Ejercicios Propuestos

Juan Rubio Cobeta

January 16, 2026

Contents

1 Apartado a)

Queremos estimar la tasa de desempleo R en una región, definida como el cociente entre el total de personas desempleadas (Y) y el total de personas activas (X).

Para ello se selecciona la muestra mediante un muestreo por conglomerados en dos etapas:

Etapa 1 (PPT): 60 municipios (UPM) seleccionados con probabilidad proporcional a su tamaño.
Etapa 2 (MAS): 10 hogares por municipio (600 hogares en total).

Dividimos las 60 UPM en 4 grupos (15 municipios por grupo). Los datos obtenidos son los siguientes:

Grupo	Total inactivos	Total edad de trabajar
1	210	420
2	234	450
3	198	440
4	225	459

1) Estimar la tasa de desempleo R y su varianza mediante la técnica de los grupos aleatorios

1.1 Solución

Para estimar la tasa de desempleo R y su varianza mediante la técnica de los grupos aleatorios, consideramos cada uno de los $k = 4$ grupos como réplicas independientes del diseño.

1. Cálculo de las estimaciones por grupo ($\hat{R}_t$)

Calculamos la tasa estimada $\hat{R}_t = \frac{Y_t}{X_t}$ para cada grupo t, donde Y_t es el total de inactivos y X_t es el total en edad de trabajar:

- **Grupo 1:**
$$\hat{R}_1 = \frac{210}{420} = 0.5000$$
- **Grupo 2:**
$$\hat{R}_2 = \frac{234}{450} = 0.5200$$
- **Grupo 3:**
$$\hat{R}_3 = \frac{198}{440} = 0.4500$$
- **Grupo 4:**
$$\hat{R}_4 = \frac{225}{459} \approx 0.4902$$

2. Estimación de la tasa global ($\hat{R}_{gi}$)

El estimador puntual mediante grupos aleatorios es el promedio simple de las estimaciones de cada grupo:

$$\hat{R}_{gi} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} \hat{R}_t$$

Sustituyendo los valores obtenidos ($k = 4$):

$$\hat{R}_{gi} = \frac{0.5000 + 0.5200 + 0.4500 + 0.4902}{4} = \frac{1.9602}{4} = 0.49005$$

Por tanto, la tasa de desempleo estimada es del 49,00%.

3. Estimación de la varianza ($\hat{V}(\hat{R}_{gi})$)

La fórmula para la varianza estimada del estimador global mediante grupos aleatorios es:

$$\hat{V}(\hat{R}_{gi}) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{t=1}^{k} (\hat{R}_t - \hat{R}_{gi})^2$$

Calculamos primero la suma de cuadrados de las desviaciones respecto a la media global (0.49005):

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{4} (\hat{R}_t - \hat{R}_{gi})^2 &= (0.5000 - 0.49005)^2 + (0.5200 - 0.49005)^2 \\
&\quad + (0.4500 - 0.49005)^2 + (0.4902 - 0.49005)^2 \\
&= (0.00995)^2 + (0.02995)^2 + (-0.04005)^2 + (0.00015)^2 \\
&\approx 0.000099 + 0.000897 + 0.001604 + 0.000000 \\
&= 0.002600
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos el factor $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{4(3)} = \frac{1}{12}$:

$$\hat{V}(\hat{R}_{gi}) = \frac{1}{12} \cdot 0.002600 \approx 0.000217$$

Resumen de resultados:

- Estimación de la tasa de desempleo: $\hat{R} = 49.00\%$
- Varianza estimada: $\hat{V}(\hat{R}) = 0.000217$

2 Apartado b)

Un establecimiento recreativo cobra la admisión por automóvil en vez de por persona, y un ejecutivo de la empresa quiere estimar el número medio de personas por automóvil para un día particular. Sabe por experiencia que ese día entrarán alrededor de 400 automóviles y quiere muestrear 80 de ellos. Para obtener un estimador de la varianza utiliza un muestreo sistemático replicado con 10 muestras de 8 vehículos cada una. Los datos obtenidos se muestran en la tabla siguiente:

m. 1	2	3	5	1	4	5	3	6
m. 2	5	2	3	2	1	1	2	3
m. 3	3	3	1	5	3	4	2	2
m. 4	2	2	1	5	5	2	3	1
m. 5	3	4	2	3	1	1	5	2
m. 6	2	4	5	1	1	3	2	3
m. 7	3	2	2	3	1	1	4	2
m. 8	4	3	2	4	4	2	1	1
m. 9	2	1	2	4	2	2	4	3
m. 10	4	5	2	2	1	4	2	3

Estimar el número medio de personas por automóvil mediante un intervalo de confianza al 95% usando el método de los grupos aleatorios. Establecer el error de muestreo.

2.1 Solución

Para estimar el número medio de personas por automóvil ($\bar{X}$) y su varianza, utilizamos la técnica de los grupos aleatorios con $k = 10$ muestras sistemáticas replicadas (grupos), cada una de tamaño $m = 8$.

1. Cálculo de las estimaciones por grupo ($\bar{x}_t$)

Calculamos la media muestral $\bar{x}_t = \frac{1}{m}\sum x_{tj}$ para cada uno de los 10 grupos:

- **m.1:** $\bar{x}_1 = (2+3+5+1+4+5+3+6)/8 = 3.625$
- **m.2:** $\bar{x}_2 = (5+2+3+2+1+1+2+3)/8 = 2.375$
- **m.3:** $\bar{x}_3 = (3+3+1+5+3+4+2+2)/8 = 2.875$
- **m.4:** $\bar{x}_4 = (2+2+1+5+5+2+3+1)/8 = 2.625$
- **m.5:** $\bar{x}_5 = (3+4+2+3+1+1+5+2)/8 = 2.625$
- **m.6:** $\bar{x}_6 = (2+4+5+1+1+3+2+3)/8 = 2.625$
- **m.7:** $\bar{x}_7 = (3+2+2+3+1+1+4+2)/8 = 2.250$
- **m.8:** $\bar{x}_8 = (4+3+2+4+4+2+1+1)/8 = 2.625$
- **m.9:** $\bar{x}_9 = (2+1+2+4+2+2+4+3)/8 = 2.500$
- **m.10:** $\bar{x}_{10} = (4+5+2+2+1+4+2+3)/8 = 2.875$

2. Estimación de la media global ($\hat{\hat{X}}$)

El estimador puntual global es el promedio de las medias de los grupos:

$$\hat{\hat{X}} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} \bar{x}_t = \frac{27.000}{10} = 2.70$$

Se estima que el número medio de personas por automóvil es 2.70.

3. Estimación de la varianza ($\hat{V}(\hat{\hat{X}})$)

La varianza del estimador global mediante grupos aleatorios se calcula como:

$$\hat{V}(\hat{\hat{X}}) = \frac{1}{k(k-1)}\sum_{t=1}^{k}(\bar{x}_t - \hat{\hat{X}})^2$$

Primero obtenemos la suma de cuadrados de las desviaciones respecto a la media global (2.70):

$$\sum_{t=1}^{10}(\bar{x}_t - 2.70)^2 = (0.925)^2 + (-0.325)^2 + \cdots + (0.175)^2 = 1.2875$$

Aplicamos el factor $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{90}$:

$$\hat{V}(\hat{\hat{X}}) = \frac{1.2875}{90} \approx 0.014306$$

El error estándar estimado ($\widehat{SE}$) es:

$$\widehat{SE} = \sqrt{0.014306} \approx 0.1196$$

4. Intervalo de Confianza y Error de Muestreo

Para un nivel de confianza del 95%, utilizamos la distribución t-Student con $k - 1 = 9$ grados de libertad. El valor crítico es $t_{0.025,9} \approx 2.262$.

El error de muestreo (margen de error) es:

$$E = t \cdot \widehat{SE} = 2.262 \cdot 0.1196 \approx 0.2706$$

El intervalo de confianza es:

$$IC_{95\%} = 2.70 \pm 0.2706 = [2.429, 2.971]$$

Resumen de resultados:

- Estimación media: 2.70 personas/automóvil.
- Error de muestreo: ± 0.27 (al 95% de confianza).
- Intervalo: Entre 2.43 y 2.97 personas por automóvil.