Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

TP2

Nombre: Juan Pablo Schamun

a) La aceptación o no de una recomendación podría seguir una distribución de Bernoulli con probabilidad p. Si se considera x a la cantidad de películas aceptadas sobre un total de n recomendaciones; entonces la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros p y n.

$$P(X = x) = B(p, n);$$

$$X \,\epsilon\; \mathbb{N}\,[0, n];$$

$$0 < p < 1;$$

$$n \,\epsilon\, \mathbb{N}_+$$

Este parámetro p es el que queremos estimar y será la variable aleatoria Θ
La distribución a priori que voy a elegir es una distribución beta, ya que es familia conjugada de la binomial, donde viven los datos.

$$\pi(\Theta) \sim Beta(a, b);$$
$$0 < \Theta < 1;$$
$$a > 0; b > 0$$

Los parámetros de la distribución a y b los voy a elegir teniendo en cuenta que conozco la media de la distribución como dato del problema:

$$E[\Theta] = 0{,}7 = \frac{a}{a + b}$$

De acá conozco la relación entre a y b y por conveniencia voy a elegir

$$a = 7;\; b = 3$$

Por lo tanto, la distribución a priori definida será:

$$\boldsymbol{\pi(\Theta = \theta) \sim Beta(7, 3)} * \boldsymbol{I}(0 < \theta < 1)$$

Hay un término constante que divide, pero no importa, porque luego voy a llegar a una beta con los parámetros nuevos.

b) Para la distribución a posteriori, aplicaré el teorema de Bayes para calcular

$$\boldsymbol{f(\Theta = \theta) \mid (X = x) \approx\; L(\theta) * \pi(\theta)}$$

Donde $L(\theta)$ es la verosimilitud de los datos dado que Θ toma el valor θ

$$\boldsymbol{L(\theta) \approx\; \theta^x * (1 - \theta)^{n-x} * I(0 < \theta < 1)}$$

$\pi(\theta)$, cómo ya se vio antes, es la distribución a priori.

$$\boldsymbol{\pi(\Theta = \theta) \;\approx\; \theta^{a-1} * (1 - \theta)^{b-1}}$$

Combinando todo queda

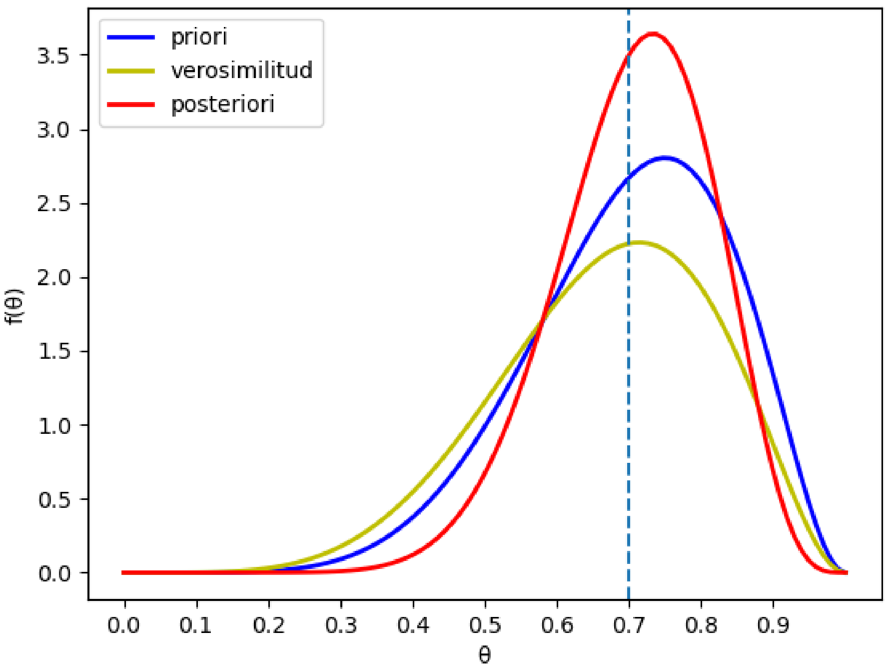
$$f(\Theta = \theta) \mid (X = x) \approx \theta^x * (1 - \theta)^{n-x} * \theta^{a-1} * (1 - \theta)^{b-1} * I(0 < \theta < 1)$$

$$f(\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}) \mid (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{x+a-1}} * (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{n-x+b-1}} * \boldsymbol{I}(\boldsymbol{0} < \boldsymbol{\theta} < \boldsymbol{1})$$

$$f(\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}) \mid (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{Beta}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d});$$
$$\text{con } \mathrm{c} = \mathrm{x} + \mathrm{a}\,; \mathrm{d} = \mathrm{n} - \mathrm{x} + \mathrm{b}$$
$$\mathrm{c} = 5 + 7 = 12;$$
$$\mathrm{d} = 7 - 5 + 3 = 5$$

$$\boldsymbol{Distribuci\acute{o}n\ a\ posteriori}:$$
$$f(\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}) \mid (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{Beta}(\boldsymbol{12}, \boldsymbol{5});$$

Nota: Los términos constantes los evito, como el coeficiente binomial de la verosimilitud y la integral en el denominador de la distribución beta.



c) Como estimador de la eficacia en la predicción tomo la esperanza de la nueva distribución

$$E[\theta] = \frac{a}{a+b} = \frac{12}{12+5} = \mathbf{0.7058}$$