Problema LQR de Horizonte Infinito

Juan Pablo Requez
juanrequez@gmail.com
jprequez@ucla.edu.ve
jrequez@unexpo.edu.ve

Considérese el sistema lineal (invariante en el tiempo)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (1)$$

con condición inicial conocida, $x(t_0)$, y con las matrices $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}$. Este sistema se dice que está representado en *espacio de estados*, y un diagrama de bloques para él se muestra en la Figura 1.

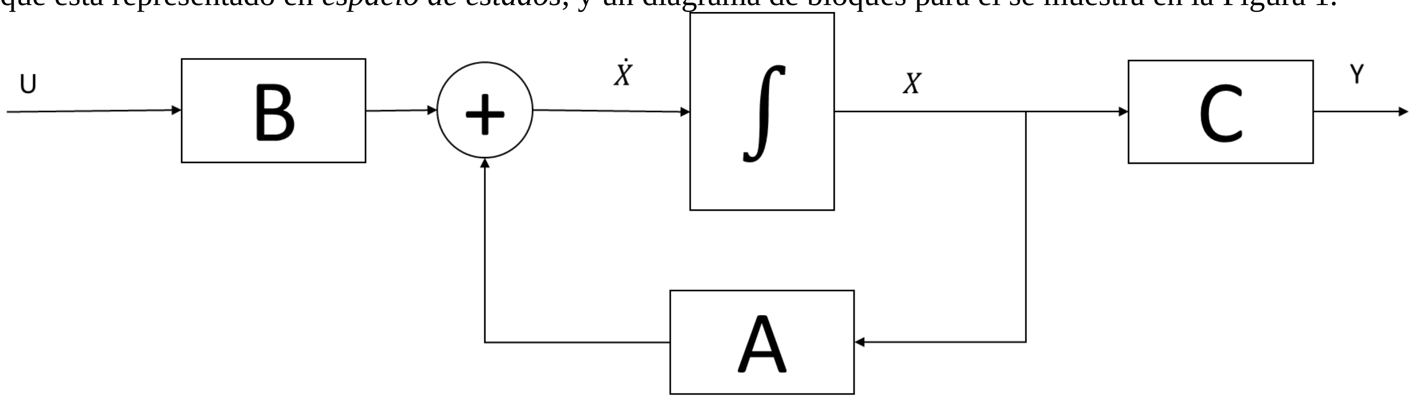


Figura 1. Diagrama de bloques del sistema lineal en espacio de estados

Ahora, considérense las matrices Q y R, tal que Q sea *semidefinida positiva* y R *definida positiva*. Defínase el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} u^T R u + x^T Q x \, dt \qquad (2)$$

donde

u(t)	sin restricciones
t_f	infinito
$x(t_f)$	0

Este índice se dice que es de horizonte infinito porque debe evaluarse la integral hasta un tiempo infinito. El problema de diseño es encontrar u tal que el índice J sea mínimo. Q debe elegirse semidefinida positiva de forma que el término $x^T Q x$ sea mayor o igual que cero, mientras que R debe ser definida positiva, y por tanto $u^T R u$ sea mayor que cero, y de esta manera que J no pueda anularse y que siempre sea positivo. Esto garantiza que el problema se escriba de forma que pueda hallarse una solución local para el problema de minimización para u en función de x.

Si el par (A, B) es controlable y el par (A, C) es observable, la solución del problema LQR, puede escribirse como

$$u(t) = -R^{-1}B^T P \, x(t) \qquad (3)$$

En donde P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati (ARE, Algebraic Riccati Equation) de tiempo continuo,

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (4)$$

La solución de la ecuación algebraica de Riccati (4) es única, real y simétrica (Locatelli, 2001) (Bini, Iannazzo, & Meini, 2012). La ecuación de Riccati es una ecuación algebraica matricial no lineal. Por lo general, no puede resolverse explícitamente y para hallar las soluciones se utilizan métodos numéricos matriciales y del álgebra lineal.

Más aún, usando la solución (4), el sistema en lazo cerrado puede describirse por

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x \tag{5}$$

que garantiza estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. Esto corresponde al diseño de un sistema de control por Realimentación del Vector de Estados (RVE), haciendo $K = R^{-1}B^T P$. Un diagrama de bloques para este sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 2.

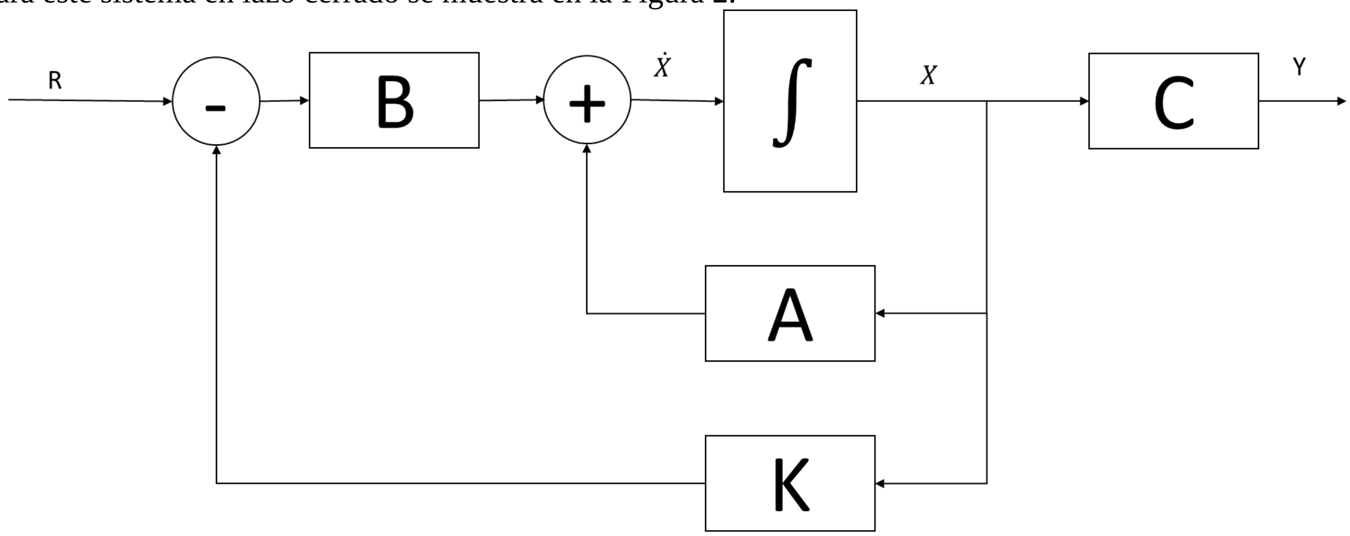


Figura 2. Diagrama de bloques del sistema de control de realimentación del vector de estados

El costo mínimo alcanzado al aplicar esta señal de control es

$$J = \frac{1}{2}x(0)^T Px(0) \tag{6}$$

Lo primero que debe resaltar en la lectura anterior es que ya no es necesario resolver una ecuación diferencial para calcular P. P es ahora una matriz constante, solución de una ecuación algebraica matricial. Esta ecuación algebraica ha sido muy estudiada y existen muchos métodos numéricos para resolverla.

En particular, si P es constante, entonces K es constante. De esta forma, el resultado de obtener P conduce a una matriz de realimentación de estados, como puede obtenerse por cualquier otro método de diseño no óptimo. Sin embargo, la K obtenida a través de LQR de horizonte infinito será la que producirá un mejor desempeño de entre todos los posibles, para el índice considerado.

En la Tabla 1 se resumen los tamaños y otras observaciones de los elementos involucrados en el problema LQR de horizonte infinito.

Tabla 1. Elementos del problema LQR

Matriz/vector	Tamaño	Observaciones.
A	$n \times n$	matriz de estados. Constante.
B	$n \times m$	matriz de entradas. Constante
C	$p \times m$	matriz de salida. Constante
x(t)	$n \times 1$	vector de estados
u(t)	$m \times 1$	vector de entradas
y(t)	$p \times 1$	vector de salidas
Q	$n \times n$	Matriz de ponderación de los estados (debe ser constante, simétrica y **semidefinida positiva)**

R	$m \times m$	Matriz de ponderación de las entradas (debe ser constante, simétrica y **definida positiva)**
F	0	idénticamente igual a cero (no está presente en este problema)

Como puede entenderse de lo anterior, el problema LQR infinito es un caso particular del problema LQR de horizonte finito, donde P es constante, $t \to \infty$ y donde F es igual a cero. Luego, es un caso mucho más sencillo de resolver. El motivo intuitivo por el que P es constante puede verse de la idea que, en el problema de horizonte infinito, P(t) debía integrarse hacia atrás desde infinito hasta cero, y los términos de P deben estabilizarse (a medida que el tiempo tiende a cero). Esto no es necesariamente cierto, ya que podría oscilar, pero la solución, como vimos la semana pasada, a medida que se acercaba a cero en horizonte finito, tendía a un valor constante. Si el problema no es LTI, no puede garantizarse que P sea constante. No consideraremos problemas que no sean LTI en nuestro análisis. De ser LTV, se utilizará el LQR de horizonte finito y se tomará que el tiempo t_f es muy largo. En realidad, eso hicimos en la lectura anterior en el ejemplo 1. Por favor, revisa nuevamente el ejemplo 1 de la lectura fundamental anterior.
Fíjate en la Figura 3, que es la evolución de los coeficientes de P para el ejemplo 1 de la lectura fundamental anterior. Recuerda que la solución de P se obtuvo desde 100 hacia 0, luego en esa evolución, mirándola desde el futuro hacia el pasado, la variable cambió y se estabilizó en un valor constante a medida que se acerca a cero. Este mismo comportamiento debe esperarse, pero con la transición ocurriendo en un tiempo infinitamente largo, luego en toda la evolución temporal el resultado es constante.

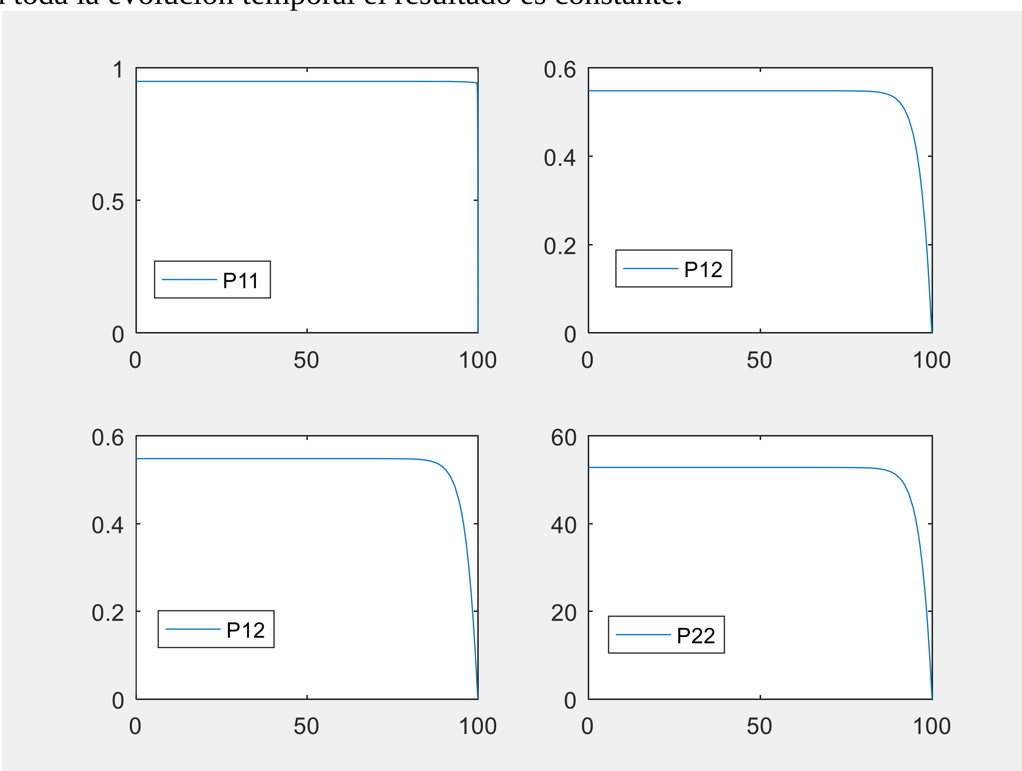


Figura 3. Evolución temporal de los valores de P para un problema LTI de horizonte finito

También debes notar que la matriz F en Horizonte infinito debe ser cero. Si no lo es, entonces se supone que se establece un valor final para x que sea diferente de cero. Y si x es diferente de cero, el funcional tendrá un argumento diferente de cero cuando t tiende a infinito, luego el valor de la integral será infinito. Para que el problema tenga solución, F debe ser idénticamente igual a cero y $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, necesario (pero no suficiente) para la convergencia. Nuevamente, en (Naidu, 2003) se presenta demostración para todo lo indicado.
Todo lo anterior se resume en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen LQR – Horizonte infinito LTI

Solución del problema LQR – Horizonte Finito	
Modelo de la planta	$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ (A,B) controlable
Índice de desempeño	$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt$
Condiciones iniciales (conocidas)	$x(t_0) = x_0$
Tiempo final (conocido)	∞
Ecuación Algebraica de Riccati	$0 = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q$
Ganancia de realimentación	$K = R^{-1}B^T P$
Ecuación de control	$u(t) = -Kx(t)$
Ecuación de estados	$\frac{dx}{dt} = (A - BR^{-1}B^T P)x$
índice de desempeño óptimo	$J = \frac{1}{2}x^T(0)Px(0)$

Procedimiento 4. Resolución del problema LQR de horizonte infinito.

Dada la planta y el índice de desempeño mostrados en la Tabla 2, con condiciones iniciales conocidas $x(t_o) = x_0$ y con (A,B) controlable.

1. Resuelva la Ecuación Algebraica de Riccati a través de un método numérico.
2. calcule la ganancia de realimentación K
3. Sustituya la ganancia de realimentación en la ecuación de control u
4. Determine la trayectoria de x(t) a través de la ecuación de estados a través de un método numérico.
5. Calcule el índice de desempeño óptimo.

Observaciones del procedimiento 4:

La resolución de la ecuación algebraica de Riccati puede realizarse a través de dos funciones de Matlab. La función "are" resuelve la ecuación algebraica de Riccati, mientra que la función "lqr" resuelve el problema de diseño completo.

Función are:

Sintaxis:

P=are(A,Z,W)

A corresponde a la matriz de estados del sistema
Z corresponde al producto $B \times R^{-1} \times B^T$
W corresponde a Q

Esta relación tal vez pueda entenderse mejor con la siguiente comparación de elementos

MATLAB (are):	A'	P	+	P	A	-	P	Z	P	+	W	=	0
Descripción del problema:	A'	P	+	P	A	-	P	$B \times R^{-1} \times B^T$	P	+	Q	=	0

Función lqr:

Sintaxis:

[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)

Donde

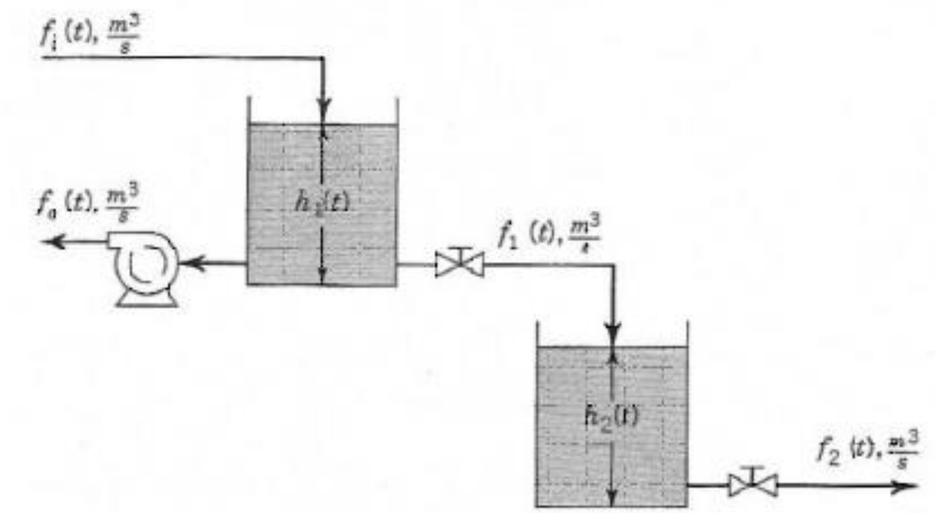
K corresponde a la ganancia de realimentación de estados óptima
P es la solución de la ecuación de Riccati

E representa a los autovalores de lazo cerrado del sistema (polos de la ecuación característica)
A, B, Q, R corresponden a las matrices del problema LQR de horizonte infinito como el presentado en este documento.

Naturalmente, es mucho más sencillo el uso de la función *lqr* ya que devuelve todo lo deseado del diseño comentado a través del procedimiento 4 y el problema resumido en la Tabla 2.

Ejemplo 1. Control LQR de horizonte infinito para un sistema de nivel

Considere el conjunto de tanques presentados en el ejemplo 1 de la lectura fundamental de la semana pasada. En este proceso todos los tanques están abiertos a la atmósfera y la temperatura es constante. Las aperturas de las válvulas se mantienen constantes. Las variables de control son el flujo de entrada f_i y el flujo extraido f_0



El modelo del nivel en variables de desviación puede representarse como

$$\frac{d}{dt}H_1 = -0.1107H_1 + F_i - F_o$$

$$\frac{d}{dt}H_2 = 0.1107H_1 - 0.1107H_2$$

Se desea implementar una estrategia de control que minimice la variación del nivel y además minimice los cambios de Fi y Fo

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty 10x_1^2 + 15x_2^2 + 0.1u_1^2 + u_2^2 dt$$

desde una posición inicial de 0.1 para cada nivel.

Solución

Haciendo

$$x_1 = H_1 \qquad x_2 = H_2 \qquad u_1 = F_o \qquad u_2 = F_i$$

El modelo es

$$\frac{d}{dt}x_1 = -0.1107x_1 + u_2 - u_1$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = 0.1107x_1 - 0.1107x_2$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1107 & 0 \\ 0.1107 & -0.1107 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot U$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} -0.1107 & 0 \\ 0.1107 & -0.1107 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

El índice de desempeño puede escribirse como

$$J = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} X^T \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot X + U^T \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot U \, dt$$

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de Riccati podría escribirse como sigue

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p12 & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p12 & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.1107 & 0 \\ 0.1107 & -0.1107 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1107 & 0 \\ 0.1107 & -0.1107 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p12 & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p12 & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p12 & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

simplificando

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.0 \cdot p_{11}^{\ 2} + 0.2214 \cdot p_{11} - 0.1107 \cdot p12 - 0.1107 \cdot p_{12} - 10.0 & 0.2214 \cdot p_{12} - 0.1107 \cdot p_{22} + 11.0 \cdot p_{11} \cdot p_{12} \\ 0.2214 \cdot p12 - 0.1107 \cdot p_{22} + 11.0 \cdot p12 \cdot p_{11} & 0.2214 \cdot p_{22} + 11.0 \cdot p12 \cdot p_{12} - 15.0 \end{pmatrix}$$

Y esto conduce a un sistema de tres ecuaciones (no lineales)

$$0 = 11.0 \cdot p_{11}^{\ 2} + 0.2214 \cdot p_{11} - 0.1107 \cdot p12 - 0.1107 \cdot p_{12} - 10.0$$

$$0 = 0.2214 \cdot p_{12} - 0.1107 \cdot p_{22} + 11.0 \cdot p_{11} \cdot p_{12}$$

$$0 = 0.2214 \cdot p_{22} + 11.0 \cdot p12 \cdot p_{12} - 15.0$$

Resolver este sistema de ecuaciones no lineales no es sencillo de forma analítica, sin embargo, puede ser resuelto fácilmente usando un método numérico.

A continuación, mostraremos el análisis del sistema usando matlab

Paso 0

introducir las matrices A y B

```
A=[-0.1107 0; 0.1107 -0.1107]
B=[-1 1;0 0]
% introducir las matrices Q y R
Q=[10 0;0 15]
```

```
R=[0.1 0; 0 1]
% condiciones iniciales
x0=[0.1; 0.1]
% calcular la matriz de controlabilidad
matrizC=ctrb(A,B)
% determinar el rango de la matriz de controlabilidad
rank(matrizC) %el rango debe ser igual al número de filas y columnas de A
```

```
A =

   -0.1107         0
    0.1107   -0.1107
B =

    -1     1
     0     0
Q =

    10     0
     0    15
R =

    0.1000         0
         0    1.0000

x0 =

    0.1000
    0.1000

matrizC =

   -1.0000    1.0000    0.1107   -0.1107
         0         0   -0.1107    0.1107

ans =

     2
```

Paso 1 y 2
Resolver la ecuación de Riccati y hallar la ganancia de realimentación ambos pasos son resueltos con la función LQR de Matlab

```
[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)
```

```
K =
```

```
  -9.4922   -5.4831
   0.9492    0.5483

P =

   0.9492    0.5483
   0.5483   52.8138


E =

 -10.4878
  -0.1750
```

Vea los autovalores del sistema en lazo cerrado, E. Estos tienen parte real negativa, requisito indispensable para que el sistema en lazo cerrado sea estable. Siempre darán así, porque el método LQR produce siempre resultados estables.

Paso 3

la sustitución solo significa que u=-Kx. La gráfica se muestra en el paso 4.

Paso 4

Se implementa lo anterior en Simulink. La implementación es mucho más sencilla que el caso anterior. Debe asegurarse que las matrices A, B y K están en el Workspace. Ver diagrama de bloques de Simulink que se presenta en la Figura 4. Este diagrama es muchísimo más sencillo, ya que no es necesario usar valores cambiantes de P para calcular K, que puede usarse directamente como una constante.

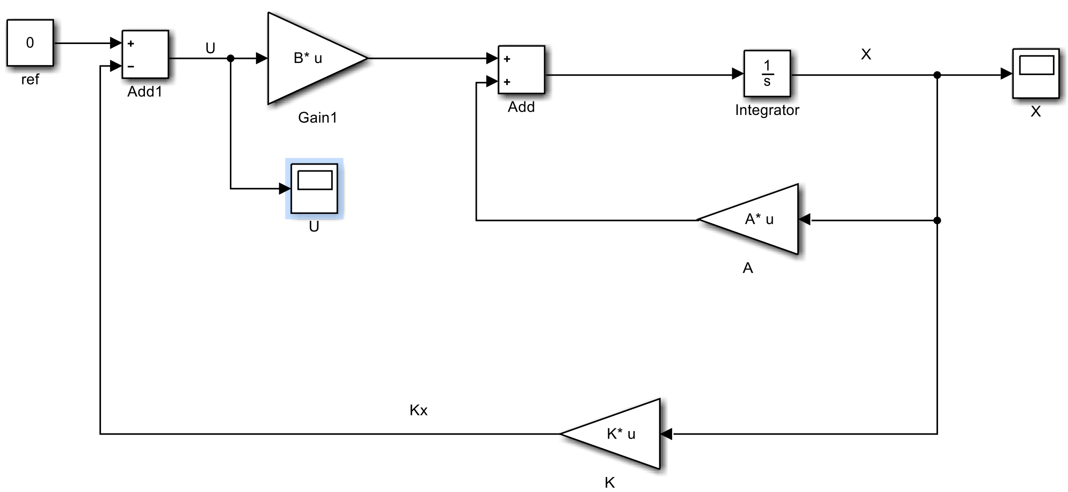
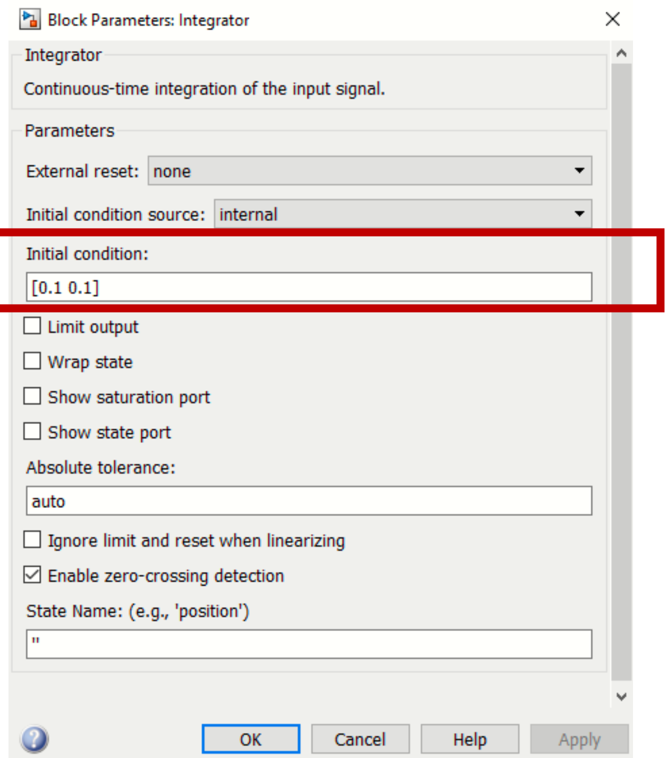


Figura 4. Diagrama de bloques para el ejemplo 1

Recuerde que debe cambiar, en el integrador, las condiciones iniciales a las dadas



La simulación da X y U, necesarios para el paso 3 y 4, con el tiempo en segundos.

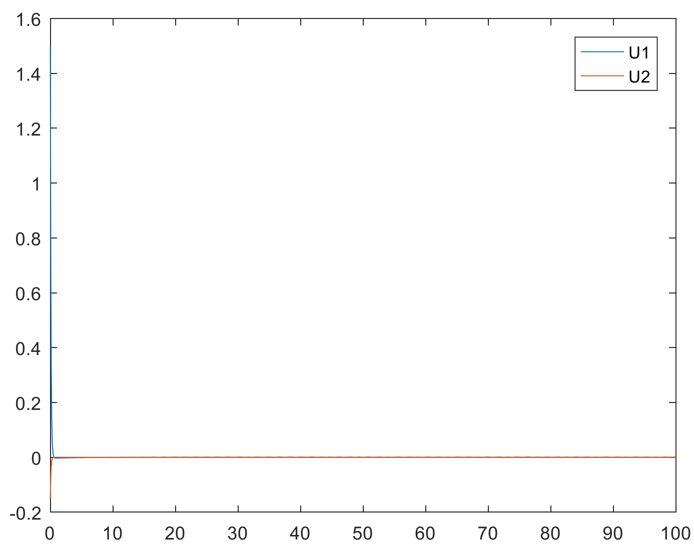


Figura 5. Respuesta temporal de las entradas

Las entradas vuelven a cero rápidamente (tal como indicamos, el problema del ejemplo 1 de la semana pasada es una versión muy aproximada del de esta semana porque t_f era muy largo).

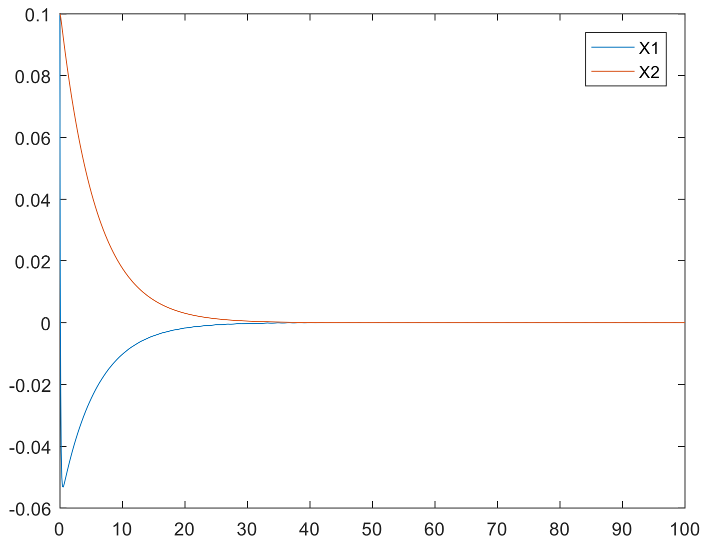


Figura 6. Respuesta temporal de los estados

Los estados toman más tiempo que las entradas en volver a cero, debido a la dinámica del sistema, por supuesto.

Paso 5

```
J=(1/2)*x0'*P*x0
```

J =

0.2743

El índice de desempeño es 0.2743.

La siguiente pregunta que puede hacerse un lector curioso es como ajustar el controlador. Como ya vimos, la solución del problema LQR depende de A, B, Q y R, porque en función de ellos se calcula P. La planta es fija, es decir, no podemos modificar A y B, pero Q y R pueden ser elegidos para obtener un mejor desempeño transitorio. Esto lo analizaremos en las siguientes semanas.

I. Resumen

El problema LQR de horizonte infinito es uno más sencillo que el de horizonte infinito, en el que la ecuación diferencial de Riccati se convierte en una algebraica. La solución de la ecuación algebraica de Riccati todavía tiene sus dificultades intrínsecas, pero poseemos métodos numéricos disponibles en el software especializado de control para obtener su solución y, por consiguiente, para resolver el problema de control óptimo LQR. El problema de control óptimo LQR requiere que la planta en cuestión sea controlable, sin esta suposición el problema puede que no tenga solución.

II. Referencias

Anderson, B. D., & Moore, J. B. (1971). *Linear Optimal Control.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.

Anderson, B. D., & Moore, J. B. (1989). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.

Antsaklis, P. J., & Michel, A. N. (2006). *Linear Systems.* Englewood Cliffs: McGraw-Hill.

Bini, D. A., Iannazzo, B., & Meini, B. (2012). *Numeric Solution of Algebraic Ricatti Equations.* Philadelphia: SIAM.

Locatelli, A. (2001). *Optimal Control, An introduction.* Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag.

Naidu, D. S. (2003). *Optimal Control Systems.* Boca Raton: CRC Press LLC.