Análisis de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo (LTI)

- **Motivación**
  - Existen gran variedad de técnicas matemáticas para el análisis de sistemas LTI.
  - Muchos sistemas prácticos son LTI o pueden aproximarse a sistemas LTI.

- **Técnicas:** Básicamente existen dos métodos.
  - **Convolución**
  - **Ecuaciones en diferencias**
    - **Método directo**
    - **Método indirecto**

Análisis por Convolución

■ Principio:

- Cualquier señal discreta x(n) puede descomponerse como una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados δ(n-k).

$$\text{Se tiene, } \; x(n)\,\delta(n-k) = x(k)\,\delta(n-k)$$

$$\text{Por lo tanto, } \; x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$$

- La respuesta del sistema lineal es la suma ponderada de respuestas a los impulsos.

$$y(n) = \mathrm{T}[x(n)] = \mathrm{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathrm{T}[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

- y(n) es la respuesta de un sistema lineal a cualquier secuencia de entrada x(n).

- y(n) depende de x(n) y de las respuestas h(n,k) del sistema a los impulsos unitarios δ(n-k).

- Este resultado es aplicable a cualquier sistema lineal en reposo (variante o invariante en el tiempo)

- Para ***sistemas invariantes en el tiempo***, la expresión se simplifica:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

- Los sistemas LTI en reposo quedan totalmente caracterizados por la función h(n), es decir su ***respuesta al impulso unitario***.

- La expresión que da la respuesta y(n) del sistema LTI como función de la señal de entrada x(n) y de la respuesta impulsional h(n) se denomina ***convolución.***

- La convolución involucra cuatro pasos: reflexión, desplazamiento, multiplicación, y suma de señales.

- **Ejemplo:** determine la respuesta del sistema LTI.

$$\text{Respuesta impulsional}: h(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\right\}$$

$$\text{Señal de entrada}: x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\right\}$$

- **Solución:** utilizar la convolución.

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k) = 1$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k) = 4$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = 8$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = 8$$

$$y(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1\right\}$$

■ Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI

- **Notación:** $$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- **Propiedad conmutativa:** $$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

- **Propiedad asociativa:** $$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

- **Propiedad distributiva:** $$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

- **Observación:**

  Desde un punto de vista físico estas propiedades pueden interpretarse como diferentes formas de interconectar un sistema para obtener el mismo resultado.

Causalidad en sistemas LTI

- Para sistemas LTI la causalidad se traduce en una determinada condición que ha de cumplir h(n).

- La convolución para un instante n_0 está dada por:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

que puede re-escribirse como:

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) \\ &= [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \ldots] \\ &\quad + [h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + \ldots] \end{aligned}$$

- Para que la salida y(n) dependa sólo de las muestras pasadas y presentes de la entrada, la respuesta impulsional debe satisfacer la condición: **h(n) = 0 para n < 0**.
- *Un sistema LTI es causal si y sólo si su respuesta impulsional es cero para valores negativos de n.*

Estabilidad en sistemas LTI

- Un sistema en reposo es estable (BIBO) si y sólo si su secuencia de salida y(n) está acotada para cualquier entrada acotada x(n).
- Si x(n) está acotada, existe una constante M_x talque

$$|x(n)| \leq M_x < \infty$$

- Si la salida está acotada, existe una constante M_y tal que

$$|y(n)| \leq M_y < \infty$$

- Tomando el valor absoluto en ambos lados de la fórmula de convolución, se obtiene,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

- Puesto que el valor absoluto de una suma es siempre menor o igual que la suma de los valores absolutos de sus términos:

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

- Puesto que la entrada es acotada, |x(n)| ≤ M_x. Sustituyendo este límite superior para x(n) en la expresión anterior, se obtiene

$$\left|y(n)\right| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right|$$

- A partir de esta expresión, se puede concluir que la salida está acotada si la respuesta impulsional del sistema satisface la condición:

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| < \infty$$

- En consecuencia, *Un sistema LTI es estable si su respuesta impulsional es absolutamente sumable.*

- Esta condición es necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.

- **Ejemplo 1:** determinar el rango de valores del parámetro *a* para el cual el sistema LTI de respuesta $h(n)=a^{n}\,u(n)$ es estable.

  - Puesto que el sistema es causal, el límite inferior en la sumatoria de la condición de estabilidad es cero:

$$S_h \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left|h(k)\right| < \infty$$

  - De donde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a^{k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|a\right|^{k} = 1 + \left|a\right| + \left|a\right|^{2} + \ldots$$

  - Claramente, esta serie geométrica converge a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a\right|^{k} = \frac{1}{1-\left|a\right|}$$

  - siempre que $|a|<1$. Por lo tanto, el sistema es estable si $|a|<1$.

- **Ejemplo 2:** determinar el rango de valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para el cual el sistema LTI de respuesta impulsional h(n) es estable.

$$h(n) = \begin{cases} a^n, \; n \geq 0 \\ b^n, \; n < 0 \end{cases}$$

- El sistema no es causal. Por lo tanto, de la condición de estabilidad se tiene,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k$$

- Del ejemplo anterior, la primera suma converge si $|a|<1$. La segunda suma puede escribirse como,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^k} = \frac{1}{|b|}\left(1 + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|b|^2} + \ldots\right) = \frac{1/|b|}{1 - 1/|b|}$$

donde $1/|b| < 1$ para que la serie converja. En consecuencia, el sistema es estable si $|a|<1$ y $|b|>1$.

Sistemas LTI: FIR e IIR

- Los sistemas LTI quedan caracterizados por su respuesta impulsional h(n).
- Dependiendo de la duración de la respuesta impulsional, los sistemas LTI pueden dividirse en:
  - Sistemas **FIR** (Finite-duration Impulse Reponse)
    - Respuesta impulsional definida dentro de un determinado intervalo finito de tiempo.
    - Presenta una memoria finita, de longitud igual al intervalo.
  - Sistemas **IIR** (Infinite-duration Impulse Reponse):
    - Respuesta impulsional que considera tanto la muestra presente como todas las pasadas de la señal de entrada.
    - El sistema IIR presenta memoria infinita.

Sistemas Discretos Recursivos y No Recursivos

■ Definiciones:

- **Sistemas no recursivos:** Sistemas cuya salida y(n) depende sólo de los valores presentes y/o pasados de la señal de entrada x(n).

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

- **Sistemas recursivos:** Sistemas cuya salida y(n) en el instante n depende de los valores anteriores de la misma salida, y(n-1), y(n-2), ….

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

■ Observaciones:

- La implementación de muchos sistemas discretos requiere del cálculo de la señal de salida como función de los valores de la señal de entrada (pasados y presente) y además de valores (pasados) de la misma señal de salida.
- Los sistemas recursivos se diferencian de los no recursivos por la presencia de lazos de realimentación y atrasos entre la entrada y la salida.
- La salida de un sistema recursivo debe calcularse consecutivamente mientras que la salida de un sistema no recursivo se puede calcular en cualquier orden.

Ejemplo 1.

- Calcular el promedio acumulado de una señal x(n) en el intervalo $0 \le k \le n$.

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k) \qquad n = 0,1,.....$$

- Modificando la expresión anterior es posible obtener un sistema recursivo que requiere mucho menos memoria.

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = n\,y(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)$$

Ejemplo 2.

- Sistema recursivo para calcular la raíz cuadrada de un número positivo A:

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right]$$

- y(-1) debe ser igual a una estimación grosera de $\sqrt{A}$ y x(n)=A u(n).
- Con A=2, y(-1)=1 $\Rightarrow$y(0)=3/2; y(1)=1.4166667: y(2)=1.4142157.

Ejercicio

- Obtener el diagrama de bloques para los sistemas anteriores.