resulta la relación:

$$s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^k$$

- Para el filtro analógico con función de transferencia $H_a(s)$ caracterizada por la ecuación diferencial,

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

La función H(z) del filtro IIR digital se obtiene al aplicar,

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\left(1-z^{-1}\right)/T}$$

Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

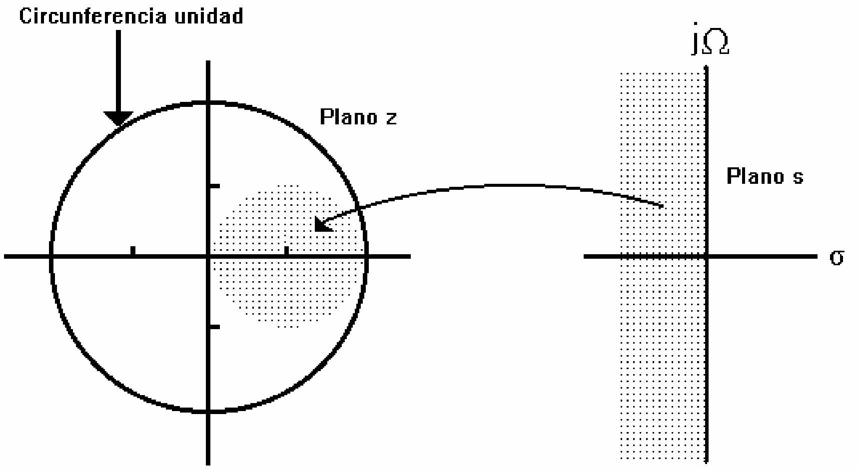
- La relación entre s y z obtenida anteriormente puede reescribirse como,

$$z = \frac{1}{1-sT}$$

con s = jΩ se obtiene

$$z = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2}$$

- Cuando Ω varía desde -π hasta +π ⇔z varía dentro de un círculo de radio ½ con centro en ½.
- La correspondencia es estable y restringida al diseño de filtros paso-bajo y paso-banda con frecuencias resonantes relativamente pequeñas.



Correspondencia plano s - plano z

■ Ejemplo.

Convierta el filtro paso-banda analógico con función de transferencia,

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

a un filtro IIR digital usando la *diferencia hacia atrás* para la derivada.

■ Solución.

Utilizando la sustitución en H(s) se obtiene,

$$H(z) = \frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T} + 0.1\right)^2 + 9} = \frac{T^2 / \left(1 + 0.2T + 9.01T^2\right)}{1 - \dfrac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2} z^{-1} + \dfrac{1}{1+0.2T+9.01T^2} z^{-2}}$$

La función de transferencia H(z) tiene la forma de un resonador si T se selecciona suficientemente pequeño (T ≤ 0.1), para que los polos estén cerca de la circunferencia unidad.

- Si T = 0.1, los polos están situados en,

$$p_{1,2} = 0.91 \pm j0.27 = 0.949 e^{\pm j16.5°}$$

Diseño de filtros IIR mediante Invarianza Impulsional

- Consiste en diseñar un filtro IIR con una respuesta impulsional h(n) que sea la versión muestreada de la respuesta impulsional del filtro analógico. Es decir, h(n) = h(t=nT) donde T es el periodo de muestreo.

- Cuando una señal en tiempo continuo $x_a(t)$ con espectro $X_a(F)$ se muestrea a una frecuencia $F_s=1/T$ muestras por segundo, el espectro de la señal muestreada es la repetición del espectro escalado $F_sX_a(F)$ con periodo F_s:

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f-k)F_s]$$

donde $f = F/F_s$ es la frecuencia normalizada.

- El aliasing ocurre si F_s es menor que dos veces la frecuencia más alta contenida en $X_a(F)$.

Diseño de filtros IIR mediante Invarianza Impulsional…

El filtro digital con respuesta impulsional h(n) = h(nT) tiene la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(w) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[(w - 2\pi k)F_s\right] \quad ó \quad H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

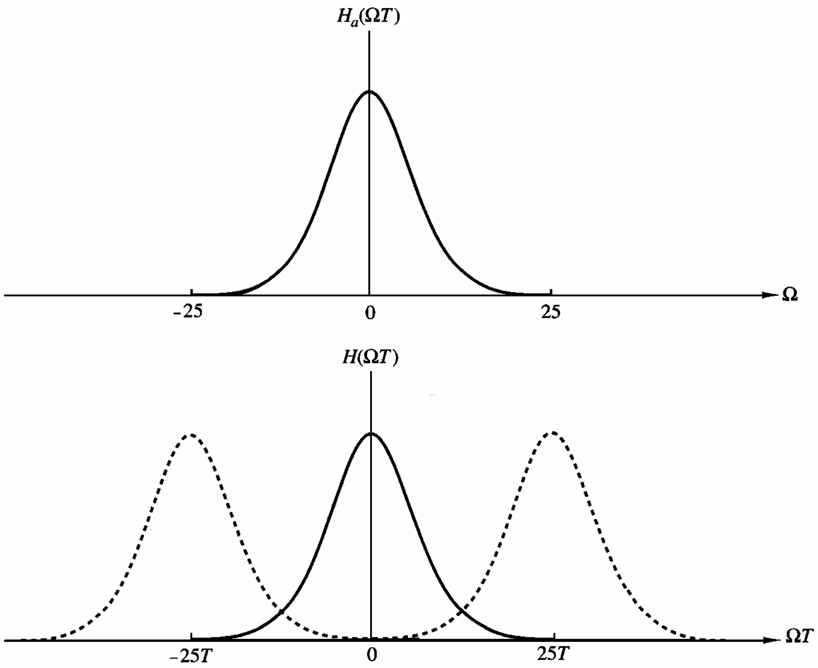
- El filtro digital con respuesta H(w) tendrá las características de respuesta en frecuencia del correspondiente filtro analógico si el periodo de muestreo T se selecciona suficientemente pequeño para evitar al máximo el aliasing.

- De lo anterior se desprende que este método es inapropiado para el diseño de filtros paso-bajo.

Relación de la respuesta en frecuencia

a) filtro analógico

b) filtro digital correspondiente
con aliasing



■ Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

- De forma general, la correspondencia entre los planos s y z que genera el proceso de muestreado está dada por,

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad donde \qquad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

- Se observa que cuando s = j Ω la expresión anterior se reduce a:

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

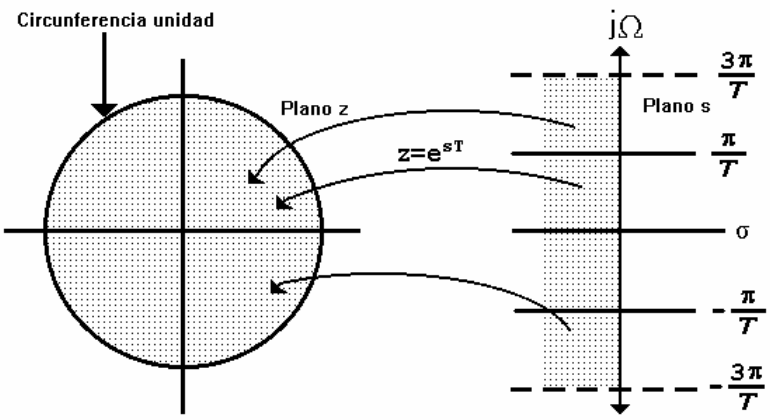
donde se ha suprimido el factor j en H_a (Ω)

- Expresando en forma polar la relación $z = e^{sT}$ al sustituir $s = \sigma + j\,\Omega$ se llega a:

$$re^{jw} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad \text{donde} \quad r = e^{\sigma T} \quad \text{y} \quad w = \Omega T$$

- Para $\sigma < 0$ se tiene $0 < r < 1$ y para $\sigma > 0$ se tiene $r > 1$. Cuando $\sigma = 0$ se tiene $r = 1$. De lo anterior se desprende que:

  - Semiplano izquierdo de s $\Rightarrow$ interior de la circunferencia unidad en el plano z
  - Semiplano derecho de s $\Rightarrow$ exterior de la circunferencia unidad en el plano z
  - Eje $j\,\Omega \Rightarrow$ circunferencia unidad en el plano z.
  - La correspondencia del eje $j\,\Omega$ con el circulo unitario no es uno a uno.
  - Al intervalo $-\pi \leq w \leq \pi$ le corresponden los intervalos de frecuencia $(2k-1)\,\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\,\pi/T$ cuando k es un entero.
  - La correspondencia entre la frecuencia analógica Ω y la frecuencia digital w es inyectiva, lo que refleja el efecto de aliasing debido al muestreo.



Método de diseño

- La función de transferencia del filtro analógico se expresa en fracciones simples. Analizando el caso en que todos los polos son distintos, se tiene,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k}$$

donde $\{p_k\}$ polos del filtro analógico

$\{c_k\}$ coeficientes de la expansión

Al muestrear $h_a(t)$ periódicamente en $t = nT$, se llega a,

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t} \qquad t \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k Tn}$$

- Sustituyendo esta expresión en la función de tranferencia del filtro digital IIR,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n$$

- Porque $p_k < 0$, la sumatoria interna converge a,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- y la función de transferencia se reduce a,

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- Los polos del filtro digital se localizan en $z_k = e^{p_k T}$, $k = 1,2,\ldots,N$ y se corresponden con los polos del plano s. Los ceros no satisfacen esta relación.

- **Ejemplo.** Convierta el filtro analógico dado, en un filtro IIR digital por el método de Invarianza Impulsional.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$$

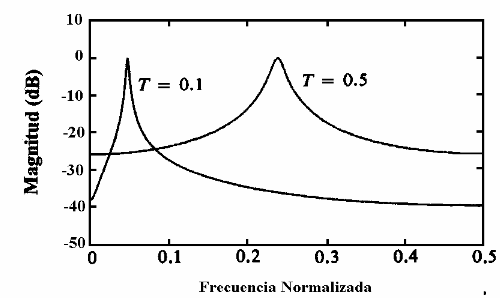
- **Solución.** El filtro $H_a(s)$ tiene un cero en s = -0.1 y polos conjugados en $p_k = -0.1 \pm j3$.
  - H(z) se determina directamente a partir de la expansión en fracciones parciales de $H_a(s)$:

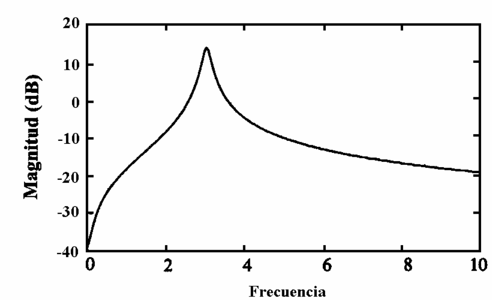
$$H_a(s) = \frac{1/2}{s+0.1-j3} + \frac{1/2}{s+0.1+j3}$$

  - entonces,

$$H(z) = \frac{1/2}{1-e^{-0.1T}e^{j3T}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-e^{-0.1T}e^{-j3T}z^{-1}} = \frac{1-\left(e^{-0.1T}\cos 3T\right)z^{-1}}{1-\left(2e^{-0.1T}\cos 3T\right)z^{-1}+e^{-0.2T}z^{-2}}$$

  - **Respuesta en frecuencia.**
    - **Solapamiento mayor cuando T es mayor.**
    - **La frecuencia resonante cambia con T.**
  - El ejemplo ilustra la importancia de seleccionar un valor pequeño de T para minimizar el efecto de aliasing.
  - Debido al aliasing, el método de invarianza impulsional es apropiado sólo para el diseño de filtros paso-bajo y paso-banda.





Diseño de Filtros IIR: Transformación Bilineal

■ Introducción

- La transformación bilineal es una correspondencia conformadora que transforma el eje j Ω en la circunferencia unidad del plano z, sin solapamientos de frecuencias.
- El semiplano *izquierdo* del plano s se corresponde con el *interior* de la circunferencia unidad en el plano z, y semiplano *derecho* del plano s se corresponde con el *exterior* de la circunferencia unidad en z.
- La transformación bilineal permite diseñar todo tipo de filtros.

■ Deducción

- La transformación bilineal se puede ligar a la fórmula trapezoidal.

  Caso de estudio: filtro lineal analógico,

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + ay(t) = bx(t)$$

- Al integrar una derivada y al aproximarla por la fórmula trapezoidal se tiene,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\partial\tau + y(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT-T)\right] + y(nT-T)$$

- Sustituyendo la expresión de la derivada en la función del filtro y evaluando en $t = nT \equiv n$, se produce,

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y(n)+\left(1-\frac{aT}{2}\right)y(n-1)=\frac{bT}{2}\left[x(n)+x(n-1)\right]$$

- La transformada z de esta ecuación de diferencia es,

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z)+\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z)=\frac{bT}{2}\left[1+z^{-1}\right]X(z)$$

Por lo que la función de transferencia del filtro es,

$$H(z)=\frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

De donde se puede establecer que la correspondencia entre los planos s y z es,

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

la cual constituye la ***transformación bilineal***

Correspondencia plano s $\leftrightarrow$ plano z

- Sean $z = re^{jw}$ y $s = \sigma + j\Omega$ entonces la transformación bilineal puede escribirse como,

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos w} + j\frac{2r\, sen\, w}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

de donde se desprende que,

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

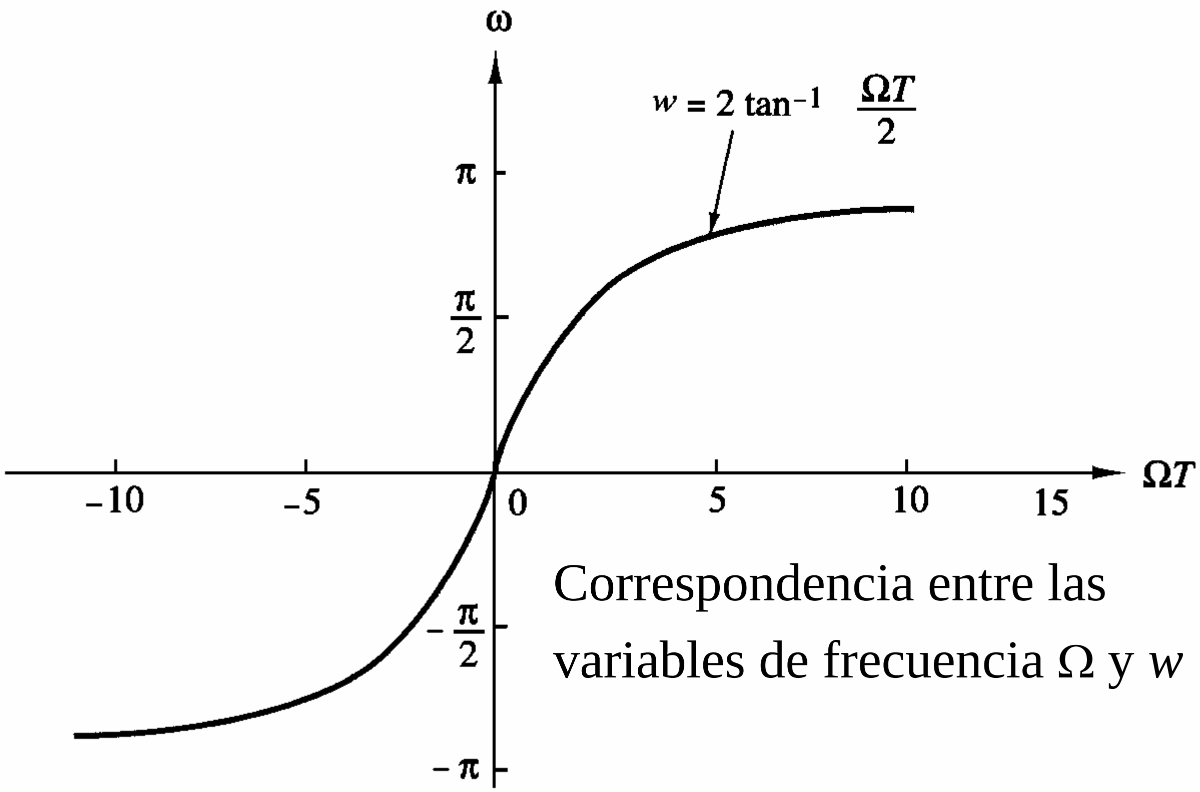
$$\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{2r\, sen\, w}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

- Correspondencia entre planos:
  - **r < 1 $\Rightarrow$ σ < 0**: semiplano izquierdo en s se corresponde con el interior de la circunferencia unitaria en z.
  - **r > 1 $\Rightarrow$ σ > 0**: semiplano derecho en s se corresponde con el exterior de la circunferencia unitaria en z.
  - **r = 1 $\Rightarrow$ σ = 0**: se tiene,

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{w}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad w + 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$

que representa ***la relación entre las variables de frecuencia en los dos dominios.***

La relación entre las dos variables de frecuencia se aprecia en la siguiente figura,



Correspondencia entre las variables de frecuencia Ω y *w*

- El rango de $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ se corresponde unívocamente con el rango $-\pi \leq w \leq \pi$
- Correspondencia **no lineal** ⇒ compresión o *deformación de frecuencia.*
- El punto **s = ∞** corresponde con el punto **z = -1**
  - Un filtro analógico con un cero en $s = \infty$ resulta en un filtro digital con un cero en $z = -1$

- **Ejemplo.** Convertir el filtro analógico dado en un filtro IIR digital por medio de la transformación bilineal. El filtro digital debe presentar una frecuencia resonante $w_r = \pi/2$, que coincida con $\Omega_r = 4$.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$$

- **Solución.**

  - De la relación entre frecuencias, se obtiene el periodo de muestreo T.

$$\Omega_r = \frac{2}{T}\tan\frac{w_r}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}$$

  - Reemplazando el valor de T en la transformación bilineal se obtiene la correspondencia deseada,

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad \Rightarrow \quad s = 4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

  - El filtro digital resultante tiene la función de transferencia,

$$H(z) = \frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-2}}{1+0.0006z^{-1}+0.975z^{-2}}$$

  - Dado que el coeficiente del término z^{-1} en el denominador de H(z) es muy pequeño, se puede aproximar a cero; luego,

$$H(z) = \frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-2}}{1+0.975z^{-2}}$$

polos $p_{1,2} = 0.987\, e^{\pm j\pi/2}$

ceros $z_{1,2} = -1,\ 0.95$

- **Ejemplo.** Usando la transformación bilineal, diseñe un filtro digital paso bajo de un polo simple con ancho de banda de 3 dB en $w_c = 0.2\ \pi$.

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

donde Ω_c es el ancho de banda de 3 dB del filtro analógico.

- **Solución.**
  - En el dominio frecuencial, $w_c = 0.2\ \pi$ se corresponde con,

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan(0.1\pi) = \frac{0.65}{T}$$

Por lo que el filtro tiene la función de transferencia,

$$H(s) = \frac{0.65/T}{s + 0.65/T}$$

  - Aplicando la transformación bilineal, con T = 1, se obtiene el filtro digital,

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$$

con respuesta en frecuencia,

$$H(w) = \frac{0.245(1 + e^{-jw})}{1 - 0.509e^{-jw}} \quad \Rightarrow \quad H(w=0) = 1, \quad H(w = 0.2\pi) = 0.707$$

Diseño de filtros IIR: Transformación z Adaptada

- Método que hace corresponder los polos y los ceros de H(s) directamente con polos y ceros en el plano z.
- La transformación hace corresponder a cada factor (s-a) el factor $(1\text{-}e^{aT}z^{-1})$, es decir,

$$(s-a) = \left(1 - e^{aT} z^{-1}\right)$$

- Por consiguiente, para un filtro analógico con función de transferencia expresada en factores,

$$H_a(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)}_c$$

  la función de transferencia para el filtro digital es,

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - e^{a_k T} z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - e^{p_k T} z^{-1}\right)}_c$$

- **Observación**
  - Los polos obtenidos en esta transformación son idénticos a los polos obtenidos con el método de invarianza impulsional; sin embargo, los ceros son diferentes.
  - T debe escogerse bastante pequeño para producir los polos y ceros en posiciones equivalentes en el plano z (el aliasing debe evitarse).

Diseño de filtros IIR: Métodos de Mínimos Cuadrados

■ Introducción

- Algunas de las técnicas vistas para el diseño de filtros IIR implicaban la conversión de un filtro analógico en digital mediante alguna correspondencia del plano s al plano z.

- Los métodos de mínimos cuadrados permiten deseñar los filtros digitales directamente en el dominio del tiempo, y también en el dominio frecuencial.

Aproximación de Padé

- El filtro que se va a diseñar presenta la función de transferencia,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

donde h(n) es la respuesta impulsional del filtro.

- El filtro posee L = M+N+1 parámetros: los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ que se pueden seleccionar para satisfacer algún criterio de error.

- **Criterio de error:** Minimizar la suma ε de los errores al cuadrado entre la respuesta impulsional del filtro h(n) y la respuesta deseada $h_d(n)$.

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{U} \left[h_d(n) - h(n)\right]^2$$

- En general h(n) es una función ***no lineal*** de los parámetros del filtro, lo que implica involucrarse con ecuaciones ***no lineales*** para minimizar ε.
- Sin embargo, si se selecciona el límite superior como U=L-1, es posible ajustar h(n) perfectamente a $h_d(n)$ para $0 \le n \le M+N$.

  - La ecuación en diferencias para el filtro deseado es,

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - .... - a_N y(n-N) \\ + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + ... + b_M x(n-M)$$

  - Con una entrada x(n) = δ(n) la respuesta del filtro es y(n) = h(n), por lo que,

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - .... - a_N h(n-N) \\ + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + ... + b_M \delta(n-M)$$

como δ(n-k) = 0 excepto para k=n ($0 \le n \le M$), la expresión anterior se reduce a:

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - .... - a_N h(n-N) + b_n \qquad 0 \le n \le M \qquad [ec.1]$$

y para n > M se obtiene,

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - .... - a_N h(n-N) \qquad n > M \qquad [ec.2]$$

- Usando el conjunto de ecuaciones lineales [ec.1] y [ec.2] se puede hacer que $h(n) = h_d(n)$ para $0 \leq n \leq M+N$.
  - **Paso 1**: Encontrar $\{a_k\}$ haciendo $h(n) = h_d(n)$ en [ec. 2] ($M< n \leq M+N$)
  - **Paso 2**: Con los $\{a_k\}$ encontrados, determinar $\{b_k\}$ a partir de [ec. 1] ($0\leq n \leq M$)

Observaciones

- El grado con que la técnica de aproximación de Padé produce diseños de filtros aceptables depende en parte del número de coeficientes del filtro seleccionado.

  - hd(n) sólo se ajusta hasta el número de parámetros del filtro. Cuanto más complejo el filtro, mejor será la aproximación.

  - Para mejorar la aproximación, el filtro debe poseer un gran número de polos y ceros.

- La utilización de la técnica de Padé requiere de la prueba de varios valores de M y N para obtener un filtro que converja a la respuesta deseada.

- **Ejemplo.** Conociendo que la respuesta impulsional deseada es $h_d(n) = 2(1/2)^n u(n)$, use el método de aproximación de Padé para obtener los coeficientes de,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

- **Solución.** Con $\delta(n)$ como entrada a H(z), se obtiene la salida,

$$h(n) = -a_1 h(n-1) + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

- Seleccionando M = N = 1 (número de ceros y de polos)

  - Paso 1: Para n > M,

$$n = 2 \;\Rightarrow\; h(2) = -a_1 h(1) \quad \text{con} \quad h_d(2) = 1/2, \;\; h_d(1) = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = -1/2$$

  - Paso 2: Para 0 ≤ n ≤ M

$$n = 0 \;\Rightarrow\; h(0) = (1/2)h(-1) + b_0 \quad \text{con} \quad h_d(0) = 2, \;\; h_d(-1) = 0 \;\Rightarrow\; b_0 = 2$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; h(1) = (1/2)\; h(\,0) + b_1 \quad \text{con} \quad h_d(0) = 2, \;\; h_d(\;\,1) = 1 \;\Rightarrow\; b_1 = 0$$

Observación

- La aproximación de Padé resulta en un ajuste perfecto a $H_d(z)$ cuando la función de transferencia deseada es *racional* y se conocen *a priori* el número de polos y ceros del sistema.

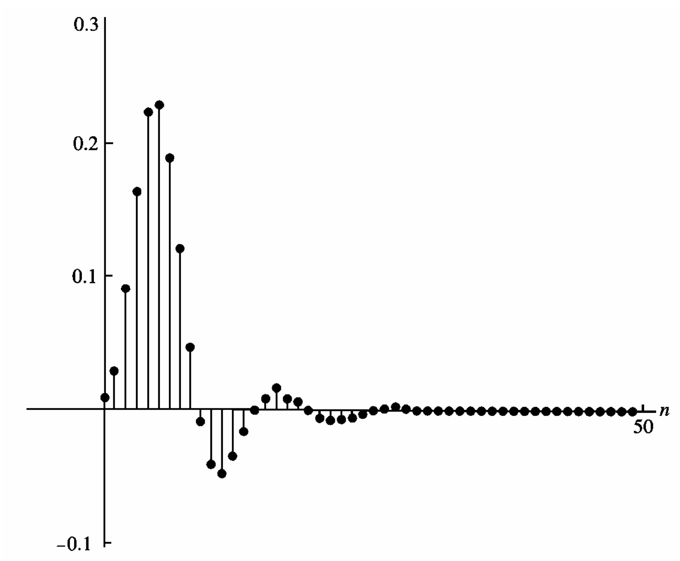
- Generalmente lo anterior no es el caso, ya que $h_d(n)$ se determina a partir de algunas especificaciones de $H_d(w)$. En estos casos, la aproximación de Padé puede ***NO*** resultar en un buen diseño del filtro.

Efecto de la selección de los valores de M y N

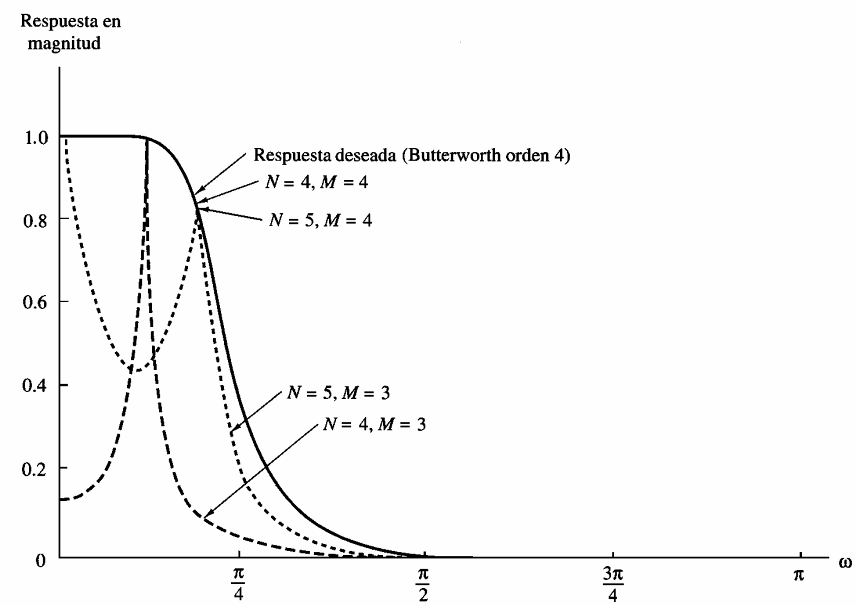
- Considerar el filtro Butterworth de cuarto orden dado por,

$$H_d(z) = \frac{4.8334x10^{-3}(z+1)^4}{(z^2 - 1.3205z + 0.6326)(z^2 - 1.0482z + 0.2959)}$$

- Determinar la aproximación de Padé con números de polos y ceros iguales y diferentes del filtro deseado.
  - Para valores de M y N menores que 4, la aproximación es pobre.
  - Para valores de M ≥ 4 se obtiene una muy buena aproximación.
  - Para valores de M > 4 se puede obtener un buen resultado incluso para N < 4.



Respuesta impulsional $h_d(n)$



Respuesta en frecuencia de los filtros obtenidos

Realización de Filtros

Introducción.

La realización de filtros corresponde al cálculo de la salida del filtro, en respuesta a cualquier entrada. Para filtros LTI la relación entre la entrada y salida está dada por la convolución,

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k) \qquad [ec.1]$$

donde N_1 y N_2 son los índices de la primera y última muestras diferente de cero de $h(n)$.

Realización de Filtros

Introducción...

- En el dominio frecuencial la convolución corresponde al producto de las transformadas,

$$Y(w) = H(w)\, X(w) \qquad [ec.2]$$

- Puesto que la transformada de Fourier dada por [ec. 2] es continua en *w*, se recurre a la transformada discreta de Fourier DFT,

$$Y(w_k) = H(w_k)\, X(w_k)\ \ ,\ w_k = (2\pi k / N_{DFT}),\quad k = 0,1,\ldots,N_{DFT} \qquad [ec.3]$$

Donde N_{DFT} es el tamaño de la DFT y corresponde al número de muestras en el periodo 2π.

- $N_{DFT} \geq$ máx{longitud de $x(n)$ + longitud de $h(n)$ -1} para realizar la multiplicación punto a punto.
- La DFT puede calcularse muy eficientemente usando el algoritmo FFT.

Realización de Filtros FIR

Puesto que N_1 y N_2 son finitos, se utiliza la expresión de la convolución en el dominio del tiempo o en el dominio frecuencial para obtener la respuesta del filtro.

- En el dominio temporal el requerimiento de almacenamiento depende sólo de la longitud de h(n),

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k)$$

- En el dominio frecuencial la capacidad de almacenamiento varía con el tamaño de la señal de entrada.

$$Y(k) = H(k)\ X(k) \quad , \quad k = 0,1,\ldots, N_{DFT}$$

$$donde\ \ N_{DFT} \ \geq \left\{\ longitud\ de\ x(n) + \ longitud\ de\ h(n)\ \text{-}1 \ \right\}$$

Realización de Filtros IIR

La ecuación de la convolución no puede utilizarse debido a la longitud infinita de $h(n)$, por lo cual se recurre a las ecuaciones de diferencia recursivas.

Al reemplazar

$$H(w) = \frac{B(w)}{A(w)} = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk}}$$

$$en \qquad Y(w) = H(w)\; X(w)$$

se obtiene,

$$Y(w) = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk}} \; X(w)$$

Realización de Filtros IIR…

se obtiene,

$$Y(w) = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk}} \; X(w)$$

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se asume N_0=0, con lo cual se llega a,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk} Y(w) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk} \; X(w)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier y recordando que la multiplicación por $e^{-j\,wk}$ corresponde a un desplazamiento por k en el dominio del tiempo,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \; y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k)$$

Al extraer el término *h*(*n*) de la sumatoria se llega a,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \; x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} \; y(n-k) \qquad \text{para } n \geq n_0 \qquad (n_0 \text{ entero y constante})$$

- Esta implementación requiere N valores iniciales de salida, $y(n_0-1),\dots,y(n_0-N)$.
- Si $x(n)=0$ para $n<n_0$, entonces $y(n)=0$ para $n<n_0$.

Transformaciones de Frecuencia

Introducción

- El estudio de filtros IIR se centra en el diseño de filtros paso-bajo.
- La obtención de un filtro paso-alto, pasa-banda, o banda de rechazo se realiza de forma simple al tomar un prototipo paso -bajo y aplicarle una transformación de frecuencia.
- La transformación puede aplicarse en el dominio analógico o digital. En general estas dos aproximaciones producen resultados diferentes, excepto para la transformación bilineal.

Transformaciones de Frecuencia en el Dominio Analógico

Tipo de transformación	Transformación	Frecuencias de corte del nuevo filtro
Paso bajo	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
Paso alto	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Paso banda	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Banda eliminada	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_c)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$	Ω_l, Ω_u

Transformaciones de Frecuencia en el Dominio Digital

Tipo de transformación	Transformación	Parámetros
Paso bajo	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	$\omega_p' =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = \dfrac{\text{sen}[(\omega_p-\omega_p')/2]}{sin[(\omega_p+\omega_p')/2]}$
Paso alto	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$	$\omega_p' =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = -\dfrac{\cos[(\omega_p+\omega_p')/2]}{\cos[(\omega_p-\omega_p')/2]}$
Paso banda	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = -2\alpha K/(K+1)$ $a_2 = (K-1)/(K+1)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \cot\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$
Banda eliminada	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-1}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = -2\alpha/(K+1)$ $a_2 = (1-K)/(1+K)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \tan\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$