Análisis en el Dominio Frecuencial de Sistemas LTI

Introducción

- Las características de un sistema LTI pueden describirse mediante una función de la variable *w*, denominada ***respuesta en frecuencia***, la cual es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional *h*(*n*) del sistema.
- Para la caracterización de sistemas LTI se utiliza como excitación señales exponenciales complejas o sinusoidales.
- La función de respuesta en frecuencia permite determinar la respuesta transitoria y en régimen permanente de un sistema LTI cuando es excitado con cualquier combinación lineal de sinusoides o exponenciales complejas.
- Las señales periódicas y aperiódicas pueden descomponerse en sumas ponderada de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, por lo tanto es posible determinar la respuesta de un sistema LTI a esta clase de señales.

Respuesta a Señales Exponenciales Complejas

- La respuesta en el tiempo de un sistema LTI en reposo a una entrada arbitraria *x*(*n*) está dada por la convolución,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \qquad -\infty < n < \infty$$

- Para obtener una caracterización en el dominio frecuencial se excita el sistema con una exponencial compleja

$$\boldsymbol{x(n) = A\, e^{jwn}} \qquad -\infty < n < \infty$$

- donde A es la amplitud y *w* es cualquier frecuencia arbitraria en el intervalo [-π, π].

Respuesta a Señales Exponenciales Complejas (suite)

- Al reemplazar $x(n) = A\ e^{jwn}$ en la convolución se obtiene,

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\left[A\ e^{jw(n-k)}\right]=A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\ e^{-jwk}\right]e^{jwn}$$

de donde se aprecia que el término entre corchetes es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional, $h(k)$, del sistema. De lo anterior,

$$H(w)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jwk}$$

Es claro que la función $H(w)$ existe si el sistema es estable BIBO, es decir, si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|<\infty$$

- Por lo tanto, la respuesta del sistema a la exponencial compleja es,

$$y(n)=A\ H(w)\ e^{jwn}$$

- La respuesta también tiene forma exponencial compleja de la misma frecuencia que la entrada, pero modificada por el factor multiplicativo $H(w)$.
- Por este comportamiento la señal exponencial $\boldsymbol{x(n) = A\ e^{jwn}}$ recibe el nombre de ***autofunción*** del sistema, y el factor multiplicativo $H(w)$ evaluado en la frecuencia de la señal de entrada se denomina ***autovalor*** del sistema.

Ejemplo 1.

- Determinar la secuencia de salida del sistema

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n) \qquad \text{ante la entrada} \qquad x(n)=Ae^{j\pi n/2} \qquad -\infty<n<\infty$$

- Recordar que:

$$\sum_{k=0}^{n}a^{k}=\frac{1-a^{n-1}}{1-a}$$

Solución

- La transformada de Fourier de *h* (*n*) está dada por,

$$H(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-jwn}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

- **Para *w*= π / 2**,

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1+j\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0.46}$$

- Por lo tanto, la salida es,

$$y(n)=A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0.46}\right)e^{j\pi n/2}=\frac{2A}{\sqrt{5}}e^{j(\pi n/2-0.46)} \qquad -\infty<n<\infty$$

  - El sistema escala la entrada por $2/\sqrt{5}$ y la desplaza en -26.6° (0.46 rad).

- **Para *w*= π ,**

$$H(\pi)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}}=\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad y(n)=\frac{2}{3}Ae^{j\pi n}$$

Ejemplo 2

- Dibujar la magnitud y fase de $H(w)$ para el sistema de ***media móvil*** de tres puntos,

$$y(n)=\frac{1}{3}\left[x(n+1)+x(n)+x(n-1)\right]$$

Solución

- Puede obtenerse $h(n)$ directamente de la definición de la convolución,

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \qquad -\infty<n<\infty$$

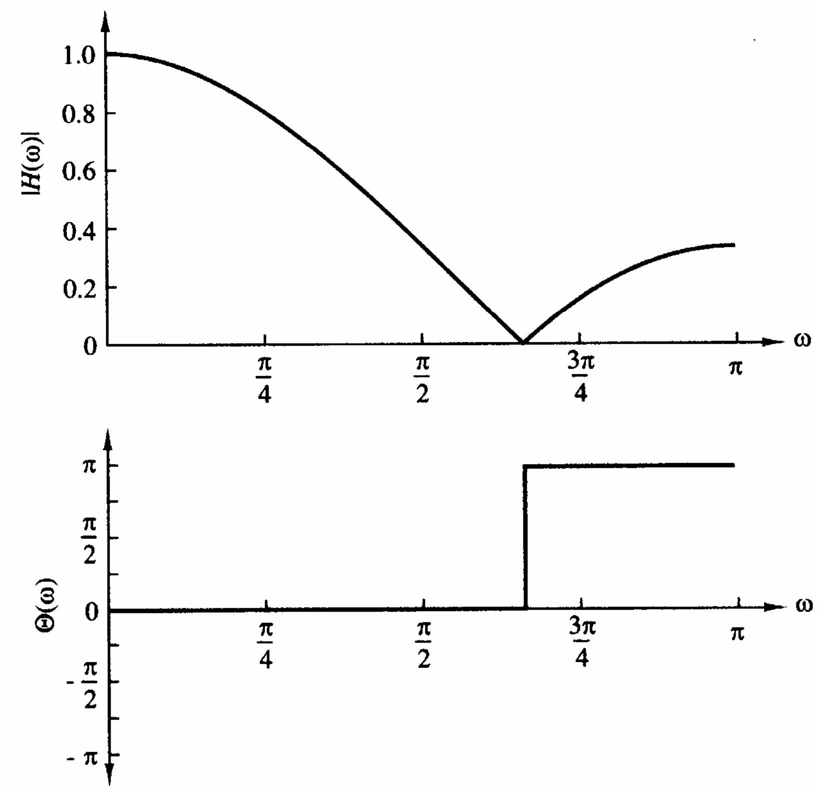
- Luego, $h(n)$ $=\{1/3\ ,\ \underline{1/3}\ \ 1/3\}$ y su transformada de Fourier es,

$$H(w)=\frac{1}{3}\left(e^{jw}+1+e^{-jw}\right)=\frac{1}{3}(1+2\cos w)$$

- La magnitud y fase están dados por,

$$|H(w)|=\frac{1}{3}|1+2\cos w|$$

$$\Theta(w)=\begin{cases}0, & 0\le w\le 2\pi/3\\ \pi, & 2\pi/3<w\le\pi\end{cases}$$



Gráficas de la magnitud y fase del filtro de media móvil.

Respuesta a Señales Sinusoidales

- Por la simetría de la magnitud, $|H(w)|$, y fase, $\Theta(w)$, de $H(w)$, y por que una sinusoide se puede expresar como la sumatoria de dos exponenciales complejas conjugadas, la respuesta de un sistema LTI a una sinusoide es parecida a la respuesta generada por una exponencial compleja.

- Con entradas exponenciales se tiene,

$$\begin{aligned} &\text{entrada} \quad x_1(n) = Ae^{jwn} \\ &\text{salida} \quad y_1(n) = A|H(w)|\, e^{j\Theta(w)}\, e^{jwn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{entrada} \quad x_2(n) = Ae^{-jwn} \\ &\text{salida} \quad y_2(n) = A|H(-w)|\, e^{j\Theta(-w)}\, e^{-jwn} \\ &\qquad\qquad = A|H(w)|\, e^{-j\Theta(w)}\, e^{-jwn} \end{aligned}$$

- Por superposición se puede obtener la respuesta a una entrada seno y coseno,

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2j}\left[x_1(n) - x_2(n)\right] = A \operatorname{sen} wn \\ y(n) &= \frac{1}{2j}\left[y_1(n) - y_2(n)\right] \\ &= A|H(w)| \operatorname{sen}\left[wn + \Theta(w)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2}\left[x_1(n) + x_2(n)\right] = A \cos wn \\ y(n) &= \frac{1}{2}\left[y_1(n) + y_2(n)\right] \\ &= A|H(w)| \cos\left[wn + \Theta(w)\right] \end{aligned}$$

Conclusión

- El conocimiento de $H(w)$ permite determinar la respuesta del sistema ante cualquier sinusoidal de entrada.
- Si la entrada puede descomponerse en sinusoides, puede usarse el principio de superposición de los sistemas lineales para determinar la salida ante estas entradas.

Ejemplo 1

- Determinar la respuesta del sistema

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ante la entrada $x(n) = 10 - 5\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 20\cos(n\pi) \qquad -\infty < n < \infty$

Solución

- La respuesta en frecuencia del sistema es,

$$H(w) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

- El primer término de $x(n)$ es un componente fijo con w=0, el segundo término tiene frecuencia w=π /2, y el tercer término tiene frecuencia w=π. La respuesta frecuencial en estas frecuencias está dada por,

$$H(0) = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \qquad H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j\,0.46} \qquad H(\pi) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$$

- Así, la respuesta del sistema y(n) es,

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2} - 0.46\right) + \frac{40}{3}\cos(n\pi) \qquad -\infty < n < \infty$$

Ejemplo 2

- Para el sistema $y(n) = a\, y(n-1) + b\; x(n) \qquad 0 < a < 1$

  a) Determine la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(w)$ del sistema.

  b) Elegir el parámetro b de manera que el valor máximo de $|H(w)|$ sea la unidad.

  c) Determinar la salida para:

$$x(n) = 5 + 12 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 20 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

- **Solución**

  - La respuesta impulsional se calcula a partir de la ecuación homogénea haciendo condiciones iniciales cero y $x(n)=\delta(n)$.

$$h(n) = b\, a^n\, u(n) \qquad \text{Puesto que } |a| < 1, \text{ el sistema es estable BIBO y } H(w) \text{ existe}$$

  - **a)** La respuesta en frecuencia es

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-jwn} = \frac{b}{1 - a\, e^{-jw}}$$

$$|H(w)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos w}} \qquad \Theta(w) = \angle b - \tan^{-1}\left[\frac{a \operatorname{sen} w}{1 - a\cos w}\right]$$

Solución ...

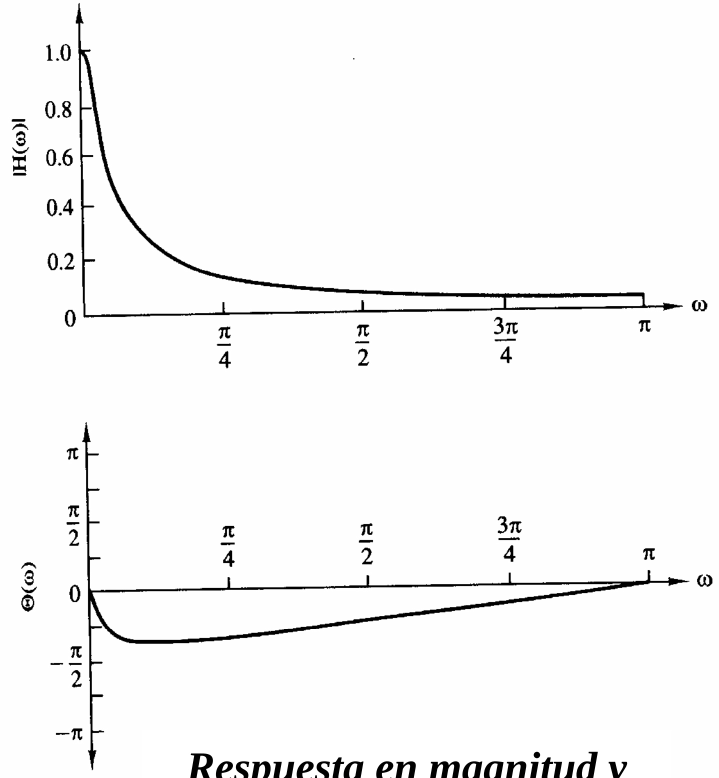
b) Dado que el parámetro ***a*** es positivo, el denominador de | $H(w)$ | tiene un mínimo en w=0.

- Por lo tanto, | $H(w)$ | tiene un máximo en w=0. Para esta frecuencia,

$$H(0)=\frac{|b|}{1-a}=1 \quad \rightarrow \quad b=\pm(1-a). \quad \text{Con } \; b=1-a$$

$$|H(w)|=\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos w}}$$

$$\Theta(w)=-\tan^{-1}\left[\frac{a\ \text{sen}\, w}{1-a\cos w}\right]$$



Respuesta en magnitud y fase con a = 0.9.

Solución ...

c) La señal de entrada consta de tres componentes

$$w = 0 \qquad |H(0)| = 1 \qquad \Theta(0) = 0$$

$$w = \pi/2 \qquad |H(\pi/2)| = 0.074 \qquad \Theta(0) = -42^\circ$$

$$w = \pi \qquad |H(\pi)| = 0.053 \qquad \Theta(0) = 0$$

Por lo tanto, la salida del sistema es,

$$y(n) = 5|H(0)| + 12|H(\pi/2)| \text{ sen}\left(n\frac{\pi}{2} + \Theta(\pi/2)\right) - 20|H(\pi)| \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \Theta(\pi)\right)$$

$$y(n) = 5 + 0.888 \text{ sen}\left(n\frac{\pi}{2} - 42^\circ\right) - 1.06 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

Respuesta Transitoria y Permanente

- Si se considera el análisis con señales exponenciales o sinusoidales aplicadas al sistema en $n = -\infty$ (señales eternas), la salida que se obtiene corresponde a la respuesta en régimen permanente y no hay respuesta transitoria.
- Si la señal se aplica en un instante de tiempo finito, por ejemplo $n=0$, la respuesta consta de dos términos: respuesta ***transitoria*** y ***respuesta permanente***.

- **Ejemplo**. Obtener la resp. transitoria y permanente del sistema $y(n) = a\,y(n-1) + x(n)$ ante la entrada $x(n) = A e^{jwn} \quad n \geq 0.$ Donde $|a| < 1$ garantiza estabilidad BIBO.
- **Solución**. La respuesta ante cualquier entrada $x(n)$ está dada por,

$$y(n) = a^{n+1}\,y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^{k}\,x(n-k) \qquad n \geq 0$$

- Al remplazar la entrada $x(n)$ se obtiene

$$y(n) = a^{n+1}\,y(-1) - \frac{A a^{n+1} e^{-jw(n+1)}}{1 - a e^{-jw}} e^{jwn} + \frac{A}{1 - a e^{-jw}} e^{jwn} \qquad n \geq 0$$

- de donde se aprecia:

$$\text{Respuesta Estacionaria}: \quad y_{ss}(n) = \lim_{n\to\infty} y(n) = \frac{A}{1 - a e^{-jw}} e^{jwn} = A H(w) e^{jwn}$$

$$\text{Respuesta Transitoria}: \quad y_{tr}(n) = a^{n+1}\,y(-1) - \frac{A a^{n+1} e^{-jw(n+1)}}{1 - a e^{-jw}} e^{jwn} \qquad n \geq 0$$