Tutorial introductorio a la Teoría de Wavelet

Samir Kouro R. y Rodrigo Musalem M.

***Resumen*—En este documento se presenta un breve tutorial como introducción a la teoría y aplicación de Wavelet. En particular, se describe inicialmente en qué consiste la teoría de Wavelet, cuáles son sus propiedades como herramienta de análisis de señales y su relación con el análisis de Fourier. Para corroborar el análisis teórico, también se exponen las aplicaciones más frecuentes de esta teoría, desarrollando algunos ejemplos con el paquete de herramientas (toolbox) de Wavelet presente en *Matlab*® 6.0.**

***Palabras claves*— Análisis de señales, Fourier, Wavelet.**

I. Introduccion

EN el análisis de señales existe un gran número de herramientas que se han ido desarrollando con el paso de los años, entre las que destaca, sin lugar a dudas, la Transformada de Fourier, la que se ha hecho un nombre reconocido gracias a su capacidad de entregar una representación del contenido de frecuencias que posee una determinada señal. Sin embargo, hace no más de 20 años, se han venido desarrollando nuevas herramientas, que permiten realizar un análisis de las señales desde otra perspectiva, surgidas principalmente ante la necesidad de poder analizar señales que no se comportan en forma estacionaria, o que presentan cambios bruscos en intervalos muy pequeños. Estas señales provienen de diferentes áreas de investigación, tales como medicina, sismología, geología, electrónica, desarrollo militar, etc.

Entre estas nuevas herramientas se encuentra la teoría de Wavelet, que no pretende ser más que eso: una nueva herramienta al servicio de la investigación y el análisis de señales, complementándose con los métodos ya conocidos y estudiados a lo largo de los años.

Generalmente, los libros y artículos relacionados con Wavelet se caracterizan por tener una base matemática de alta complejidad, lo que frustra en gran medida los intentos iniciales de acercamiento hacia esta materia. Esto justifica el desarrollo de este documento, que pretende entregar en forma sencilla los conocimientos básicos necesarios para establecer un punto de partida hacia el aprendizaje de Wavelets.

Artículo presentado el 1 de julio de 2002, como trabajo de la asignatura Técnicas Modernas en Automática, impartida por el profesor Juan Hernández.

El formato de este artículo está sujeto a las normas IEEE señaladas en [2].

S. Kouro, alumno de sexto año de Ingeniería Civil Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María. (e-mail: skouro@surnet.cl).

R. Musalem, alumno de sexto año de Ingeniería Civil Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María. (e-mail: musa@elo.utfsm.cl).

II. Marco teórico previo

A. Análisis de Fourier

Las transformaciones matemáticas son aplicadas a las señales para obtener de ellas más información que aquella que se puede extraer de la señal pura. Entre un gran número de transformaciones existentes, sin lugar a dudas la más conocida es la Transformada de Fourier.

Esta transformación permite descomponer una señal en sus componentes sinusoidales de diferentes frecuencias, en otras palabras, puede pensarse que es una técnica matemática para transformar el punto de vista de una señal desde la base de tiempo a la base de la frecuencia, tal como se representa esquemáticamente en la figura 2.1.

Fig. 2.1. Esquema de la Transformada de Fourier.

En muchos casos, el análisis mediante Transformada de Fourier resulta extremadamente útil, razón por la cual sería natural preguntarse por qué podría ser necesario el uso de otra herramienta para el análisis de señales; pues bien, al pasar una señal al dominio de la frecuencia se pierde la información referente al tiempo; más precisamente, cuando se observa una señal producto de la Transformación de Fourier, resulta imposible determinar *cuándo* ocurre un determinado evento o *cuándo* está presente una determinada frecuencia. Si las propiedades de la señal que se está analizando no cambian demasiado en el tiempo, es decir, si se está trabajando con una *señal estacionaria*[1], esta desventaja no resulta muy relevante (como en el caso que de señales periódicas, por ejemplo). Sin embargo, un importante número de señales de interés presentan características no estacionarias o transitorias, tales como una tendencia, cambios abruptos, comienzos o finales de eventos, etc. A menudo, estas características no estacionarias resultan ser las secciones más interesantes de las señales, y la Transformada de Fourier no está preparada para detectarlas y/o analizarlas.

[1] En el caso de señales estacionarias, no interesa saber *cuando* ocurre una determinada frecuencia, ya que estas ocurren siempre.

B. *Análisis de Fourier por intervalos*[2]

En un esfuerzo por corregir la deficiencia presentada en el punto previo, en 1946 Denis Gabor adaptó la Transformada de Fourier para poder analizar una pequeña sección de la señal en un determinado tiempo (mediante una especie de ventana). Esta adaptación es la que se conoce como STFT, la cual lleva una señal del plano del tiempo al plano bidimensional de tiempo y frecuencia, tal como se presenta esquemáticamente en la figura 2.2.

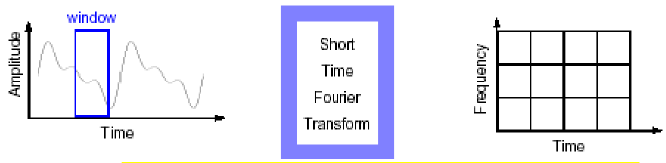

Fig. 2.2. Esquema de la Transformada de Fourier por intervalos (STFT).

Es importante mencionar que la STFT representa una especie de compromiso entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia de una señal, ya que provee algo de información acerca de *cuándo* y a *qué* frecuencia de una señal ocurre un determinado evento. Sin embargo, solamente se puede obtener dicha información con una precisión limitada, la cual está acotada por el tamaño de la ventana.

Mientras que el compromiso entre la información del tiempo y la frecuencia puede resultar útil, el inconveniente surge dado que una vez que se escoge un determinado tamaño para la ventana de tiempo, dicha ventana es la misma para todas las frecuencias. Muchas señales requieren un acercamiento más flexible, de modo tal que sea posible variar el tamaño de la ventana para determinar con mayor precisión el tiempo o la frecuencia.

III. TRANSFORMADA WAVELET

El análisis Wavelet representa el paso lógico siguiente a la STFT: una técnica mediante ventanas con regiones de tamaño variable. El análisis Wavelet permite el uso de intervalos grandes de tiempo en aquellos segmentos en los que se requiere mayor precisión en baja frecuencia, y regiones más pequeñas donde se requiere información en alta frecuencia. Esta idea es la que se muestra en forma esquemática en la figura 3.1

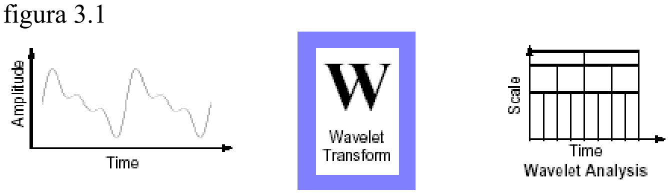

Fig. 3.1. Esquema de la Transformada Wavelet.

Una forma sencilla de comprender el modo de operación de esta transformada es pensar que la señal en base de tiempo es pasada por varios filtros pasabajos y pasaaltos, los cuales permiten separar las porciones de la señal de alta frecuencia de aquellas de baja frecuencia.

[2] STFT: Short Time Fourier Transform.

Este procedimiento se repite cada vez sobre algunas porciones de la señal correspondientes a aquellas frecuencias que han sido removidas de la señal original.

Para clarificar más la forma en que opera esta Transformada, se considera el siguiente ejemplo: Supóngase que se tiene una señal que posee frecuencias hasta 1000[Hz]. En la primera etapa se divide la señal en 2 partes, pasándola por un filtro pasaaltos y uno pasabajos[3]. De este modo, se obtienen 2 diferentes versiones de la señal original: parte de la señal que corresponde al rango 0-500[Hz] y la otra en el rango 500-1000[Hz]. Posteriormente, se toma una de estas partes (o ambas) y se repite el proceso. Suponiendo que se hace nuevamente este proceso con la parte de baja frecuencia de la señal, y que en dicho resultado el proceso se vuelve a repetir en la parte de baja frecuencia, se tienen 4 partes de la señal original: 0-125[Hz], 125-250[Hz], 250-500[Hz] y 500-1000[Hz]. Se puede continuar con este procedimiento hasta que se haya descompuesto la señal en un determinado número de *niveles*. De este modo, se tienen un grupo de señales que representan a la misma señal, pero todas ellas corresponden a diferentes bandas de frecuencias.

Dado que se sabe a qué rango de frecuencias corresponde cada una de estas señales, es posible agruparlas y hacer un gráfico en 3 dimensiones, teniendo el tiempo en un eje, la frecuencia en otro y la amplitud en el tercero. De este modo, se posible observar qué frecuencias ocurren a qué tiempo[4]. Este mismo grupo de señales puede servir para regenerar la señal original, puesto que básicamente se trata de una descomposición en una base ortogonal, al igual que otras transformaciones matemáticas conocidas. Esto implica que la Transformada Wavelet tiene la propiedad de invertibilidad.

Un ejemplo ilustrativo es el que se muestra en la figura 3.2, donde se observa una señal no estacionaria de frecuencias diferentes en distintos instantes de tiempo.

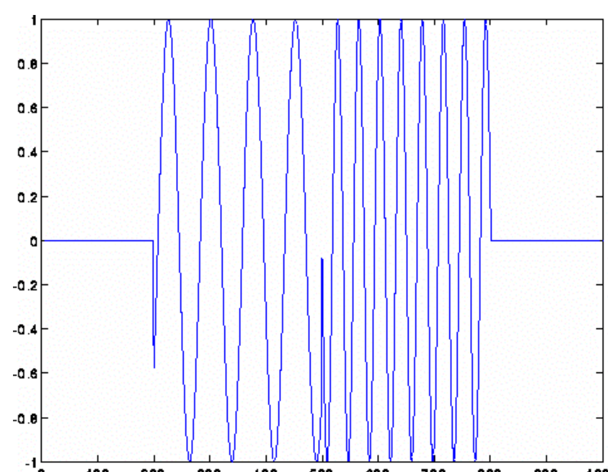

Fig. 3.2. Señal no estacionaria de frecuencia variable.

[3] Estos filtros debe cumplir con la condición de *admisibilidad*, ver [1].

[4] Esto está sujeto al principio de incerteza, el que establece que no es posible conocer exactamente que frecuencia ocurre en un instante de tiempo determinado. Sin embargo, sí es posible conocer que banda de frecuencias ocurre en un determinado intervalo de tiempo.

En la figura 3.3 se aprecia la Transformada Wavelet continua de la señal de la figura 3.2.

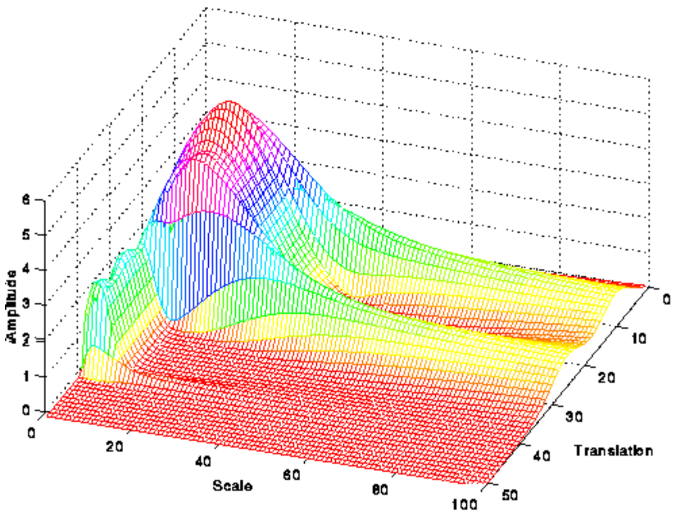

Fig. 3.3. Transformada Wavelet continua de la señal de la figura 3.2.

En la figura 3.3 se observa que el eje de frecuencias está rotulado como *scale*, que puede interpretarse como el inverso de la frecuencia. El eje *translation* representa el eje de tiempo[5]. De este modo, el *peak* pequeño de la figura 3.3 corresponde a componentes de alta frecuencia de la señal, mientras que el *peak* más grande corresponde a frecuencias menores, las cuales aparecen antes que las altas frecuencias en el tiempo en la señal original (ver figura 3.2).

El parámetro *scale* (*s*) usado en el análisis Wavelet es similar a la escala usada en la confección de mapas. Como en el caso de los mapas, las escalas grandes corresponden a vistas globales (no detalladas) mientras que escalas más pequeñas corresponden a vistas más detalladas. Similarmente, en términos de frecuencia, las bajas frecuencias (altas escalas) corresponden a la información global de una señal (es decir, lo que generalmente marca la tendencia de la señal), mientras que las altas frecuencias (bajas escalas) corresponden a información detallada de patrones ocultos de la señal (los que usualmente tienen una duración reducida de tiempo).

IV. Análisis mediante Transformada Wavelet

Antes de explicar las características del análisis de señales mediante Transformada Wavelet, es necesario señalar que una *Wavelet* es una señal (o forma de onda) de duración limitada cuyo valor medio es cero.

Comparando las Wavelets con las funciones sinusoidales (que son la base del análisis de Fourier), se puede resaltar que la principal diferencia radica en que las señales sinusoidales no tienen duración limitada, dado que se extienden desde -∞ a +∞. Además, mientras las señales sinusoidales son suaves y predecibles, las Wavelets tienden a ser irregulares y asimétricas, tal como se puede apreciar en la figura 4.1

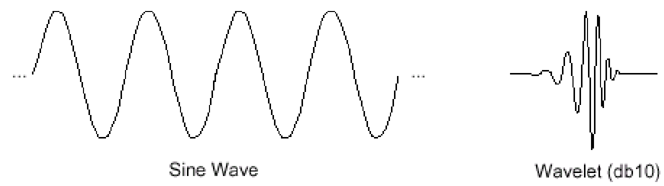

Fig. 4.1. Ejemplos de señal sinusoidal y señal Wavelet.

Tal como se menciona previamente, el análisis a través de Transformada de Fourier consiste en descomponer la señal original en funciones sinusoidales de diferentes frecuencias. En forma similar, el análisis de señales mediante Transformada Wavelet descompone la señal en versiones trasladadas (en tiempo) y escaladas de la Wavelet original, más conocida como *Wavelet madre*.

Observando las gráficas de la figura 4.1, resulta intuitivo pensar que las señales con cambios bruscos serán mejor analizadas mediante Wavelets irregulares que a través de suaves sinusoides. Como consecuencia de aquello, es que una de las principales ventajas que provee la Transformada Wavelet es su facultad para el análisis de áreas localizadas de señales grandes.

Hasta ahora, y dada la naturaleza introductoria de este trabajo, solamente se ha discutido acerca del tratamiento de señales de una dimensión, sin embargo, el análisis mediante Transformada Wavelet puede ser aplicado a datos bidimensionales (imágenes), y en principio, a datos de mayor dimensión también[6].

A. Cálculo de la Transformada Wavelet

En este punto se presenta en forma cualitativa un método sencillo para obtener la Transformada Wavelet de una determinada señal.

Antes de describir los pasos a seguir, debe elegirse una función Wavelet, la que será la *Wavelet madre* y servirá como prototipo para todas las ventanas que se emplean en el proceso. Existe una importante cantidad de *familias* de funciones Wavelets que han probado ser especialmente útiles; entre ellas destacan la *Haar*, *Daubechies*, *Biortogonal*, *Coiflets*, *Symlets*, *Morlet*, *Sombrero mexicano* y *Meyer*, entre otras.

Los pasos a seguir para determinar la Transformada Wavelet de una señal son:

1. Comenzando con un determinado valor de *s* (escala), por ejemplo 1, para la señal Wavelet, se ubica ésta al comienzo de la señal a analizar (en t = 0). Luego, se multiplican entre sí ambas señales y el resultado se integra sobre todo el espacio de tiempo. El resultado de dicha integral se multiplica por el inverso de la raíz cuadrada de *s*, con el objeto de normalizar la energía y de

[5] En estricto rigor, *translation* representa el corrimiento en tiempo que presenta la Wavelet madre, por lo que tiene una estrecha relación con la escala de tiempo.

[6] A medida que el número de dimensiones aumenta, la complejidad del análisis se ve incrementada notoriamente, motivo por el cual la mayoría de las herramientas computacionales para análisis de señales mediante Transformada Wavelet solamente operan en 1 y 2 dimensiones.

este modo obtener una función Transformada con la misma energía a cualquier escala. Este resultado es el valor de la Transformación Wavelet en tiempo cero y *s* = 1. Es importante mencionar que este resultado indica cuán correlacionada está la Wavelet con el segmento de la señal original. Lógicamente, el resultado dependerá de la elección de la función Wavelet. Este paso queda representado en la figura 4.2.

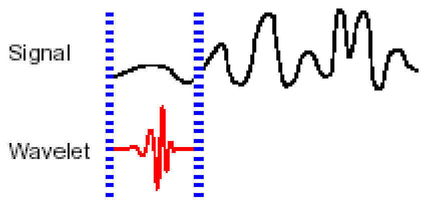

Fig. 4.2. Paso 1 para la obtención de la Transformada Wavelet.

2. La función Wavelet (en la misma escala, por ejemplo *s*=1) se traslada en tiempo (hacia la derecha) en τ, y se vuelve a realizar el procedimiento descrito en el paso 1. Se debe repetir esto hasta llegar al final de la señal a analizar. Este paso queda ilustrado en la figura 4.3.

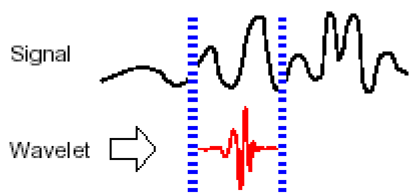

Fig. 4.3. Paso 2 para la obtención de la Transformada Wavelet.

3. Se varía el valor de *s* (escala) y se vuelven a realizar los pasos 1 y 2 hasta haber barrido todo el rango de frecuencias que se desea analizar. Note que dado que se trata de una Transformación continua, tanto el corrimiento en tiempo como la variación de escala debiesen realizarse en forma continua. Sin embargo, si es necesario obtener la Transformada Wavelet por medios computacionales la condición anterior se reduce a considerar un paso suficientemente pequeño. Cada cálculo para un determinado valor de *s* llena la correspondiente fila de datos del plano tiempo-escala. Este paso se ilustra en la figura 4.4.

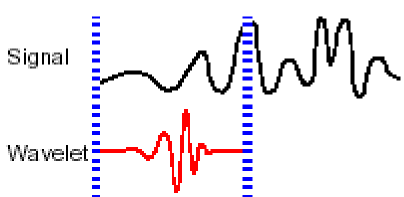

Fig. 4.4. Paso 3 para la obtención de la Transformada Wavelet.

Cuando se haya completado el cálculo para todos los valores de *s*, se habrá obtenido la Transformada Wavelet continua de la señal.

Además de la representación tridimensional de la Transformada Wavelet (como en la figura 3.3), es posible obtener una representación en la cual el eje x representa el tiempo, el eje y representa la escala, y el color para cada punto x-y representa la magnitud de los coeficientes Wavelet, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 4.5.

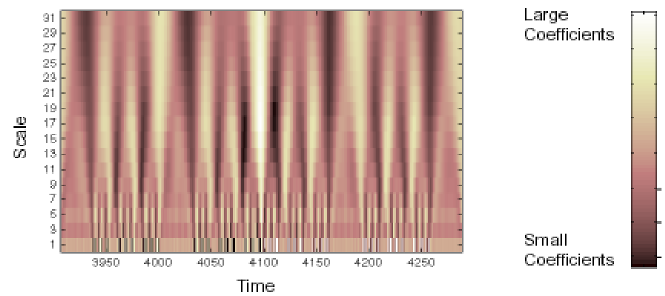

Fig. 4.5. Representación bidimensional de la Transformada Wavelet.

V. Transformada Wavelet Discreta

Para aplicar la transformada Wavelet a una serie de datos numéricos, se hace necesario implementar una transformada discreta. La idea fue desarrollada por Mallat en 1988 [4], quien diseñó un algoritmo basado en un banco de filtros que permite obtener una transformada Wavelet en forma instantánea a partir de los datos de interés.

A. Filtros de un nivel.

En la mayoría de las señales son las componentes de baja frecuencia las que le otorgan a la señal la mayor parte de su información, o bien, le dan una especie de identidad a la señal. Mientras que las componentes de alta frecuencia se encargan de incorporar características más particulares. Es por ello que se subdividen las componentes de una señal en dos categorías:

- Aproximaciones (baja frecuencia)
- Detalles (alta frecuencia)

Luego surge la idea de separar estas dos componentes a través de filtros. Lo anterior queda ejemplificado en el diagrama de la figura 5.1,

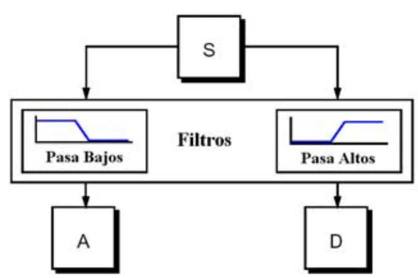

Fig. 5.1. Diagrama de descomposición de señales.

donde S es la señal que se desea analizar, A la salida del pasabajos y D la salida del filtro pasaaltos. Naturalmente, los filtros son diseñados de tal manera que sean complementarios, es decir, la suma de A y D debe ser S. Si se diseñaran los filtros en forma muy separada se perdería información, o en caso contrario se estaría amplificando la banda de entrecruzamiento. Sin embargo, este procedimiento tiene la desventaja que se aumenta al doble el numero de datos originales, pues por cada muestra de S se genera un par de muestras (A,D), por lo que el costo matemático y computacional se incrementa. Para remediar esta falencia se propone un método que guarda la mitad de los puntos (A,D), sin perder en ello información de la señal S. Este procedimiento es conocido como submuestreo. La idea se ilustra en la figura 5.2.

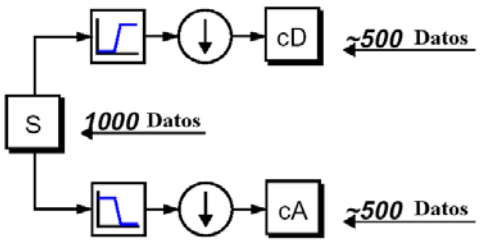

Fig. 5.2. Diagrama de descomposición de señales.

Los círculos con flechas representan la eliminación de datos o submuestreo. Luego, cD y cA son los nuevos coeficientes obtenidos de la etapa de filtración. Intuitivamente se puede concluir que al tener cD y cA, en conjunto, se tiene la misma cantidad de datos que las de la señal original S, y se ha mantenido la información necesaria. En la figura 5.2 se ejemplifica la idea para una señal S de 1000 datos, obteniéndose en la salida dos series de *aproximadamente* 500 datos cada una. La idea de *aproximado*, se debe a que el proceso de filtración es realizado a través de convolución de la señal de entrada con la función de transferencia (discreta) del filtro, lo que puede introducir eventualmente una o dos muestras más.

Sin embargo, para muchas señales de mayor complejidad, no basta con dos bandas de frecuencias (alta y baja), sino que más bien debe hacerse una descomposición de más niveles para poder separar las características y poder analizarlas independientemente. Surge la idea entonces de filtros multiniveles.

B. *Filtros multiniveles.*

Para realizar la motivación expuesta en el punto anterior, basta con iterar el proceso de filtrado, es decir, aplicar el mismo procedimiento a las señales de salida de la primera etapa, y así sucesivamente hasta el nivel de precisión que se desee. Lo anterior da origen a una descomposición multinivel conocida como ramificación o árbol de descomposición Wavelet, cuya idea es expuesta en la figura 5.3.

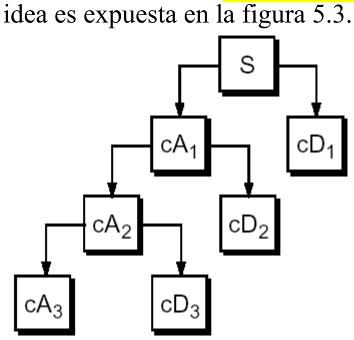

Fig. 5.3. Árbol de descomposición Wavelet.

Note que cD_1 resulta ser la componente de más alta frecuencia de la señal, y cA_3 la de menor frecuencia. Al ser descompuesta la señal en mayor cantidad de bandas de frecuencia se posee una información más detallada acerca de S, por lo que esta metodología es conocida como *multiresolución.* Surge en forma inmediata la inquietud acerca del diseño del algoritmo, relativo al número de niveles a utilizar.

C. *Determinación del número de niveles.*

En teoría, como se trata de un proceso recursivo, se podría iterar en forma sucesiva infinitas veces. Sin embargo, en la práctica, sólo se puede descomponer hasta que un intervalo o nivel posea una sola muestra (o píxel en el caso bidimensional, para análisis de imágenes).

Podría pensarse en forma intuitiva que se obtienen resultados óptimos con un mayor número de niveles de descomposición, sin embargo, esto no siempre es así. En [3] se recomienda una ramificación que vaya de acuerdo a la naturaleza de la señal a estudiar, o bien elegir métodos que buscan la descomposición óptima, como por ejemplo, el de la entropía.

D. *Reconstrucción Wavelet.*

En los puntos anteriores se explicó la base teórica acerca de la descomposición Wavelet. Por tratarse de una transformación es deseable poder establecer su inversión, o en otras palabras, poder volver a la señal original a partir de los datos de salida del árbol. El proceso anterior es conocido como reconstrucción Wavelet o Transformada Inversa de Wavelet (discreta). La metodología sigue el razonamiento en dirección contraria, es decir, a partir de los coeficientes cA_i y cD_i (i depende del número de niveles) debe obtenerse S. Lo anterior queda ilustrado en la figura 5.4.

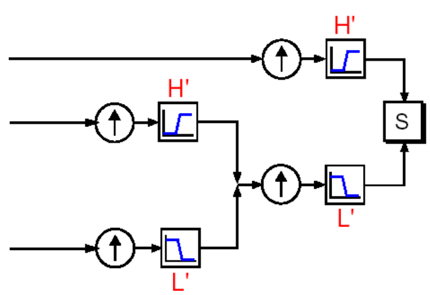

Fig. 5.4. Esquema de reconstrucción Wavelet.

En este caso se debe realizar una sobre-representación de la muestra para compensar el submuestreo realizado en el proceso de descomposición, luego pasa por un proceso de filtrado, para finalmente reconstruir S. La etapa crítica en este proceso es el filtrado, pues la elección de los filtros es determinante en la calidad de la reconstrucción. En [3] se discute el diseño, introduciendo filtros de descomposición H y L (para pasaaltos y pasabajos respectivamente), y sus filtros de reconstrución correspondientes H' y L', diseñados a partir de una teoría llamada *quadrature mirror filtres*, la cual no será analizada en mayor detalle en este trabajo. De todas formas *Matlab*® posee un conjunto de herramientas específicamente diseñadas para Wavelet, que facilitan e incluso automatizan el proceso de diseño tanto de la transformación directa, como de su inversa.

VI. Aplicaciones de Wavelet

Como ya se ha mencionado anteriormente, el procesamiento de señales a través de Wavelets tiene innumerables aplicaciones en diversos ámbitos de la ciencia e ingeniería. A continuación se entrega una lista de ejemplos:

- *Detección de discontinuidades o de puntos de quiebre en señales (en una o varias dimensiones)*:

Resulta de gran utilidad, en especial en el tratamiento de imágenes, en donde interesa detectar la frontera entre colores y formas, o también en sistemas altamente dinámicos en donde interesa determinar *cuando* o *donde* se producen los cambios.

- *Estudio de fractales*:

Mediante Wavelets se puede reconocer un patrón repetitivo en una señal o imagen, lo que la convierte en una herramienta poderosa en el estudio de fractales.

- *Identificación de frecuencias puras*:

Como se trata de una transformada compuesta por una base ortogonal de señales (análoga con la base sinusoidal de Fourier), también pueden ser utilizadas para estudiar el contenido espectral de señales.

- *Eliminación de ruido*:

El análisis de señales mediante Wavelet, también permite la eliminación o filtrado de ruido tanto en señales unidemensionales como en imágenes (bidimensionales).

- *Compresión de imágenes*:

Se trata de una de las aplicaciones más importantes de Wavelets, se realiza mediante el análisis en dos dimensiones.

- *Multiplicación rápida de matrices*:

La multiplicación de vectores matriciales se realiza en el dominio Wavelet. Por ejemplo, si se desea multiplicar una matriz cuadrada de orden n en forma sucesiva con k vectores v, se debe aproximar o transformar los vectores y la matriz por imágenes (en dominio Wavelet), luego realizar la multiplicación, y finalmente aplicar la transformada inversa al resultado obtenido. Si las aproximaciones realizadas son buenas, el error de multiplicación es pequeño con respecto al resultado real por multiplicación ordinaria, pero el tiempo de calculo es notablemente inferior, especialmente en matrices grandes, o en multiplicaciones de múltiples matrices.

- *Aplicaciones en medicina*:

Se ha incorporado el análisis con Wavelets a señales biológicas, permitiendo interpretar los resultados de exámenes médicos, facilitando el diagnóstico de las enfermedades. Por ejemplo, según [1], se ha aplicado con éxito en el análisis de electroencefalogramas, debido a que en la naturaleza este tipo de señales son altamente no estacionarias (impidiendo el uso de Fourier), las Wavelets permiten transformar la señal al dominio tiempo-frecuencia, relacionando el contenido espectral al momento de su ocurrencia. Ello ha sido aplicado en el diagnóstico de pacientes con alzheimer, enfermedad que hasta ahora es difícil de diagnosticar. El procedimiento que se realiza es entrenar redes neuronales con los datos obtenidos (a través de Wavelets de multiresolución) de pacientes de los que se sabe padecen la enfermedad, para luego introducir las mediciones de aquellos que se realizan exámenes, y de este modo poder establecer si se siguen los mismos patrones o no. En la figura 6.1 se aprecia la representación en el espacio Wavelet del resultado de un electroencefalograma realizado a un paciente con alzheimer.

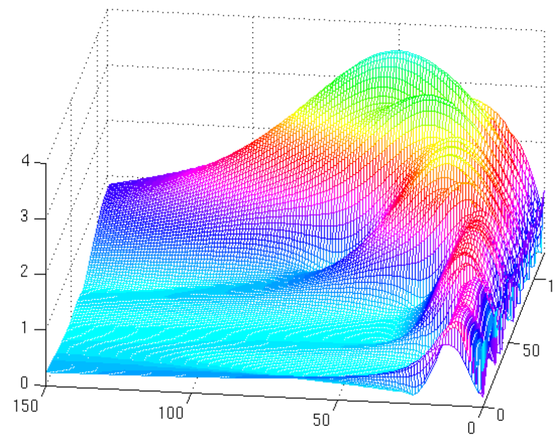

Fig. 6.1. Análisis de un electroencefalograma de un potencial paciente con alzheimer.

En general existe una muy diversificada gama de aplicaciones, que crece cada vez más a medida que se incorpora esta tecnología a las distintas ramas de la ciencia.

A continuación se desarrollan dos ejemplos de aplicación de Wavelets como los anteriormente mencionados, usando el paquete de herramientas disponible en *Matlab*® .

A. *Detección de discontinuidades o de puntos de quiebre.*

Como se mencionó anteriormente, esta aplicación es muy utilizada en el procesamiento de imágenes, pues para diseñadores gráficos resulta indispensable aislar sectores de imágenes que posean diferentes características (color, textura, etc.).

Para realizar el ejemplo se simuló una señal sinusoidal de amplitud 1, y frecuencia 50[Hz], a la cual se le sumó un nivel continuo de 0.5 de amplitud en el instante t = 0.5[s] para crear la discontinuidad. Lo anterior fue realizado mediante el diagrama de simulación de la figura 6.2.

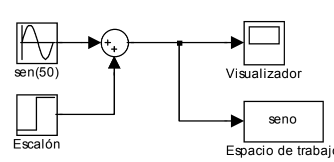

Fig. 6.2. Diagrama generador de señal con frontera.

Se simuló un total de 1.024[s], muestreado a t_s=0.001[s], por lo que se obtuvieron 1024 datos. Cabe señalar que se trata de una aplicación discreta, pues se cuenta con un número finito de datos que representan la señal teórica.

Luego se ejecutó el menú de Wavelets de *Matlab*® (comando: *wavemenu*). Se selecciona la herramienta de filtrado, posteriormente se carga la serie de datos generados, se configura que tipo de descomposición de Wavelets se desea emplear, es decir el número de niveles. Finalmente se ejecuta la descomposición. En la figura 6.3 se aprecia la señal generada, y su respectiva descomposición en Wavelets.

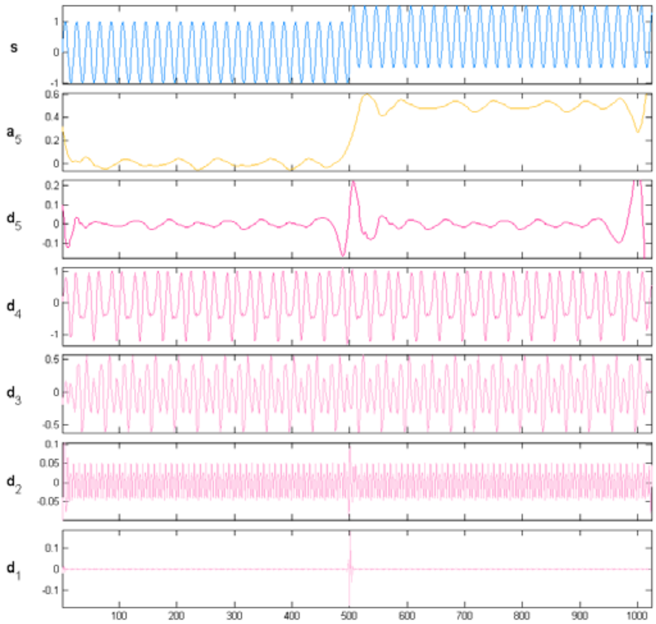

Fig. 6.3. Descomposición Wavelet de la señal generada.

Note que la señal S generada es descompuesta en 5 niveles, donde:

- La señal *s* de la figura 6.3 corresponde a la señal que se desea analizar.
- La señal a_5, es la componente de baja frecuencia de la señal S, dado que es la salida del último filtro pasabajos del árbol de descomposición
- Las señales d_i ($i=1...5$), son las componentes de alta frecuencia, siendo d_1 la de mayor frecuencia por ser la del primer filtro del árbol (ver figura 5.3).

Note que en d_1 se aprecia claramente el momento temporal en que ocurre el quiebre de amplitud, pues es la señal con el contenido de alta frecuencia, la que cumple el propósito de detección de las fronteras que puedan existir en las señales, dado que al producirse un cambio brusco se introduce un mayor contenido espectral, generalmente asociado a frecuencias altas. Cabe señalar que el ejemplo anterior es sólo uno de los casos posibles; esta metodología permite captar todo tipo de cambios en una señal, ya sea en amplitud o frecuencia, otorgando la información adicional de *cuándo* (o *dónde* en el caso de imágenes) ocurre.

El análisis anterior también puede ser realizado en *Matlab*® con imágenes. Para mayor información remitirse a [3].

El ejemplo anterior no puede ser realizado con la teoría de Fourier, destacándose así una de las ventajas de Wavelet con respecto a dicha teoría, pues como ya se mencionó previamente, Fourier no puede establecer *cuándo* sucede el cambio de amplitud.

B. Eliminación de ruido en señales eléctricas.

Para realizar este ejemplo, se utiliza una señal de medición obtenida de una planta real de laboratorio, empleada en un articulo previo de los autores[7]. La señal de la figura 6.4 corresponde a la respuesta de la planta ante una señal de entrada PRBS[8].

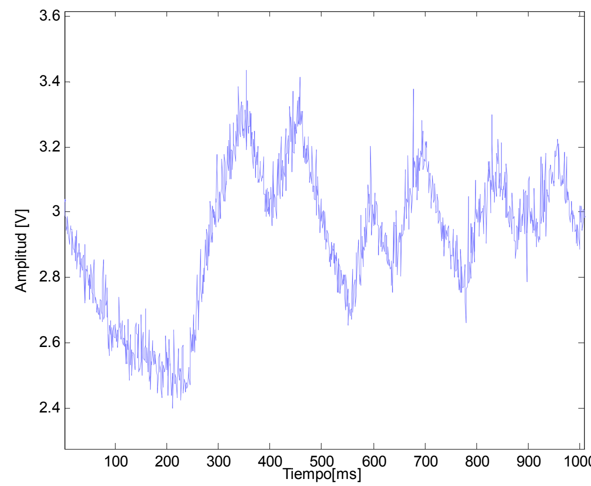

Fig. 6.4. Señal con ruido de medición.

La señal es guardada en un archivo de datos, y luego es cargada en la interfaz de filtrado, que se abre desde el menú de Wavelet en *Matlab*®. Posteriormente, se selecciona el tipo de descomposición y el número de niveles. Luego de la descomposición, se obtienen las señales de la figura 6.5.

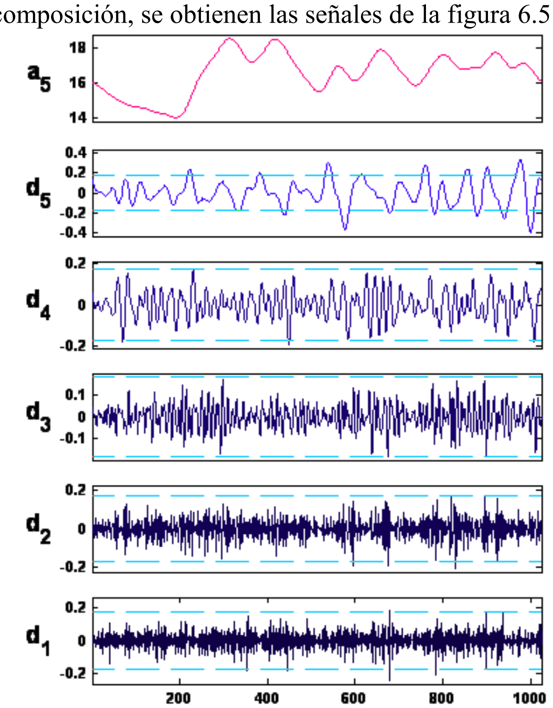

Fig. 6.5. Descomposición Wavelet de la señal a filtrar.

[7] Identificación de Sistemas Mediante RLS.
[8] Pseudo Random Binary Sequence.

Nuevamente se descompuso la señal en 5 niveles, siendo a_5 la componente de baja frecuencia que precisamente corresponde a la señal filtrada que se desea obtener. En la figura 6.6 se aprecia la superposición entre la señal filtrada y la señal original.

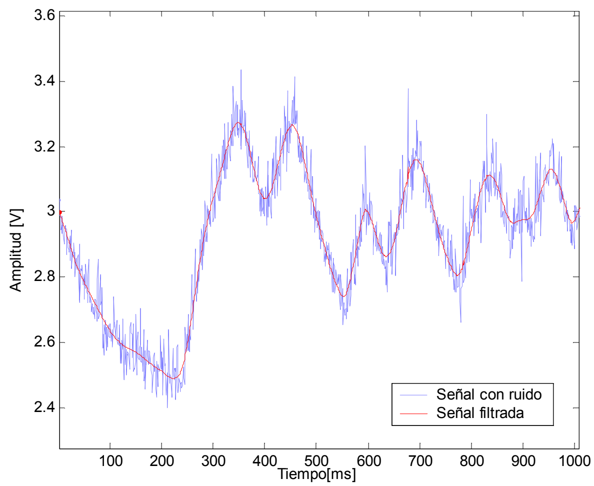

Fig. 6.6. Comparación entre señal con ruido de medición y señal filtrada mediante descomposición con Wavelet.

Se aprecia el excelente desempeño de la Transformada Wavelet para suprimir el ruido de señales, situación que es bastante frecuente en señales de medición, por lo que constituye un herramienta de gran utilidad.

En la figura 6.7, e aprecia el residuo eliminado, o en otras palabras el ruido que se encontraba en la señal original.

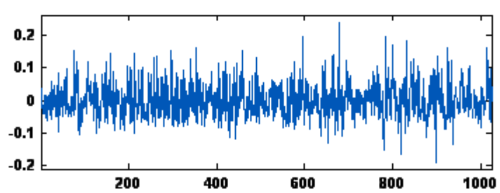

Fig.6.7. Ruido eliminado de la señal original.

Note por ejemplo, que para la muestra 900, hay un valor de ruido muy negativo (-0.18 aproximadamente) el cual también se encuentra presente, sobrepuesto al nivel continuo, en la señal original de la figura 6.4 en el mismo instante, lo que corrobora que la figura 6.7 corresponde al total de señal eliminada, que se obtiene a partir de la reconstrucción o inversa del conjunto de señales d_i ($i=1...5$).

Todo el procedimiento anterior también puede ser llevado a cabo en imágenes, eliminando el ruido o distorsión, que eventualmente se pudiera presentar.

Con la introducción teórica expuesta, y los dos ejemplos de aplicación desarrollados, queda evidenciada la potencialidad de la transformada Wavelet para su uso en la ciencia e ingeniería.

VII. CONCLUSIONES

Al finalizar este trabajo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- ✓ Se verificó la utilidad de la Transformada Wavelet como una herramienta adicional a las ya conocidas para el análisis de señales.
- ✓ Si bien se trata de un área desarrollada relativamente reciente en la ciencia, ya se encuentra completamente aplicada en diversos ámbitos de la ciencia, siendo la versatilidad de las Wavelets una de sus características principales.
- ✓ El paquete de herramientas orientado a Wavelets de *Matlab*® es muy completo, y constituye un gran aporte tanto para el estudio, como para la aplicación a nivel práctico de esta transformada.
- ✓ Se entregó una perspectiva global acerca de los conceptos básicos de la Teoría de Wavelet, permitiendo al lector tener una idea general de sus principales características.
- ✓ El nivel introductorio y de baja complejidad conceptual del trabajo, esperamos sirva como motivación y como primer acercamiento para algunos alumnos que se vean interesados en esta materia.

REFERENCIAS

[1] R. Polikar. *The Wavelet Tutorial.* Durham Computation Center, Iowa State University, USA. 1995. Documento disponible en: http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html

[2] Formato de publicación IEEE Transactions. *Trans-Jour.doc*, disponible en: http://www.ieee.org/organizations/pubs/transactions/stylesheets.htm

[3] M. Misiti, Y. Misiti, G. Openheim y J. M. Poggy. *Wavelet Toolbox, User's Guide*. Versión 2. The Math Works, Inc. 2000.

[4] S. Mallat. *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation.* IEEE Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.