Álgebra de Matrices

1. Matrices

- Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Las matrices proporcionan una forma eficiente de resolver sistemas de ecuaciones lineales y registrar información.

- Recordemos cómo se vería un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales con dos variables *x*, y *y:*
  - $2x - y = 10$
  - $3x + 2y = 1$

1.1 Definición de una matriz

- Sean *m* y *n* enteros positivos. Una **matriz de $\boldsymbol{m\ x\ n}$** (se lee como “matriz de m por n”) es un arreglo rectangular de *m* renglones (filas) y *n* columnas de números reales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- También, se utiliza la notación abreviada $[a_{ij}]$ para esta matriz

1.2 Índices de la matriz

- Cada elemento o entrada, a_{ij}, de la matriz utiliza notación con dos subíndices.
- El subíndice de la fila (renglón) es el primer subíndice i.
- El subíndice de la columna es j.
- Por tanto, el elemento a_{ij} está en la fila i y en la columna j.

Ejercicio 1

- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 15 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ Determinar lo siguientes elementos de A

1. (4,3) =
2. (1,1) =
3. (2,3) =
4. (3,2) =

1.3 Matrices cuadradas

- Si $m = n$, se dice que la matriz es una **matriz cuadrada.** Además, se dice que dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y sus elementos son iguales.
- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Estas dos matrices son cuadradas porque tienen el mismo número de filas (renglones) que columnas.

1.4. Orden o tamaño de la matriz

- La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ tiene orden de 3 x 3 y es una matriz cuadrada

- La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene orden de 2 x 2 y es una matriz cuadrada

- La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 15 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ tiene orden de 4 x 3

Ejercicio 2

Determinar si las siguientes matrices son cuadradas o no y determinar el tamaño de cada matriz.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 15 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

5. $[3]$

6. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Suma y resta de matrices

Para sumar y restar matrices, lo hacemos sumando o restando sus entradas correspondientes. Las matrices de tamaños diferentes **no** pueden sumarse o restarse.

Definición 1. Suma y diferencia de matrices.

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de orden de $m\ x\ n$

1. La suma $A + B$ es la matriz de $m\ x\ n$

$$A + B = [a_{ij} + \ b_{ij}]$$

2. La diferencia $A - B$ es la matriz de $m\ x\ n$

$$A - B = [a_{ij} - \ b_{ij}]$$

2.1. Suma de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de orden de $m\ x\ n$. El resultado de C $=\ A + B$, donde C es de orden $m\ x\ n$ y tiene la siguiente forma:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2 Resta de matrices

De forma análoga, sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de orden de $m\ x\ n$. El resultado de $\mathrm{C} = A - B$, donde C es de orden $m\ x\ n$ y tiene la siguiente forma:

- $C = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$

Ejercicio 3

Realizar las siguientes operaciones:

A = $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & 24 & 5 \\ 17 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 2 & 13 & 2 \\ 7 & 14 & 4 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A + B =

A – B =

A + C =

3. Escalares

Cuando trabajamos con matrices, los números reales se les conoce como **escalares**. El producto del número real k y la matriz $A = \left[a_{ij}\right] de\ m\ x\ n$ es la matriz de tamaño $m\ x\ n$

$$kA = [ka_{ij}]$$

- La matriz $kA = [ka_{ij}]$ es un **múltiplo escalar de A.**

3.1 Multipliación por un escalar

Sea $A = [a_{ij}]$ $de\ m\ x\ n$ y el escalar k matriz $kA = [ka_{ij}]de\ m\ x\ n$ y se ve de la siguiente forma

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.

Sea A = $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $k = 3$. Determine la matriz kA.

4. Multiplicación de matrices

Para formar el producto *AB* de dos matrices, el número de columnas de la matriz A (matriz de la izquierda) **debe ser igual** que el número de renglones de la matriz B (matriz de la derecha).

Es decir, cualquier renglón de *A* tiene el mismo número de entradas que cualquier columna de B.

Cada entrada del producto se puede obtener sumando los productos de las entradas de un renglón de A por las correspondientes entradas de una columna de B.

4.1 Definición de multiplicación de matrices.

Definición 2. Multiplicación de matrices.

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m\ x\ r$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz de $r\ x\ n$

El **producto** $AB = \left[c_{ij}\right]$es la matriz de $m\ x\ n$, donde

$$c_{ij} = \ a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

4.2 Multiplicación de matrices

Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$

$$A\,B = C = \begin{bmatrix} c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + \cdots a_{1r} * b_{r1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

4.3. Ejemplo de multiplicación de matrices

Sean las matrices $A = [1 \;\; 2 \;\; 3]$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Determine la multiplicación *AB y BA.*

Ejercicio 5

- Sean $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Realizar las siguientes operaciones:

1. AB
2. AC
3. BC
4. BA
5. CB

5. Matriz identidad

- La matriz I_n y $n\ x\ n$, con unos en la diagonal principal (de arriba a la izquierda abajo a la derecha) y 0 en el resto de las entradas, se le conoce como la **matriz identidad** de orden $n\ x\ n$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

5.1 Ejemplos matriz identidad

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si $A = [a_{ij}]$ es cualquier matriz de $n \; x \; n$, se puede probar que

$$AI_n = I_nA = A$$

Esto es, I_n es la **matriz identidad** para el conjunto de matrices $n \; x \; n$

6. Inversa de una matriz

Definición 3. Inversa de una matriz cuadrada

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n\ x\ n$. Si existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

Entonces B es la inversa de A. Y lo podemos escribir como $B = A^{-1}$ (se lee como "A inversa")

6.1 Matriz singular

- No toda matriz cuadrada tiene una inversa. Si una matriz cuadrada A tiene una inversa entonces A es **no singular**.
- Si A no tiene inversa, entonces A es **singular.**

6.2 Inversa de una matriz de 2 x 2

- Si $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

El número $ad - bc$ es el **determinante** de la matriz 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y se expresa como

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

6.3. Ejemplo de determinante de una matriz

- Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar si la matriz tiene inversa. Si es así, encontrar su matriz inversa.

7. Propiedades de las matrices

- Sean $A, B\ y\ C$ matrices cuyos órdenes son tales que las sumas, diferencias y productos siguientes están definidos.

1. **Propiedad conmutativa.**

   Suma: $A + B = B + A$

   Multiplicación: En general no se cumple

2. Propiedad asociativa

Suma: $(A + B) + C = A\ (B + C)$

Multiplicación: $(AB)C = A(BC)$

3. Propiedad de la identidad

Suma: $A + 0 = A$

Multiplicación: $A\ I_n = I_n A = A$

7.1 Propiedad del inverso y distributiva

4. Propiedad del inverso.

Suma: $A + (-A) = 0$

Multiplicación: AA^{-1} = A^{-1} A = I_n, $|A| \neq 0$

5. Propiedad distributiva

Multiplicación sobre la suma:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Multiplicación sobre la resta:

$$A(B - C) = AB - AC$$

$$(A - B)C = AC - BC$$

Tarea 1/2

Sea $A = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$.

Realizar las siguientes operaciones.

1. AB
2. AC
3. BC
4. BA
5. CA
6. CB
7. A + B
8. A + C

Tarea 2/2

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$.

9. Determinar si la matrices tienen inversa. Si es así, encontrar su matrices inversas.

10. Realizar la comprobación de que la matriz inversa encontrada es la solución correcta.