

MÁSTER UNIVERSITARIO EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CURSO: CÁLCULO Y MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA. PROCESOS DE DIFUSIÓN

Cuarta relación de ejercicios propuestos

Tiempos de primer paso en procesos de difusión

1. Sea $\{X(t); t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = -x/t$, $A_2(x, t) = 1$, definido en $I = \mathbb{R}$.

- a) Verificar que este proceso es transformable al proceso Wiener estándar, encontrando la transformación del tipo

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) \quad y' = \bar{\Psi}(y, \tau)$$

$$t' = \Phi(t) \quad \tau' = \Phi(\tau).$$

y comprobar que su función de densidad de transición es

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{t}{\sqrt{2\pi(\frac{t^3-\tau^3}{3})}} \exp\left(-\frac{(xt-y\tau)^2}{2(\frac{t^3-\tau^3}{3})}\right).$$

- b) Si para el proceso Wiener estándar consideramos la barrera $S_W(t) = a + bt'$, verificar que las barreras $S_X(t)$, calculadas a partir de la transformación anterior, y para las cuales es posible obtener la densidad de tiempo de primer paso de $X(t)$ a través de ellas son de la forma

$$S_X(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Comprobar que la densidad de tiempo de primer paso de $X(t)$ a través de $S_X(t)$ es

$$g(S_X(t), t|x_0, t_0) = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3})}} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0t_0]^2}{2(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3})}\right), \quad x_0 \neq \frac{A}{t_0} + Bt_0^2.$$

Indicación: consultar el ejemplo 4.4.1 y seguir la misma metodología de trabajo.

- c) Para el proceso $X(t)$, escribir la forma que adopta el núcleo de la ecuación integral de Volterra que verifica la densidad de tiempo de primer paso a través de una barrera $S(t)$.
- d) A partir del apartado anterior, comprobar que las barreras para las cuales hay solución explícita para la ecuación integral, sin tener que resolverla, son del tipo

$$S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Para dichas barreras, escribir la forma explícita que adopta la densidad del tiempo de primer paso para este proceso. Comprobar que se llega al mismo resultado que en el apartado b) anterior.

2. El proceso del ejemplo anterior es un caso particular del proceso *Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos*, el cual fue considerado en el tema 3 (ver apuntes) de forma general y con un caso particular (en el caso del ejercicio anterior se ha considerado $g(t) = 1/t$).

- a) Para el proceso en general, con g una función continua, calcular la expresión del núcleo de la ecuación integral de Volterra para la densidad de tiempo de primer paso a través de una barrera $S(t)$ derivable y comprobar que la expresión es

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) = & \frac{1}{2} f(S(t, t | y, \tau)) \left[S'(t) + S(t) \left(g(t) - \frac{\exp \left(2 \int_{\tau}^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_{\tau}^t \exp \left(2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right) + \right. \\ & \left. + y \frac{\exp \left(\int_{\tau}^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_{\tau}^t \exp \left(2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right] \end{aligned}$$

- b) A partir del apartado anterior, comprobar que las barreras para las cuales hay solución explícita para la ecuación integral sin tener que resolverla son el tipo

$$S(t) = \exp \left(- \int g(t) dt \right) \left[A + B \int \exp \left(2 \int g(t) dt \right) dt \right]$$

Para dichas barreras, escribir la forma explícita que adopta la densidad del tiempo de primer paso para este proceso. Comprobar que cuando $h(t) = 1/t$, se llega a las mismas barreras obtenidas en el ejercicio anterior.

3. Si consideramos el proceso del ejercicio 1:

- a) Comprobar que la función $k(x, t) = \alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t^3}{6} + xt \right] \right)$ verifica la condición 4.33 del teorema 4.4.1, por lo que puede construirse un proceso de difusión $Y(t)$ con momentos infinitesimales calculados a partir de 4.31 y 4.32 y con función de densidad calculada a partir de 4.26. Comprobar que dichos momentos son

$$A_1(x, t) = - \left[\frac{x}{t} + \frac{\beta t \exp \left(- \left[\frac{t^3}{6} + xt \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t^3}{6} + xt \right] \right)} \right] \quad A_2(x, t) = 1,$$

mientras que la función de densidad de transición para $Y(t)$ es

$$f_Y(x, t | x_0, t_0) = \frac{t}{\sqrt{2\pi(\frac{t^3-t_0^3}{3})}} \frac{\alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t^3}{6} + xt \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0 \right] \right)} \exp \left(- \frac{(xt - x_0 t_0)^2}{2(\frac{t^3-t_0^3}{3})} \right).$$

- b) Comprobar que para este nuevo proceso, la densidad de tiempo de primer paso a través de la barrera

$$S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

es

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{3t^2 |A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{(t^3 - t_0^3) \sqrt{2\pi(\frac{t^3-t_0^3}{3})}} \frac{\alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t^3}{6} + Bt^3 + A \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left(- \left[\frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0 \right] \right)} \exp \left(- \frac{[A + Bt^3 - x_0 t_0]^2}{2(\frac{t^3-t_0^3}{3})} \right).$$