MÁSTER UNIVERSITARIO EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CURSO: CÁLCULO Y MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA. PROCESOS DE DIFUSIÓN

Primera relación de ejercicios propuestos

Algunos aspectos sobre la teoría general de procesos estocásticos. Procesos Gaussianos

1. Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ variables aleatorias tales que $\mathrm{E}[X_i] = \mathrm{E}[Y_i] = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Var}[X_i] = \mathrm{Var}[Y_i] = \sigma_i^2 < \infty$, $\mathrm{E}[X_i X_j] = \mathrm{E}[Y_i Y_j] = \mathrm{E}[X_i Y_j] = 0$, $\forall i \neq j$. Sea el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ definido por

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} [X_j \cos(\lambda_j t) + Y_j \operatorname{sen}(\lambda_j t)] \quad , \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

   - Calcular las funciones media y covarianza.
   - Proporcionar una condición suficiente sobre las variables X_i e Y_i para que el proceso sea débilmente estacionario.

2. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal de media cero y varianza uno. Sea $\{Z(t); t > 0\}$ el proceso estocástico definido por $Z(t) = (X_1 + X_2)t$.

   - Calcular las funciones media y covarianza.
   - Calcular las funciones característica, de cumulantes y la de momentos de orden k, $k \geq 1$.
     Sugerencia: Para la función de momentos, utilizar que dada una distribución normal $N_1[\mu; \sigma^2]$, entonces

$$\boldsymbol{\mu_k = \mathrm{E}[(X - \mu)^k] = \frac{\left[1 + (-1)^k\right] \sigma^k 2^{k/2}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \ k \in \mathbb{N}.}$$

   - Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
   - ¿Existen en este caso las densidades de transición?
   - Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
   - Estudiar si el proceso es de Markov.
   - Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

3. Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. Demostrar que para $t_1 < t_2 < t_3$ se verifica

$$\mathrm{E}[W(t_2) | W(t_1) = x_1, W(t_3) = x_3] = x_1 + \left(\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}\right)(t_2 - t_1).$$

4. Sea $\{B(t) : t \in [0, 1]\}$ un proceso puente Browniano y definamos $Y(t) = (1 + t) B\left(\frac{t}{1+t}\right)$, $t \geq 0$. Demostrar que $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Wiener.

5. Sean $m(t), h_1(t), h_2(t)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$. Supongamos que $h_i(t)$, $i = 1, 2$ son funciones positivas y $h_2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso gaussiano con media $m(t)$ y función de covarianza dada por $C_X(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$, donde $s \vee t = \text{Max}(s,t)$ y $s \wedge t = \text{Min}(s,t)$. Demostrar que ese proceso puede escribirse en la forma $X(t) = m(t) + h_2(t)W(r(t))$ donde $r(t) = h_1(t)/h_2(t)$ y $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener estándar. ¿Es de Markov? Aplicar este resultado al proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

   Sugerencias:

   - Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, verificar que la función $r(t)$ es creciente.
   - Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck usar que

$$s \wedge t = \frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2} \quad \text{y} \quad s \vee t = \frac{s+t}{2} + \frac{|t-s|}{2}.$$