Dualidades Tiempo - Frecuencia

Series/Transformada de Fourier

- Series $\rightarrow$ señales periódicas
- Transformada $\rightarrow$ señales aperiódicas

Señales en *tiempo continuo* tienen espectros aperiódicos

- La falta de periodicidad se debe a que la función exponencial $e^{(j\,2\,\pi\,F\,t)}$ es una función de la variable continua *t*, y por lo tanto no periódica en F.
- El rango de frecuencias se extiende desde F=0 hasta F=$\pm\infty$.

Señales en *tiempo discreto* tiene espectros periódicos

- Las series y transformadas de Fourier de señales en tiempo discreto son periódicas de periodo $w=2\pi$.
- El rango de frecuencias es finito y se extiende desde $w = -\pi$ hasta $w = \pi$, donde $w = \pi$ corresponde a la mayor oscilación posible.

Señales *periódicas* tienen espectros discretos

- Los coeficientes de la serie de Fourier representan las "líneas" del espectro discreto. El **espaciado** entre líneas ΔF del espectro es igual al inverso del periodo Tp en el tiempo. (alternativamamente, Δf en el tiempo es el inverso del periodo N en el espectro).
  - Señales periódicas en tiempo continuo $\Delta F = \mathbf{1/Tp}$
  - Señales periódicas en tiempo discreto $\Delta f = \mathbf{1/N}$

Señales *aperiódicas* (de energía finita) tienen espectros continuos

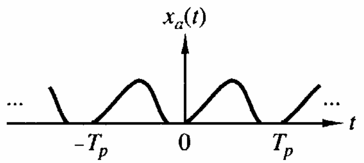
- Se deriva del hecho de que X(F) y X(w) son funciones de $e^{(j\,2\,\pi\,F\,t)}$ y $e^{(j\,w\,n)}$, las cuales son funciones continuas de las variables F y *w*.

Resumen de Fórmulas de Análisis y Diseño

Señales periódicas — Series de Fourier

Señales en tiempo continuo

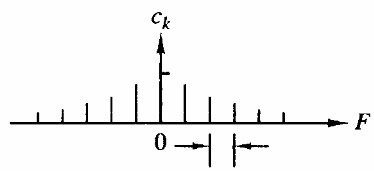
Dominio del tiempo



$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x_a(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt \quad \Longrightarrow$$

Continuas y periódicas

Dominio de la frecuencia



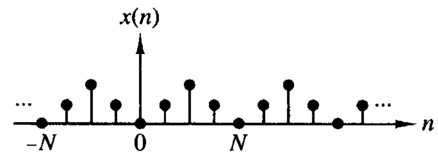
$$F_0 = \frac{1}{T_p}$$

$$\Longleftarrow \quad x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$$

Discretas y aperiódicas

Señales en tiempo discreto

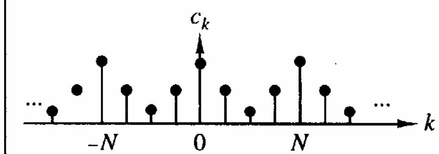
Dominio del tiempo



$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn} \quad \Longrightarrow$$

Discretas y periódicas

Dominio de la frecuencia



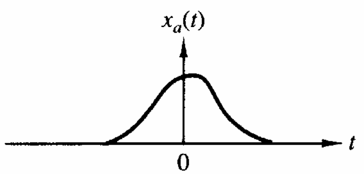
$$\Longleftarrow \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

Discretas y periódicas

Señales aperiódicas — Transformadas de Fourier

Señales en tiempo continuo

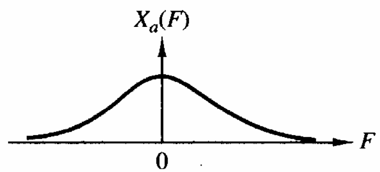
Dominio del tiempo



$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt \quad \Longrightarrow$$

Continuas y aperiódicas

Dominio de la frecuencia

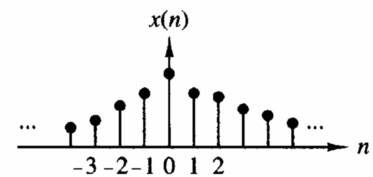


$$\Longleftarrow \quad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$$

Continuas y aperiódicas

Señales en tiempo discreto

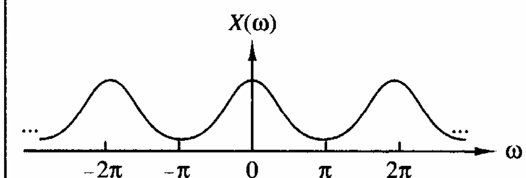
Dominio del tiempo



$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \Longrightarrow$$

Discretas y aperiódicas

Dominio de la frecuencia



$$\Longleftarrow \quad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

Continuas y periódicas

Propiedades de la Transformada de Fourier de Señales en Tiempo Discreto

Definiciones

- Por definición las transformadas directa e inversa de Fourier están dadas por,

$$X(w) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \qquad x(n) \equiv F^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(w) e^{jwn}\, dw$$

Propiedades de simetría

- En términos generales tanto la señal x(n) como su transformada X(w) pueden ser funciones complejas,

$$x(n) = x_R(n) + j\, x_I(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(w) = X_R(w) + j\, X_I(w)$$

- Reemplazando en la definición de las transformadas directa e inversa, y utilizando la identidad e^{-jw}=cos w - jsen w,

Transformada directa

$$X_R(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_R(n) \cos wn + x_I(n) \operatorname{sen} wn \right]$$

$$X_I(w) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_R(n) \operatorname{sen} wn - x_I(n) \cos wn \right]$$

Transformada inversa

$$x_R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left[X_R(w) \cos wn - X_I(w) \operatorname{sen} wn \right] dw$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left[X_R(w) \operatorname{sen} wn + X_I(w) \cos wn \right] dw$$

Propiedades de simetría de la Transformada de Fourier

Propiedades de Simetría de *Señales Reales*: x(*n*)=x$_R$(*n*)

- **Transformada directa**

$$X_R(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)\cos wn]$$

$$X_I(w) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)\operatorname{sen} wn]$$

- **Transformada inversa**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}[X_R(w)\cos wn - X_I(w)\operatorname{sen} wn]dw$$

Propiedades de Simetría de *Señales Reales* y *Pares* : x(-*n*)=x(*n*)

- ***x*(n) cos *wn* es par y *x*(n) sen *wn* es impar**

- **Transformada directa**

$$X_R(w) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}[x(n)\cos wn] \quad \to \text{s. par}$$

$$X_I(w) = 0$$

- **Transformada inversa**

$$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[X_R(w)\cos wn]dw$$

Propiedades de Simetría de *Señales Reales* e *Impares* : x(-*n*)=-x(*n*)

- ***x*(n) cos *wn* es impar y *x*(n) sen *wn* es par**

- **Transformada directa**

$$X_R(w) = 0$$

$$X_I(w) = -2\sum_{n=1}^{\infty}[x(n)\operatorname{sen} wn] \quad \to \text{s.impar}$$

- **Transformada inversa**

$$x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[X_I(n)\operatorname{sen} wn]dw$$

Propiedades de simetría de la Transformada de Fourier

Propiedades de Simetría de *Señales Imaginarias* puras: x(*n*)=j $x_I(n)$

- Transformada directa

$$X_R(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_I(n)\operatorname{sen} wn\right]$$

$$X_I(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_I(n)\cos wn\right]$$

- Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(w)\operatorname{sen} wn+X_I(w)\cos wn\right]dw$$

Propiedades de Simetría de *Señales Imaginarias pares*: $x_I(-n)=x_I(n)$

- ***x*(n) cos *wn* es par y *x*(n) sen *wn* es impar**

- Transformada directa

$$X_R(w)=0$$

$$X_I(w)=x_I(0)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_I(n)\cos wn\right]\ \rightarrow \text{s. par}$$

- Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[X_I(w)\cos wn\right]dw$$

Propiedades de Simetría de *Señales Imaginarias Impares*: $x_I(-n)=-x_I(n)$

- ***x*(n) cos *wn* es impar y *x*(n) sen *wn* es par**

- Transformada directa

$$X_R(w)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_I(n)\operatorname{sen} wn\right]\ \rightarrow \text{s. impar}$$

$$X_I(w)=0$$

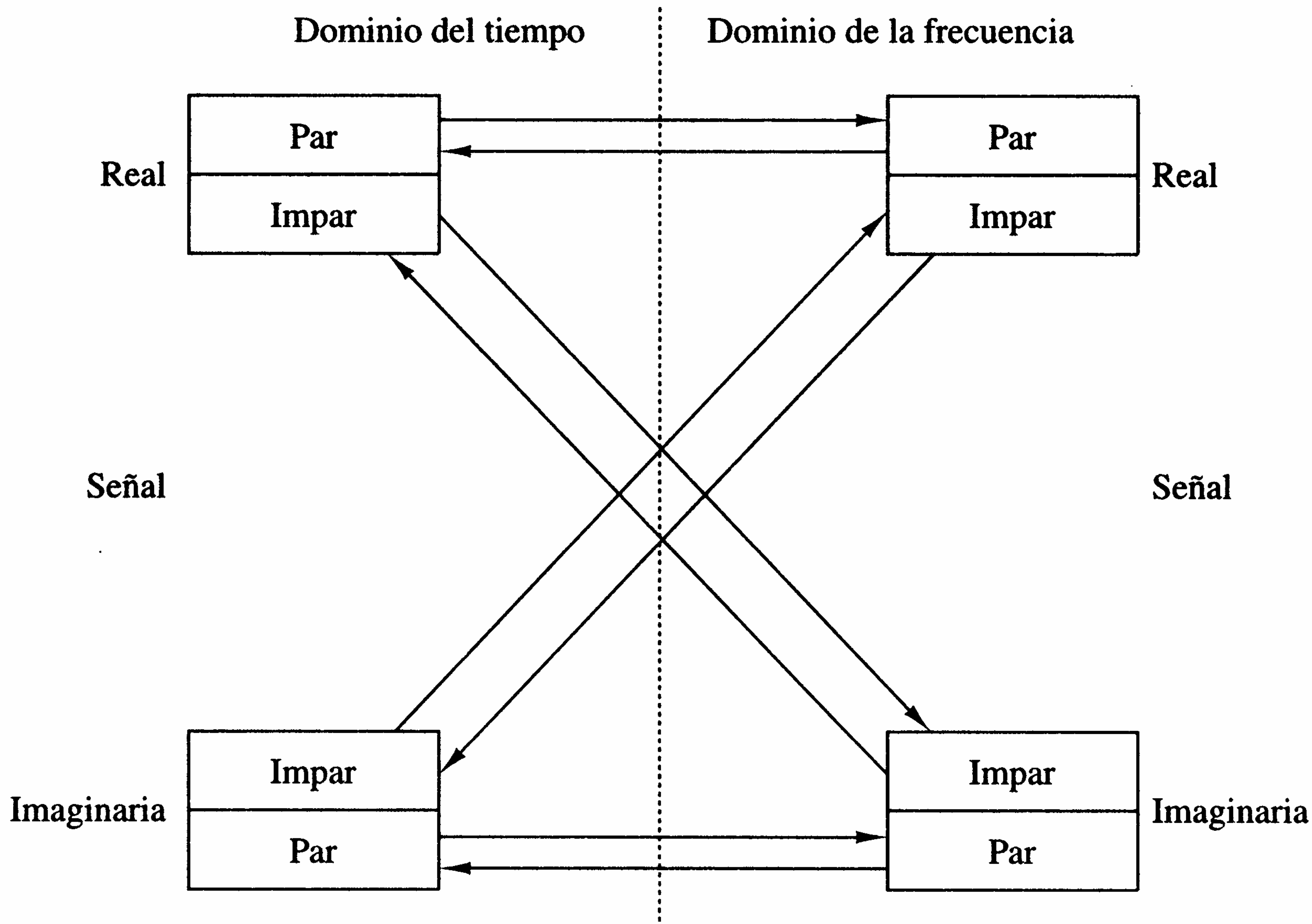
- Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}X_R(w)\operatorname{sen} wn\ dw$$

Propiedades de Simetría de la Transformada de Fourier en T.D.

Secuencia	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$jX_I(\omega)$
Señales reales	
Cualquier señal real $x(n)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $X_R(\omega) = X_R(-\omega)$ $X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$ $\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$ $\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ (real y par)	$X_R(\omega)$ (real y par)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ (real e impar)	$jX_I(\omega)$ (imaginaria e impar)

Resumen de las Propiedades de Simetría de la T.F.



Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

■ Linealidad

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1\, X_1(w) + a_2\, X_2(w)$$

- **Ejemplo.** Determinar la transformada de Fourier de $x(n) = a^{|n|} \quad -1 < a < 1$
- **Solución**

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

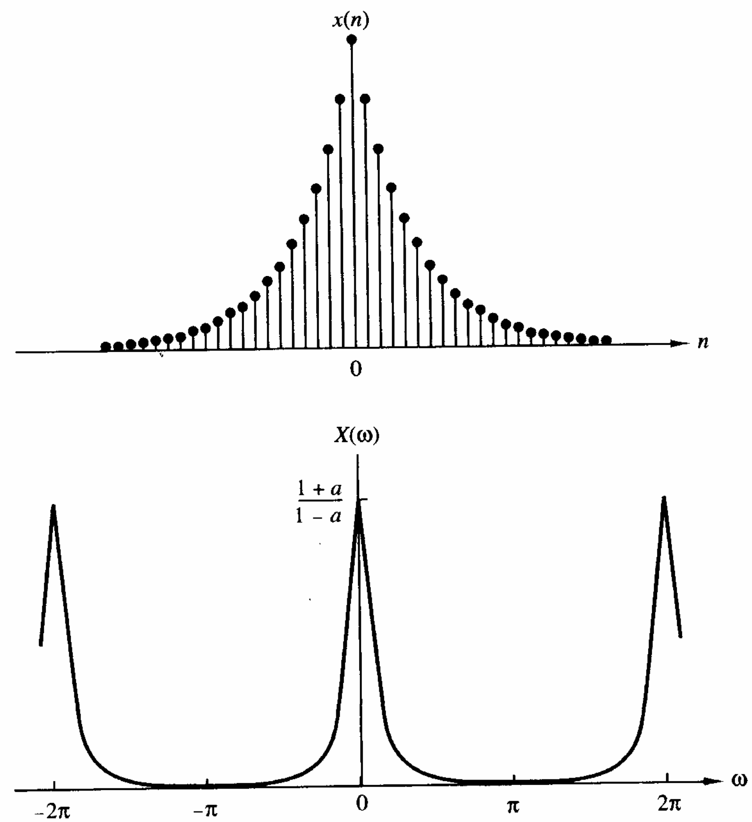
$$x_1(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad X_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jwn} = \frac{1}{1 - a\, e^{-jw}}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} a^{-n} & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad X_2(w) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}\, e^{-jwn} = \frac{a\, e^{jw}}{1 - a\, e^{jw}}$$

$$X(w) = X_1(w) + X_2(w) = \frac{1 - a^2}{1 - 2\, a \cos w + a^2}$$



$a = 0.8$

Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

Desplazamiento Temporal

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{F} e^{-jwk}\, X(w)$$

- El contenido frecuencial de una señal sólo depende de su forma.
- La magnitud del espectro no cambia, sólo se afecta su fase en una cantidad igual a ***-wk***.

Reflexión Temporal

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-w)$$

- La magnitud del espectro no cambia y su fase sólo experimenta un cambio de signo.

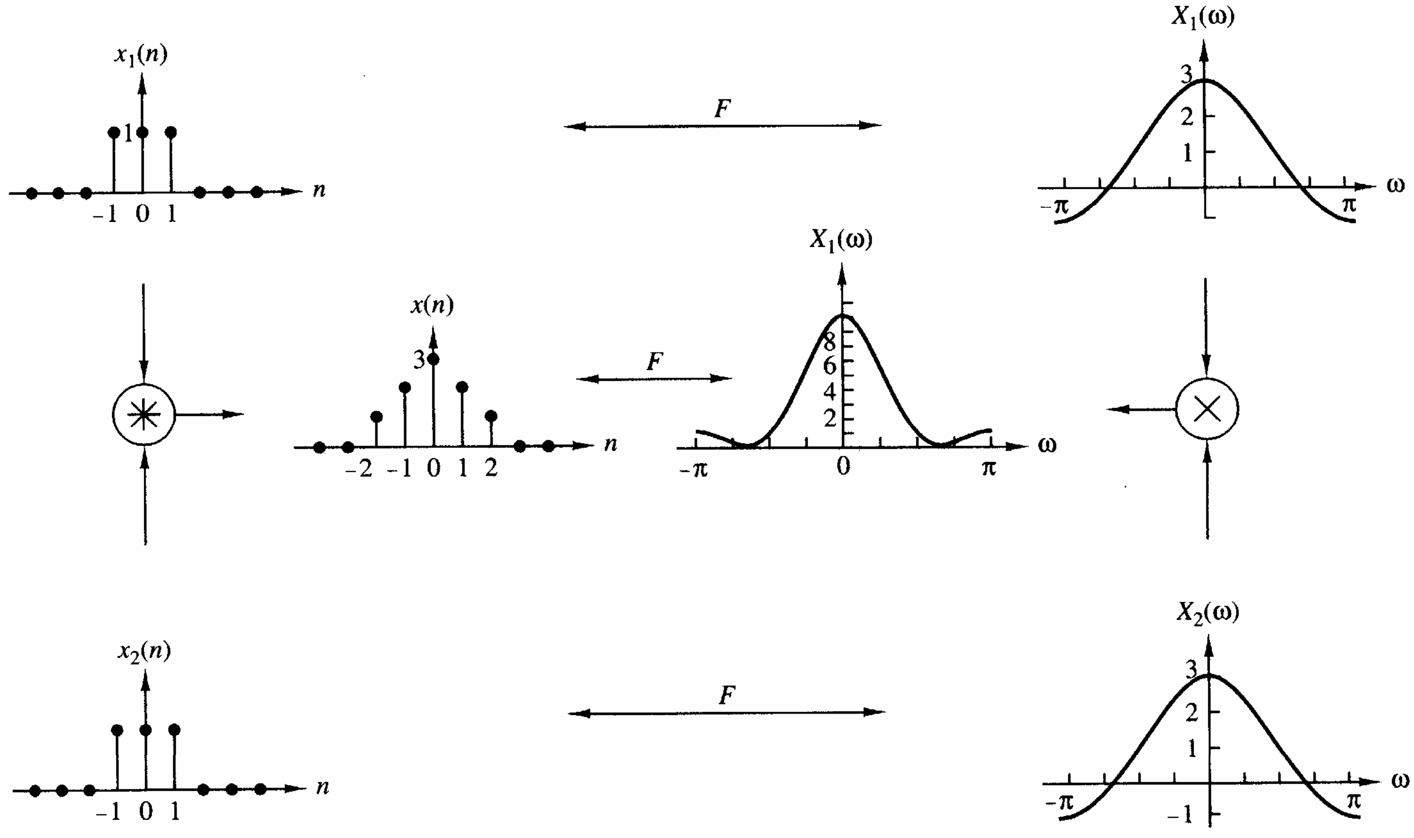
Teorema de Convolución

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(w) = X_1(w)\, X_2(w)$$

- La convolución en el dominio temporal implica una multiplicación de los espectros frecuenciales.

Representación gráfica de la convolución



Ejercicio. Determinar la convolución entre las secuencias $x_1(n)=x_2(n)=\{1, \underline{1}, 1\}$

Solución. Las señales son reales y pares.

$$X_1(w) = X_2(w) = 1 + 2\cos w$$

$$X(w) = X_1(w)\,X_2(w) = (1 + 2\cos w)^2$$

$$= 3 + 4\cos w + 2\cos 2w = 3 + 2\left(e^{jw} + e^{-jw}\right) + \left(e^{j2w} + e^{-j2w}\right)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \{1, 2, \underline{3}, 2, 1\}$$

Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

Teorema de la correlación.

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(w)$$

$$r_{x_1 x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\, x_2(k-n) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{x_1 x_2}(w) = X_1(w)\, X_2(-w)$$

- La función $S_{x1x2}(w)$ se denomina *cross-densidad espectral de energía* de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$.
- **Teorema de Wiener-Khintchine**

Sea $x(n)$ una señal real, entonces

$$r_{xx}(l) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(w)$$

  - La densidad espectral de energía de una señal de energía es la transformada de Fourier de su función de autocorrelación.
  - La función de autocorrelación de una señal y su densidad espectral de energía contienen la misma información sobre la señal.

- **Ejemplo**. Determinar la densidad espectral de energía de la señal $\boldsymbol{x(n) = a^n u(n)}$

  -1<a <1

- **Solución**.

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} a^{|l|} \qquad -\infty < l < \infty$$

$$S_{xx}(w) = F\{r_{xx}(l)\} = \frac{1}{1-a^2} F\{a^{|l|}\} = \frac{1}{1-2a\cos w + a^2}$$

Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

Desplazamiento Frecuencial

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$e^{jw_0 n}\; x(n) \xleftrightarrow{F} X(w-w_0)$$

- La multiplicación de una secuencia $x(n)$ por $e^{j\,wo\,n}$ equivale a un desplazamiento w_0 del espectro $X(w)$.

Teorema de la Modulación

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$x(n)\;\cos(w_0 n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(w+w_0)+X(w-w_0)\right]$$

- Esta propiedad puede verse como un *desplazamiento* [cos $w_0 n$ = ($e^{jwo\,n}+e^{-jwo\,n}$)/2], pero en la práctica se prefiere la modulación ya que $\boldsymbol{x(n)\cos w_0 n}$ es real.

Teorema de Parseval

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\,x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(w)\,X_2^*(w)\,dw$$

- En el caso especial de $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ la relación de Parseval se reduce a,

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(w)\,dw$$

Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

Multiplicación de dos Secuencias (Teorema del Enventanado)

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_3(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)\, X_2(w-\lambda)\,d\lambda$$

- La multiplicación de dos señales en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus transformadas de Fourier en el dominio frecuencial.

Diferenciación en el Dominio Frecuencial

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$n\, x(n) \xleftrightarrow{F} j\frac{d\,X(w)}{dw}$$

- Se obtiene al derivar la defినción de la transformada de Fourier;

$$\frac{dX(w)}{dw} = \frac{d}{dw}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}\right]$$

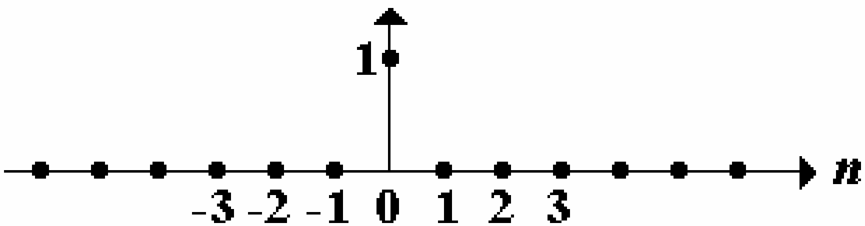
$$\frac{dX(w)}{dw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dw}e^{-jwn} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,x(n)e^{-jwn}$$

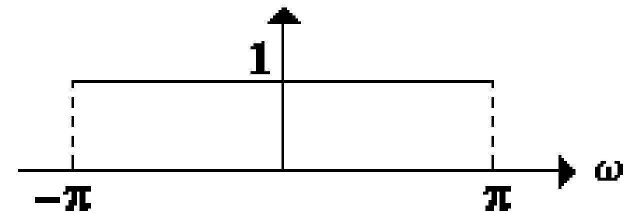
$$j\,\frac{dX(w)}{dw} = F\{\, n\,x(n)\}$$

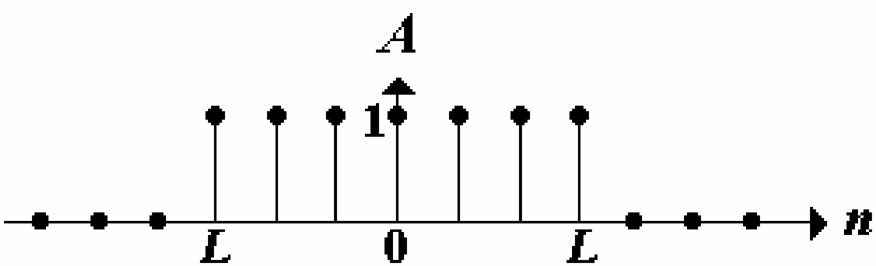
Teoremas y Propiedades de la Transformada de Fourier en T.D.

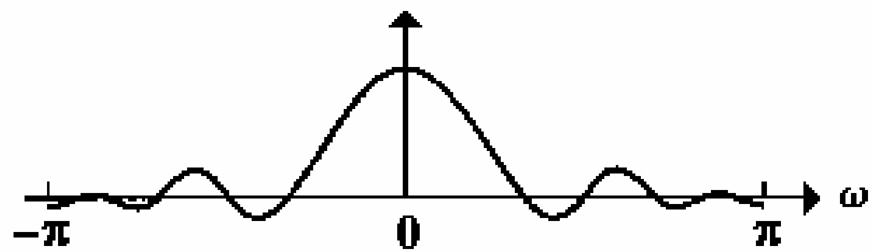
Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Reflexión temporal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [si $x_2(n)$ es real]
Teorema de Wiener–Khintchine	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Desplazamiento frecuencial	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
Modulación	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Diferenciación en el dominio de la frecuencia	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Pares de Transformadas de Fourier en T.D.

<table>
<tr><th>Señal $x(n)$</th><th>Espectro $X(\omega)$</th></tr>
<tr><td>


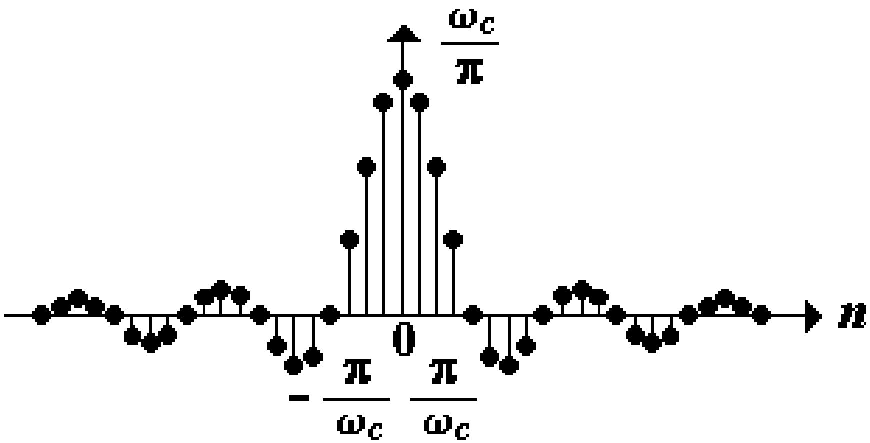
$x(n) = \delta(n)$
</td><td>


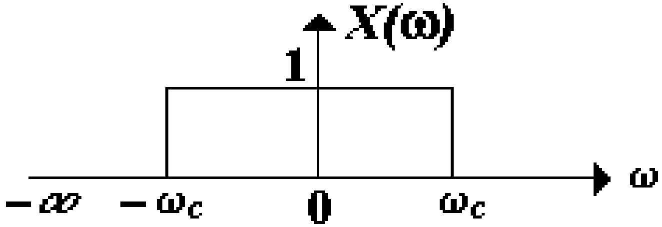
$X(\omega) = 1$
</td></tr>
<tr><td>


$x(n) = \begin{cases} A, & \lvert n \rvert \leq L \\ 0, & \lvert n \rvert > L \end{cases}$
</td><td>


$X(\omega) = A \dfrac{\operatorname{sen}\left(L + \frac{1}{2}\right)\omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}$
</td></tr>
</table>

Pares de Transformadas de Fourier en T.D.

<table>
<tr><th>Señal $x(n)$</th><th>Espectro $X(\omega)$</th></tr>
<tr><td>


$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\ \omega_c n}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$$
</td><td>


$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \infty \end{cases}$$
</td></tr>
<tr><td>

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$
</td><td>

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$$
</td></tr>
</table>