Seguimiento Lineal Cuadrático

Juan Pablo Requez
juanrequez@gmail.com
jprequez@ucla.edu.ve
jrequez@unexpo.edu.ve

Existen dos tipos de controladores de seguimiento: los seguidores y los servomecanismos (*tracking systems and servomechanisms*). Cuando se conoce previamente los valores deseados de una salida, se dice que el problema es uno de seguimiento o tracking. Cuando se desea que la salida siga a un modelo dado como una ecuación diferencial, se dice que el problema es de servomecanismo. La diferencia es sutil: si se conoce el modelo dado como una ecuación diferencial, entonces puede resolverse para hallar el conjunto de valores deseados de la salida, y cuando se conoce la salida deseada esta puede acomodarse de forma que obedezca a una ecuación diferencial. Como siempre, *el diablo está en los detalles*. A veces, se desea que la planta se comporte como un modelo en espacio de estados, es decir, se desea que la planta se comporte diferente a su comportamiento natural, esto corresponde a un servomecanismo (o también llamado *servo*). Por ejemplo, el modelo que se desea que siga puede venir de otra planta, también en linea, pero digamos en un laboratorio con condiciones controladas. A veces, por ejemplo, en los problemas de aeronáutica o astronáutica, el modelo prefijado viene de descripciones cuyas soluciones son difíciles de obtener y es preferible poseer en forma de ecuaciones diferenciales, por lo que el acercamiento debe ser el de servomecanismo. En otros casos, la salida deseada es un polinomio o una señal de procesos estándar, como un escalón o una rampa, y en este caso el acercamiento adecuado es el de seguimiento.

Nos concentraremos en el problema de seguimiento. El único motivo para tal cosa es que en la producción industrial el *set point* o valor de referencia nunca es una curva compleja, sino una señal estándar como un escalón o una rampa. Inclusive, en los problemas eléctricos donde se desea que el sistema se comporte como una onda sinusoidal preespecificada, es común conocerla completamente en función de su frecuencia, amplitud y fase. El problema de servomecanismo no es de nuestro interés, pero es aplicable a la robótica y a la navegación, entre otros.

La distinción no es sencilla, por supuesto, y no siempre todos los autores coinciden en esta definición. Por ejemplo, (Smith & Corripio, 2000) usa solo dos clasificaciones: reguladores (diseñados para compensar perturbaciones) y servocontroladores (diseñados para ajustarse al punto de control). A este respecto, (Anderson & Moore, 1989), por ejemplo, usa la clasificación de reguladores (*regulators*) y servomecanismos (*servomechanisms*) e indica que los seguidores (*trackers*) son un tipo de servomecanismo. A pesar de las diferencias que presenten los diferentes autores, la idea es clara: regular no es lo mismo que seguir. No profundizaremos más en este análisis, pero es importante desde el punto de vista teórico reconocer que existen dos problemas diferentes (por lo menos) y que estos están asociados a dos índices de desempeño diferentes.

Los resultados que se presentan a continuación están basados en el análisis mostrado en (Anderson & Moore, 1989). Como siempre, la demostración de estos resultados se omitirá, pero puede ser consultada en esta fuente y en miles disponibles en internet.

I. Seguimiento lineal cuadrático de horizonte finito

Considérese el sistema lineal (invariante en el tiempo)

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{gathered} \tag{1}$$

con condición inicial conocida, $x(t_0)$, y con las matrices $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}$. Este sistema se dice que está representado en *espacio de estados*, y un diagrama de bloques para él se muestra en la Figura 1.

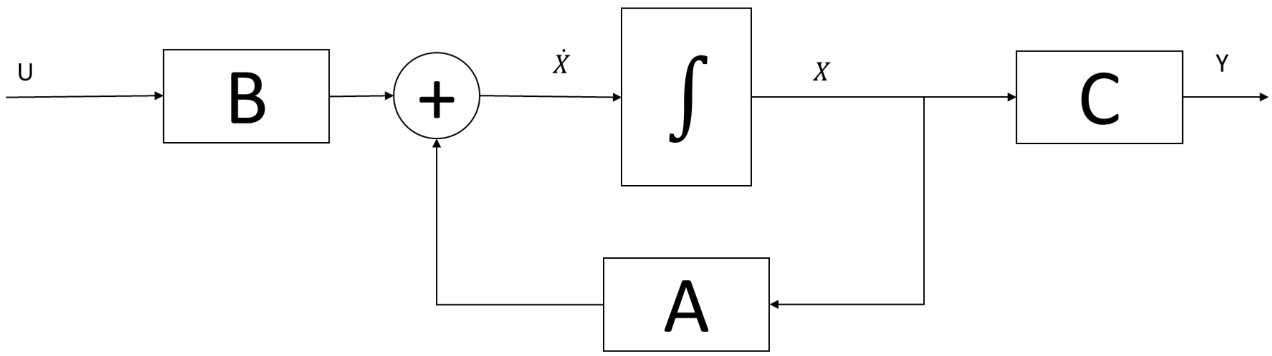

Figura 1. Diagrama de bloques del sistema lineal en espacio de estados

y supongamos que se poseen valores deseados de la salida y, llamados y_{des}.
Ahora considérese el funcional de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T R u + (y - y_{des})^T Q_2 (y - y_{des})\, dt \tag{2}$$

En donde se supone que R es definida positiva y Q_2 es semidefinida positiva.
Véase que **el funcional (2) no está escrito en función de los estados, sino de las salidas**. En este problema, lo que se desea es que la diferencia entre el *valor deseado de y* y *el valor actual de y* sea lo menor posible.
Para estos valores deseados de la salida, se pueden calcular los valores deseados de los estados como

$$x_{des} = L y_{des} \tag{3}$$

donde

$$L = C^T (C\, C^T)^{-1} \tag{4}$$

Usando la ecuación (3), el funcional (2) puede escribirse como

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T R u + (x - x_{des})^T Q (x - x_{des})\, dt \tag{5}$$

En donde se supone que R es definida positiva y Q es semidefinida positiva. Existe una relación entre Q_2 y Q dada por

$$Q = C^T Q_2 C \tag{6}$$

Lo anterior lo que busca es expresar el funcional descrito en función de las salidas (2) como un funcional expresado en función de los estados (5).
El problema anterior se conoce como problema de *seguimiento lineal cuadrático (LQT, Linear Quadratic Tracking)* debido a que el objetivo del sistema de control es el seguimiento de una señal de referencia. El problema anterior tiene una solución dada por

$$u = -R^{-1} B^T (P(t)x + b(t)) \tag{7}$$

donde P es la solución de la ecuación matricial diferencial de Riccati

$$\frac{dP}{dt} = -(PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q), \qquad P(t_f) = 0 \tag{8}$$

y b es la solución de la ecuación diferencial vectorial

$$-\frac{db}{dt} = (A - BR^{-1}B^T P)^T b - QLy_{des}, \qquad b(t_f) = 0 \tag{9}$$

Luego, la solución requiere resolver hacia atrás dos ecuaciones diferenciales matriciales para componer la entrada u. Estas ecuaciones deben resolverse desde t_f hasta t_0 para hallar las soluciones deseadas. Como la ecuación (9) requiere la solución de la ecuación (8), primero debe ser resuelta esta para poder hallar b. Como se puede observar, una de las ecuaciones requeridas es la solución de la ecuación de Ricatti y es simplemente un problema LQR como el que hemos estudiado previamente, con $Q = C^T Q_2 C$, mientras que la segunda ecuación diferencial no depende de x ni su aporte a la solución total depende de x. Esta última solución corresponde a un controlador de adelanto, ya que no requiere conocer a los estados ni la salida en ningún momento, pero sí requiere conocer a los valores deseados de y.

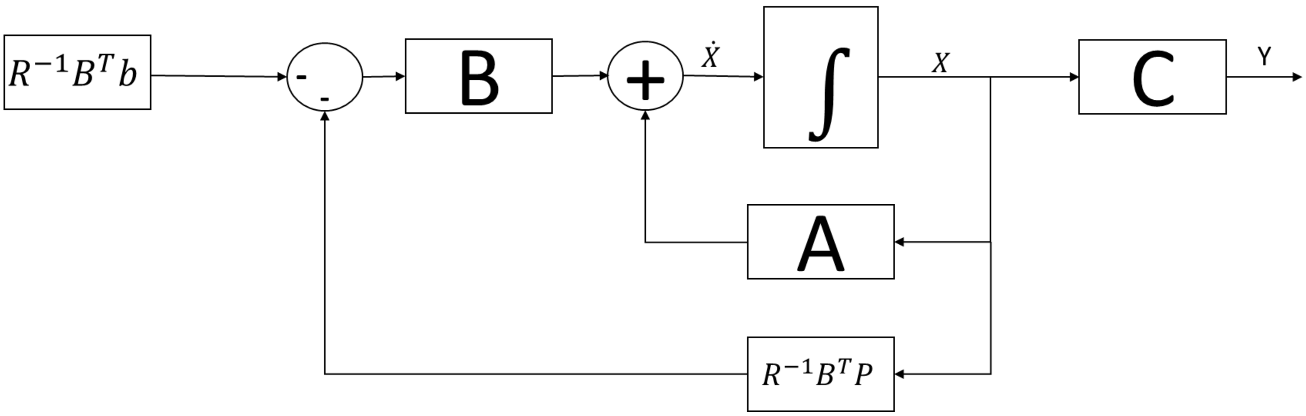

Figura 2. Diagrama de bloques en lazo cerrado LQT

Véase la Figura 2. Véase que el bloque indicado por $R^{-1}B^Tb$ es una entrada que solo depende de los valores deseados y_{des} y por lo tanto es una entrada de adelanto o feedforward. No pierdas de vista que la salida del controlador de realimentación y el de adelanto ambos reciben signo negativo, por lo tanto se suman (con signo negativo). Lo anterior se resume en la Tabla 1.

Convenientemente, no utilizaremos en esta asignatura esta solución en tiempo finito. Nos concentraremos en la solución en tiempo infinito.

Tabla 1. Resumen LQT – Horizonte finito LTI

Solución del problema LQT – Horizonte Finito	
Modelo de la planta	$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ $y = Cx$
Valores deseados de *y* y *x*	$x_{des} = Ly_{des}$ $L = C^T(CC^T)^{-1}$
Índice de desempeño	$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T Ru + (y - y_{des})^T Q_2 (y - y_{des})\, dt$ que se puede escribir como $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T Ru + (x - x_{des})^T Q (x - x_{des})\, dt$ $Q = C^T Q_2 C$
Condiciones iniciales (conocidas)	$x(t_0) = x_0$
Tiempo final (conocido)	t_f
Ecuación diferencial de Riccati	$\frac{dP}{dt} = -(PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)$ $P(t_f) = 0$
Ecuación de Feedforward	$-\frac{db}{dt} = (A - BR^{-1}B^T P)^T b - QLy_{des}$ $b(t_f) = 0$
Ganancia de realimentación	$K = R^{-1}B^T P(t)$
Entrada de adelanto	$K_{ff} = R^{-1}B^T b(t)$
Ecuación de control	$u(t) = -Kx(t) - K_{ff}$

II. Seguimiento Lineal Cuadrático de horizonte infinito

La solución del problema de horizonte infinito requiere suponer que el límite de integración del problema anterior tiende a infinito. Esto simplifica considerablemente el cálculo. En particular, la ecuación diferencial de Riccati se convierte en una ecuación algebraica, P se hace constante, pero b no se hace constante (ya que y_{des} no necesariamente es constante y depende del tiempo). En el caso que y_{des} sea una función constante (como un escalón), entonces puede calcularse b como

$$b = ((A - BK)^T)^{-1} Q L y_{des} \tag{10}$$

Que también es constante. Si y_{des} varia lentamente, la solución (10) también es válida. Luego, la solución del problema de seguimiento lineal cuadrático está descrito por el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} u^T R u + (y - y_{des})^T Q_2 (y - y_{des})\, dt \tag{11}$$

la referencia o señal deseada:

$$x_{des} = L y_{des} \tag{12}$$

donde

$$L = C^T (C\, C^T)^{-1} \tag{13}$$

$$Q = C^T Q_2 C \tag{14}$$

Y la señal de control está dada por

$$u = -R^{-1} B^T (Px + b) \tag{15}$$

y P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$0 = PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q \tag{16}$$

y b puede calcularse como

$$b = ((A - BK)^T)^{-1} Q L y_{des} \tag{17}$$

Con lo anterior, puede sustituirse (17) en (15) y queda claro que

$$u = -R^{-1} B^T P x - R^{-1} B^T ((A - BK)^T)^{-1} Q L y_{des} \tag{18}$$

y esto puede escribirse como una ganancia de realimentación y una de adelanto

$$u = -Kx - K_{ff} y_{des} \tag{19}$$

En donde

$$K = R^{-1} B^T P \tag{20}$$

y

$$K_{ff} = R^{-1} B^T ((A - BK)^T)^{-1} Q L \tag{21}$$

En esta solución, el único problema es el cálculo de P ya que proviene de la ecuación algebraica de Riccati, que hemos comentado que es una ecuación matricial no lineal. Sin embargo, es muy sencillo de implementarse en el software especializado. Una vez calculada la solución, todos los términos involucrados son constantes.
Puede observarse que no se suministra, como en las semanas anteriores, la ecuación de estados ni una fórmula para calcular el costo óptimo. La ecuación de estados puede escribirse, solo que es un poco más complicada que los casos anteriores. Para obtenerla, sustituya u(t) en la ecuación de estados por la ecuación de control, y sustituya luego K_{ff} y K. Respecto al costo óptimo, en realidad no es óptimo. Es infinito (en la mayoría de los casos). Esto se demuestra en (Anderson & Moore, 1989), por lo que uno no debe referirse a la solución del problema LQT de horizonte infinito como “control óptimo”. Véase que el problema viene de la forma que toma b y el impacto que esto tiene en el índice. No puede garantizarse que se eliminará el error de estado

estacionario y por lo tanto no siempre el índice de desempeño será finito. En el caso de horizonte finito, la solución presentada sí es optima ya que el funcional está acotado en los límites de integración. A pesar de que es incorrecto hablar de esta solución como control óptimo, seguiremos usando este nombre, reconociendo que es una convención que usamos para hablar de una solución de un problema obtenido de la extensión de uno de control óptimo verdadero.
Lo interesante del problema es que, aunque el índice no es minimizado, la solución es estable (ya que el problema LQR asociado, el de realimentación sí es óptimo) y una ganancia de adelanto, como estudiamos previamente en *estrategias de control avanzado de operaciones unitarias* no afecta la estabilidad de un lazo. Luego, los estados siguen una trayectoria estable en este problema.

Tabla 2. Resumen LQR – Horizonte infinito LTI

Solución del problema LQT – Horizonte infinito	
Modelo de la planta	$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ $y = Cx$ (A,B) controlable
Valores deseados de *y* y *x*	$x_{des} = Ly_{des}$ $L = C^T(CC^T)^{-1}$
Índice de desempeño	$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} u^T Ru + (y - y_{des})^T Q_2 (y - y_{des})\, dt$ que se puede escribir como $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} u^T Ru + (x - x_{des})^T Q (x - x_{des})\, dt$ $Q = C^T Q_2 C$
Condiciones iniciales (conocidas)	$x(t_0) = x_0$
Tiempo final (conocido)	∞
Ecuación Algebraica de Riccati	$0 = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q$
Ganancia de realimentación	$K = R^{-1}B^T P$
Ganancia de adelanto	$K_{ff} = R^{-1}B^T((A - BK)^T)^{-1}QL$
Ecuación de control	$u(t) = -Kx(t) - K_{ff}y_{des}$

Por último, es importante recordar las dimensiones involucradas en los elementos de este problema LQT de tiempo infinito. Esto se muestra en la Tabla 3

Tabla 3. Dimensiones de las matrices involucradas en el problema LQT

Matriz/Vector	Dimensión
A	$n \times n$
B	$n \times m$
C	$p \times n$
Q_2	$p \times p$
L	$n \times p$
Q	$n \times n$
R	$m \times m$
P	$n \times n$
b	$n \times p$
K	$m \times n$
K_{ff}	$m \times p$
x	$n \times 1$
y	$p \times 1$
u	$m \times 1$

Ejemplo 1. Problema de seguimiento lineal cuadrático

Obtenga el controlador LQT adecuado para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

según el índice

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} u^T 0.04u + (y - y_{des})^T 2(y - y_{des})\, dt$$

dondey_{des} es un escalón unitario. Suponga que las condiciones iniciales son 0.1 para cada estado. (Naidu, 2003)

Solución:

Usando Matlab tenemos que

```
A=[0 1;-2 -3]
B=[0;1]
C=[1 0]
R=0.004
Q2=2
L=C'/(C*C')
Q=C'*Q2*C
[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)
b=((A-B*K)')\Q*L
Kff=R\B'*b
```

Lo que da como resultados

```
A =
     0     1
    -2    -3
B =
     0
     1
C =
    1     0
R =
    0.0040
Q2 =
     2
L =
     1
     0
Q =
     2     0
     0     0
K =
   20.4499    4.0640
P =
    0.6103    0.0818
```

```
   0.0818    0.0163
E =
  -3.5320 + 3.1583i
  -3.5320 - 3.1583i
b =
   -0.6293
   -0.0891
Kff =

  -22.2718
```

En la Figura 3 se presenta el diagrama de bloques de la implementación del controlador de realimentación del vector de estados junto al controlador de adelanto requerido para este problema de seguimiento.

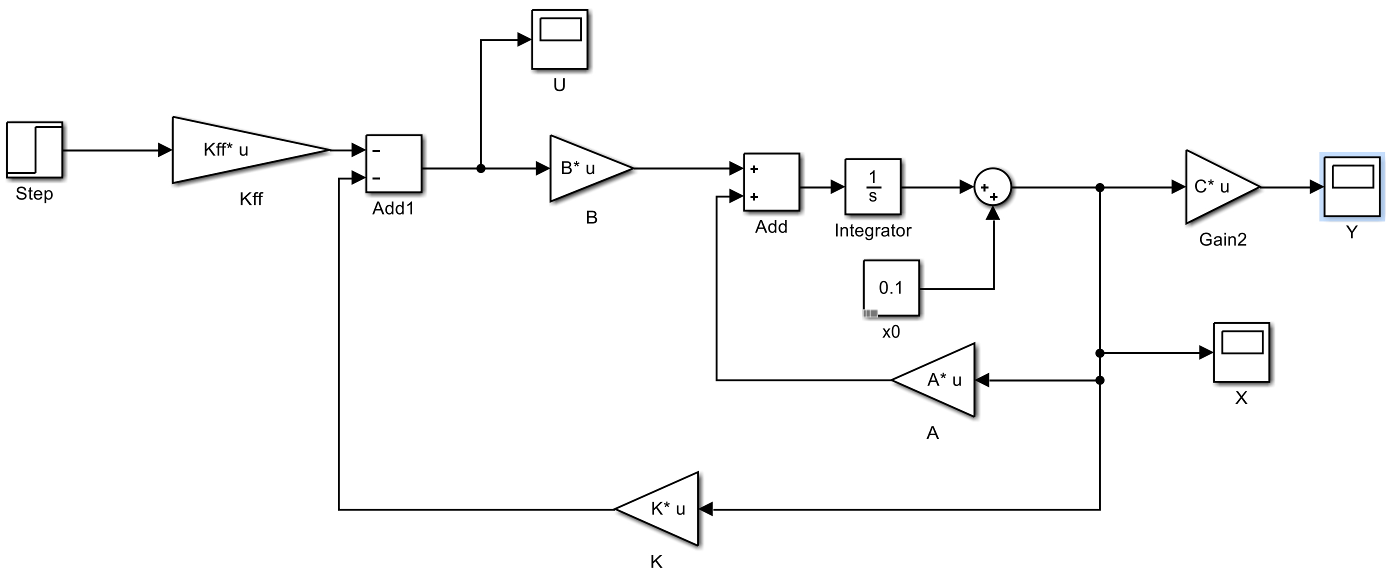

Figura 3. Diagrama de bloques del ejemplo 1

También se presentan las respuestas de la salida, los estados y la entrada en la Figura 4, Figura 5 y Figura 6 respectivamente. Véase que la salida alcanza el valor de 1 (aproximadamente) para el problema como el descrito. La salida corresponde al estado 1, por lo tanto, en la evolución de los estados, el estado 1 alcanza también este valor. El estado 2 regresa a cero ya que no forma parte de las salidas. Pudo haber alcanzado otro valor. La entrada, en definitiva, no vale 0 en el estado estacionario, ya que es necesario mantener una entrada diferente a cero para que el sistema funcione en otro punto de operación.

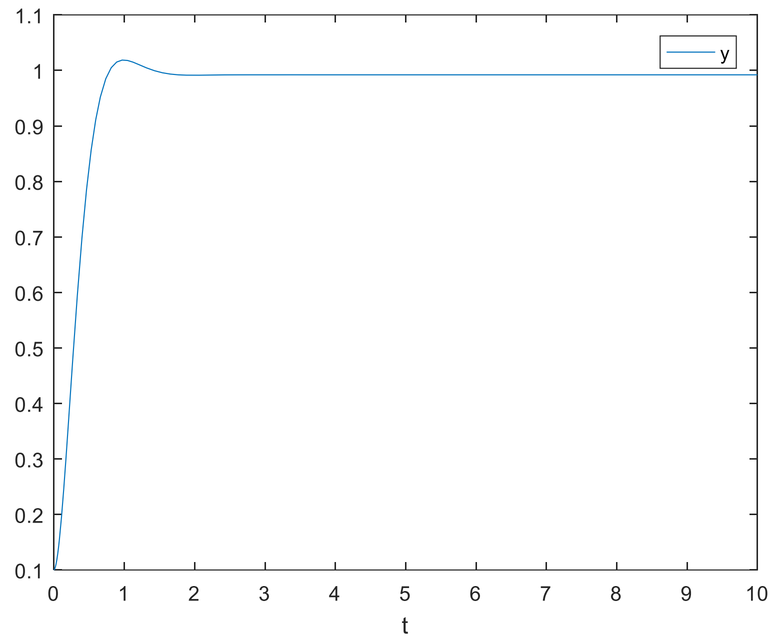

Figura 4. Salida en lazo cerrado del ejemplo 1

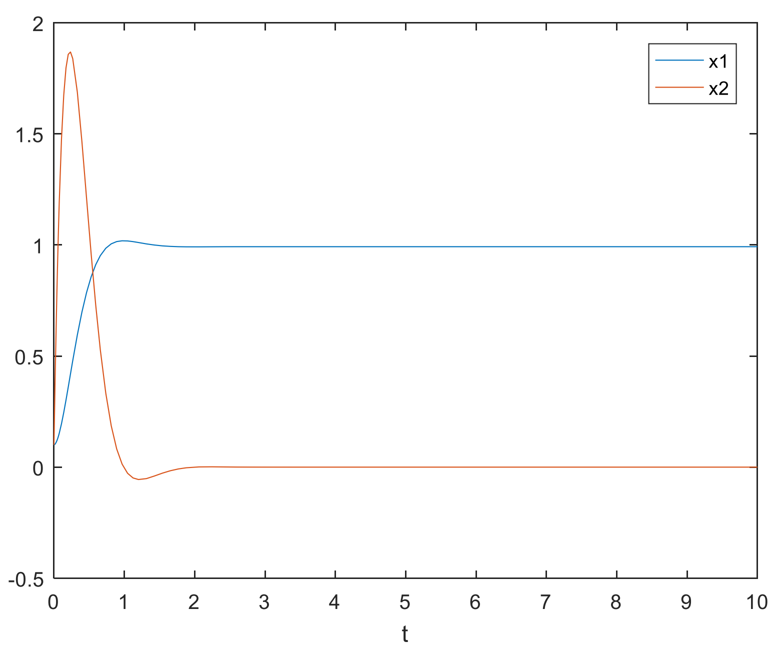

Figura 5. Evolución de los estados del ejemplo 1

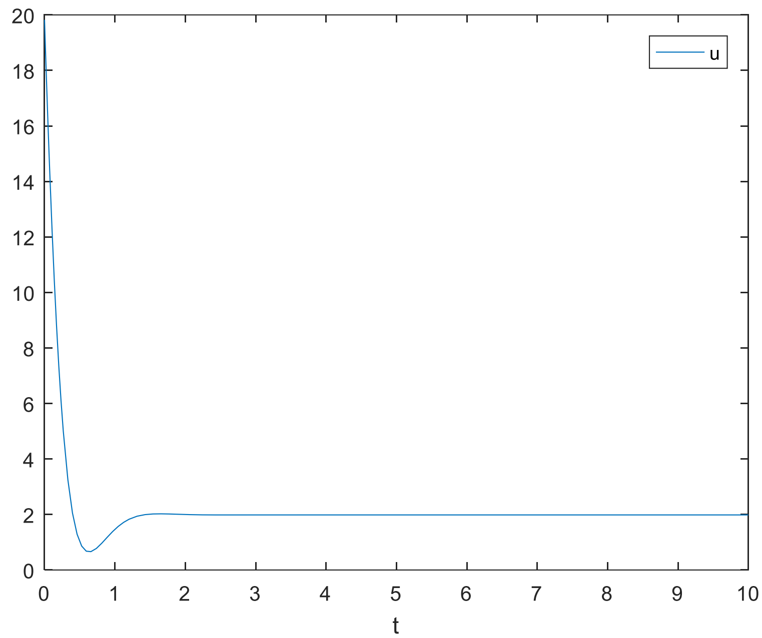

Figura 6. Evolución de la entrada del ejemplo 1

Seguramente hace falta un procedimiento para describir como hacer este cálculo. En este punto, el procedimiento puede ser propuesto por ti.

III. Resumen

Hemos visto como resolver el problema de seguimiento de una señal de referencia que varíe lentamente o sea constante para un problema de horizonte infinito, y la solución general para un problema de seguimiento de horizonte finito, que es válida para cualquier problema de control en general.

El procedimiento presentado aquí no contempla agregar nuevos estados al problema, sino trabajar con un controlador de adelanto (que se obtiene directamente de la formulación del problema). Existen otros acercamientos posibles para este mismo problema como la inserción de una acción integral. Este procedimiento fue estudiado en otras asignaturas y aunque es muy poderoso, no conduce a un resultado tan elegante como el presentado aquí. En libros de sistemas de control (como por ejemplo (Ogata, 2002)) se presenta un acercamiento para el diseño de sistemas de control de realimentación en donde se incluye una acción integral al lazo, se amplia el sistema y se redefinen las matrices de estado del problema. Estas matrices redefinidas pueden usarse para el diseño de controladores como el descrito aquí, que no conduce a un controlador de adelanto.

IV. Referencias

Anderson, B. D., & Moore, J. B. (1989). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.

Naidu, D. S. (2003). *Optimal Control Systems.* Boca Raton: CRC Press LLC.

Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering.* Upper Saddle River: Prentice - Hall, Inc.

Smith, C. A., & Corripio, A. B. (2000). *Control Automático de Procesos - Teoría y práctica.* México: Editorial Limusa, S.A de C.V.