Señales

- **Definición.** Una señal se define como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio, o cualquier otro conjunto de variables independientes. Los valores de la cantidad física (variable dependiente) pueden ser reales, complejos o vectores.
- **Representación.** Generalmente se representan mediante funciones matemáticas, conjunto de datos, reglas, o gráficas.
- **Señales Aleatorias y Deterministas**
  - **Señal Aleatoria:** Señal que no puede describirse con un grado de precisión razonable mediante fórmulas matemáticas explícitas o cuya descripción es demasiado complicada para ser de utilidad práctica.

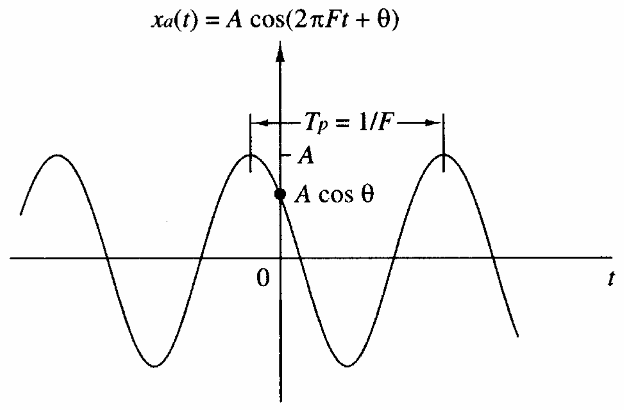
    La falta de tal relación supone que dichas señales evolucionan con el tiempo de forma impredecible.

    Ejemplo: Señal sísmica; Señal eléctrica generada por un rayo.
  - **Señal Determinista:** Señal que puede ser definida por una forma matemática explícita, un conjunto de datos, o una regla bien definida.

    Ejemplo: Señal de reloj de un PC; Señal de voltaje senoidal.

♦ Señales Multidimensional y Unidimensional

- **Señal Unidimensional:** Cuando una señal es función de una sola variable independiente. **Ejemplo.** Señal de voltaje: $V(t) = 5\cos(\pi t)$



- **Señal Multidimensional:** Cuando una señal es función de M variables independientes. **Ejemplo.** Imagen: $I(x,y)$

Señales (suite)

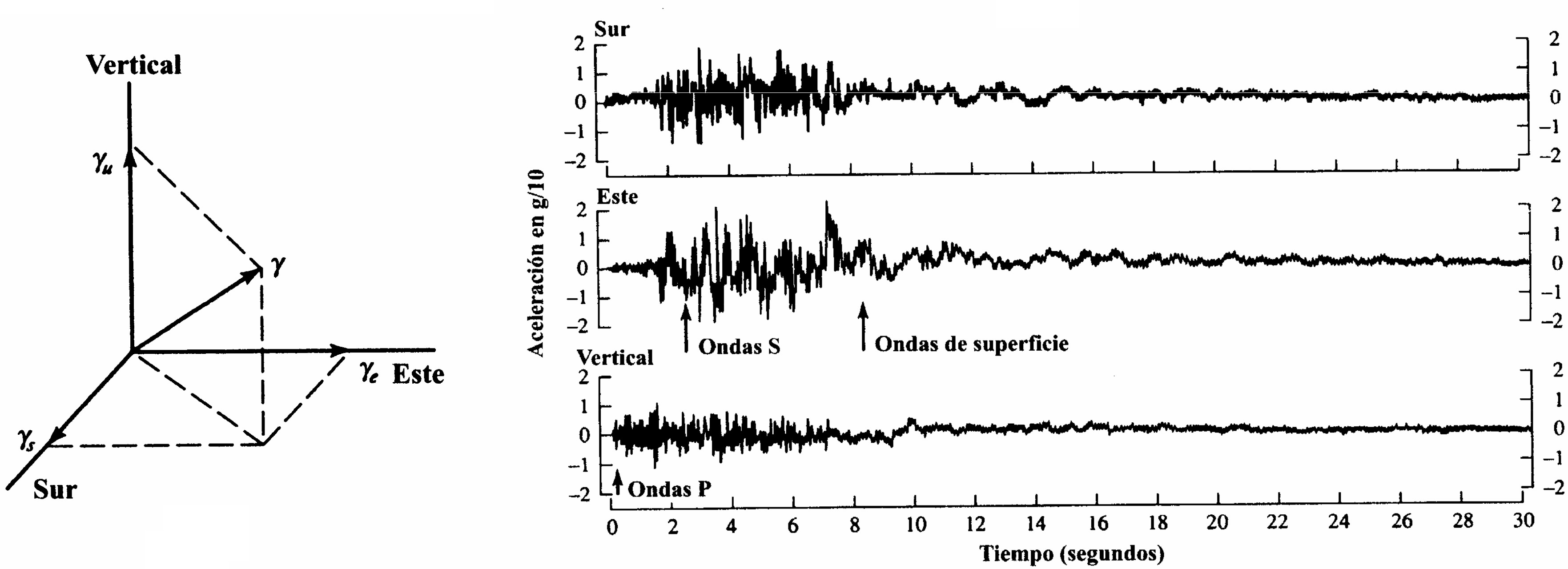
Universidad del Valle

♦ Señal Multicanal y Monocanal

Señal Multicanal: Señal generada por múltiples fuentes o sensores.

Ejemplo. Imagen de televisión en colores; Aceleración en la superficie terrestre durante un terremoto.

$$\mathbf{S}_{ter}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \begin{cases} s_1(t) \Rightarrow \text{onda longitudinal interior de la roca} \\ s_2(t) \Rightarrow \text{onda transversal interior de la roca} \\ s_2(t) \Rightarrow \text{onda superficial elástica cerca de la superficie} \end{cases}$$

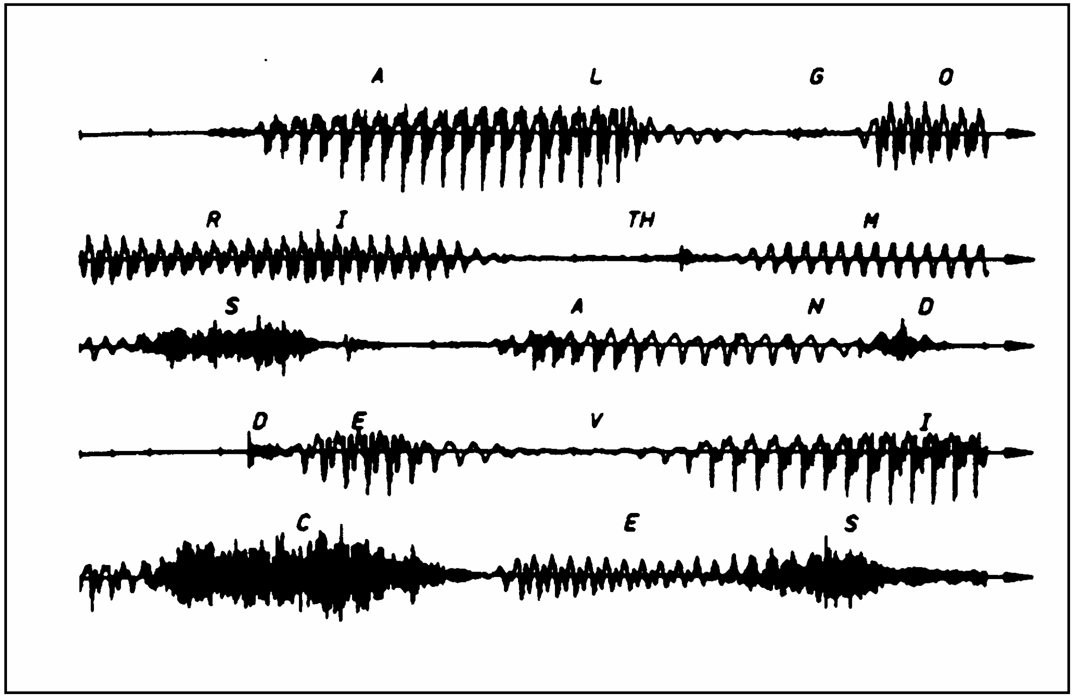


Componentes de la aceleración en tierra de un terremoto

Clasificación de Señales

- **Introducción.** Las señales pueden clasificarse en **cuatro** categorías dependiendo de la variable independiente (tiempo) y los valores que la señal pueda tomar.
- **Señales en tiempo continuo (analógicas).** Están definidas para todos los valores del tiempo y pueden tomar cualquier valor en el intervalo continuo (**a**,**b**), donde **a** puede ser **-**∞ y **b** puede ser ∞.

Ejemplo. $x(t)=cos(\pi t)$; Una onda de voz.

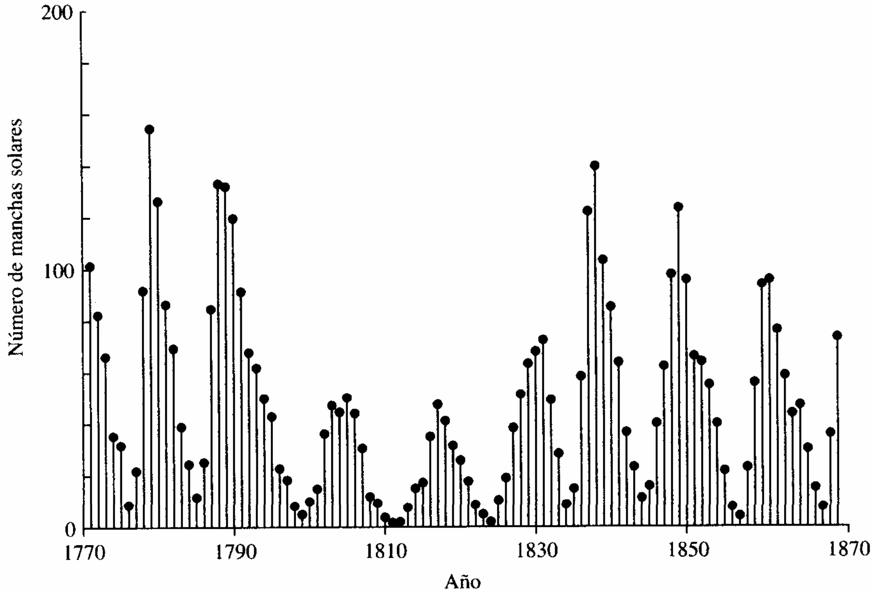


Señales de voz

Clasificación de Señales (suite)

- **Señales en tiempo discreto.** Están definidas sólo para ciertos valores del tiempo. Estos instantes pueden o no ser equidistantes.

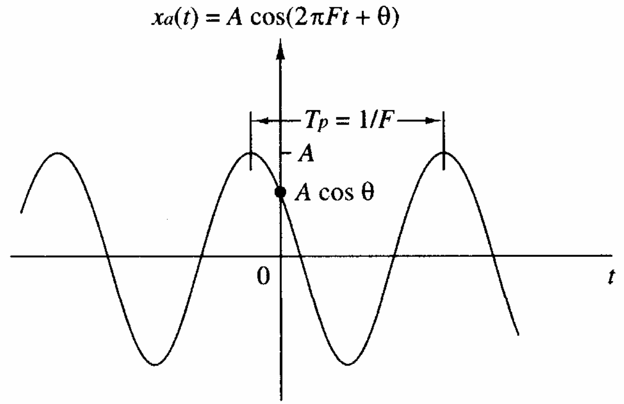
Ejemplo. $x(t)=e^{-|t\ n|}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; El número de manchas solares de Wölfer.



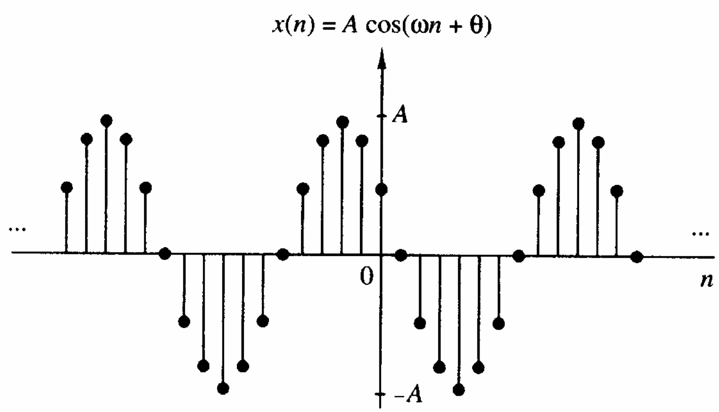
- Estas señales pueden originarse de dos maneras:
  - Muestreando valores de una señal analógica en determinados instantes de tiempo.
  - Acumulando los valores de una variable a lo largo de un determinado periodo.

Clasificación de Señales (suite)

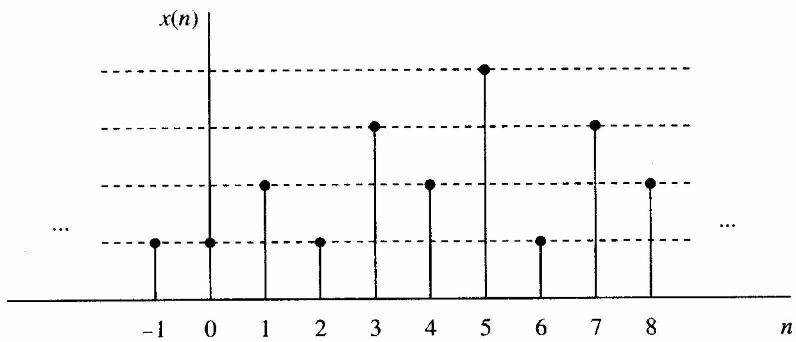
- **Señales de valor continuo.** Señal que toma todos los valores posibles en un intervalo tanto finito como infinito.



- **Señales de valor discreto.** Señal que toma valores de un conjunto finito de valores.
  - En muchas aplicaciones estos valores son equidistantes y pueden expresarse como un múltiplo de la distancia entre dos valores sucesivos.



- **Señal digital.** Señal en tiempo discreto que toma valores de un conjunto discreto.

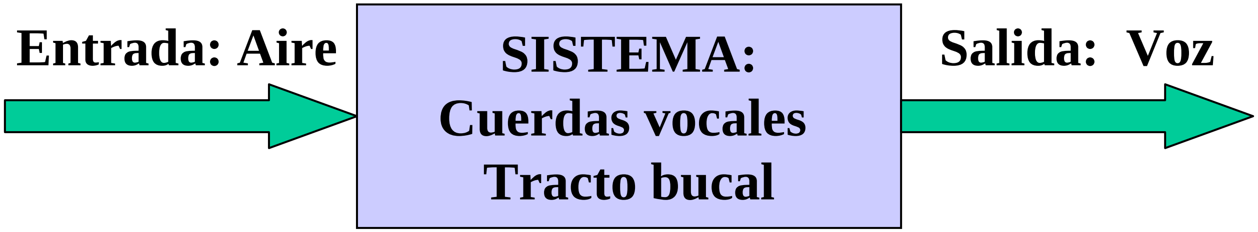


Sistemas

- **Definición.** Matemáticamente un sistema es una relación funcional entre la entrada **x(t)** y la salida **y(t)**. De forma general, esta relación puede expresarse como:

$$y(t_0) = f\left[x(t)\,;\; -\infty < t < \infty\right], \quad -\infty < t_0 < \infty$$

- Un sistema se puede definir también como un dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal.
- La forma en la que se generan las señales se encuentra asociada con un sistema que responde ante un estímulo o fuerza.
- El estímulo en combinación con el sistema se llama *Fuente de Señal.*
- **Ejemplo**: Generador de voz



Sistemas (suite)

♦ Sistemas lineales y no lineales

- **Sistema Lineal.** Un sistema se denomina lineal si satisface el teorema de **superposición**. Esto es, si la respuesta del sistema a las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es $y_1(t)=f\,[\,x_1(t)\,]$ y $y_2(t)=f\,[\,x_2(t)\,]$, luego la respuesta del sistema a la combinación lineal de las dos entradas debe ser:

$$f\left[a_1\ x_1(t)+a_2\ x_2(t)\right]=a_1\,y_1(t)+a_2\,y_2(t)$$

- **Sistema No Lineal.** Cualquier sistema donde la superposición no es aplicable.

♦ Sistemas Variantes e Invariantes con el Tiempo

- **Sistema Invariante con el Tiempo.** Es invariante si un desplazamiento temporal en la señal de entrada produce el mismo desplazamiento de tiempo en la señal de salida. Esto es,

$$\text{Si}\quad y(t)=f\left[x(t)\right]\quad \text{luego,}\quad y(t-t_0)=f\left[x(t-t_0)\right],\quad -\infty<t\ ,\quad t_0<\infty$$

- **Sistema Variante con el Tiempo.** Cualquier sistema que no cumpla el requerimiento establecido anteriormente.

Sistemas (suite)

Sistemas Causales y No-Causales

- **Sistema Causal.** Sistema cuya respuesta no empieza antes de que sea aplicada la función de entrada. De otra forma, el valor de la salida en el instante $t = t_0$ depende solamente de los valores de la entrada x(t) para $t \leq t_0$, esto es,

$$y(t_0) = f\left[x(t)\,;\, t \leq t_0\right]; \qquad -\infty < t,\ t_0 < \infty$$

- **Sistema Anti-Causal.** Son todos aquellos sistemas que no satisfagan la condición precedente. Este tipo de sistemas no existen en el mundo real, pero pueden ser simulados utilizando retardos de tiempo.

Procesamiento de señal

- Un ***sistema*** también puede definirse como un dispositivo (hardware + software) que *realiza una operación* o transformación sobre una señal.
- En estos casos, cuando se pasa la señal por el sistema, se dice que se ha efectuado un ***procesamiento de señal***.
- **Ejemplo**. Los filtros selectivos en frecuencia $\Rightarrow$ Reducir el ruido e interferencias de una señal.

Procesamiento de Señales

♦ Estructura Básica de un Sistema de Procesamiento de Señal

Procesamiento Analógico

Procesamiento Digital

♦ Ventajas del P.D.S. frente al P.A.S.

Reconfiguración.

- **P.D.S.** ⇒ Permite realizar fácilmente cambios de programas (software)
  ⇒ Permite utilizar métodos más complejos
- **P.A.S.** ⇒ Cambios de procesamiento implica cambios de hardware
  ⇒ Se implementan métodos poco sofisticados

Control de la Precisión.

- **P.D.S.** ⇒ Se determina fácilmente
  ⇒ Se establece por la precisión de los conversores (A/D y D/A) y las características arquitectónicas del procesador.
- **P.A.S.** ⇒ Díficil de determinar
  ⇒ Depende de la tolerancia de los componentes y de la variación de sus parámetros con el tiempo

Almacenamieto.

- **P.D.S.** ⇒ No se presenta deterioro o pérdida en la fidelidad de la señal
  ⇒ Facilidad de transporte
  ⇒ Permite el análisis en tiempo *no-real*
- **P.A.S.** ⇒ Puede presentarse deterioro o pérdidas en la fidelidad
  ⇒ No permite fácil análisis en tiempo *no-real*

Ventajas del P.D.S. frente al P.A.S. (suite)

- **Costo.** En muchos casos el P.D.S. es más barato que el P.A.S.

Limitaciones del P.D.S.

- **Velocidad.** La velocidad de operación de los conversores y de los procesadores impiden la utilización del P.D.S. para señales con ancho de banda extremadamente grandes.

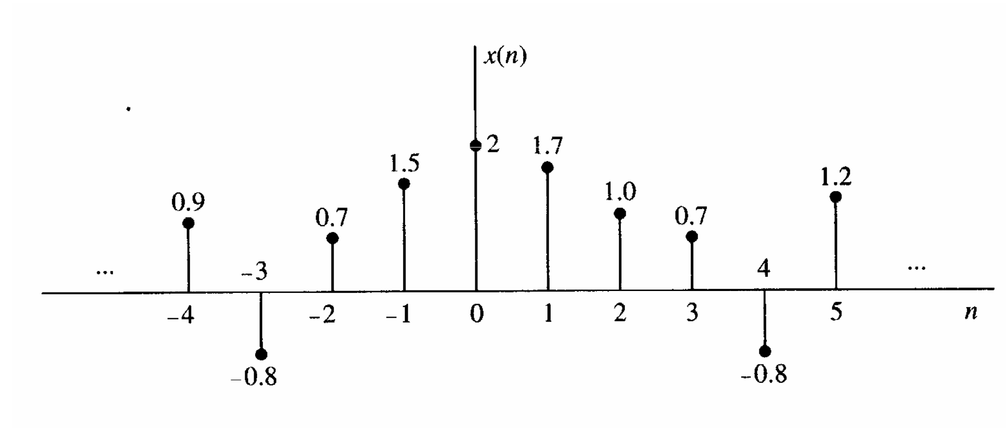
Algunas Areas de Aplicación del P.D.S.

- **Procesamiento y transmisión de imágenes y texto.**
- **Procesamiento y transmisión de voz.**
- **Procesamiento y transmisión señales generadas por sensores.**
- **Procesamiento de señales inter-espaciales, detección de explosiones nucleares, exploración terrestre y submarina, aplicaciones médicas, robótica,....**

Señales en Tiempo Discreto

♦ Representaciones

R. Gráfica



R. Funcional

$$x(n)=\begin{cases}1, & \text{para} \quad n=1,3\\ 4, & \text{para} \quad n=2,5\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

R. Tabular

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	0	0	$\cdots$

R. Secuencial

$$x(n)=\{\ldots,\ 0,\ 0,\ \underline{1},4,\ 8,\ 3,\ 0,\ 0,\ldots\}$$

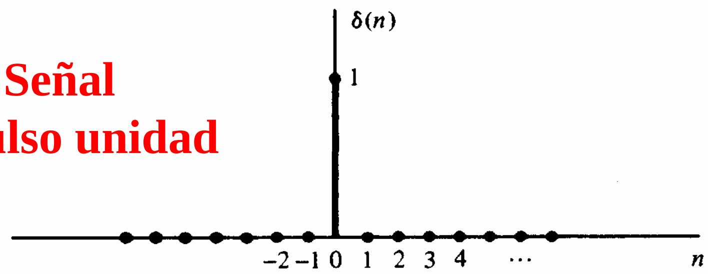
Señal de duración infinita

$$x(n)=\{2,\ 0,\ 0,\ \underline{1},4,\ 8,\ 3,\ 0,\ 0\}$$

Señal de duración finita

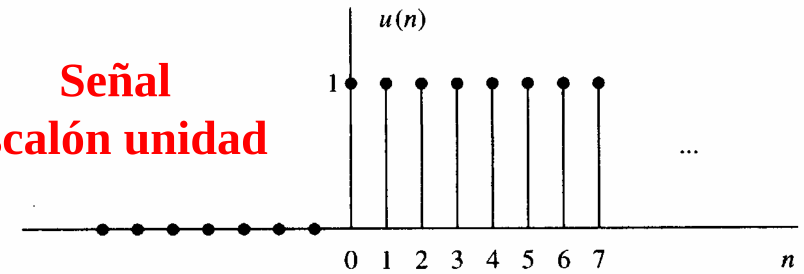
♦ Señales Típicas en Tiempo Discreto

Señal impulso unidad



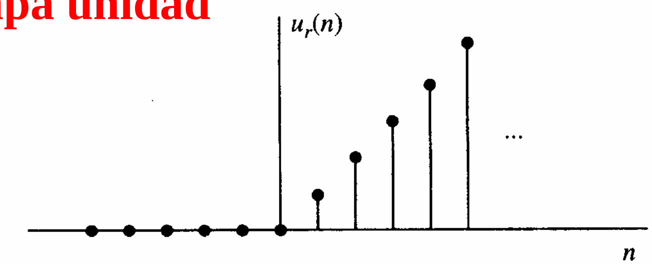
$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

Señal escalón unidad



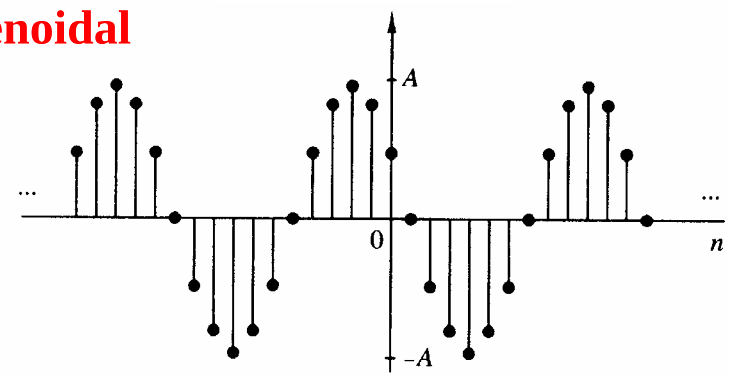
$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

Señal rampa unidad



$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

Señal senoidal

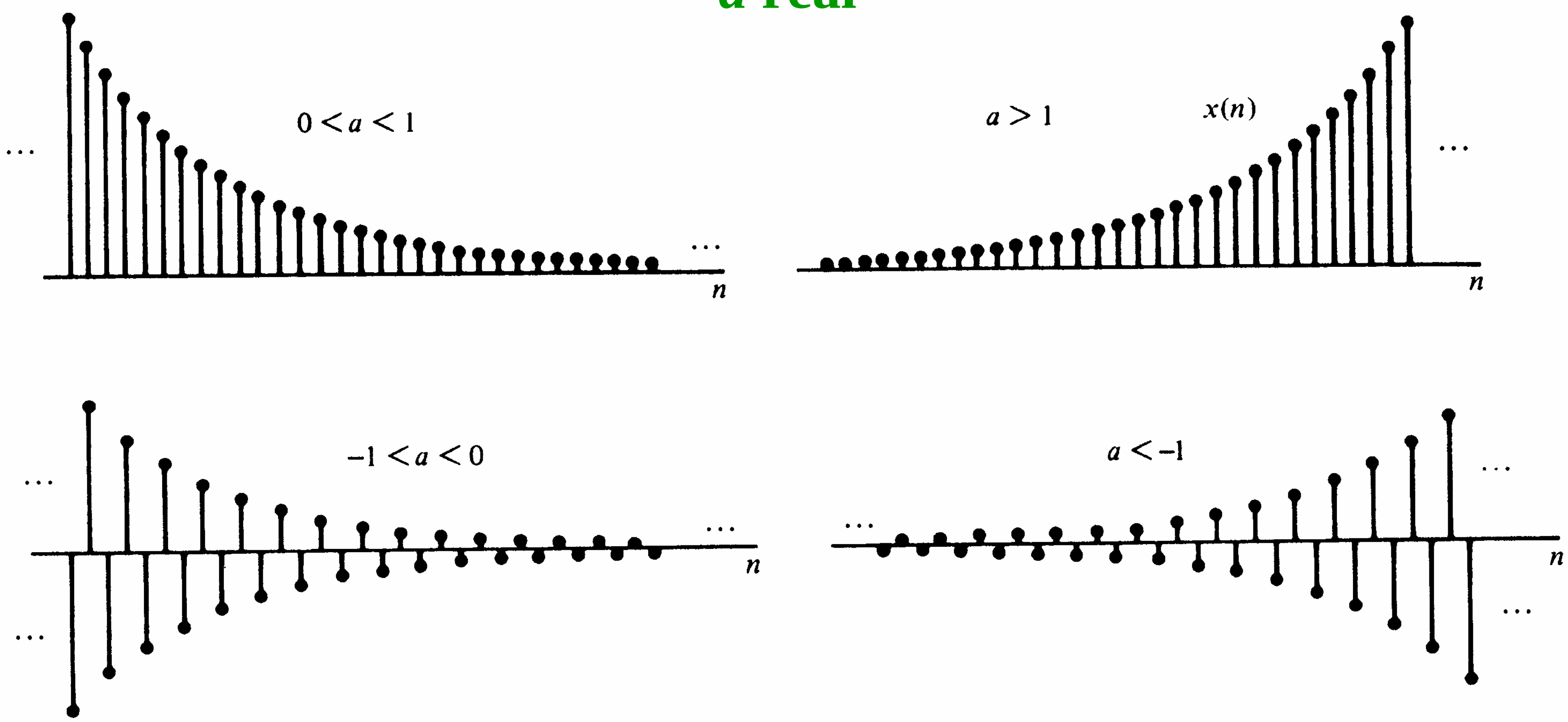


$$x(n) \equiv A\cos(wn + \theta)$$

♦ Señales Típicas en Tiempo Discreto (suite)

⏩ Señal Exponencial: $x(n) = a^n$ para todo n

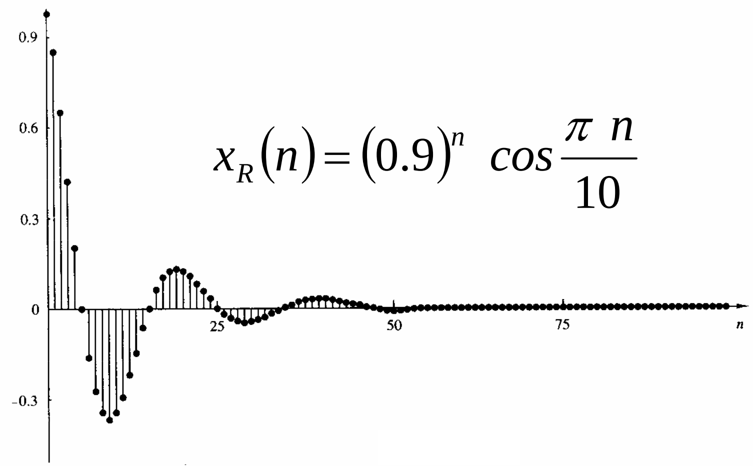
a real



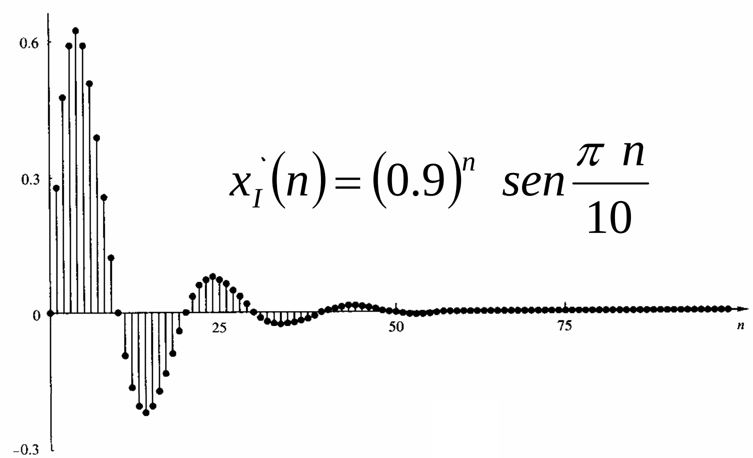
♦ Señales Típicas en Tiempo Discreto (suite)

⏩ Señal exponencial

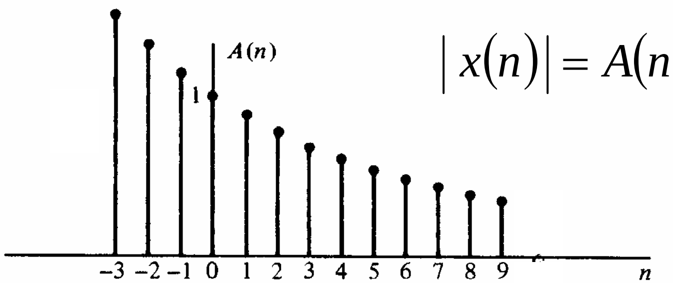
a complejo $\rightarrow$ $a \equiv r\, e^{j\,\theta} \rightarrow$ $\quad x(n) = r^n e^{j\theta n} = r^n \left[\cos(\theta\, n) + j\, sen(\theta\, n)\right]$



$$x_R(n) = (0.9)^n \cos\frac{\pi\, n}{10}$$

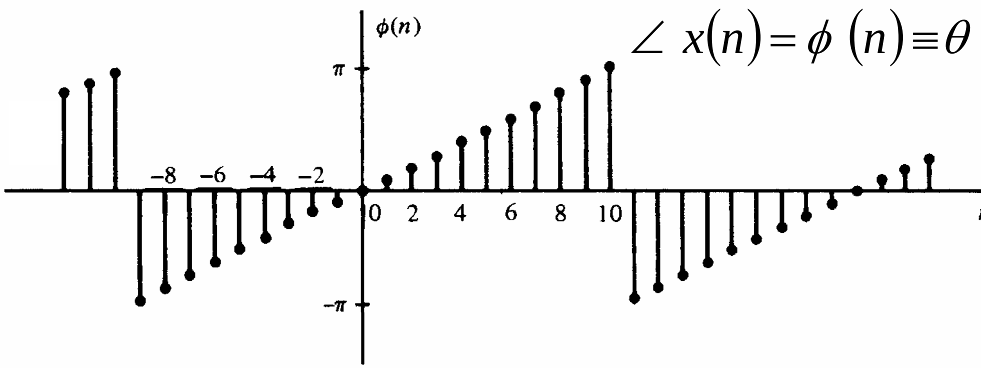


$$x_I(n) = (0.9)^n \; sen\frac{\pi\, n}{10}$$



$$|x(n)| = A(n) \equiv r^n$$

(a) Gráfica de $A(n) = r^n$, $r = 0.9$



$$\angle\, x(n) = \phi(n) \equiv \theta\, n$$

(b) Gráfica de $\phi(n) = \frac{\pi}{10} n$, módulo 2π dibujada en el intervalo $(-\pi,\pi)$

♦ Características de las Señales en tiempo Discreto

Señales de Energía y de Potencia. En muchas aplicaciones las señales están directamente relacionadas con cantidades físicas que capturan potencia y energía de un sistema físico.

La **Energía E** de una señal x(n) se define como:

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

✓ Válido para señales reales y complejas. ✓ La energía puede ser finita o infinita.

La **Potencia Media P** de una señal discreta en el tiempo se define como:

$$P \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

La **Energía** sobre un intervalo finito **-N ≤ n ≤ N** se calcula como:

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

La Energía y la potencia pueden reescribirse como:

$$E \equiv \lim_{N \to \infty} E_N$$

$$P \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

En conclusión

$$\text{Si } \; E < \infty \;\rightarrow\; P = 0 \qquad \Rightarrow \; \text{Señal de Energía}$$

$$\text{Si } \; E = \infty \;\rightarrow\; \begin{cases} P = \infty \\ 0 < |P| < \infty \quad \Rightarrow \; \text{Señal de Potencia} \end{cases}$$

♦ Características de las Señales en tiempo Discreto (suite)

Señales Periódicas y Aperiódicas.

- Una señal x(n) es **periódica** con periodo **N > 0** si y solo si:

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{para todo n}$$

→ El valor más pequeño para el que se cumple lo anterior, se denomina **periodo fundamental.**

→ Si no existe N, la señal se denomina **aperiódica**.

- Las señales periódicas, con periodo N, son señales de potencia, donde

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

- ***Caso especial:* la señal sinusoidal**

$$x(n) = A\,sen(2\pi\ f_0\, n)$$

es periódica cuando f_0 es racional, es decir, si f_0 puede expresarse como:

$$f_0 = \frac{K}{N} \qquad \text{donde K y N son enteros}$$

♦ Características de las Señales en tiempo Discreto (suite)

Señales Simétricas (par) y Antisimétricas (impar).

- Una señal x(n) se denomina **simétrica** si:

$$x(-n) = x(n) \quad \text{para todo n}$$

- Una señal x(n) se denomina **antisimétrica** si:

$$x(-n) = -x(n) \quad \text{para todo n.}$$

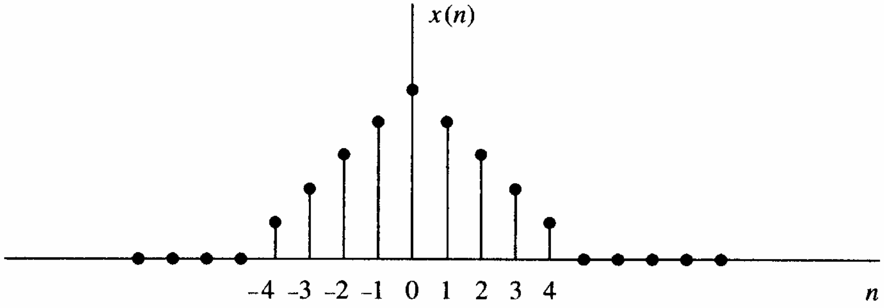
$$\text{Se cumple}: \quad x(0) = 0$$

- Una señal arbitraria puede expresarse como la suma de dos componentes, una par y la otra impar:

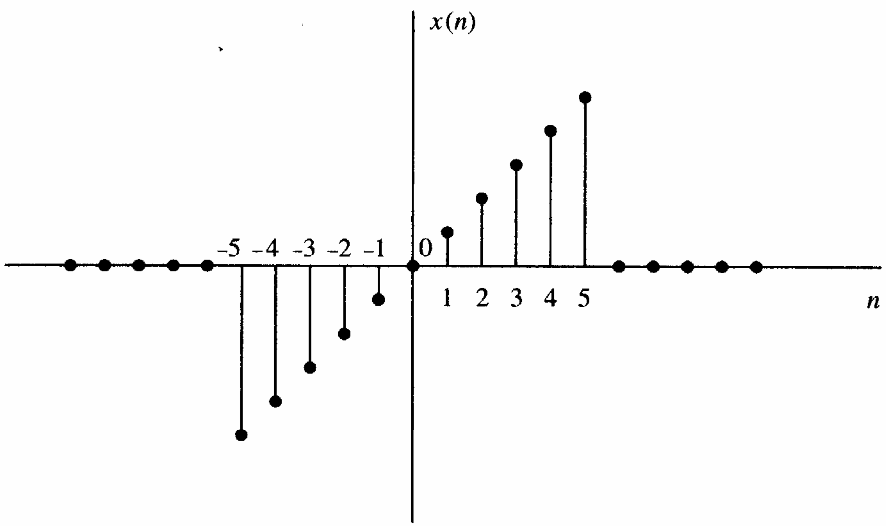
$$x_{par}(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x(-n)\right]$$

$$x_{impar}(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x(-n)\right]$$

$$x(n) = x_{par}(n) + x_{impar}(n)$$



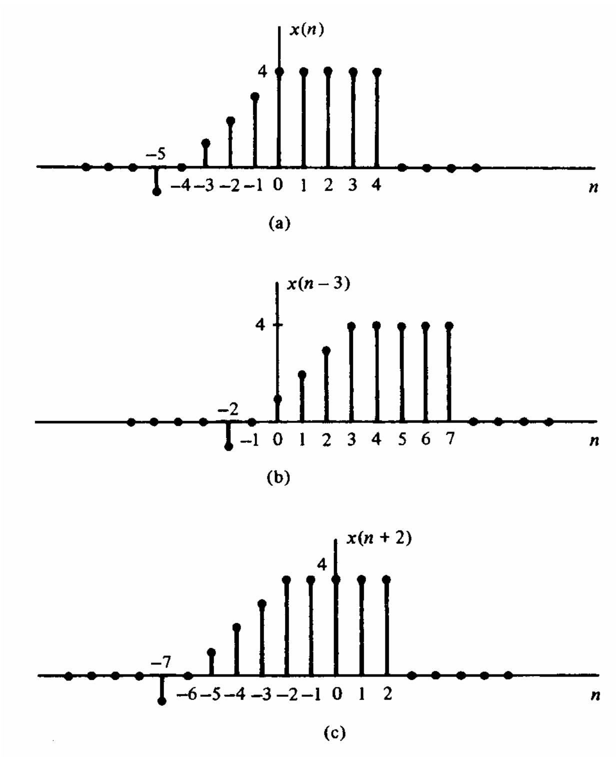
(a)

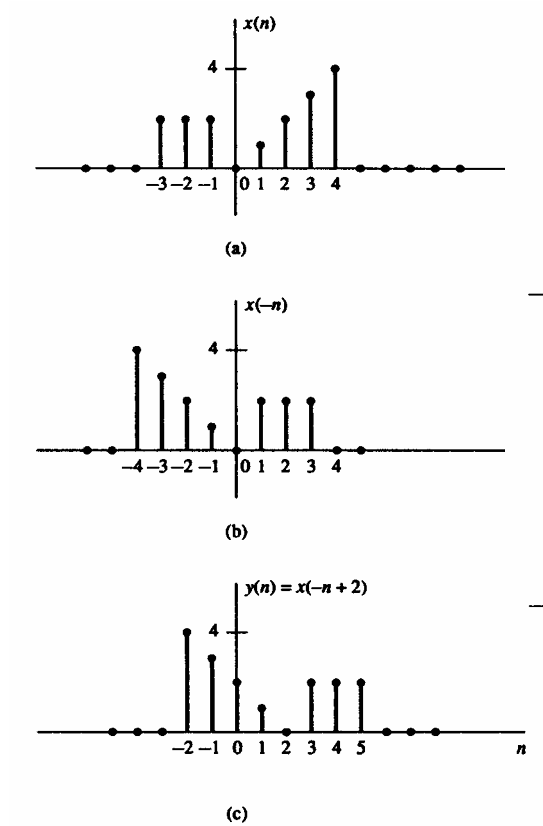


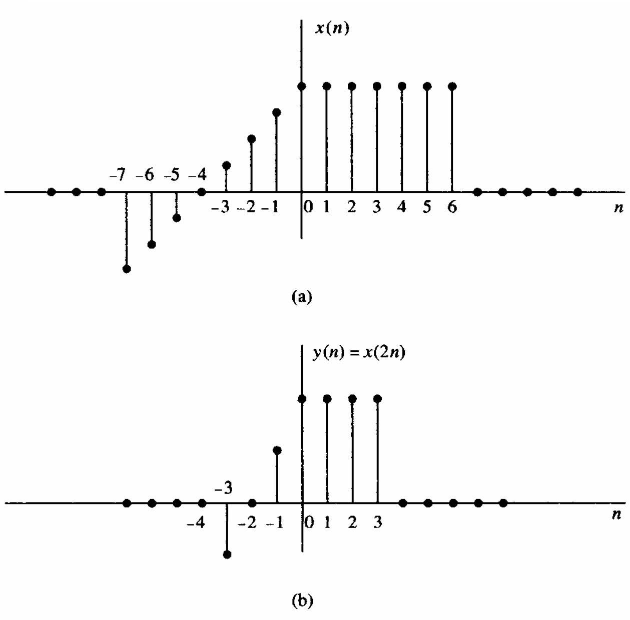
(b)

Manipulaciones de señales en T. D.

♦ Modificación en el Tiempo







- **Desplazamiento en el tiempo**
  - y(n) = x(n ± k), siendo k un entero positivo
  - **Retardo**: y(n) = x (n - k)
  - **Adelanto**: y(n) = x (n + k)
- **Reflexión temporal**
  - y(n) = x(-n)
- **Escalamiento temporal (o submuestreo)**
  - y(n) = x(μ n) siendo μ un entero.

♦ Modificación en Amplitud

- **Ecalamiento:** y(n)= A x(n) -∞ < n < ∞
- **Suma:** y(n)= x_1(n) + x_2(n) -∞ < n < ∞
- **Producto:** y(n)= x_1(n) . x_2(n) -∞ < n < ∞

Otras Propiedades de los Sistemas

♦ Sistemas con memoria (Dinámicos) y sin memoria (estáticos)

- **S. sin memoria:** la salida para cada valor de la variable independiente en un tiempo dado sólo depende de la entrada en ese mismo instante.
  - **Ejemplo.**

$$y(n) = [x(n)]^2$$

- **S. con memoria:** la salida depende de valores de la señal de entrada en tiempos pasados.
  - **Ejemplo.**

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k) \qquad \text{memoria finita}$$

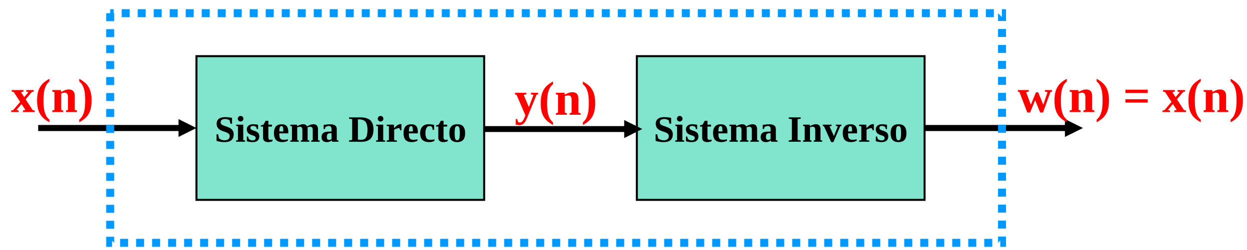
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \qquad \text{memoria infinita}$$

Otras Propiedades de los S.D.

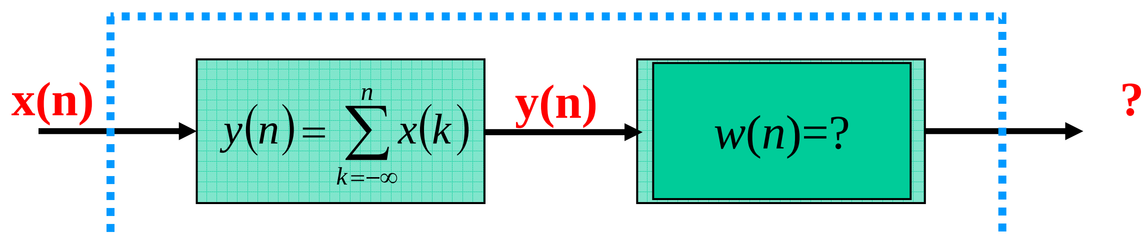
♦ Sistemas Invertibles

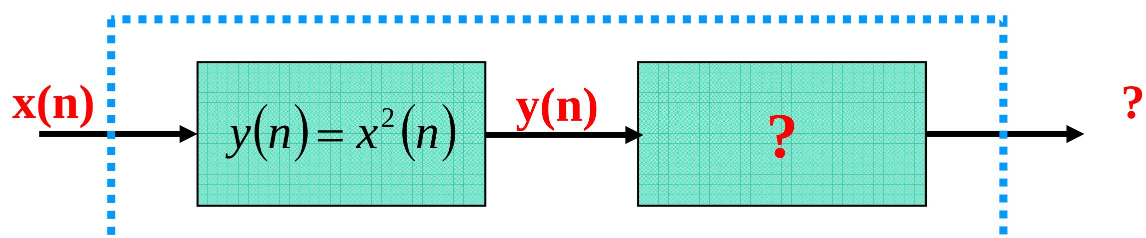
- Un sistema es invertible si existe una correspondencia biunívoca entre sus señales de entrada y salida. →*Utilidad: codificación y decodificación de señales.*
- Si un sistema es invertible existe un sistema inverso tal que cuando se conecta en cascada con el sistema original, produce una salida w(n) igual a la entrada x(n) del primer sistema.

Sistema Identidad



- **Ejemplos.**





Otras Propiedades de los S.D. (suite)

♦ Estabilidad de Sistemas

- Un sistema arbitrario en reposo se dice de entrada limitada-salida limitada (BIBO, Bounded Input -Bounded Output), si y sólo si toda entrada acotada produce una salida acotada.

  - Si un sistema satisface lo anterior, se dice que es **estable.**
  - Si para alguna entrada acotada x(n) la salida no está acotada, el sistema se clasifica como **inestable.**

  - **Ejemplo.** Determinar si el sistema es estable.

$$y(n) = y^2(n-1) + x(n)$$

$$\text{donde} \quad x(n) = c\ \delta(n), \qquad c \equiv \text{constante}, \quad \text{y(-1)} = 0$$

→ **Solución.** Verificar la secuencia de salida.

$$y(0) = c, \; y(1) = c^2, \; y(2) = c^4, \ldots, y(n) = c^{2^n}$$