Teorema de Alternancia

- Sea S un subconjunto compacto del intervalo [0,π).

 Una condición necesaria y suficiente para que,

$$P(w) = \sum_{k=0}^{L} \alpha\left(k\right) \cos w k$$

 sea la **mejor y única aproximación ponderada de Chebyshev** $\widehat{H}_{dr}\left(w\right)$ en S, es que la función de error E(w) exhiba al menos L+2 frecuencias ***extremas*** en S. Es decir, deben existir al menos L+2 frecuencias $\{w_i\}$ en S tal que:

$$w_1 < w_2 < \ldots\ldots < w_{L+2}$$

$$E\left(w_i\right) = -E\left(w_{i+1}\right)$$

$$\left|E\left(w_i\right)\right| = \max_{w \in S}\left|E\left(w\right)\right| \qquad i = 1,2,\ldots\ldots, L+2$$

  - La función de error E(w) ***alterna su signo*** entre dos frecuencias extremas sucesivas; por lo tanto, el teorema se denomina teorema de alternancia .
  - Las frecuencias $\{w_i\}$ correspondientes a los picos de E(w) también se corresponden a los picos para los que $H_r(w)$ verifica la tolerancia del error.

- El teorema de alternancia garantiza una ***solución única*** para el problema de ***optimización de Chebyshev.***

Teorema de Alternancia (suite 1)

- En las frecuencias extremas deseadas $\{w_n\}$, se tiene el conjunto de ecuaciones,

$$\widehat{W}(w_n)\left[\widehat{H}_{dr}(w_n) - P(w_n)\right] = (-1)^n \delta \qquad n = 0,1,\dots,L+1 \qquad [1]$$

donde δ representa el valor máxino de la función de error E(w). Para la función de W(w) escogida, se desprende que $\delta = \delta_2$.

- El conjunto de ecuaciones de [1], se puede representar como,

$$P(w_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \qquad n = 0,1,\dots,L+1 \qquad [2]$$

o de la forma,

$$\sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos w_n k + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \qquad n = 0,1,\dots,L+1 \qquad [3]$$

Teorema de Alternancia (suite 2)

- Si $\{\alpha\ (k)\ \}$y δ son los parámetros que se deben determinar a partir de una estimación de $\{w_n\}$, la ecuación [3] se puede expresar en forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0 & \cos 2w_0 & \ldots & \cos Lw_0 & \dfrac{1}{\widehat{W}(w_0)} \\ 1 & \cos w_1 & \cos 2w_1 & \ldots & \cos Lw_1 & \dfrac{-1}{\widehat{W}(w_1)} \\ & \vdots & & & & \\ 1 & \cos w_{L+1} & \cos 2w_{L+1} & \ldots & \cos Lw_{L+1} & \dfrac{(-1)^{L+1}}{\widehat{W}(w_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{dr}(w_0) \\ \widehat{H}_{dr}(w_1) \\ \vdots \\ \widehat{H}_{dr}(w_{L+1}) \end{bmatrix} \quad [4]$$

- Dentro de este sistema de ecuaciones se desconocen:
  - Las frecuencias extremas $\{w_n\}$
  - el conjunto de parámetros $\{\alpha\ (k)\ \}$
  - δ, el valor máximo del error E(w)

- El sistema de ecuaciones dado por [4] se resuelve eficientemente utilizando el ***Algoritmo de Intercambio de Remez*** (Rabiner et al. 1975)

Algoritmo de Intercambio de Remez

■ Introducción

- Algoritmo iterativo en el que se propone un conjunto inicial de frecuencias extremas $\{w_n\}$ para calcular P(w) y δ, y posteriormente se determina la función de error E(w). A partir de E(w) se obtiene otro conjunto de L+2 frecuencias extremas. El proceso anterior se repite iterativamente hasta que converga al conjunto óptino de frecuencias extremas.

- Puesto que la inversión de matrices es un procedimiento costoso en tiempo, se prefiere utilizar un procedimiento más eficiente para calcular δ analíticamente:

$$\delta = \frac{\gamma_0 \widehat{H}_{dr}(w_0) + \gamma_1 \widehat{H}_{dr}(w_1) + \cdots + \gamma_{L+1} \widehat{H}_{dr}(w_{L+1})}{\dfrac{\gamma_0}{\widehat{W}(w_0)} - \dfrac{\gamma_1}{\widehat{W}(w_1)} + \cdots + \dfrac{(-1)^{L+1}\gamma_{L+1}}{\widehat{W}(w_{L+1})}} \qquad [1]$$

donde,

$$\gamma_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos w_k - \cos w_n} \qquad [2]$$

Asi, δ se calcula al seleccionar las L+2 frecuencias extremas iniciales.

Como P(w) es un polinomio trigonométrico de la forma,

$$P(w)=\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)x^{k} \qquad x=\cos w \qquad [3]$$

y se sabe que en los puntos $x_n \equiv \cos w_n$, n=0, 1, …, L+1, el polinomio tiene los valores,

$$P(w_n)=\widehat{H}_{dr}(w_n)-\frac{(-1)^{n}\ \delta}{\widehat{W}(w_n)} \qquad n=0,1,\ldots,L+1 \qquad [4]$$

se puede usar la formula de interpolación de Lagrange para P(w). Así, P(w) se puede expresar como [Hamming, 1962]:

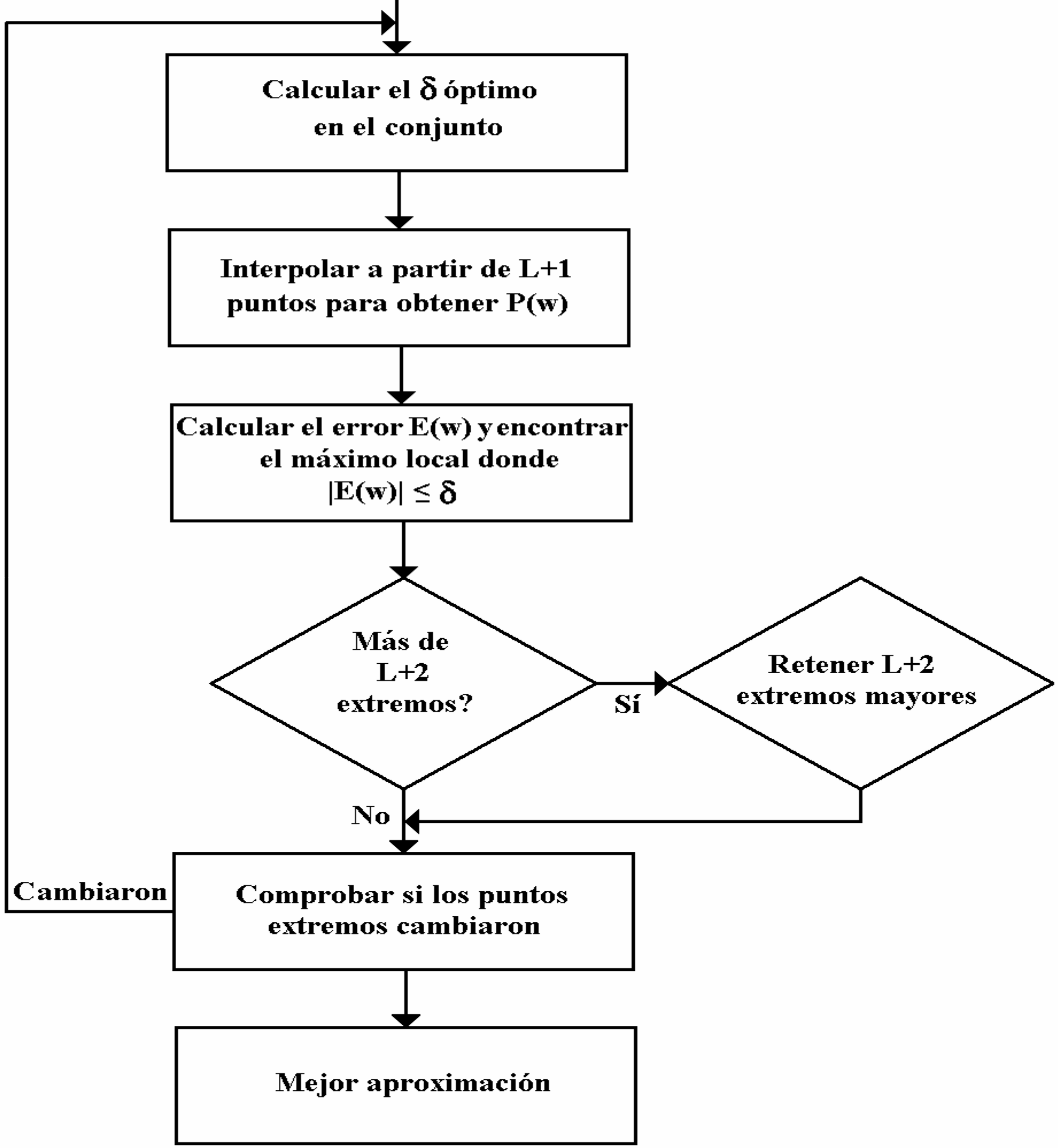
$$P(w)=\frac{\sum_{k=0}^{L}P(w_k)\left[\beta_k/(x-x_k)\right]}{\sum_{k=0}^{L}\left[\beta_k/(x-x_k)\right]} \qquad \text{donde} \quad x_k=\cos w_k \quad \text{y} \quad \beta_k=\prod_{\substack{n=0\\n\neq k}}^{L+1}\frac{1}{x_k-x_n} \qquad [5]$$

Luego de obtener la solución para P(w), se calcula la función de error E(w) a partir de,

$$E(w)=\widehat{W}(w)\left[\widehat{H}_{dr}(w)-P(w)\right]$$

en un conjunto denso de puntos de frecuencia (normalmente 16 M, donde M es la longitud del filtro). Si |E(w)|≥δ para alguna frecuencia en el conjunto denso, entonces se selecciona un nuevo conjunto de frecuencias correspondientes a los L+2 picos más grandes de |E(w) y se repite el proceso empezando con la ecuación [1].

Diagrama de flujo del algoritmo de Remez



- Como el nuevo conjunto de L+2 frecuencias se selecciona para coincidir con los picos de la función de error $|E(w)|$, el algoritmo fuerza a que δ se incremente en cada iteración hasta que converge al límite superior $|E(w)| < \delta$
  - Se obtiene la solución óptima de Chebyshev para $P(w)$ y $Q(w)$ se determina según el tipo de filtro: $H_r(w) = Q(w)\,P(w) \Rightarrow h(n)$ se obtiene por muestreo en frecuencia.

Selección de la longitud del filtro

- El procedimiento de diseño de Chebyshev basado en el algoritmo de intercambio de Remez requiere que se especifique la longitud del filtro M, las frecuencias críticas w_p y w_s, y el cociente δ_2/δ_1.
- Es más natural especificar w_p, w_s, δ_2, δ_1 y determinar la longitud M del filtro que satisface las especificaciones.
- No existe una fórmula simple para determinar la longitud del filtro a partir de las especificaciones. Se han propuestas varias aproximaciones.

Propuesta de Kaiser

$$\tilde{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\,\delta_2}\right) - 13}{14.6\Delta f} + 1$$

Propuesta de Herrmann

$$\tilde{M} = \frac{D_\infty(\delta_1,\delta_2) - f(\delta_1,\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1$$

Donde, $\Delta f = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$

$$D_\infty(\delta_1,\delta_2) = (\log_{10}\delta_2)\left[0.005(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.071(\log_{10}\delta_1) - 0.476\right] - \left[0.003(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.594(\log_{10}\delta_1) + 0.428\right]$$

$$f(\delta_1,\delta_2) = 11.012 + 0.5124(\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2)$$

Comparación de métodos de diseño para filtros FIR de fase lineal

Método de ventanas

- Primer método propuesto para el diseño de filtros FIR de fase lienal.
- Carece de control preciso de las frecuencias críticas, tales como w_p y w_s en el diseño de un filtro FIR paso bajo.
- Los valores de w_p y w_s dependen del tipo de ventana y de la longitud M del filtro.

Método de muestreo en frecuencia

- Proporciona más control sobre las frecuencias críticas que el método de ventanas, puesto que $H_r(w)$ se especifica en las frecuencias $w_k = 2\pi\, k / M$ o $w_k = \pi\,(2k+1) / M$ y la banda de transición es un múltiplo de $2\pi\ / M$.
- Permite implementaciones del filtro de diferentes maneras (Transformada inversa de Fourier, resolución de sistema de ecuaciones y fórmulas de diseño).
- $H_r(w_k)$ es cero o uno en todas las frecuencias $\{w_k\}$excepto en la banda de transición.

Método de aproximación de Chebyshev (minimax)

- Proporciona control total de las especificaciones del filtro y por lo tanto se prefiere habitualmente sobre los otros dos métodos.
- Las especificaciones se dan en términos de w_p, w_s, δ_1, δ_2 y M.
- Distribuyendo el error de aproximación sobre las bandas de paso y de rechazo se obtiene un filtro óptimo que minimiza el nivel de los lóbulos laterales (optimizar δ_2).