Series de Fourier de Señales *Continuas y Periódicas*

Introducción

- Las *Series de Fourier* son una representación matemática básica de las señales periódicas, que consiste en una suma ponderada de sinusiodales relacionadas armónicamente, de la forma,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$$

  donde, $F_0 = 1/T_p$ determina el periodo fundamental de x(t) y los coeficientes $\{c_k\}$ especifican la forma de onda. Los términos exponenciales constituyen los bloques "básicos" para reconstruir la señal periódica.

- Los *coeficientes de Fourier* están dados por,

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 kt} \partial t$$

- *Condiciones de Dirichlet*: condiciones (suficientes pero no necesarias) que garantizan que la serie de Fourier de x(t) sea igual a la señal x(t), excepto en los valores de t en los que x(t) es discontinua. En estos valores de t, la serie converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son:
  - x(t) tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
  - x(t) contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo.
  - x(t) es absolutamente integrable en cualquier periodo.

Resumen

ANÁLISIS FRECUENCIAL DE SEÑALES PERIÓDICAS EN TIEMPO CONTINUO

Ecuación de síntesis	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_o t}$
Ecuación de análisis	$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi kF_o t}dt$

FORMAS ALTERNAS DE LA SERIE DE FOURIER DE UNA SEÑAL REAL

- **Coseno**

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi kF_0 t + \theta_k)$$

- **Seno-Coseno**

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kF_0 t) - b_k sen(2\pi kF_0 t)]$$

$$a_0 = c_0 \qquad a_k = 2|c_k|\cos\theta_k \qquad b_k = 2|c_k|\,sen\theta_k$$

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA DE SEÑALES PERIÓDICAS

- Una señal periódica tiene energía infinita y potencia media finita dada por,

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} \left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2$$

- La expresión anterior que relaciona los coeficientes de Fourier con la potencia, se conoce como *Relación de Parseval* para *señales de potencia*.

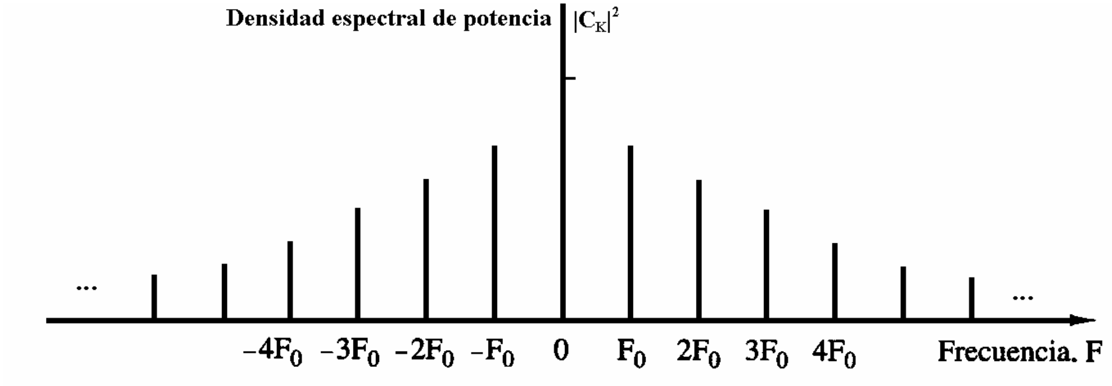
- Ejemplo. Obtener el diagrama del espectro de frecuencia (o densidad espectral de potencia) de la señal exponencial:

$$x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

En este caso, todos los coeficientes de la serie de Fourier excepto c_k son cero. En consecuencia, la potencia media de la señal es,

$$P_k = | c_k |^2$$

El diagrama del espectro se obtiene al dibujar $|c_k|^2$ en función de las frecuencias kF_0, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Representaciones alternas

- Los coeficientes de la serie de Fourier son complejos, y pueden escribirse como

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k} \quad donde \quad \theta_k = \angle c_k$$

- Por lo tanto se pueden tener representaciones independientes del módulo del espectro de ***tensión*** $\{|c_k|\}$ y del espectro de ***fase*** $\{\theta_k\}$ en función de la frecuencia.

Señales periódicas reales (todas las señales prácticas)

- Los coeficientes de la serie Fourier $\{c_k\}$ satisfacen la condición,

$$c_{-k} = c_k^* \quad y \;\; por \;\; consiguiente, \quad |c_k|^2 = |c_k^*|^2$$

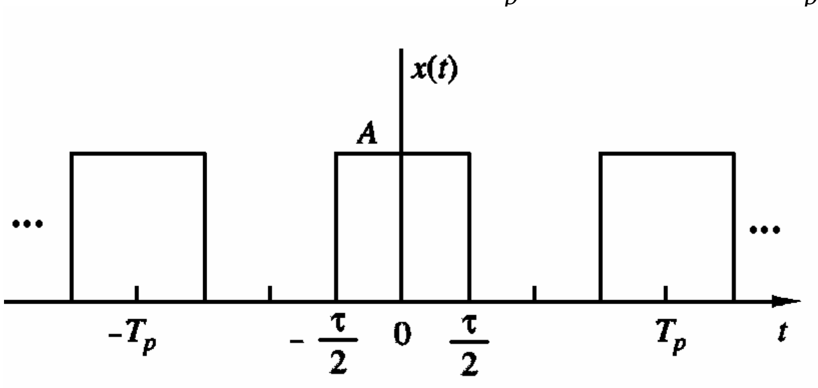
esto implica que el espectro de potencia y el módulo de tensión son funciones simétricas (pares) respecto del origen, y que el espectro de fase es una función impar.

- Como consecuencia de la simetría, es suficiente con especificar el espectro de señales reales para valores positivos de la frecuencia.
- La potencia media total se puede expresar como:

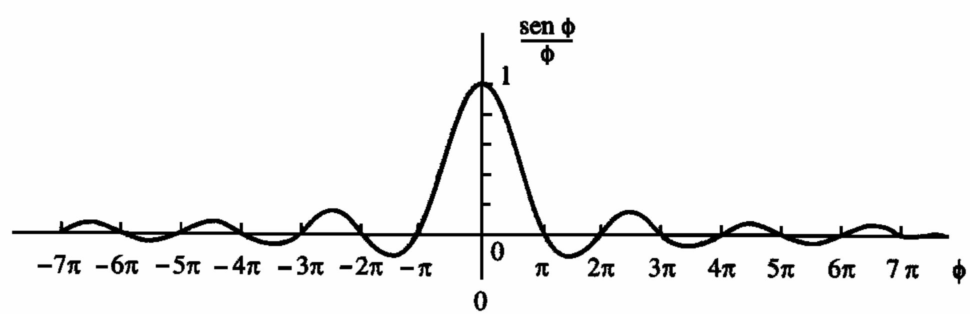
$$P_x = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

- **Ejercicio**. Determinar la serie de Fourier y la densidad espectral de potencia para un tren de pulsos rectangulares.
- **Solución**. La señal es periódica con periodo fundamental T_p, y cumple las condiciones de Dirichlet. Aplicando la definición,

$$c_0 = \frac{A\tau}{T_p} \qquad c_k = \frac{A\tau}{T_p}\frac{sen(\pi kF_0\tau)}{(k\pi F_0\tau)} \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$



Tren periódico de pulsos rectangulares

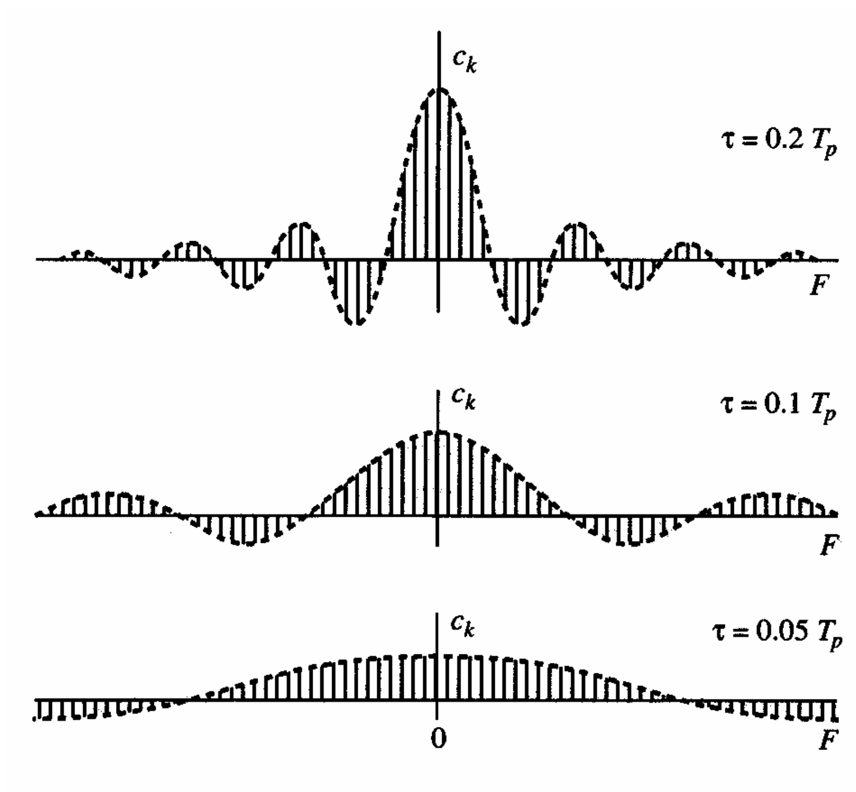


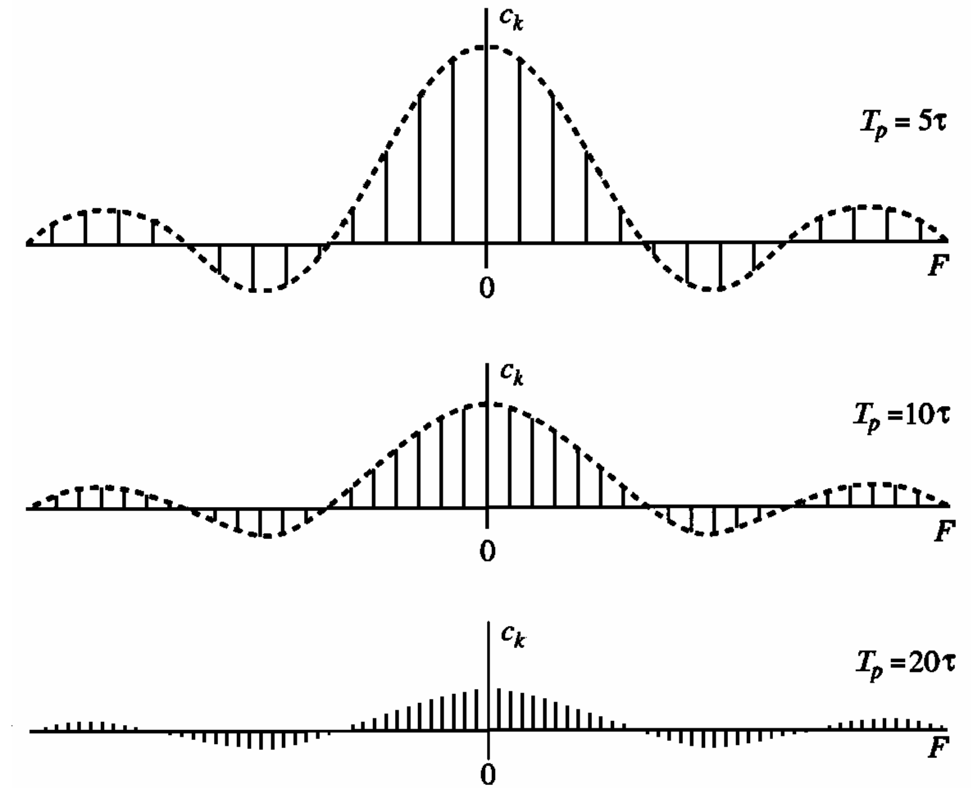
Función continua **sinc = (sen ø)/ø**

- Los coeficientes de Fourier son las muestras de la función **sinc** para $\phi = \pi k F_0 \tau$ escalados en amplitud por $A\tau/T_p$.
- Densidad espectral:

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 & k = 0 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left[\dfrac{sen\,(\pi kF_0\tau)}{(\pi kF_0\tau)}\right]^2 & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Comportamiento de los coeficientes de Fourier cuando cambia Tp y el ancho τ





Coeficientes de fourier cuando Tp es fijo y el ancho τ cambia.

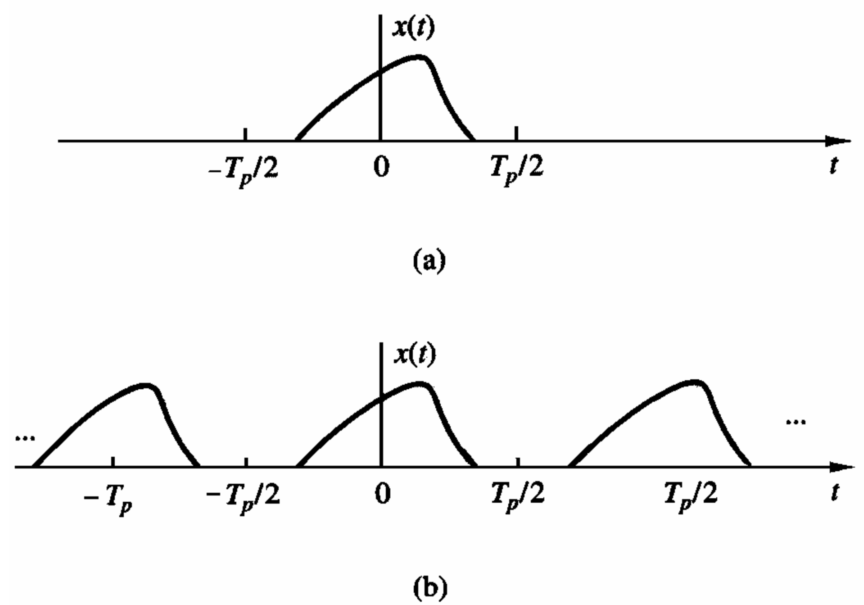
(Tp=0.25 s)

Coeficientes de Fourier cuando τ es fijo y Tp cambia.

Transformada de Fourier de Señales *Continuas y Aperiódicas*

Introducción

- Serie de Fourier
  - Representación de una *señal periódica* como combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas.
  - Por ser periódicas, las señales poseen un espectro de líneas equidistantes, separadas por una cantidad igual a su frecuencia fundamental.
- Transformada de Fourier
  - Si el periodo de una señal periódica aumenta sin límite, el espaciado del espectro tiende a cero.
  - Cuando el periodo se hace infinito, la señal se hace aperiódica y su espectro continuo.
  - El espectro de una señal aperiódica será la envolvente del espectro de una señal periódica obtenida al repetir la señal aperiódica con periodo T_p.



(a) Señal aperiódica $x(t)$; (b) Señal periódica $x_p(t)$ construida repitiendo $x(t)$ con periodo T_p

Transformada de Fourier de Señales *Continuas y Aperiódicas*

Resumen

- La transformada de Fourier se aplica a señales aperiódicas.
- La transformada de Fourier genera un espectro continuo.

Transformada de Fourier *Directa* e *Inversa*

- Para una señal continua y aperiódica *x(t)*, la **Transformada Directa de Fourier** está dada por:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} \, dt$$

- A través de la **Transformada Inversa de Fourier** es posible recuperar *x(t)* a partir de *X(F)*.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} \, dF$$

Representaciones alternas

- En términos de la variable de frecuencia **Ω =2πF**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} \, d\Omega$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} \, dt$$

Condiciones de Dirichlet

- Condiciones suficientes y no necesarias para garantizar la existencia de la transformada de Fourier para señales aperiódicas.
  - x(t) tiene un número finito de discontinuidades.
  - x(t) contiene un número finito de máximos y mínimos.
  - x(t) es absolutamente integrable.

Densidad Espectral de Energía de Señales Aperiódicas

- Sea x(t) una señal de energía finita con trasformada de Fourier *X(F)*. Su energía es,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t)\, dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi F t}\, dF \right] = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)\, dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t}\, dt \right]$$

se concluye que,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2\, dF$$

- La cual es la ***Relación de Parseval*** para señales aperiódicas de energía finita y expresa el principio de ***conservación de energía*** en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Representación alterna del espectro

- El espectro de **X(F)** de una señal es generalmente complejo, por lo que puede expresarse como,

$$X(F) = |X(F)|\, e^{j\Theta(F)}$$

donde |X(F)| es el módulo del espectro y Θ(F) es la fase.

Densidad espectral de energía, S_{xx} (F)

- Representa la distribución de energía de la señal *x(t)* en función de la frecuencia.

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2$$

- S_{xx}(F) no contiene información sobre la fase, es real y positivo.

Señales aperiódicas <u>reales</u> (toda las señales prácticas)

- Si la señal es real,

$$|X(-F)| = |X(F)| \qquad y \qquad \angle X(-F) = -\angle X(F)$$

$$luego, \quad S_{XX}(-F) = S_{XX}(F)$$

- **Ejercicio.** Determinar la transformada de Fourier y la densidad espectral de energía del pulso rectangular definido por,

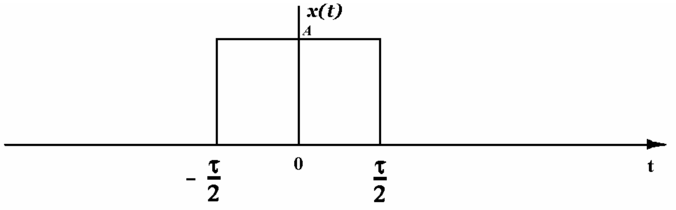
$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- **Solución.** La señal es aperiódica y cumple las condiciones de Dirichlet. Aplicando la definición,

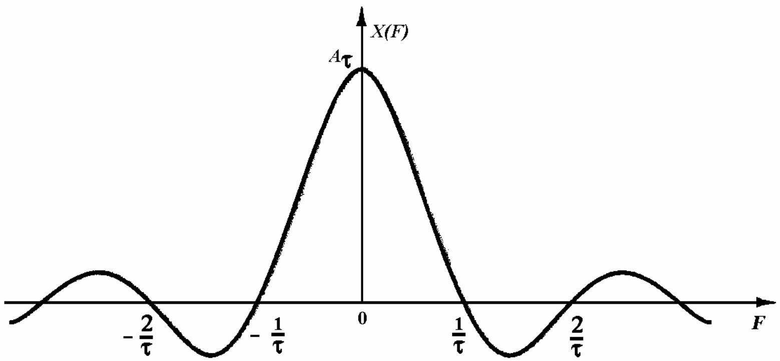
$$X(F)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi F t}\,dt = A\tau\frac{sen(\pi F\tau)}{(\pi F\tau)}$$

- Densidad espectral,

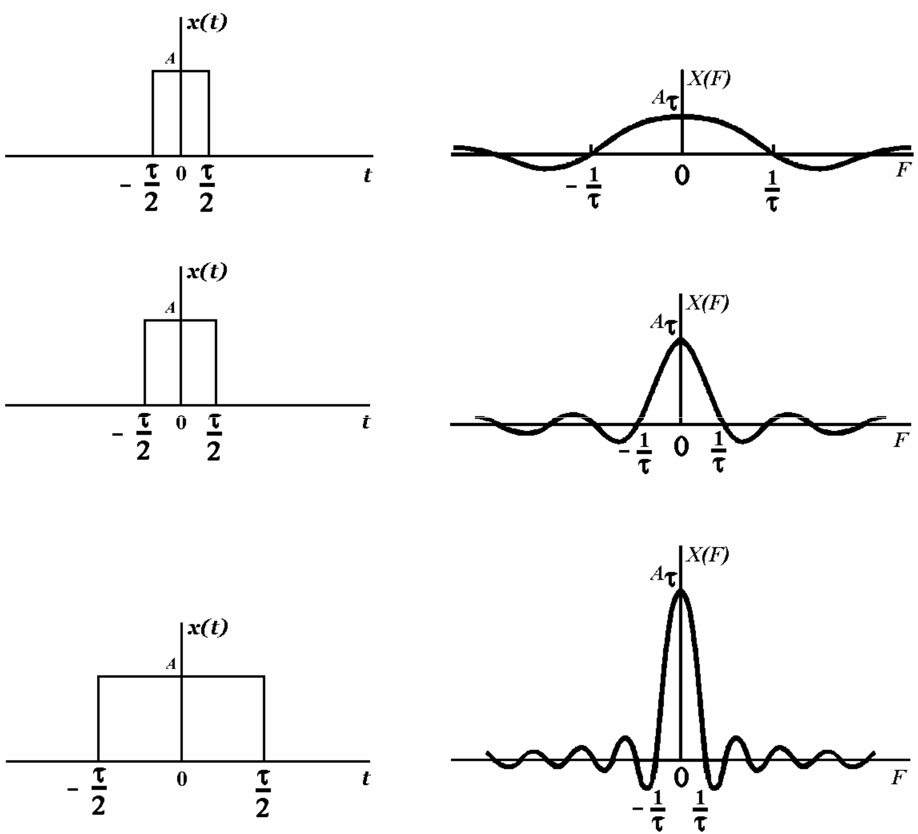
$$S_{xx}(F)=(A\tau)^2\left[\frac{sen(\pi F\tau)}{(\pi F\tau)}\right]^2$$



(a)



(b)



- X(F) es real, y puede representarse por un único diagrama.
- Los cruces por cero de X(F) ocurren para múltiplos de $1/\tau$.
- A medida que el pulso en el *tiempo* se ensancha (estrecha) su transformada se comprime (ensancha) en *frecuencia*.
  - Forma del principio de incertidumbre.

Series de Fourier de Señales *Periódicas y Discretas*

Introducción

- Sea $x(n)$ una secuenia periódica de periodo **N;** es decir, $x(n)=x(n+\mathbf{N})$ para todo n.
  - La representación en series de Fourier de $x(n)$ consta de **N** funciones exponenciales armónicamente relacionadas,

$$e^{j2\pi k\, n/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \quad y\ se\ \exp resa\ como\ \ x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{\,j2\pi k\, n/N}$$

  donde c_k son los coeficientes de Fourier dados por,

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k\, n/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- Los coeficientes c_k son complejos, por lo que proporcionan la descripción de x(n) en el dominio de la frecuencia. El *término exponencial* puede escribirse como,

$$s_k(n) = e^{j2\pi k\, n/N} = e^{j w_k n} \qquad donde \quad w_k = 2\pi\ k/N$$

- Las funciones $s_k(n)$ *también son periódicas* de periodo N, es decir, $\mathbf{s_k(n)=s_k\,(n+N)}$**;**
  - Entonces, los coeficientes de la serie de Fourier definen una *secuencia periódica* que se extiende fuera del rango k=0,1,…, N-1. **Luego,** $\mathbf{c_{k+N}=c_k}$**.**

*El **espectro** de una señal x(n) de periodo N, es una secuecia de periodo N.*

- *Los coeficientes de Fourier **se analizan sólo en el intervalo de tiempo** $\mathbf{0 \leq k \leq N-1}$**,** el cual se corresponde con el **intervalo de frecuencia** $\mathbf{0 \leq w_k = 2\pi k/N < 2\pi}$*

Serie de Fourier de Señales Periódicas y Discretas

EJEMPLOS

Señal 1: $x(n)= \cos(\pi n/3)$

Espectro Real:

$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

$c_1 = c_5 = 1/2$

Señal 2: Secuencia $\{\underline{1}, 1, 0, 0\}$

con periodo $N = 4$

Espectro Complejo:

Magnitud

$|c_0|=1/2$ $|c_1|=(2)^{1/2}/4$

$|c_2|=0$ $|c_3| |=(2)^{1/2}/4$

Fase

$\angle c_0 = 0$ $\angle c_1=-\pi/4$

$\angle c_2 =$ no definido $\angle c_3=\pi/4$