Diseño de Filtros *Optimos* FIR de Fase Lineal y Rizado Constante
Aproximación de Chebyshev

■ Introducción

- El método de diseño se formula como un problema de aproximación de Chevyshev.
- El criterio de optimalidad es en el sentido de que el error de aproximación ponderado entre la respuesta en frecuencia deseada y obtenida se distribuye equitativamente a lo largo de la bandas de paso y de atenuación del filtro que minimiza el error máximo.
- Los filtros obtenidos presentan rizados en todas las bandas.

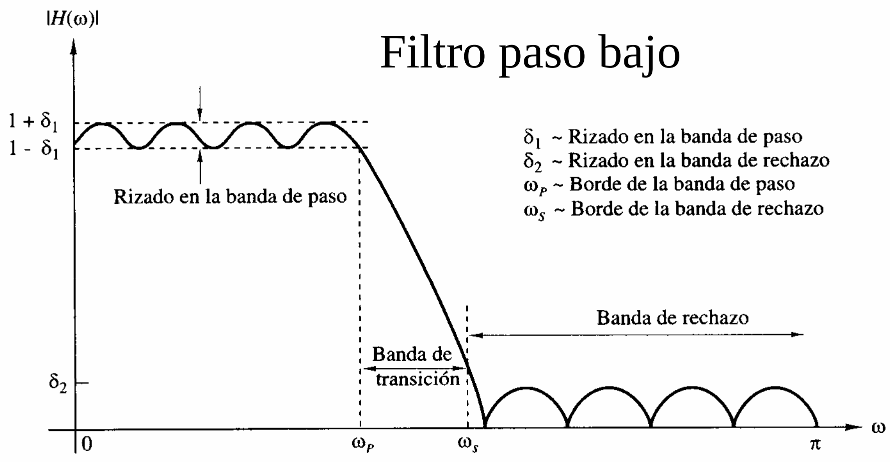
*banda de paso:

$$1-\delta_1 \leq H_r(w) \leq 1+\delta_1 \qquad |w| \leq w_p$$

*banda de rechazo:

$$-\delta_2 \leq H_r(w) \leq \delta_2 \qquad |w| > w_s$$

Filtro paso bajo



- Para el diseño, es conveniente obtener una ***estructura común*** de $H_r(w)$ para los diferentes casos de filtros FIR.

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 1

- Respuesta impulsional **simétrica** h(n)=h(M-1-n) y M **impar**

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = (M-1) / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {a(k)} como,

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right), & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), & k = 1, 2, \ldots, \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

entonces $H_r(w)$ se reduce a:

$$\Rightarrow \qquad H_r(w) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos wk$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 2

- Respuesta impulsional **simétrica** h(n)=h(M-1-n) y M **par**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = M / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {b(k)} como,

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} b(k)\cos w\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow \qquad H_r(w) = \cos\frac{w}{2}\sum_{k=0}^{(M/2)-1}\tilde{b}(k)\cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{b}(0) = \frac{1}{2}b(1), \qquad \tilde{b}(k) = 2\,b(k) - \tilde{b}(k-1) \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{M}{2} - 2, \qquad \tilde{b}\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 2b\left(\frac{M}{2}\right)$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 3

- Respuesta impulsional **antisimétrica** h(n)=-h(M-1-n) y M **impar**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\, senw\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = (M-1) / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {c(k)} como,

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, (M-1)/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\, \text{sen}\, wk$$

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow \quad H_r(w) = \text{sen}\, w \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) = c\left(\frac{M-1}{2}\right), \qquad \tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) = 2c\left(\frac{M-3}{2}\right), \ldots,$$

$$\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 2c(k) \quad 2 \le k \le \frac{M-5}{2}, \qquad \tilde{c}(0) + \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = c(1)$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 4

- Respuesta impulsional **antisimétrica** h (n) = -h(M-1-n) y M **par**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\, senw\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = M / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {d(k)} como,

$$d(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k)\, \text{sen}\, w\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

⇨ $$H_r(w) = \text{sen}\,\frac{w}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{d}(k)\cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right) = 2d\left(\frac{M}{2}\right), \qquad \tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 2\, d(k) \qquad 2 \le k \le \frac{M}{2} - 1, \qquad \tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = d(1)$$

- Las expresiones para $H_r(w)$ en los cuatro casos, presentan la forma común

$$H_r(w) = Q(w)\, P(w)$$

donde,

$$Q(w) = \begin{cases} 1 & caso\ 1 \\ \cos\dfrac{w}{2} & caso\ 2 \\ sen\, w & caso\ 3 \\ sen\dfrac{w}{2} & caso\ 4 \end{cases}$$

$$P(w) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos wk \qquad \text{donde } L = \begin{cases} (M-1)/2 & caso\ 1 \\ M/2-1 & caso\ 2 \\ (M-3)/2 & caso\ 3 \\ M/2-1 & caso\ 4 \end{cases}$$

parámetros del filtro

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación W(w)**
  - **$H_{dr}(w)$** se define como igual a uno en la banda de paso y cero en la banda de rechazo.
  - **W(w)** función que permite elegir el tamaño relativo del los errores en las diferentes bandas de frecuencia (normalizada en la banda de paso).

$$H_{dr}(w) = \begin{cases} 1, & w \text{ en la banda de paso} \\ 0, & w \text{ en la banda de rechazo} \end{cases} \qquad W(w) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & w \text{ en la banda de paso} \\ 1, & w \text{ en la banda de rechazo} \end{cases}$$

- Dadas las especificaciones de $H_{dr}(w)$ y $W(w)$, puede definirse el **Error de Aproximación Ponderado E(w)** como,

$$E(w) = W(w)\left[H_{dr}(w) - H_r(w)\right] = W(w)\left[H_{dr}(w) - Q(w)P(w)\right] = W(w)Q(w)\left[\frac{H_{dr}(w)}{Q(w)} - P(w)\right]$$

y por conveniencia matemática, se definen las *funciónes modificadas* como,

$$\widehat{W}(w) = W(w)Q(w) \qquad\qquad \widehat{H}_{dr} = \frac{H_{dr}(w)}{Q(w)}$$

por lo que el error de aproximación ponderado se puede expresar, para los cuatro filtros FIR de fase lineal, como,

$$E(w) = \widehat{W}(w)\left[\widehat{H}_{dr}(w) - P(w)\right]$$

- El problema de **aproximación de Chebyshev** consiste básicamente en determinar los parámetros $\{\alpha\ (k)\ \}$ que minimizan el máximo valor absoluto de E(w) sobre las bandas de frecuencia en las que se realiza la aproximación:

$$\min_{sobre\ \{\alpha(k)\}}\left[\max_{w\in S}\left|E(w)\right|\right] = \min_{sobre\ \{\alpha(k)\}}\left[\max_{w\in S}\left|\widehat{W}(w)\left[\widehat{H}_{dr}(w) - \sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos wk\right]\right|\right]$$

donde S representa el conjunto (unión disjunta) de bandas de frecuencia sobre las que se realiza la optimización.

- La **solución a este problema** [Park y McClellan 1972] se efectua utilizando el ***teorema de alternancia.***