Índice general

Tema 2

Procesos de difusión unidimensionales

2.1. Ecuaciones cinéticas para procesos markovianos y no markovianos

Sea $\{X(t) : t \in T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo con espacio de estados continuo. Supongamos que existen las funciones de densidad de transición, $f(x,t|y,s)$, las cuales verifican (al igual que las distribuciones de transición) la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$f(x,t|y,s) = \int f(x,t|z,\tau)f(z,\tau|y,s)\,dz, \tag{2.1}$$

donde $s < \tau < t$ son instantes arbitrarios en los cuales se verifica $X(t) = x$, $X(\tau) = z$, $X(s) = y$, y donde la integral se extiende al espacio de estados asociado al proceso.

Esta ecuación puede ser vista como una relación de compatibilidad verificada por cualquier proceso de Markov, pero no es suficiente para determinar las densidades de probabilidad de transición. La idea que desarrollamos a continuación es obtener una forma diferencial de la ecuación anterior cuya *posible solución* nos pudiera proporcionar tal densidad. Para ello tomemos en la ecuación (2.1) los instantes de tiempo $s < t < t + \Delta t$ con $X(s) = y$, $X(t) = z$, $X(t + \Delta t) = x$. Con ello

$$f(x,t+\Delta t|y,s) = \int f(x,t+\Delta t|z,t)f(z,t|y,s)\,dz,$$

y estando $f(x,t|y,s)$ de ambos miembros se tiene

$$f(x,t+\Delta t|y,s) - f(x,t|y,s) = \int f(x,t+\Delta t|z,t)f(z,t|y,s)dz - f(x,t|y,s). \tag{2.2}$$

Sea ahora R una función que verifique que tienda a cero, junto con sus derivadas de cualquier orden, de forma suficientemente rápida en los límites del espacio de estados considerado [1]. Multiplicando ambos miembros de (2.2) por $\dfrac{R(x)}{\Delta t}$ e integrando sobre el espacio de estados se verifica

$$\begin{aligned}\int R(x)\frac{f(x,t+\Delta t|y,s) - f(x,t|y,s)}{\Delta t}\,dx = \frac{1}{\Delta t}\int R(x)\left(\int f(x,t+\Delta t|z,t)f(z,t|y,s)\,dz\right)dx-\\ -\frac{1}{\Delta t}\int R(x)f(x,t|y,s)\,dx.\end{aligned} \tag{2.3}$$

[1] Una función de tal tipo se llama de tipo Schwartz. Más concretamente, h es una función de tipo Schwartz si es infinitamente derivable y, además, $\forall k,m \in \mathbb{N}$ verifica $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|^k h^{m)}(x) = 0$. Una cuestión fundamental sobre estas funciones es que se puede demostrar que el espacio formado por ellas es denso dentro del espacio de funciones continuas y acotadas g tales que $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) \longrightarrow 0$.

Ahora consideramos el desarrollo en serie de Taylor de la función R en un entorno de z, suponemos que existe la derivada de $f(x,t|y,s)$ respecto a t (que supondremos continua), sustituimos en el miembro derecho de (2.3) y tomamos límites cuando $\Delta t \to 0$. De esta forma se tendrá

$$\begin{aligned}
\int R(x)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}\,dx = &\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int\left[R(z)+\sum_{n=1}^{\infty}R^{n)}(z)\frac{(x-z)^n}{n!}\right]\left(\int f(x,t+\Delta t|z,t)f(z,t|y,s)\,dz\right)dx-\right.\\
&\left.-\frac{1}{\Delta t}\int R(x)f(x,t|y,s)\,dx\right\} =\\
=&\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int R(z)f(z,t|y,s)\left(\int f(x,t+\Delta t|z,t)dx\right)dz\right\}+\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int R^{n)}(z)f(z,t|y,s)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (x-z)^n f(x,t+\Delta t|z,t)\,dx\right)dz-\\
&-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int R(x)f(x,t|y,s)\,dx =\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int R^{n)}(z)f(z,t|y,s)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (x-z)^n f(x,t+\Delta t|z,t)\,dx\right)dz.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que existen todos los momentos de los incrementos condicionados

$$\mathrm{E}\left[(X(t+\Delta t)-X(t))^n|X(t)=z\right]=\int (x-z)^n f(x,t+\Delta t|z,t)\,dx,$$

así como los límites de dichos momentos cuando Δt tienda a cero. Llamando $A_n(z,t)$ a esos límites, la expresión anterior queda en la forma

$$\int R(x)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int R^{n)}(z)f(z,t|y,s)A_n(z,t)\,dz.$$

Ahora bien, supuesto que la función $A_n(z,t)f(z,t|y,s)$ es infinitamente derivable con derivadas continuas y acotadas, si integramos por partes en el miembro derecho de la expresión anterior (y si identificamos $z=x$), se tiene

$$\int R^{n)}(z)f(z,t|y,s)A_n(z,t)\,dz=(-1)^n\int R(x)\frac{\partial^n\left[A_n(x,t)f(x,t|y,s)\right]}{\partial x^n}\,dx$$

por lo que

$$\int R(x)\left\{\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n\left[A_n(x,t)f(x,t|y,s)\right]}{\partial x^n}\,dx\right\}=0$$

y dada la arbitrariedad de la función R, se concluye [2]

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n\left[A_n(x,t)f(x,t|y,s)\right]}{\partial x^n}\tag{2.4}$$

en casi todo punto y, puesto que las derivadas son continuas, en todo punto. La ecuación obtenida es la denominada *Ecuación Cinética Adelantada*.

[2] Realmente estamos usando el argumento de la densidad del espacio de las funciones de Schwarz en el de funciones continuas y acotadas que tiendan a cero en $\pm\infty$.

Nota 2.1.1. *Las funciones $A_n(x,t)$ son conocidas como los momentos infinitesimales del proceso. Puesto que*

$$\begin{aligned} A_n(x,t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\int (y-x)^n f(y,t+\Delta t|x,t)\,dy = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{E}\left[(X(t+\Delta t)-X(t))^n|X(t)=x\right] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{E}\left[(\Delta X(t))^n|X(t)=x\right], \end{aligned}$$

en particular, para un intervalo de tiempo pequeño Δt, se tiene

$$\mathrm{E}\left[\Delta X(t))|X(t)=x\right] \approx A_1(x,t)\Delta t$$

así como

$$\mathrm{E}\left[(\Delta X(t)))^2|X(t)=x\right] \approx A_2(x,t)\Delta t,$$

por lo que

$$\mathrm{Var}\left[\Delta X(t)|X(t)=x\right] \approx A_2(x,t)\Delta t - \left[A_1(x,t)\right]^2 (\Delta t)^2$$

y con ello

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{Var}\left[\Delta X(t)|X(t)=x\right]}{\Delta t} = A_2(x,t).$$

Así pues, es habitual llamar a $A_1(x,t)$ la media infinitesimal (o drift*) del proceso y a $A_2(x,t)$ la varianza infinitesimal. Notemos que los momentos que estamos considerando son los momentos de los incrementos condicionados del proceso. Asimismo, si el proceso es homogéneo, entonces sus densidades de transición sólo dependen de la diferencia entre el instante presente y el inicial, o sea, $f(y,t+\Delta t|x,t)=f(y,\Delta t|x,0)$, por lo que los momentos infinitesimales no dependen del tiempo.*

En el desarrollo anterior podemos cambiar los papeles de las variables involucradas en el mismo. Observemos que en la ecuación (2.4) se han considerado las derivadas de la densidad de transición respecto del instante presente t y el estado presente x, mientras que s e y funcionan como parámetros. Podemos intercambiar los papeles de esas variables para obtener otra forma diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Para ello consideramos los instantes de tiempo $s-\Delta s < s < t$, en los cuales se verifica $X(s-\Delta s)=y$, $X(s)=z$ y $X(t)=x$.

Con ello la ecuación de Chapman-Kolmogorov queda en la forma

$$f(x,t|y,s-\Delta s) = \int f(x,t|z,s)f(z,s|y,s-\Delta s)\,dz.$$

Ahora bien

$$f(x,t|y,s) = \int f(x,t|y,s)f(z,s|y,s-\Delta s)\,dz,$$

por lo que

$$f(x,t|y,s-\Delta s) - f(x,t|y,s) = \int f(z,s|y,s-\Delta s)\left[f(x,t|z,s)-f(x,t|y,s)\right]\,dz.$$

Desarrollando $f(x,t|z,s)$ (como función de z) en un entorno de y se tendrá

$$f(x,t|y,s-\Delta s) - f(x,t|y,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x,t|y,s)}{\partial y^n}\int f(z,s|y,s-\Delta s)(z-y)^n\,dz.$$

Por último, dividiendo en la expresión anterior por $-\Delta s$ y tomando límite cuando Δs tiende a cero, se concluye (supuesto que todas las operaciones se puedan realizar) que

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(y,s)}{n!} \frac{\partial^n f(x,t|y,s)}{\partial y^n} \tag{2.5}$$

que constituye la llamada *Ecuación Cinética Atrasada.*

Nota 2.1.2. *Observemos que en la ecuación cinética adelantada (2.4) las variables iniciales están fijas mientras que en la atrasada (2.5) se describe el desarrollo del proceso que conduce a un estado asignado en el instante presente.*

2.2. Teorema de Pawula. Ecuaciones de Fokker-Planck y Kolmogorov

La cuestión que nos planteamos ahora es la siguiente: ¿qué se puede hacer con las ecuaciones cinéticas obtenidas anteriormente? La realidad es que no se puede hacer mucho dada la presencia de derivadas de alto orden con respecto a la variable de estado.

La situación sería distinta si las ecuaciones presentaran un número finito, y a ser posible pequeño, de términos. Ello puede verificarse si, por ejemplo, los momentos infinitesimales fueran cero a partir de un cierto n en adelante. De esta manera estaríamos frente a ecuaciones diferenciales parciales que se podrían resolver, bien por métodos analíticos o por métodos numéricos.

El siguiente resultado, debido a Pawula en 1967, nos proporciona una condición suficiente para que se verifique el comentario que acabamos de realizar, y es válido tanto para procesos markovianos como para no markovianos, si bien nosotros vamos a considerar sólo procesos de Markov.

Teorema 2.2.1. *(de Pawula). Si $A_n(x,t) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, y si $A_n(x,t) = 0$ para algún n par, entonces $A_n(x,t) = 0 \ \forall n \geq 3$.*

Así pues, bajo las hipótesis de este teorema, las ecuaciones cinéticas quedan en la forma

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x,t)f(x,t|y,s)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_2(x,t)f(x,t|y,s)\right] \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} + A_1(y,s)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial y} + \frac{A_2(y,s)}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0 \tag{2.7}$$

ecuaciones que son, respectivamente, las denominadas ecuaciones adelantada (o de Fokker-Planck) y atrasada (o de Kolmogorov).

2.3. Definición de proceso de difusión

En primer lugar vamos a dar la definición de proceso de difusión en sentido amplio. Notemos por $F(x,t|y,s)$ a la función de distribución de transición. Entonces

Definición 2.3.1. *Un proceso de Markov $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ en tiempo continuo y con espacio de estados continuo se dice que es un proceso de difusión si tiene trayectorias continuas casi seguro y $\forall \epsilon > 0$ y $\forall x$ se verifica*

1. $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|>\epsilon} F(dy, t+h|x,t) = 0.$

2. Existen funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ tales que

a) $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq\epsilon}(y-x)F(dy,t+h|x,t) = A_1(x,t)$.

b) $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq\epsilon}(y-x)^2F(dy,t+h|x,t) = A_2(x,t)$.

Nota 2.3.1. *La primera de las condiciones significa que grandes cambios en un corto espacio de tiempo son poco probables. Además esta condición implica la continuidad en probabilidad, por lo que es una condición más fuerte que ésta. En efecto*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|X(t+h)-X(t)|>\epsilon\right) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{P}\left(|X(t+h)-X(t)|>\epsilon|X(t)\right)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|y-x|>\epsilon}F(dy,t+h|x,t)\right)F(dx,t)\end{aligned}$$

por lo que basta con aplicar el teorema de la convergencia dominada ya que $\displaystyle\int_{|y-x|>\epsilon}F(dy,t+h|x,t)$ *está acotada y converge a cero* [3].

Nota 2.3.2. *Observemos que las funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ no se corresponden exactamente con los momentos infinitesimales anteriormente introducidos sino que son los momentos truncados de los incrementos condicionados. La razón de su empleo en esta definición radica en que siempre existen mientras que para los otros no se tiene asegurada siempre su existencia. Posteriormente veremos que la denominación de momentos infinitesimales se puede mantener aún en el caso de ser truncados.*

Nota 2.3.3. *En la definición de proceso de difusión aparecen sólo los dos primeros momentos truncados. Ello no es casualidad ya que, en general, los de orden superior son nulos. En efecto, sea $r>2$, $\epsilon>0$, $\theta>0$, $t\in[t_0,T]$ y x perteneciente al espacio de estados. Entonces, para cualquier $\delta>0$ se verifica*

$$\begin{aligned}&\int_{|y-x|\leq\epsilon}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) = \\ &\quad= \int_{|y-x|\leq\epsilon,|y-x|\leq\delta}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) + \int_{|y-x|\leq\epsilon,|y-x|>\delta}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) \leq \\ &\quad\leq \int_{|y-x|\leq\delta}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) + \int_{|y-x|\leq\epsilon,|y-x|>\delta}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) \leq \\ &\quad\leq \int_{|y-x|\leq\delta}|y-x|^{r-2+2}F(dy,t+h|x,t) + \epsilon^r\int_{|y-x|>\delta}F(dy,t+h|x,t) \leq \\ &\quad\leq \delta^{r-2}\int_{|y-x|\leq\delta}|y-x|^2F(dy,t+h|x,t) + \epsilon^r\int_{|y-x|>\delta}F(dy,t+h|x,t) = \\ &\quad= \delta^{r-2}\left[A_2(x,t)h+o(h)\right]+\epsilon^r o(h)\end{aligned}$$

Ahora bastará con tomar, $\delta = \left(\dfrac{\theta}{A_2(x,t)}\right)^{\frac{1}{r-2}}$, *($A_2(x,t)\neq 0$). Con ello,*

$$\int_{|y-x|\leq\epsilon}|y-x|^rF(dy,t+h|x,t) \leq \theta h + \frac{\theta}{A_2(x,t)}o(h)+\epsilon^r o(h)$$

[3]Si $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

y por lo tanto

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|\leq \epsilon} |y-x|)^r F(dy, t+h|x,t) < \theta$$

siendo cierta esa expresión para cualquier $\theta > 0$. Por lo tanto

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|\leq \epsilon} (y-x)^r F(dy, t+h|x,t) = 0.$$

A partir de la definición anterior puede ser complicado, en determinadas condiciones, comprobar que un determinado proceso sea de difusión. El siguiente resultado proporciona unas condiciones suficientes para que un proceso sea de difusión.

Teorema 2.3.1. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados continuo y con trayectorias continuas casi seguro y vericando las condiciones*

1. *existe $\delta > 0$ tal que $\forall x$ $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int |y-x|^{2+\delta} F(dy, t+h|x,t) = 0$,*
2. *existen funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ tales que $\forall x$*
   a) $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x) F(dy, t+h|x,t) = A_1(x,t)$,
   b) $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^2 F(dy, t+h|x,t) = A_2(x,t)$.

Entonces $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso de difusión.

Nota 2.3.4. *Si asumimos las condiciones del teorema anterior para verificar que un proceso sea una difusión, no podemos asegurar que, de existir, los momentos infinitesimales de orden superior a dos sean nulos (como sí ocurre con los momentos infinitesimales truncados). Lo que sí es cierto es que, del hecho anterior, los momentos infinitesimales de orden 1 y 2 (de existir y con la condición anterior) coinciden con los truncados. De esta forma se justifican los nombres de media y varianza infinitesimal para las funciones A_1 y A_2 en el sentido de ser la media y la varianza, por unidad de tiempo, del incremento condicionado (en caso contrario deberíamos llamarlos media y varianza infinitesimal truncados).*

2.4. Ecuaciones de Kolmogorov y de Fokker-Planck en los procesos de difusión

A continuación mostraremos que los procesos de difusión verifican las ecuaciones de Kolmogorov.

Teorema 2.4.1. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Supongamos que para cada (x,t), $F(x,t|y,s)$ es dos veces derivable respecto de y, siendo dichas derivadas continuas y acotadas. Entonces $F(x,t|y,s)$ es derivable respecto a s y verifica la ecuación atrasada de Kolmogorov*

$$\frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial s} + A_1(y,s)\frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial y} + \frac{A_2(y,s)}{2}\frac{\partial^2 F(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\displaystyle\lim_{s\uparrow t} F(x,t|y,s) = \lim_{s\uparrow t} \mathrm{P}\left[X(t) \leq x | X(s) = y\right] = \begin{cases} 1 & si\ x \geq y \\ 0 & si\ x < y \end{cases}$.

Nota 2.4.1. *Caso de existir las densidades de transición, se verifica la ecuación atrasada para ellas y con condición inicial*

$$\lim_{s\uparrow t} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$$

ya que la función delta de Dirac (ver apéndice A) es la derivada *de la función de distribución* $F(x,t|y,t)$.

A continuación mostramos que los procesos de difusión verifican la ecuación adelantada, para lo cual exigiremos la existencia de las densidades de transición.

Teorema 2.4.2. *Sea* $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ *un proceso de difusión. Supongamos que existen la derivadas* $\dfrac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial [A_1(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial^2 [A_2(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}$ *y son continuas. Entonces* $f(x,t|y,s)$ *verifica la ecuación adelantada de Kolmogorov o ecuación de Fokker-Planck*

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 [A_2(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^2} \quad , \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{t\downarrow s} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$.

Ejemplo 2.4.1. *El Proceso Wiener es una difusión con momentos infinitesimales* $A_1(x,t) = 0$ *y* $A_2(x,t) = 1$ *(ver relación de ejercicios resuelta). Por lo tanto sus densidades de transición verifican las ecuaciones diferenciales atrasada*

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \lim_{s\to t} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$$

y adelantada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{t\to s} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$$

Notemos que la ecuación adelantada es la denominada ecuación del calor.

Observemos que en la obtención de las ecuaciones diferenciales anteriores ha hecho falta hacer algunas suposiciones sobre las probabilidades de transición. Pero, si no las conocemos, ¿cómo podemos realizar dichas suposiciones? Parece lógico que la respuesta a esta pregunta venga dada en términos de los momentos infinitesimales ya que estos determinan al proceso de difusión. En concreto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.3. *Supongamos que los momentos infinitesimales* A_1 *y* A_2 *verifican, para todo valor* x *del espacio de estados y* $\forall t \in [t_0, T]$, *las siguientes condiciones:*

1. *Existen unas constantes positivas* σ_0 *y* k *tales que*
   - $|A_1(x,t)| \leq k\sqrt{1+x^2}$.
   - $0 < \sigma_0 \leq \sqrt{A_2(x,t)} \leq k\sqrt{1+x^2}$.
2. *(Condición de Hölder). Existen constantes positivas* γ *y* k *tales que*
   - $|A_1(x,t) - A_1(y,t)| \leq k|x-y|^\gamma$.
   - $|\sqrt{A_2(x,t)} - \sqrt{A_2(y,t)}| \leq k|x-y|^\gamma$.

Entonces se verifica:

1. *La ecuación atrasada tiene una única solución sujeta a la condición frontera establecida en el teorema 2.4.1. Además, para $t > s$, $F(x,t|y,s)$ es derivable respecto de x, por lo que admite densidad, que también verificará la ecuación atrasada con condición frontera del tipo delta de Dirac.*

2. *Existe un proceso de Markov $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$ con trayectorias continuas, que verifica las condiciones de proceso de difusión y que tiene por función de distribución de transición $F(x,t|y,s)$.*

3. *Si, además, las condiciones del enunciado son cumplidas por $\dfrac{\partial A_1(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial A_2(x,t)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 A_2(x,t)}{\partial x^2}$, entonces la función $f(x,t|y,s) = \dfrac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial x}$ es la única solución fundamental de la ecuación adelantada.*

4. *Si $\gamma = 1$, entonces $f(x,t|y,s)$ es la densidad de transición de la única solución de la ecuación integral estocástica*[4]

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} A_1(X(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} \sqrt{A_2(X(s),s)}dW(s).$$

Para concluir con este apartado, veamos una interpretación sobre la ecuación de Fokker-Planck. Definamos

$$j(x,t|y,s) = A_1(x,t)f(x,t|y,s) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[A_2(x,t)f(x,t|y,s)],$$

función que será denominada el *flujo de probabilidad*. Sea (a,b) el intervalo de difusión y sean x_1, x_2 tales que $a < x_1 < x_2 < b$. Con ello la ecuación adelantada o de Fokker-Planck puede ser reescrita como

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t|y,s)}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$j(x,t|y,s) = -\frac{\partial}{\partial t}F(x,t|y,s).$$

Por lo tanto, $j(x_1,t|y,s)$ es la cantidad de probabilidad que atraviesa la abscisa x_1 en la dirección positiva por unidad de tiempo. Asimismo, $j(x_2,t|y,s)$ es la cantidad de probabilidad que sale del intervalo (x_1,x_2) por unidad de tiempo, mientras que la diferencia entre ambas cantidades será el incremento de probabilidad que ha acaecido en el intervalo (x_1,x_2). De esta forma, la ecuación de Fokker-Planck involucra un flujo de masa de probabilidad y puede interpretarse como una ecuación de conservación de la probabilidad.

Por otro lado, si (a,b) es el intervalo de difusión (finito o infinito) se tendrá que $f(x,t|y,s)$ será positiva en dicho intervalo y cero fuera de él. Además, la totalidad de la masa de probabilidad debe estar confinada en dicho intervalo, por lo que

$$\int_a^b f(x,t|y,s)dx = 1, \quad \forall t$$

con lo cual

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}dx = -\int_a^b \frac{\partial j(x,t|y,s)}{\partial x}dx = 0, \quad \forall t$$

y en consecuencia $j(a,t|y,s) = j(b,t|y,s)$. Ahora bien, si no hubiera flujo de probabilidad en los límites del intervalo se deberá verificar $j(a,t|y,s) = j(b,t|y,s) = 0$. Esta situación es natural si $(a,b) = \mathbb{R}$, en cuyo caso se debe verificar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,t|y,s) = 0$.

[4]Aunque todavía no se han introducido las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo cual se hará al final del tema, expresamos este resultado así para tener una visión completa.

2.5. Condiciones frontera en el caso homogéneo

Sea $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$ un proceso de difusión homogéneo. Dicha difusión verifica las ecuaciones diferenciales adelantada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x)f(x,t|y,s)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 [A_2(x)f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}$$

y atrasada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} + A_1(y)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial y} + \frac{1}{2}A_2(y)\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0.$$

Solucionar estas ecuaciones no es una tarea fácil ya que depende, en principio, de las condiciones analíticas de los momentos infinitesimales. Si dichas funciones no presentan ningún problema analítico, las ecuaciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ y la función de densidad de transición puede obtenerse resolviendo cualquiera de las ecuaciones con la condición inicial del tipo delta de Dirac. Sin embargo, en el caso en el que los momentos presenten algún problema (por ejemplo, $A_2(x)$ puede tender a cero en algún punto del intervalo de difusión o bien $A_1(x)$ podría ser singular en algún punto), no es suficiente la condición delta de Dirac y no tiene por qué ser indiferente el uso de una u otra ecuación diferencial. Este problema fue tratado y resuelto por Feller pero con el empleo de un aparato matemático muy fuerte, por lo que a continuación se muestra un breve resumen.

Sea $I = (r_1, r_2)$ el intervalo de difusión con $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ y supongamos que $A_1(x)$, $A_2(x)$ y $A_2'(x)$ son continuas para todo x de I y además $A_2(x) > 0$, $\forall x \in I$. Notemos que con ello estamos diciendo que los posibles puntos singulares que pudieran existir serían los extremos del intervalo de difusión. Entonces pueden ocurrir varias posibilidades:

1. El proceso nunca alcanza, para t finito, el valor r_i, $i = 1, 2$. En tal caso se dice que r_i es una barrera inaccesible.

2. El proceso alcanza, para t finito, el valor r_i, $i = 1, 2$. En tal caso se dice que r_i es una barrera accesible.

Para cada una de estas situaciones podemos establecer una clasificación más fina, teniendo en cuenta que cada barrera puede ser de uno de los tipos que a continuación se detallan:

1. **Barreras inaccesibles**

   - **Barrera naturale.** En este caso no hay flujo de probabilidad desde el interior del intervalo de difusión a las barreras y si, inicialmente, se asignara alguna masa de probabilidad en la barrera, esa masa permanece en la misma sin propagarse por el intervalo de difusión.
   - **Barrera de entrada.** No es alcanzable desde el interior del intervalo de difusión pero, partiendo de ella, el proceso puede tomar valores en el intervalo.

2. **Barreras accesibles**

   - **Barrera regular.** En este caso no ocurre nada de particular en el proceso en las proximidades de las barreras. Por lo tanto hay que imponer condiciones en cada una de ellas.
   - **Barrera de salida.** Existe flujo de probabilidad desde el interior del intervalo de difusión hacia la barrera, pero no al revés. En este sentido la barrera de este tipo actúa de forma absorbente puesto que las trayectorias del proceso toman un valor inicial x_0, $r_1 < x_0 < r_2$, y concluyen tan pronto como alcanzan una barrera de este tipo.

La importancia de esta clasificación radica en que, como probó Feller, si uno conoce la naturaleza de las barreras del intervalo de difusión, uno puede decidir qué tipo de condiciones deben asociarse con las ecuaciones de difusión para poder obtener las densidades de transición. En este sentido, Feller demostró que la clasificación dada depende de ciertas propiedades de integrabilidad de los momentos infinitesimales. Concretamente, sea $x' \in I$ y definamos

$$f(x) = \exp\left(-\int_{x'}^{x} \frac{2A_1(z)}{A_2(z)}dz\right), \quad g(x) = \frac{2}{A_2(x)f(x)}, \quad h(x) = f(x)\int_{x'}^{x} g(z)dz, \quad k(x) = g(x)\int_{x'}^{x} f(z)dz.$$

Sean I_i los intervalos de extremos x' y r_i, $i = 1, 2$ y sea $\mathcal{L}(I_i)$ el espacio de funciones no negativas Lebesgue integrables en I_i. Con ello el criterio de clasificación de Feller queda en la forma:

1. r_i es regular si $f \in \mathcal{L}(I_i)$ y $g \in \mathcal{L}(I_i)$.
2. r_i es de salida si $g \notin \mathcal{L}(I_i)$ y $h \in \mathcal{L}(I_i)$.
3. r_i es de entrada si $f \notin \mathcal{L}(I_i)$ y $k \in \mathcal{L}(I_i)$.
4. r_i es natural en otro caso.

Asimismo, empleando la teoría de semigrupos, Feller estudió el problema de existencia y unicidad de solución asociado a ambas ecuaciones diferenciales en relación con las condiciones frontera que habría que imponer para cada tipo de barrera. Algunas de las posibles situaciones son las siguientes:

1. **Ambas barreras son naturales**. En este caso la condición inicial del tipo delta de Dirac determina de forma única la densidad de transición como solución de las ecuaciones de difusión. No hay que imponer condiciones frontera adicionales salvo $\lim\limits_{x \to r_i} f(x, t|y) = 0$, $i = 1, 2$.

2. **Una barrera natural y otra de salida o ambas de salida**. En este caso la condición inicial sólo proporciona como solución la densidad de transición para la ecuación adelantada. La ecuación atrasada tiene infinitas soluciones y todas verifican la condición inicial.

3. **Una barrera es regular**. Ninguna de las ecuaciones puede resolverse sólo con la condición inicial y hay que imponer condiciones frontera adicionales. En este caso podemos diferenciar dos tipos de barreras especialmente importantes:

   - **Barrera reflectante**. Con ello queremos decir que en el momento en que se alcanza dicha barrera, la trayectoria es reflejada hacia el intervalo de difusión o bien permanece un instante y luego es devuelta al intervalo. En cualquier caso, no hay flujo de probabilidad en dicha barrera por lo que la condición que hay que imponer es $\lim\limits_{x \to r_i} j(x, t|y) = 0$, $i = 1, 2$.

   - **Barrera absorbente**. En este caso la trayectoria finaliza en cuanto se alcanza dicho valor. La condición que hay que imponer es, para $i = 1, 2$

     $$\lim_{x \to r_i} [A_2(x)f(x)f(x, t|y)] = 0 \quad \text{con} \quad f(x) = \exp\left(-\int_{x'}^{x} \frac{2A_1(z)}{A_2(z)}dz\right)$$

     En el caso particular en el que A_2 sea positiva y tanto A_2 como A_1 sean acotadas, entonces f está acotada y con ello la condición queda en la forma $\lim\limits_{x \to r_i} f(x, t|y) = 0$, $i = 1, 2$.

2.6. Resolución de las ecuaciones de Kolmogorov

2.6.1. Aplicación de la transformada de Laplace

En este apartado nos referiremos a la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo, cuya expresión es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x)f(x,t|x_0,t_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_2(x)f(x,t|x_0,t_0)\right].$$

Haciendo operaciones en la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,t|x_0),t_0}{\partial t} &= -A_1'(x)f(x,t|x_0,t_0) - A_1(x)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[A_2'(x)f(x,t|x_0,t_0)+ \\
&\qquad +A_2(x)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\Big] = \\
&= -A_1'(x)f(x,t|x_0,t_0) - A_1(x)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big[A_2''(x)f(x,t|x_0,t_0)+ \\
&\qquad +2A_2'(x)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + A_2(x)\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}\Big] = \\
&= \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right] f(x,t|x_0,t_0) + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Consideremos ahora la transformada de Laplace de $f(x,t|x_0,t_0)$,

$$f^*(x,s|x_0,t_0) = \mathcal{L}\left(f(x,t|x_0,t_0)\right) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(x,t|x_0,t_0)\,dt, \qquad s\in\mathbb{R},$$

y apliquemos dicha transformada a ambos miembros de (2.8). Para ello tendremos en cuenta que si F es una función derivable n veces, entonces se verifica

$$\mathcal{L}(F^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(F)(s) - F(0)s^{n-1} - F'(0)s^{n-2} - \cdots - F^{n-1)}(0),$$

con lo cual

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t}\right) = sf^*(x,s|x_0,t_0) - f(x,t_0|x_0,t_0) = sf^*(x,s|x_0,t_0) - \delta(x-x_0),$$

y por otro lado

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x}, \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x^2}.$$

Con todo ello, aplicando la transformada a ambos miembros de (2.8), y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{t \downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$, se obtiene

$$sf^*(x,s|x_0,t_0) - \delta(x-x_0) = \frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x^2} + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\frac{\partial f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x} +$$

$$+\left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right] f^*(x,s|x_0,t_0),$$

o sea,

$$\frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x^2} + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\frac{\partial f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x} +$$

$$+\left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) - s\right] f^*(x,s|x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \tag{2.9}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden, a la que habrá que imponer condiciones frontera para su resolución. La solución proporcionará la transformada de Laplace de la función de densidad de transición.Finalmente, aplicando el teorema de inversión, obtendremos la densidad $f(x,t|x_0,t_0)$.

Para la resolución técnica de este problema hay que tener en cuenta las siguientes cuestiones:

1. Transformar las condiciones frontera del problema inicial para expresarlas en términos de la transformada de Laplace.
2. Como $f(x,t|x_0,t_0)$ ha de ser continua en x, entonces $f^*(x,s|x_0,t_0)$ también ha de serlo.
3. Si notamos por I al intervalo de difusión, en ocasiones puede ser útil imponer la siguiente condición:

$$\int_I f^*(x,s|x_0,t_0)\,dx = \int_I \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(x,t|x_0,t_0)\,dt\,dx = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st_0}}{s},$$

para $s > 0$, ya que en otro caso la anterior integral diverge.

A continuación vamos a aplicar esta técnica al caso del proceso Wiener.

Ejemplo 2.6.1. *Sea $\{W(t) : t \geq t_0\}$ el proceso Wiener con $A_1(x) = 0$ y $A_2(x) = \sigma^2$, $x \in \mathbb{R}$ y $W(t_0) = x_0$.*

La ecuación adelantada que debemos resolver es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}$$

con condición inicial $\lim\limits_{t \downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$, y puesto que $\pm\infty$ son barreras naturales, entonces hay que añadir las condiciones frontera $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,t|x_0,t_0) = 0$.

Tomando transformadas de Laplace an ambos miembros de la ecuación adelantada y considerando la transformación de las condiciones frontera, el problema original se convierte en el siguiente

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x^2} - sf^*(x,s|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^*(x,s|x_0,t_0) = 0$$

Para su resolución, y dado que la función $\delta(x-x_0)$ no es continua en x_0, abordaremos el problema para $x < x_0$ y para $x > x_0$, exigiendo luego la continuidad de la solución en el punto $x = x_0$. Para dichos puntos la ecuación es

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f^*(x,s|x_0,t_0)}{\partial x^2} - sf^*(x,s|x_0,t_0) = 0,$$

que es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico es $P(D) = \dfrac{\sigma^2}{2}D^2 - s$. Las raíces de dicho polinomio dependen del valor de s, por lo que distinguimos casos:

- *$s = 0$. En tal caso el polinomio P tiene una única raíz, $D = 0$, con multiplicidad dos. Por ello, la solución de la ecuación es*

  $$f^*(x,s|x_0,t_0) = c_1(s,x_0,t_0) + c_2(s,x_0,t_0)x$$

  donde las constantes c_1 y c_2 podrían depender de los valores de s, x_0 y t_0. Imponiendo las condiciones frontera se deduce que $c_1(s,x_0,t_0) = c_2(s,x_0,t_0) = 0$, por lo que $f^*(x,s|x_0,t_0) = 0$, lo cual implica que $f(x,t|x_0,t_0) = 0$, función que no es densidad y, por tanto, este caso hay que descartarlo.

- *$s < 0$. Ahora el polinomio P tiene raíces complejas, $\pm\dfrac{i\sqrt{2|s|}}{\sigma}$, por lo que*

  $$f^*(x,s|x_0,t_0) = c_1(s,x_0,t_0)\cos\left(\frac{\sqrt{2|s|}}{\sigma}x\right) + c_2(s,x_0,t_0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2|s|}}{\sigma}x\right).$$

  Como las funciones seno y coseno están acotadas y no se anulan simultáneamente, entonces al imponer las condiciones frontera se llega a la misma conclusión del apartado anterior. Así pues, este caso también hay que descartarlo.

- *$s > 0$. En esta situación el polinomio P tiene raíces reales distintas, $\pm\dfrac{\sqrt{2s}}{\sigma}$, por lo que*

  $$f^*(x,s|x_0,t_0) = c_1(s,x_0,t_0)e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x} + c_2(s,x_0,t_0)e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}.$$

  Ahora bien,

  - *Si $x > x_0$ entonces el hecho de que $\lim_{x\to+\infty} f^*(x,s|x_0,t_0) = 0$ implica que $c_1(s,x_0,t_0) = 0$, lo cual conduce a que*

    $$f^*(x,s|x_0,t_0) = c_2(s,x_0,t_0)e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}.$$

  - *Si $x < x_0$ entonces el hecho de que $\lim_{x\to-\infty} f^*(x,s|x_0,t_0) = 0$ implica que $c_2(s,x_0,t_0) = 0$, lo cual conduce a que*

    $$f^*(x,s|x_0,t_0) = c_1(s,x_0,t_0)e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}.$$

y como f^* ha de ser continua en $x = x_0$, entonces

$$c_2(s, x_0, t_0)e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x_0} = c_1(s, x_0, t_0)e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x_0},$$

por lo que

$$c_2(s, x_0, t_0) = c_1(s, x_0, t_0)e^{\frac{2\sqrt{2s}}{\sigma}x_0}$$

y así,

$$f^*(x, s|x_0, t_0) = c_1(s, x_0, t_0)e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x} + c_1(s, x_0, t_0)e^{\frac{2\sqrt{2s}}{\sigma}x_0}e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}$$

A continuación imponemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x, s|x_0, t_0)\, dx = \frac{e^{-st_0}}{s}$, *para $s > 0$. Por lo tanto,*

$$\frac{e^{-st_0}}{s} = c_1(s, x_0, t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}\, dx + c_1(s, x_0, t_0)e^{\frac{2\sqrt{2s}}{\sigma}x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x}\, dx =$$

$$= c_1(s, x_0, t_0)\frac{\sigma}{\sqrt{2s}}e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x_0} + c_1(s, x_0, t_0)\frac{\sigma}{\sqrt{2s}}e^{\frac{2\sqrt{2s}}{\sigma}x_0}e^{\frac{-\sqrt{2s}}{\sigma}x_0} =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2s}}e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x_0}c_1(s, x_0, t_0)$$

de donde se deduce que

$$c_1(s, x_0, t_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{-st_0}e^{-\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}x_0},$$

y, por lo tanto,

$$f^*(x, s|x_0, t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{-st_0}e^{\frac{\sqrt{2s}}{\sigma}(x-x_0)} & si \quad x \leq x_0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{-st_0}e^{\frac{-\sqrt{2s}}{\sigma}(x-x_0)} & si \quad x > x_0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{-st_0}e^{\frac{-\sqrt{2s}}{\sigma}|x-x_0|}.$$

Ahora tenemos que aplicar la transformada inversa a la función f^* obtenida. Para ello hemos de tener en cuenta que, puesto que $\mathcal{L}\left(g(t-t_0)\right) = e^{-st_0}\mathcal{L}\left(g(t)\right)$, basta con calcular la transformada inversa de la función $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{\frac{-\sqrt{2s}}{\sigma}|x-x_0|}$.

Además, consultando las tablas de transformadas inversas se puede comprobar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi\, t}},$$

por lo que si consideramos $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma}|x - x_0|$, *se tiene*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2s}}e^{\frac{-\sqrt{2s}}{\sigma}|x-x_0|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\, t}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2\, t}\right),$$

concluyéndose con

$$f(x, t|x_0, t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left(f^*(x, s|x_0, t_0)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,(t-t_0)}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2\,(t-t_0)}\right)$$

2.6.2. Aplicación de la transformada de Fourier

Nuevamente vamos a centrarnos en la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo, pero mediante la aplicación de la transformada de Fourier de la densidad de transición, la cual conduce a la función característica de las para las transiciones ya que se tiene

$$\mathcal{F}\left(f(x,t|x_0,t_0)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\, x} f(x,t|x_0,t_0)\, dx = \phi(\lambda,t|x_0,t_0).$$

Sin embargo, en esta ocasión no podemos obtener una expresión genérica de una ecuación diferencial como la del caso anterior, motivado porque ahora en la transformación se integra respecto de x. Por lo tanto, debemos aplicar esta transformada en cada caso particular.

Ejemplo 2.6.2. *Sea $\{W(t) : t \geq t_0\}$ el proceso Wiener trasladado con $A_1(x) = \mu$ y $A_2(x) = \sigma^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $W(t_0) = x_0$.*

La ecuación adelantada que debemos resolver es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}$$

con condición inicial $\lim_{t\downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$, y puesto que $\pm\infty$ son barreras naturales, entonces hay que añadir las condiciones frontera $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,t|x_0,t_0) = 0$.

A la hora de aplicar la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación anterior hay que tener en cuenta las siguientes cuestiones:

$$\mathcal{F}\left(f(x,t|x_0,t_0)\right) = \phi(\lambda,t|x_0,t_0)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t}\right) = \frac{\partial \phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\, x}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\, dx = \begin{bmatrix} e^{i\lambda\, x} & \rightarrow & i\lambda e^{i\lambda\, x} \\ \frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} & \rightarrow & f(x,t|x_0,t_0)\end{bmatrix} \\ &= \Big[e^{i\lambda\, x} f(x,t|x_0,t_0)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\lambda\phi(\lambda,t|x_0,t_0) = -i\lambda\phi(\lambda,t|x_0,t_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\, x}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}\, dx = \begin{bmatrix} e^{i\lambda\, x} & \rightarrow & i\lambda e^{i\lambda\, x} \\ \frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2} & \rightarrow & \frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\end{bmatrix} \\ &= \left[e^{i\lambda\, x}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - i\lambda\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right) = -\lambda^2\phi(\lambda,t|x_0,t_0)\end{aligned}$$

donde en las dos últimas expresiones se ha tenido en cuenta que $|e^{i\lambda\, x}| = 1$ y las barreras son naturales, por lo que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,t|x_0,t_0) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} = 0$.

Con todo ello se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \left(i\lambda\,\mu - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)\phi(\lambda,t|x_0,t_0),$$

mientras que la condición inicial se transforma de la siguiente forma

$$e^{i\lambda\,x_0} = \mathcal{F}\left(\delta(x-x_0)\right) = \mathcal{F}\left(\lim_{t\downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0)\right) = \lim_{t\downarrow t_0} \phi(\lambda,t|x_0,t_0)$$

La solución general de la ecuación es

$$\phi(\lambda,t|x_0,t_0) = c(\lambda,x_0,t_0)\exp\left(\left(i\lambda\,\mu - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)\,t\right),$$

e imponiendo la condición inicial se tiene

$$c(\lambda,x_0,t_0) = \exp\left(i\lambda\,x_0 - i\lambda\,\mu\,t_0 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\,t_0\right),$$

concluyéndose

$$\phi(\lambda,t|x_0,t_0) = \exp\left(i\lambda\left(x_0+\mu(t-t_0)\right) - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}(t-t_0)\right),$$

que es la función característica de una ley normal de media $x_0+\mu(t-t_0)$ *y varianza* $\sigma^2(t-t_0)$*, con lo cual*

$$f(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,(t-t_0)}}\exp\left(-\frac{(x-x_0-\mu(t-t_0))^2}{2\sigma^2\,(t-t_0)}\right)$$

Veamos un nuevo ejemplo en el que consideraremos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck homogéneo.

Ejemplo 2.6.3. *Sea* $\{X(t): t\geq t_0\}$ *el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con* $A_1(x) = -\gamma\,x$ *y* $A_2(x)=\sigma^2$*,* $x\in\mathbb{R}$*,* $\gamma>0$ *y* $X(t_0)=x_0$*.*

La ecuación adelantada que debemos resolver es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \gamma\frac{\partial\left(x\,f(x,t|x_0,t_0)\right)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}$$

con condición inicial $\lim_{t\downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$*, y puesto que* $\pm\infty$ *son barreras naturales, entonces hay que añadir las condiciones frontera* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,t|x_0,t_0) = 0$*.*

A continuación aplicamos la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación, para lo cual, además de las consideraciones que se han tenido en cuenta en el ejemplo anterior, hay que considerar las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\,x}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\,dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\,x}x\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\,dx,$$

y como $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right) = i\lambda\phi(\lambda,t|x_0,t_0)$*, se concluye*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\,x}x\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\,dx = i\phi(\lambda,t|x_0,t_0) - i\lambda\frac{\partial\phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial\lambda}.$$

Por último,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\left(xf(x,t|x_0,t_0)\right)}{\partial x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\frac{\partial\left(xf(x,t|x_0,t_0)\right)}{\partial x}\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\left[f(x,t|x_0,t_0)+x\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x}\right]dx=$$

$$=\phi(\lambda,t|x_0,t_0)-i\left(i\phi(\lambda,t|x_0,t_0)-i\lambda\frac{\partial\phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial\lambda}\right)=-\lambda\frac{\partial\phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial\lambda}.$$

Con todo ello la ecuación queda como

$$\frac{\partial\phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial t}+\gamma\lambda\frac{\partial\phi(\lambda,t|x_0,t_0)}{\partial\lambda}=-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\phi(\lambda,t|x_0,t_0)$$

con la condición inicial $\lim\limits_{t\downarrow t_0}\phi(\lambda,t|x_0,t_0)=e^{i\lambda x_0}$.

El miembro izquierdo de la ecuación anterior es la derivada direccional de la función $\phi(\lambda,t|x_0,t_0)$, *considerada como función de* λ *y* t, *en* $(1,\gamma\lambda)$. *Dada la unicidad de solución de la ecuación, la idea es encontrar la solución a lo largo de una curva* $\alpha(t)$ *y generalizarla por unicidad. Sea la curva* $\alpha(t)=de^{\gamma(t-t_0)}$. *Con ello*

$$\frac{\partial\phi(\alpha(t),t|x_0,t_0)}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\gamma\alpha(t)=-\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2(t)\phi(\alpha(t),t|x_0,t_0)$$

con solución

$$\phi(\alpha(t),t|x_0,t_0)=k(d,x_0,t_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\int_{t_0}^{t}d^2e^{2\gamma(s-t_0)}\,ds\right)=$$

$$=k(d,x_0,t_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2\,d^2}{4\gamma}\left(e^{2\gamma(t-t_0)-1}\right)\right).$$

En particular, si tomamos $d=\lambda e^{-\gamma(t-t_0)}$, *o sea,* $\alpha(t)=\lambda$, *tenemos*

$$\phi(\lambda,t|x_0,t_0)=k\left(\lambda e^{-\gamma(t-t_0)},x_0,t_0\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2\,\lambda^2}{4\gamma}\left(1-e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)\right).$$

Imponiendo la condición inicial se tiene $k(\lambda,x_0,t_0)=e^{i\lambda x_0}$, *por lo que*

$$k\left(\lambda e^{-\gamma(t-t_0)},x_0,t_0\right)=\exp\left(i\lambda x_0e^{-\gamma(t-t_0)}\right)$$

y con ello,

$$\phi(\lambda,t|x_0,t_0)=\exp\left(i\lambda x_0e^{-\gamma(t-t_0)}-\frac{\sigma^2\,\lambda^2}{4\gamma}\left(1-e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)\right),$$

que es la función característica de una normal de media $x_0e^{-\gamma(t-t_0)}$ *y varianza* $\dfrac{\sigma^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)$, *con lo cual*

$$f(x,t|x_0,t_0)=\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi\sigma^2\,\left(1-e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)}}\exp\left(-\frac{\gamma\left(x-x_0e^{-\gamma(t-t_0)}\right)^2}{\sigma^2\left(1-e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)}\right).$$

2.6.3. Resolución mediante separación de variables

De nuevo nos ocuparemos de la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo, aplicando en este caso la técnica de separación de variables.

Esta técnica supone que la solución de la ecuación en consideración, en este caso $f(x,t|x_0,t_0)$, se puede expresar como producto de una función de x y otra de t; en nuestro caso, $f(x,t|x_0,t_0) = \Lambda(x)T(t)$ (notemos que x_0 y t_0 son valores fijos). A partir de esa expresión se tiene:

- $\dfrac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \Lambda(x)T'(t)$
- $\dfrac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} = \Lambda'(x)T(t)$
- $\dfrac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2} = \Lambda''(x)T(t)$

Retomando la expresión (2.8), la ecuación adelantada puede expresarse en la forma

$$\frac{\partial f(x,t|x_0),t_0}{\partial t} = \frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2} + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right] f(x,t|x_0,t_0),$$

y sustituyendo en ella las expresiones anteriores, se tiene

$$\Lambda(x)T'(t) = \frac{1}{2}A_2(x)\Lambda''(x)T(t) + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\Lambda'(x)T(t) + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right]\Lambda(x)T(t),$$

de donde

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{\Lambda(x)}\left[\frac{1}{2}A_2(x)\Lambda''(x) + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\Lambda'(x) + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right]\Lambda(x)\right]$$

Notemos que el miembro izquierdo depende sólo de t, mientras que el de la derecha lo es sólo de x. Puesto que las variables x y t son independientes, ambos miembros serán iguales a una constante, que llamaremos λ. Ello conduce a las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

- $T'(t) - \lambda T(t) = 0$
- $\dfrac{1}{2}A_2(x)\Lambda''(x) + \left[A_2'(x) - A_1(x)\right]\Lambda'(x) + \left[\dfrac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) - \lambda\right]\Lambda(x) = 0,$

con lo cual el problema se ha reducido a resolver las dos anteriores ecuaciones diferenciales.

La primera de ellas es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes, cuya solución es

$$T(t) = T(t_0)e^{\lambda(t-t_0)},$$

mientras que la segunda es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables que, junto a la condiciones inicial y frontera, determinan un problema de contorno que tendrá solución para algunos valores de λ (que llamaremos valores propios del problema).

Para los valores propios, λ_n, la solución general de la ecuación es de la forma

$$f(x,t|x_0,t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda(x, A_n, B_n, \lambda_n) e^{\lambda_n t},$$

donde A_n y B_n se determinan a partir de las condiciones inicial y frontera.

Ejemplo 2.6.4. *Sea $\{W(t) : t \geq t_0\}$ el proceso Wiener trasladado con barreras absorbentes. Por lo tanto, $A_1(x) = \mu$, $A_2(x) = \sigma^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $W(t_0) = x_0$ y $x \in [a,b]$ $(a < x_0 < b)$.*

La ecuación adelantada que debemos resolver es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}$$

con condición inicial $\lim\limits_{t \downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x - x_0)$, y puesto que a y b son barreras absorbentes, consultando las conclusiones deducidas de las condiciones frontera, se deduce que $f(a,t|x_0,t_0) = f(b,t|x_0,t_0) = 0$.

Mediante la técnica de separación de variables, este problema se transforma en

- $T'(t) - \lambda T(t) = 0$
- $\dfrac{\sigma^2}{2}\lambda''(x) - \mu\lambda'(x) - \lambda\Lambda(x) = 0,$

mientras que las condiciones frontera implican que $T(t)\Lambda(a) = T(t)\Lambda(b) = 0$, $\forall t \geq t_0$, con lo cual $\Lambda(a) = \Lambda(b) = 0$.

Así tenemos $T(t) = T(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}$, debiendo resolver el problema de contorno

$$\frac{\sigma^2}{2}\lambda''(x) - \mu\lambda'(x) - \lambda\Lambda(x) = 0$$

$$\Lambda(a) = \Lambda(b) = 0$$

El polinomio característico asociado es $\dfrac{\sigma^2}{2}D^2 - \mu\, D - \lambda$, cuyas raíces son $\dfrac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}$. A continuación distinguimos casos según la naturaleza de dichas raíces.

- *Si $\mu^2 + 2\lambda\sigma^2 = 0$, la raíz es doble, por lo que la solución de la ecuación es*

  $$\Lambda(x) = c_1(x_0,t_0) + c_2(x_0,t_0)x.$$

  Imponiendo las condiciones frontera se verifica

  $$\begin{aligned} c_1(x_0,t_0) + c_2(x_0,t_0)a = 0 \\ c_1(x_0,t_0) + c_2(x_0,t_0)b = 0 \end{aligned}$$

  de donde $c_2(x_0,t_0)(b-a) = 0$, y como $a < b$, entonces $c_2(x_0,t_0) = 0$ y $c_1(x_0,t_0) = 0$. En consecuencia, $\lambda = -\dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$ no es un valor propio.

- *Si $\mu^2 + 2\lambda\sigma^2 > 0$, la solución de la ecuación es*

  $$\Lambda(x) = c_1(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,x\right) + c_2(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,x\right).$$

Imponiendo las condiciones frontera se tiene

$$
\begin{aligned}
c_1(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,a\right)+c_2(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu-\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,a\right)=0\\
c_1(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,b\right)+c_2(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\mu-\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,b\right)=0
\end{aligned}
$$

y, simplificando

$$
\begin{aligned}
c_1(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,a\right)+c_2(x_0,t_0)\exp\left(\frac{-\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,a\right)=0\\
c_1(x_0,t_0)\exp\left(\frac{\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,b\right)+c_2(x_0,t_0)\exp\left(\frac{-\sqrt{\mu^2+2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\,b\right)=0
\end{aligned}
$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyo determinante de la matriz de coeficientes es

$$
\begin{vmatrix} e^{ka} & e^{-ka} \\ e^{kb} & e^{-kb} \end{vmatrix} = e^{k(a-b)} - e^{k(b-a)}
$$

que es igual a cero si y sólo si $a=b$*. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución única* $c_1(x_0,t_0)=c_2(x_0,t_0)=0$*. Por lo tanto, los valores* $\lambda > -\dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$ *no son valores propios del problema.*

- *Si* $\mu^2+2\lambda\sigma^2<0$*, la solución de la ecuación es*

$$
\Lambda(x)=e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\left[c_1(x_0,t_0)\cos\left(\frac{\sqrt{|\mu^2+2\lambda\sigma^2|}}{\sigma^2}\,x\right)+c_2(x_0,t_0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{|\mu^2+2\lambda\sigma^2|}}{\sigma^2}\,x\right)\right].
$$

Imponiendo las condiciones frontera, y llamando $k=\dfrac{\sqrt{|\mu^2+2\lambda\sigma^2|}}{\sigma^2}$*, se tiene*

$$
\begin{aligned}
c_1(x_0,t_0)\cos(ka)+c_2(x_0,t_0)\,\mathrm{sen}(ka)=0\\
c_1(x_0,t_0)\cos(kb)+c_2(x_0,t_0)\,\mathrm{sen}(kb)=0
\end{aligned}
$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si y sólo si $\mathrm{tag}(ka)=\mathrm{tag}(kb)$*. Ello significa que* $kb=ka+n\pi$*,* $n=1,2,\ldots$*, por lo que* $k=\dfrac{n\pi}{b-a}$*. Despejando* λ *de la expresión de* k*, para cada valor de* n*, los valores propios del problema de contorno son*

$$
\lambda_n=-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{2(b-a)^2},\quad n=1,2\ldots,
$$

De la segunda ecuación del sistema se tiene

$$
c_1(x_0,t_0)=-c_2(x_0,t_0)\,\mathrm{tag}(kb)=-c_2(x_0,t_0)\,\mathrm{tag}(ka),
$$

por lo que, si consideramos $c_2(x_0,t_0)=\cos(ka)$*, entonces* $c_1(x_0,t_0)=-\mathrm{sen}(ka)$*, con lo que las funciones propias del problema de contorno son*

$$
\Lambda_n(x)=e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\left[-\mathrm{sen}(ka)\cos(kx)+\cos(ka)\,\mathrm{sen}(kx)\right]=e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\,\mathrm{sen}\left(k(x-a)\right)=
$$

$$
=e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right),
$$

que verifican, obviamente, el problema de contorno planteado. En definitiva, la solución buscada es de la forma

$$f(x,t|x_0,t_0) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n(t-t_0)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

Evaluando la condición inicial tenemos

$$e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) = \delta(x-x_0),$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\delta(x-x_0)$$

que es el desarrollo senoidal de la función $e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\delta(x-x_0)$*. Así,*

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\delta(x-x_0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) dx = \frac{2}{b-a}e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x_0-a)}{b-a}\right)$$

donde se ha usado que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x-x_0) = g(x_0)$.

En definitiva, la densidad buscada es

$$f(x,t|x_0,t_0) = \frac{2}{b-a}\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\left(x-x_0-\frac{t-t_0}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{2(b-a)^2}(t-t_0)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x_0-a)}{b-a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

Ejemplo 2.6.5. *Sea* $\{W(t): t\geq t_0\}$ *el proceso Wiener con* $A_1(x)=0$, $A_2(x)=\sigma^2$, $x\in[0,a]$, $\mu\in\mathbb{R}$, $W(t_0)=x_0$, $0\leq x_0\leq a$, *siendo las barreras absorbentes.*

La ecuación adelantada que debemos resolver es

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}$$

con condición inicial $\lim\limits_{t\downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$*, y puesto que* 0 *y* a *son barreras absorbentes, consultando las conclusiones deducidas de las condiciones frontera, se deduce que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} = \lim_{x\to a}\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} = 0$$

Mediante la técnica de separación de variables, este problema se transforma en

- $T'(t) - \lambda T(t) = 0$
- $\dfrac{\sigma^2}{2}\lambda''(x) - \lambda\Lambda(x) = 0,$

mientras que las condiciones frontera implican que $T(t)\Lambda'(0) = T(t)\Lambda'(a) = 0$, $\forall t \geq t_0$, *con lo cual* $\Lambda'(0) = \Lambda'(a) = 0$.

Así tenemos $T(t) = T(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}$, *debiendo resolver el problema de contorno*

$$\frac{\sigma^2}{2}\lambda''(x) - \lambda\Lambda(x) = 0$$

$$\Lambda'(0) = \Lambda'(a) = 0$$

El polinomio característico asociado es $\dfrac{\sigma^2}{2}D^2 - \lambda$, *cuyas raíces son* $\dfrac{\pm\sqrt{2\lambda}}{\sigma}$. *A continuación distinguimos casos según la naturaleza de dichas raíces.*

- *Si* $\lambda = 0$, *la raíz es doble, por lo que la solución de la ecuación es*

  $$\Lambda(x) = c_1(x_0, t_0) + c_2(x_0, t_0)x.$$

  Imponiendo las condiciones frontera se tiene $\Lambda'(0) = \Lambda'(a) = c_2 = 0$, *por lo que* $\Lambda(x) = c_1$.

  Sin embargo, en tal caso la solución es una constante, $f(x, t|x_0, t_0) = c_1 T(t_0)$, *que no verifica la condición inicial. Por lo tanto,* $\lambda = 0$ *no es un valor propio.*

- *Si* $\lambda > 0$, *la solución de la ecuación es*

  $$\Lambda(x) = c_1(x_0, t_0)e^{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}x} + c_2(x_0, t_0)e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}x}.$$

  Puesto que

  $$\Lambda'(x) = \frac{c_1(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma}e^{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}x} - \frac{c_2(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma}e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}x},$$

  al imponer las condiciones frontera se tiene

  $$\Lambda'(0) = \frac{c_1(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma} - \frac{c_2(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma} = 0$$

  $$\Lambda'(a) = \frac{c_1(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma}e^{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}a} - \frac{c_2(x_0, t_0)\sqrt{2\lambda}}{\sigma}e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma}a} = 0$$

  y, simplificando

  $$c_1 = c_2$$

  $$c_1 e^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{\sigma}a} - c_2 = 0 \Rightarrow c_1\left(e^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{\sigma}a} - 1\right) = 0$$

  Para que dicho sistema tenga solución no trivial se debe verificar que $a = 0$, *por lo que los valores* $\lambda > 0$ *no son valores propios.*

- *Si* $\lambda < 0$, *la solución de la ecuación es*

  $$\Lambda(x) = c_1(x_0, t_0)\cos\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}x\right) + c_2(x_0, t_0)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}x\right).$$

  Como

  $$\Lambda'(x) = -c_1(x_0, t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}x\right) + c_2(x_0, t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}\cos\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}x\right),$$

las condiciones frontera conducen a

$$
\begin{aligned}
\Lambda'(0) &= c_2(x_0,t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma} = 0 \Rightarrow c_2 = 0\\
\Lambda'(a) &= -c_1(x_0,t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}\,a\right) + c_2(x_0,t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}\cos\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}\,a\right)
\end{aligned}
$$

Tomando la segunda ecuación, y considerando que $c_1 \neq 0$ *(para el sistema tenga solución no trivial), se verifica*

$$
c_1(x_0,t_0)\frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|2\lambda|}}{\sigma}\,a\right) = 0 \;\Rightarrow \frac{\sqrt{2|\lambda|}}{\sigma}a = n\pi,\ n = 0,1,\ldots,
$$

de donde se deduce que los valores propios del problema de contorno son

$$
\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{2a^2},\ n = 0,1,\ldots,
$$

mientras que las funciones propias serán

$$
\Lambda_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right),\ n = 0,1,\ldots.
$$

Así, la solución del problema es

$$
f(x,t|x_0,t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n(t-t_0)}\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{2a^2}(t-t_0)\right)\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right).
$$

Evaluando la condición inicial tenemos

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right) = \delta(x-x_0),
$$

que es el desarrollo cosenoidal de la función $\delta(x-x_0)$*, desarrollo que es de la forma*

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right),
$$

con

$$
a_n = \frac{2}{b-a}\int_0^a \delta(x-x_0)\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right)\,dx = \frac{2}{a}\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x_0\right).
$$

En definitiva, la densidad buscada es

$$
f(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{2a^2}(t-t_0)\right)\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x\right)\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{a}\,x_0\right).
$$

Por último, observemos que $\lim_{t\downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \dfrac{1}{a}$*, que se corresponde con la distribución uniforme en* $[0,a]$*.*

2.6.4. Transformaciones al proceso Wiener

En este caso vamos a considerar la resolución de la ecuación atrasada o de Kolmogorov mediante la búsqueda de una función que transforme dicha ecuación en la del proceso Wiener estándar, cuya solución es conocida.

Por tanto, sea $\{X(t);\ t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media y varianza infinitesimal $\mathrm{A}_1(x,t)$ y $\mathrm{A}_2(x,t)$, respectivamente, definido sobre un intervalo I y sea $\left\{\mathrm{W}(t');\ t' \geq t_0'\right\}$ el proceso Wiener estándar con media infinitesimal cero y varianza infinitesimal igual a uno. Sea f la densidad de transición del proceso $X(t)$ y f' la del proceso Wiener.

Las transformaciones en las que estamos interesados son del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x,t) \quad x_0' = \Psi(x_0,t_0) \\ t' &= \Phi(t) \qquad t_0' = \Phi(t_0) \end{aligned} \tag{2.10}$$

que cambie la ecuación atrasada del proceso $X(t)$

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t_0} + A_1(x_0,t_0)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0} + \frac{A_2(x_0,t_0)}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0^2} = 0$$

en la del proceso Wiener

$$\frac{\partial f'(x',t'|x_0',t_0')}{\partial t_0'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f'(x',t'|x_0',t_0')}{\partial {x_0'}^2} = 0.$$

cuya solución es

$$f'(x',t'|x_0',t_0') = \left(\sqrt{2\pi(t'-t_0')}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{(x'-x_0')^2}{2(t'-t_0')}\right).$$

Evidentemente, la cuestión que se plantea es cuándo se podrá transformar un proceso de difusión cualquiera en el Wiener. Cherkasov (1957) y Ricciardi (1976) estudiaron con detalle este problema, dando condiciones necesarias y suficientes para que exista tal tipo de transformación.

Dicho estudio se lleva a cabo observando como se ven alterados los momentos infinitesimales de $X(t)$ por medio de la transformación (2.10) e igualando los nuevos momentos resultantes a los del Wiener estándar, obteniéndose el siguiente teorema

Teorema 2.6.1. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función densidad de transición $f(x,t|x_0,t_0)$ y momentos infinitesimales $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ pueda transformarse al proceso Wiener estándar es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que verifiquen*

$$A_1(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x,t)]^{1/2}}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)A_2(y,t) + \frac{\partial A_2(y,t)}{\partial t}}{(A_2(y,t))^{3/2}}\,dy\right\}. \tag{2.11}$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' = \psi(x,t) &= (k_1)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t C_2(s)\,ds\right)\int_z^x \frac{1}{(A_2(y,t))^{1/2}}\,dy - \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2}\int_{t_2}^t C_1(s)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^s C_2(\theta)\,d\theta\right)ds + k_2 \\ t' = \phi(t) &= k_1\int_{t_1}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta)\,d\theta\right)ds + k_3 \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_i \in [t_0,\infty)$ y k_i constantes arbitrarias con la restricción $k_1 > 0$.

Nota 2.6.1. *Puesto que, para cada t,* $\dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \left[\dfrac{\phi'(t)}{A_2(x,t)}\right]^{\frac{1}{2}} > 0$*, la transformación* $x' = \psi(x,t)$ *es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado será*

$$f(x,t|x_0,t_0) = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} f'(x',t'|x_0',t_0'). \tag{2.12}$$

2.6.5. Método de la factorización de densidades

Sea $\{Y(t); t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media infinitesimal $\alpha_1(x,t)$ y varianza infinitesimal $\alpha_2(x,t)$, definido en un intervalo $I = (r_1, r_2)$, siendo ϕ y Φ su función de densidad de transición y función de distribución de transición, respectivamente.

Nuestro objetivo es estudiar bajo qué condiciones existe un proceso de difusión $X(t)$ definido en I y tal que su densidad de probabilidad de transición, $f(x,t|x_0,t_0)$, se obtenga a partir de $\phi(x,t|x_0,t_0)$ de la forma

$$f(x,t|x_0,t_0) = k(x,t)h(x_0,t_0)\phi(x,t|x_0,t_0) \tag{2.13}$$

con k y h funciones apropiadas.

Teorema 2.6.2. *La función* $f(x,t|x_0,t_0)$ *dada por (2.13) satisface la ecuación de Kolmogorov*

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t_0} + A_1(x_0,t_0)\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2}A_2(x_0,t_0)\frac{\partial^2 f(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0^2} = 0 \ , \tag{2.14}$$

la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x,t)f(x,t|x_0,t_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_2(x,t)f(x,t|x_0,t_0)\right] \tag{2.15}$$

y la condición inicial

$$\lim_{t \downarrow t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x - x_0) \tag{2.16}$$

si

$$h(x,t) = [k(x,t)]^{-1} \ , \tag{2.17}$$

$$A_1(x,t) = \alpha_1(x,t) + \frac{1}{k(x,t)}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\alpha_2(x,t) \ , \tag{2.18}$$

$$A_2(x,t) = \alpha_2(x,t) \ , \tag{2.19}$$

y

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \alpha_1(x,t)\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha_2(x,t)\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.20}$$

donde $k(x,t)$ *es una función continua que no cambia de signo en* $I \times [t_0, \infty)$.

Este teorema es de utilidad para construir procesos obtenidos a partir de otro proceso pero presuponiendo que la relación entre las densidades de transición de ambos procesos sea cierta. Por ello nos hace falta un resultado que permita determinar si un determinado proceso verifica dicha expresión.

Teorema 2.6.3. *La función $f(x,t|x_0,t_0)$ definida por (2.13) satisface la ecuación de Kolmogorov (2.14), la ecuación de Fokker-Planck (2.15) y la condición inicial (2.16) si $A_2(x,t) = \alpha_2(x,t)$ y*

$$\int \frac{1}{\alpha_2(x,t)} \frac{\partial A_1(x,t)}{\partial t} dx + \frac{\alpha_1(x,t)}{\alpha_2(x,t)} \left[A_1(x,t) - \alpha_1(x,t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha_2(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_1(x,t) - \alpha_1(x,t)}{\alpha_2(x,t)} \right] + \frac{1}{2}\alpha_2(x,t) \left[\frac{A_1(x,t) - \alpha_1(x,t)}{\alpha_2(x,t)} \right]^2 = 0 \tag{2.21}$$

2.7. Procesos de difusión y ecuaciones diferenciales estocásticas

A continuación exponemos un somero resumen sobre algunos aspectos relacionados con la teoría de integrales y ecuaciones diferenciales estocásticas, con el fin de aprovechar ciertos puntos relacionados con los procesos de difusión. Comenzaremos con el concepto de integral estocástica en el sentido de Itô.

En el caso determinístico sabemos que la solución de un problema de valores iniciales

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t), \quad x_{t_0} = c,$$

donde f es una función continua, es equivalente a la solución de la ecuación integral

$$x_t = c + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\, ds.$$

De igual forma, el análisis de sistemas estocásticos dinámicos conduce con frecuencia a ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t) + G(X_t, t)\xi_t \tag{2.22}$$

donde ξ_t es un ruido blanco y f, G son funciones continuas. ξ_t no es un proceso estocástico usual, si bien su integral indefinida puede identificarse con el proceso de Wiener W_t como

$$W(t) = \int_0^t \xi_s\, ds$$

o, en notación simbólica, $dW(t) = \xi_t\, dt$.

En el mismo sentido que en el caso determinístico, la ecuación (2.22) puede transformarse por

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(x_s, s)\xi_s\, ds$$

donde c es una variable aleatoria arbitraria.

La primera integral puede entenderse como una integral de Riemann, mientras que la segunda merece una dedicación especial ya que es de carácter estocástico.

2.7.1. Integral estocástica en el sentido de Itô

Sea $\chi_{[a,b]}$ la función indicadora en el intervalo $[a,b]$. Para $0 \leq a < b \leq T$ se define su integral estocástica en el sentido de Itô como

$$\int_0^T \chi_{[a,b]}(t) dW(t) = W(b) - W(a),$$

mientras que si f es una función escalonada en $[t_0, T]$, es decir,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1}]}(t), \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

entonces

$$\int_0^T f(t)dW(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\left[W(t_{k+1}) - W(t_k)\right].$$

Notemos que el valor de f se toma en el extremo inferior de cada partición del intervalo, [5] mientras que la función f podría ser aleatoria.

Una función f que sea independiente de los incrementos $W(t+s) - W(t)$, $\forall s > 0$, se llama una función no anticipativa y depende estocásticamente de $W(u)$ para $u \leq t$, o sea, sólo del pasado. Observemos, además, que para una función escalonada no anticipativa, la integral $\int_0^t f(s)dW(s)$ es, a su vez, una función no anticipativa. Asimismo, asumiremos que los saltos de la función escalonada aleatoria f ocurren en tiempos no aleatorios.

Algunas propiedades importantes de la integral estocástica definida hasta ahora son: [6]

1. $\displaystyle\int_0^T (f(t) + g(t))\, dW(t) = \int_0^T f(t)dW(t) + \int_0^T g(t)dW(t)$
2. $\displaystyle\int_0^T cf(t)dW(t) = c\int_0^T f(t)dW(t)$
3. Si f y g satisfacen $\displaystyle\int_0^T \left(E[f^2(t)] + E[g^2(t)]\right) dt < \infty$, entonces
   - $\displaystyle E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$
   - $\displaystyle E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\int_0^T g(t)dW(t)\right] = \int_0^T E[f(t)g(t)]dt$

Si denotamos por $H_2[0,T]$ a la clase de funciones no anticipativas f tales que verifiquen

$$\int_0^T E[f^2(t)]dt < \infty,$$

se puede demostrar que para cada función $f \in H_2[0,T]$ existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones escalonadas tales que

$$\int_0^T |f(t) - g_n(t)|^2\, dt \lim_{n\to\ +\infty} \xrightarrow{c.s.} 0$$

mientras que la sucesión

$$\left\{\int_0^T g_n(s)dW(s)\right\}$$

converge casi seguro, de forma uniforme en $[0,T]$, a una función, que llamaremos $L(t)$.

[5] Si se hubiera tomado el punto medio estamos ante la integral estocástica de Stratonovich

[6] Las demostraciones se pueden ver, por ejemplo, en Arnold (1973), *Stochastic Differential Equations, Theory and applications.* John Wiley and Sons.

Puesto que $\int_0^T g_n(s)dW(s)$ es una función continua para cada n, y la convergencia es uniforme, si definimos

$$\int_0^T g_n(s)dW(s) = L(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

entonces la integral $\int_0^T g_n(s)dW(s)$ es una función continua casi seguro en t. Además, se puede probar que la integral anterior es independiente de la sucesión $\{g_n\}$.

Las siguientes expresiones suelen ser de utilidad, y su demostración puede ser consultada en Arnold (1973):

1. $\int_a^b W(t)dW(t) = \frac{1}{2}\left(W^2(b) - W^2(a)\right) - \frac{1}{2}(b-a)$.
2. Si f es una función determinística regular, entonces

$$\int_a^b f(t)dW(t) = W(b)f(b) - W(a)f(a) - \int_a^b W(t)f'(t)dt$$

2.7.2. Diferenciales estocásticas y fórmula de Itô

Sean a y b dos funciones pertenecientes a $H_2[0,T]$, y sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisfaga la expresión

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dW(t), \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T].$$

En tal caso diremos que el proceso $X(t)$ tiene diferencial estocástica asociada

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t). \tag{2.23}$$

Ejemplo 2.7.1. *Sea $X(t) = W^2(t)$, con $W(t)$ el procedo de Wiener estándar. Puesto que*

$$\int_{t_1}^{t_2} W(t)dW(t) = \frac{1}{2}\left(W^2(t_2) - W^2(t_1)\right) - \frac{1}{2}(t_2 - t_1),$$

entonces

$$W^2(t_2) - W^2(t_1) = 2\int_{t_1}^{t_2} W(t)dW(t) + (t_2 - t_1) = 2\int_{t_1}^{t_2} W(t)dW(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt$$

por lo que la diferencial de $W^2(t)$ es $dW^2(t) = dt + 2W(t)dW(t)$; esto es, de la forma (2.23) con $a(t) = 1$ y $b(t) = 2W(t)$.

Ejemplo 2.7.2. *Si f es una función determinística regular sabemos que*

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dW(t) = W(t_2)f(t_2) - W(t_1)f(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} W(t)f'(t)dt,$$

de donde

$$W(t_2)f(t_2) - W(t_1)f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dW(t) + \int_{t_1}^{t_2} W(t)f'(t)dt$$

por lo que la diferencial de $f(t)W(t)$ es

$$d\left(f(t)W(t)\right) = W(t)f'(t)dt + f(t)dW(t) = W(t)df(t) + f(t)dW(t),$$

esto es de la forma (2.23) con $a(t) = W(t)f'(t)$ y $b(t) = f(t)$.

Teorema 2.7.1. *(Regla del producto para diferenciales) Sean $dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dW(t)$, $i = 1, 2$, con a_i y b_i funciones pertenecientes a $H_2[t_0, T]$. Entonces*

$$d\left[X_1(t)X_2(t)\right] = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$

A partir del resultado anterior, y siguiendo un razonamiento por inducción, se puede deducir que

$$dW^m(t) = mW^{m-1}(t)dW(t) + \frac{m(m-1)}{2}W^{m-2}(t)dt, \quad m \geq 2,$$

de donde se puede obtener que la diferencial de un polinomio de $W(t)$ es

$$dP(W(t)) = P'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}P''(W(t))dt.$$

Además, como cualquier función f que sea dos veces diferenciable con continuidad puede ser aproximada uniformemente por sus derivadas f' y f'' sobre un intervalo acotado, se tiene que la expresión anterior es válida para cualquier función P que sea dos veces diferenciable con continuidad.

A continuación vamos a obtener la regla de la cadena para diferenciales estocásticas. Comenzaremos en primer lugar con funciones de la forma $\Phi(x, t) = \phi(x)g(t)$, donde g' y ϕ'' son funciones continuas. Con ello se tiene

$$\begin{aligned}
d\Phi(W(t), t) &= \phi(W(t))g'(t)dt + g(t)d\phi(W(t)) = \\
&= \phi(W(t))g'(t)dt + g(t)\left(\phi'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}\phi''(W(t))dt\right) = \\
&= \left(\phi(W(t))g'(t) + \frac{1}{2}g(t)\phi''(W(t))\right)dt + g(t)\phi'(W(t))dW(t) = \\
&= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(W(t), t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(W(t), t)\right)dt + \frac{\partial\Phi}{\partial W}(W(t), t)dW(t)
\end{aligned}$$

Puesto que cualquier función regular $\Phi(x, t)$ puede aproximarse sobre compactos de $\mathbb{R}^2$ for funciones del tipo $\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\phi_k(x)$, se concluye que la expresión anterior es válida para funciones regulares $\Phi(x, t)$.

Finalmente reemplazamos $W(t)$ por un proceso diferenciable cualquiera, dando origen a la conocida *Fórmula de Itô.*

Teorema 2.7.2. *(Fórmula de Itô). Sea $X(t)$ un proceso con diferencial estocástica*

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

con $a, b \in H_2[0, T]$, y sea $f(x, t)$ una función continua con derivadas parciales continuas. Entonces

$$\begin{aligned}
df(X(t), t) &= \left(\frac{\partial f(X(t), t)}{\partial t} + a(t)\frac{\partial f(X(t), t)}{\partial x} + \frac{b^2(t)}{2}\frac{\partial^2 f(X(t), t)}{\partial x^2}\right)dt + b(t)\frac{\partial f(X(t), t)}{\partial x}dW(t) = \\
&= \left(\frac{\partial f(X(t), t)}{\partial t} + \frac{b^2(t)}{2}\frac{\partial^2 f(X(t), t)}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f(X(t), t)}{\partial x}dX(t)
\end{aligned}$$

2.8. Ecuaciones diferenciales estocásticas. El caso lineal

La ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

viene determinada a partir de la ecuación integral de Itô

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(X(s),s)ds + \int_0^t b(X(s),s)dW(s), \tag{2.25}$$

de tal forma que una solución de (2.24) es una función no anticipativa $X(t)$ tal que (2.25) se verifica, siendo $|a|^{1/2}$ y b pertenecientes a $H_2[0,T]$.

El ejemplo más simple de ecuación diferencial estocástica es la ecuación

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(t)dt + b(t)dW(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

con a y b funciones determinísticas, y cuya solución es

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s). \tag{2.27}$$

Para clarificar la naturaleza de (2.27) vamos a calcular la distribución de $X(t)$, $\forall t$.

Teorema 2.8.1. *Consideremos la ecuación diferencial estocástica (2.26), con a y b funciones determinísticas, y con solución dada por (2.27), siendo x_0 una constante. Entonces:*

$$X(t) \rightsquigarrow N_1\left[x_0 + \int_0^t a(s)ds; \int_0^t b^2(s)ds\right].$$

Vamos a considerar ahora ecuaciones diferenciales estocásticas que puedan ser reducidas a (2.26) tras un cambio de variable, lo cual es de utilidad en múltiples ocasiones.

Sea el cambio de variable $\xi(t) = f(X(t),t)$, con $X(t)$ la solución de la ecuación de (2.24). Se puede demostrar, teniendo en cuenta ciertas propiedades como que $(dW(t))^2 = dt$ y $(dW(t))^n = 0$ $(n > 2)$, la siguiente extensión de la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} d\xi(t) = df(X(t),t) = &\left(\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t} + a(X(t),t)\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x} + \frac{b^2(X(t),t)}{2}\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x^2}\right)dt + \\ &+ b(X(t),t)\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}dW(t). \end{aligned}$$

Si suponemos que f tiene, para cada t, inversa g respecto de x, entonces $X(t) = g(\xi(t),t)$. Con ello, aplicando la fórmula de Itô se verifica

$$d\xi(t) = \overline{a}(\xi(t),t)dt + \overline{b}(\xi(t),t)dW(t), donde$$

$$\overline{a}(x,t) = \frac{\partial f(g(x,t),t)}{\partial t} + a(g(x,t),t)\frac{\partial f(g(x,t),t)}{\partial x} + \frac{b^2(g(x,t),t)}{2}\frac{\partial^2 f(g(x,t),t)}{\partial x^2} \tag{2.28}$$

$$\overline{b}(x,t) = b(g(x,t),t)\frac{\partial f(g(x,t),t)}{\partial x} \tag{2.29}$$

Por tanto, si existe un función $f = f(x,t)$ tal que, independientemente de x, se verifican las dos expresiones anteriores con $\overline{a}(x,t) = \overline{a}(t)$ y $\overline{b}(x,t) = \overline{b}(t)$, entonces, considerando $g(x,t) = x$, la ecuación (2.24) puede reducirse a (2.26) gracias a las relaciones anteriores.

Obtengamos ahora las condiciones para la reducibilidad.

En primer lugar, a partir de (2.29) se tiene

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\overline{b}(t)}{b(x,t)}, \tag{2.30}$$

mientras que, diferenciando[7] (2.28) respecto a x se tiene

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{b^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right] = 0. \tag{2.31}$$

Como, a partir de (2.30), se tiene

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x} = \frac{\overline{b}'(t)\, b(x,t) - \overline{b}(t)\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial t}}{b^2(x,t)}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\overline{b}(t)\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial x}}{b^2(x,t)},$$

sustituyendo ambas expresiones en (2.31), se obtiene

$$\frac{\overline{b}'(t)\, b(x,t) - \overline{b}(t)\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial t}}{b^2(x,t)} + \overline{b}(t)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,t)}{b(x,t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b(x,t)}{\partial x}\right] = 0$$

y, operando,

$$\frac{\overline{b}'(t)}{\overline{b}(t)} = b(x,t)\left[\frac{\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial t}}{b^2(x,t)} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2}\right]. \tag{2.32}$$

Puesto que el miembro izquierdo de (2.32) es independiente de x, a partir de dicha expresión se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(x,t)\left[\frac{\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial t}}{b^2(x,t)} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2}\right]\right\} = 0. \tag{2.33}$$

Ahora bien, la condición (2.33) también es suficiente para obtener la reducibilidad de las ecuaciones. En efecto, si es cierta entonces el lado derecho de (2.32) es independiente de x, por lo que $\overline{b}$ puede obtenerse por integración. En consecuencia, f se puede obtener a partir de (2.30).

Por otro lado, la ecuación (2.32) es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{b^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right] = 0$$

con lo cual la expresión entre corchetes es independiente de x y, con ello, $\overline{a}$ puede obtenerse a partir de (2.28) considerando $x = g(x,t)$ y $\overline{a}(x,t) = \overline{a}(t)$.

[7]Evidentemente, a la función f se le debe exigir admitir parciales segundas, así como las condiciones para verificar el Teorema de Schwartz

Ejemplo 2.8.1. *Sea* $\{X(t); t \geq 0\}$ *el proceso solución de la ecuación* $dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t)$, *con* a *y* b *constantes reales* ($b > 0$), *verificando además* $X(0) = x_0$.

Estudiemos si es posible encontrar una función $f = f(x,t)$ *tal que esa ecuación diferencial pueda transformarse en una de la forma (2.26).*

Es inmediato comprobar que la expresión entre corchetes de (2.33) es cero, por lo que $\overline{b}'(t) = 0$ *y así* $\overline{b}(t) = c$, *con* c *una constante. Con ello, a partir de (2.30) se verifica*

$$f(x,t) = \frac{c}{b}\ln(x) + V(t)$$

con V *una función que sólo depende de* t.

Además, considerando la expresión (2.28), se puede calcular $\overline{a}(t)$. *En efecto, como*

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{c}{bx} \quad y \quad \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{c}{bx^2},$$

entonces

$$\overline{a}(t) = V'(t) + ax\frac{c}{bx} + \frac{b^2x^2}{2}\left(-\frac{c}{bx^2}\right) = V'(t) + \frac{c}{b}\left(a - \frac{b^2}{2}\right).$$

En consecuencia, la ecuación diferencial estocástica de partida puede ser transformada en

$$dZ(t) = \left(V'(t) + \frac{c}{b}\left(a - \frac{b^2}{2}\right)\right)dt + c\,dW(t)$$

mediante la transformación

$$Z(t) = f(X(t),t) = \frac{c}{b}\ln(X(t)) + V(t).$$

Por lo tanto, como la solución de la anterior ecuación es

$$Z(t) = z_0 + \int_0^t \left(V'(s) + \frac{c}{b}\left(a - \frac{b^2}{2}\right)\right)ds + cW(t) = z_0 + V(t) - V(0) + \frac{c}{b}\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + cW(t),$$

entonces la solución de la ecuación de partida se obtiene sin más que aplicar el cambio de variable inverso; esto es,

$$X(t) = \exp\left(\frac{b(Z(t) - V(t))}{c}\right) = \exp\left(\frac{b}{c}(z_0 - V(0)) + \left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bW(t)\right).$$

Ahora bien, como la solución $X(t)$ *verifica* $X(0) = x_0$, *y* $Z(0) = z_0$ *y* $W(0) = 0$, *entonces*

$$x_0 = \exp\left(\frac{b}{c}(z_0 - V(0))\right)$$

de donde $V(0) = z_0 - \frac{c}{b}\ln(x_0)$. *Sustituyendo en la anterior expresión se concluye*

$$X(t) = x_0\exp\left(\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bW(t)\right).$$

2.8.1. Existencia y unicidad de solución

Es conocido que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, para asegurar la existencia y unicidad de solución se suelen imponer condiciones de tipo Lipschitz. Como una ecuación diferencial ordinaria es un caso particular del caso estocástico con $b = 0$, entonces es de esperar que para ecuaciones diferenciales estocásticas se dispongan de resultados similares. En ese sentido tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en Arnold (1973):

Teorema 2.8.2. *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW(t) \\ X(0) &= x_0, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $W(t)$ representa el proceso de Wiener estándar y x_0 es una variable aleatoria independiente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$. Supongamos que las funciones a y b están definidas y son medibles en $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ y verifican las siguientes condiciones: Existe una constante $K > 0$ tal que

- *(Condición de Lipschitz).* $|a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq K|x - y|$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- *(Restricción sobre el crecimiento).* $|a(x,t)|^2 + |b(x,t)|^2 \leq K\left(1 + |x|^2\right)$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces, la ecuación (2.34) tienen una única solución en $[t_0, T]$ y con valores en $\mathbb{R}$, continua con probabilidad uno, que satisface la condición inicial; esto es, si $X(t)$ e $Y(t)$ son soluciones de (2.34) con igual valor inicial x_0, entonces

$$P\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0\right) = 0.$$

A continuación mostramos algunos comentarios interesantes a la luz del resultado enunciado:

Comentario 2.8.1.

1. *El teorema sigue siendo válido si reemplazamos la condición de Lipschitz por una más general, a saber, para cada $N > 0$ existe una constante K_N tal que $\forall t \in [t_0, T]$, $|x| \leq N$ e $|y| \leq N$ se verifica $|a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq K_N|x - y|$*

2. *Para que la condición de Lipschitz del teorema (o la generalización de la nota anterior) se verifique es suficiente que las funciones a y b tengan derivadas de primer orden, respecto de x, continuas para cada valor $t \in [T_0, T]$ y que estén acotadas en $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ (o en $[t_0, T] \times |x| \leq N$ en el caso de la generalización).*

3. *En cuanto a la segunda condición del teorema (la del crecimiento), lo que hace es acotar las funciones a y b de forma uniforme respecto a $t \in [t_0, T]$ y permite, como mucho, un crecimiento lineal de dichas funciones respecto a x. Si esta condición no se verifica se produce el denominado fenómeno de explosión de la solución. Por lo tanto, esta condición asegura que, con probabilidad uno, la solución no explota en $[t_0, T]$, sea quien sea la condición inicial x_0.*

4. *Si las funciones a y b están definidas en $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}$, y las condiciones del teorema se verifican para cualquier subintervalo finito $[t_0, T]$ incluido en $[t_0, \infty)$, entonces la ecuación tiene una única solución en $[t_0, \infty)$, que se denomina solución global.*

2.8.2. Algunas propiedades de la solución

A continuación veremos algunas características de la solución de la ecuación diferencial estocástica (2.34). Comenzamos con su carácter markoviano.

Teorema 2.8.3. *Si la ecuación (2.34) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución, entonces la solución es, para cualquier condición inicial, un proceso de Markov en $[t_0, T]$. Además, si los coeficientes a y b son independientes de t en $[t_0, T]$, la solución es un proceso de Markov homogéneo, o sea, con probabilidades de transición estacionarias.*

Comentario 2.8.2. *Como caso particular, la solución, si existe, de una ecuación diferencial estocástica autónoma (los coeficientes no dependen de t) es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo para $t \geq t_0$*

Si además deseamos que el proceso sea de difusión hay que exigir nuevas condiciones sobre los coeficientes de la ecuación diferencial. Así tenemos,

Teorema 2.8.4. *Si la ecuación (2.34) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución y, además, las funciones a y b son continuas respecto a t, entonces la solución es un proceso de difusión con media infinitesimal $a(x, t)$ y varianza infinitesimal $b^2(x, t)$. En particular, la solución de una ecuación deiferencial estocástica autónoma es siempre un proceso de difusión homogéneo sobre $[t_0, \infty]$.*

2.8.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Una ecuación diferencial estocástica $dX(t) = f(X(t), t)dt + G(X(t), t)dW(t)$ se dice lineal si las funciones f y g sob funciones lineales en $X(t)$; esto es, la ecuación es de la forma

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\, dt + (B(t)X(t) + b(t))\, dW(t), \quad X(t_0) = x_0. \tag{2.35}$$

En el caso de que $a = b = 0$ se dice que la ecuación es homogénea, y si $B = 0$ se denomina lineal en sentido restringido.

Bajo condiciones no muy restrictivas, estas ecuaciones tienen solución única como indica el siguiente resultado, que se puede demostrar a partir del teorema de existencia y unicidad:

Teorema 2.8.5. *Consideremos la ecuación lineal (2.35), definida en $[t_0, T]$, y con condición inicial $X(t_0) = x_0$, independiente de $W(t) - W(t_0)$. Si las funciones A, a, B y b son medibles y acotadas en $[t_0, T]$, entonces la ecuación tiene una única solución en dicho intervalo. Además, si dicha condición se verifica en cualquier subintervalo de $[t_0, \infty)$, la ecuación tiene solución global en $[t_0, \infty)$.*

A continuación profundicemos un tanto en la forma de la solución , comenzando con la ecuación lineal en sentido restringido.

Para ello recordemos un poco lo que ocurre en los sistemas lineales determinísticos. En concreto, asociada a la ecuación homogénea $X'(t) = A(t)X(t) + a(t)$ está la denominada *matriz fundamental*, $\Phi(t) = \Phi(t, t_0)$, solución de la ecuación matricial[8]

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= A(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) &= I, \end{aligned} \tag{2.36}$$

[8]Si bien habitualmente consideraremos ecuaciones escalares, los resultados de este apartado los expondremos en el caso vectorial.

mientras que la solución, con valor inicial $X(t_0) = x_0$ puede escribirse como

$$X(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)\,ds\right]$$

De igual forma se tiene el siguiente resultado para la ecuación diferencial lineal estocástica en sentido restringido:

Teorema 2.8.6. *La solución de la ecuación $dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + B(t)dW(t)$, con solución inicial $X(t_0) = x_0$ es*

$$X(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)\,dW(s)\right],\ \forall t \in [t_0, T],$$

donde Φ es la matriz fundamental de la ecuación determinística $X'(t) = A(t)X(t)$.

En particular, si $A(t) = A$, entonces

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\left(a(s)ds + B(s)dW(s)\right) \tag{2.37}$$

y, en general,

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} A(u)\,du\right)[a(s)ds + B(s)dW(s)]\right] \tag{2.38}$$

Además, si $E[|x_0|^2] < \infty$ la solución tiene momentos de segundo orden y se pueden calcular de la siguiente forma:

Teorema 2.8.7. *Consideremos la ecuación $dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + B(t)dW(t)$, con solución inicial $X(t_0) = x_0$ y tal que $E[|x_0|^2] < \infty$. Entonces*

- *La función media del proceso, $m(t) = E[X(t)]$, es la solución de la ecuación diferencial*

  $$m'(t) = A(t)m(t) + a(t), \quad m(t_0) = E[x_0],$$

  o sea,

  $$m(t) = \Phi(t)\left[E[x_0] + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)\,ds\right] \tag{2.39}$$

- *La función covarianza, $K(s,t) = Cov[X(t), X(s)]$ verifica*

  $$K(s,t) = \Phi(s)\left[Cov[x_0] + \int_{t_0}^{Min(s,t)} \Phi^{-1}(u)B(u)B^t(u)\left(\Phi^{-1}(u)\right)^t\,du\right]\Phi^t(s). \tag{2.40}$$

  En particular, la varianza del proceso, $K(t) = K(t,t) = Cov[X(t)]$[9], verifica la ecuación

  $$K'(t) = A(t)K(t) + K(t)A(t)^t + B(t)B(t)^t, \quad K(t_0) = Cov[x_0].$$

En cuanto al carácter de la solución, que es un proceso de Markov, se verifica el siguiente resultado:

[9] Recordemos que estamos considerando, en general, el caso vectorial

Teorema 2.8.8. *La solución de la ecuación* $dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + B(t)dW(t)$*, con solución inicial* $X(t_0) = x_0$*, es un proceso gaussiano si y sólo si* x_0 *es normal o constante. El proceso tiene incrementos independientes si y sólo si* x_0 *es constante o* $A(t) = 0$*,* $\forall t \in [t_0, T]$ *(o sea,* $\Phi(t) = I$*,* $\forall t \in [t_0, T]$*). Además, el proceso es gaussiano y estacionario si la función* $A(t) = A$*,* $B(t) = B$ *y* $a(t) = 0$*,* $\forall t \in [t_0, T]$*, los autovalores de* A *tienen parte real negativa y* x_0 *es normal de media cero y covarianza* K*, con* K *la solución*

$$K = \int_0^\infty e^{At} B B^t e^{A^t\, t}\, dt$$

de la ecuación $AK + KA^t = -BB^t$*. En tal caso, el proceso verifica* $E[X(t)] = 0$ *y*

$$Cov[X(t), X(S)] = \begin{cases} e^{A(s-t)} K & s \geq t \geq t_0 \\ K e^{A^t (s-t)} & t \geq s \geq t_0 \end{cases}$$

Por último, y considerando el caso general (2.35), si las funciones A, B y a son continuas en el intervalo $[t_0, T]$, la solución $X(t)$ es un proceso de difusión con media infinitesimal $a(x,t) = A(t)x + a(t)$ y varianza infinitesimal $b(x,t) = (B(t)x + b(t))\,(B(t)x + b(t))^t$. Además, si $a(t) = b(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, T]$, el proceso es homogéneo en el tiempo.

Apéndice A

La función delta de Dirac

En diversos tipos de aplicaciones, como sistemas mecánicos, circuitos eléctricos, aparecen de forma natural funciones que tienen un valor muy grande sobre un intervalo de amplitud pequeña. Por ejemplo, el golpe de un martillo ejerce una fuerza muy grande en un intervalo de tiempo pequeño. Para tratar con fuerzas de esta naturaleza se emplean funciones *generalizadas* como la función delta introducida por A.M.Dirac.

Definición A.0.1. *La función delta de Dirac, que notaremos por $\delta(t)$, viene definida por las propiedades*

- $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$

Evidentemente, la función δ no es una función en el sentido clásico del análisis sino que constituye un ejemplo de lo que se llama funciones generalizadas. Intuitivamente se puede realizar un desarrollo de tipo empírico para justificar su existencia y empleo. Para ello consideremos una fuerza F que se aplica en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. El impulso generado por dicha fuerza es igual a $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$, pero la segunda ley de Newton dice que la suma de fuerzas sobre un sistema es igual a la cantidad de movimiento, o sea, la suma de las masas del sistema por la aceleración. Es decir

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{dv(t)}{dt}dt = mv(t_1) - mv(t_0)$$

Por tanto, el impulso es igual al incremento de la cantidad de movimiento.

Centrándonos en un ejemplo concreto, cuando un martillo golpea un objeto ejerce una fuerza sobre él (F_1) de tal forma que le transfiere una cantidad de movimiento al objeto en un periodo breve de tiempo, digamos $[0, t_1]$. Gráficamente podemos visualizar dicha cantidad de movimiento como el área bajo la curva F_1.

Si mantenemos la misma cantidad de movimiento, pero en intervalos de tiempo más cortos del tipo $[0, t_n]$, la fuerza media que se debe ejercer en dichos intervalos debe ser cada vez más grande para que la áreas se mantengan iguales. De esta forma, cuando tomamos una sucesión t_n que converja a cero, entonces la sucesión de funciones que representan las fuerzas ejercidas en $[0, t_n]$ converje a una función que es cero para $t \neq 0$ pero que debe valer ∞ cuando $t = 0$. Además, por el razonamiento anterior, las áreas bajo las curvas F_n deben tener un valor constante que podemos normalizar a uno, por lo que la integral de la función límite debe verificar tal característica. De esta forma se tiene, de forma empírica aunque o del todo riguroso, justificada la definición dada para la función delta de Dirac, que también recibe (por razones obvias) el nombre de función impulso.

Nota A.0.1. *Desplazando el argumento de la función se puede definir la función delta como aquella que verifica*

- $\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1.$

Algunas propiedades importantes de la función delta de Dirac son las siguientes:

1. Si f es una función continua en un intervalo que contenga al punto x_0 entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

y, en general,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\partial^n \delta(x - x_0)}{\partial x^n}dx = (-1)^n \left. \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right|_{x=x_0}$$

2. La transformada de Laplace de $\delta(x - x_0)$, $x \neq x_0$, viene dada por

$$\mathcal{L}(\delta(x - x_0)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\delta(x - x_0)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\delta(x - x_0)dx = e^{-sx_0}$$

3. La transformada de Fourier de $\delta(x - x_0)$, $x \neq x_0$, es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\delta(x - x_0)dx = e^{iux_0}$$

Con ello

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}e^{iux_0}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(x-x_0)}du$$

de donde, para $n \geq 1$ se tiene

$$\frac{\partial^n \delta(x - x_0)}{\partial x^n} = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u^n e^{-iu(x-x_0)}du$$

4. El siguiente razonamiento es sólo intuitivo. Para una exposición más rigurosa se debería considerar la teoría sobre funciones de distribución generalizadas.

Puesto que $\delta(x - x_0)$ es cero para $x < x_0$ y $x > x_0$ y como $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1$, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq x_0 \\ 0 & \text{si } t < x_0 \end{cases}$$

función que llamaremos $U(t - x_0)$, por lo que, tomando un significado amplio de la derivada, se tiene que $U'(t - x_0) = \delta(t - x_0)$. (Observemos que $U(t - x_0)$ se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria degenerada en x_0.

Apéndice B

Sobre la integrabilidad Lebesgue en $\mathbb{R}$

A continuación vamos a exponer algunas relaciones existentes, en $\mathbb{R}$, entre la integral de Lebesgue y la integral impropia de Riemann [1].

Notemos por $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ al espacio de funciones Lebesgue integrables en cualquier intervalo de extremos α y β, donde $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Además, dada $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$, notaremos $\int_\alpha^\beta f = \int f I_{(\alpha,\beta)}$ con I la función indicadora.

Teorema B.0.1. *Sea f una función localmente integrable Riemann en $[\alpha, \beta)$[2] donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta \leq +\infty$. Entonces f es integrable Lebesgue en $[\alpha, \beta)$ sí y sólo si la integral impropia de Riemann de f en $[\alpha, \beta)$ es absolutamente convergente (o sea, $|f|$ es impropiamente integrable Riemann en $[\alpha, \beta)$), en cuyo caso la integral de Lebesgue de f en $[\alpha, \beta)$ coincide con la integral impropia de Riemann de f en $[\alpha, \beta)$.*

Teorema B.0.2. *Sea $\phi : [\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua y distinta de cero en $[\alpha, \beta)$ y sea f una función continua en el intervalo $J = \phi([\alpha, \beta))$. Entonces f es Lebesgue integrable (resp. impropiamente integrable Riemann) en J sí y sólo si la función $(f \circ \phi)\phi'$ es integrable Lebesgue (resp. impropiamente integrable Riemann) en $[\alpha, \beta)$ y en tal caso se verifica*

$$\int_J f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))|\phi'(x)|dx$$

Teorema B.0.3. *Sea f una función continua en $[\alpha, \beta)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \leq +\infty$ y supongamos que H es una primitiva de f en $[\alpha, \beta)$. Se verifica*

1. *Si f tiene signo constante en $[\alpha, \beta)$, entonces $f \in \mathcal{L}[\alpha, \beta)$ sí y sólo si $H(\beta-)$ existe y es finito, en cuyo caso*
$$\int_\alpha^\beta f = H(\beta-) - H(\alpha)$$

2. *f es impropiamente integrable Riemann en $[\alpha, \beta)$ sí y sólo si $H(\beta-)$ existe y es finito, en cuyo caso*
$$\int_\alpha^\beta f = H(\beta-) - H(\alpha)$$

---

[1] Estas notas están tomadas de los textos siguientes:

- Aparicio, C. y Payá, R. *Análisis Matemático I.* Capítulo 7, páginas 358-377.
- Aparicio, C. y Pérez, J. *Integral de Lebesgue.* Capítulo 7, páginas 201-222.

[2] Ello quiere decir que f es integrable en cualquier intervalo cerrado $[c, d]$ incluido en $[\alpha, \beta)$

Ejemplo B.0.1. *Sea $\rho \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x^\rho$, $\forall x > 0$. Dicha función es continua y positiva y admite como primitiva la función $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\rho+1}}{\rho+1} & si\ \rho \neq 1 \\ \log(x) & si\ \rho = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\rho + 1 \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ y si $\rho + 1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Por el teorema B.0.3, si $\alpha > 0$ entonces $f \in \mathcal{L}(\alpha, +\infty)$ sí y sólo si $\rho < -1$, en cuyo caso

$$\int_\alpha^\beta x^\rho dx = -\frac{\alpha^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Sea ahora $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in [\dfrac{1}{\alpha}, +\infty)$. Es inmediato comprobar que $\phi\left(\left[\dfrac{1}{\alpha}, +\infty\right)\right) = (0, \alpha]$. Por el teorema B.0.2, y dado que f es positiva, $f \in \mathcal{L}(0, \alpha]$ sí y sólo si $f(\phi(x))\phi'(x) = -x^{-(\rho+2)}$ es Lebesgue integrable en $[\dfrac{1}{\alpha}, +\infty)$ lo cual, por el apartado anterior, es cierto sí y sólo si $\rho > -1$, en cuyo caso

$$\int_0^\alpha x^\rho dx = \frac{\alpha^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Por lo tanto podemos concluir que f no es Lebesgue integrable en $(0, +\infty)$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$.

Teorema B.0.4. *(Criterio de comparación). Sea f una función localmente integrable en $[\alpha, \beta)$. Supongamos que existe una función g Lebesgue integrable en $[\alpha, \beta)$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ casi por doquier en $[\alpha, \beta)$. Entonces f es Lebesgue integrable en $[\alpha, \beta)$.*

Ejemplo B.0.2. *Sea $\gamma > 0$ y tengamos en cuenta que dado $p \in \mathbb{N}$ se verifica $e^{\gamma x} \geq \dfrac{\gamma^p}{p!} x^p$, $\forall x > 0$. Notando $M = \dfrac{p!}{\gamma^p}$, se tiene $e^{-\gamma x} \leq M x^{-p}$, $\forall x > 0$. Dado $\rho \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que $-p + \rho < -1$ se tendrá $e^{-\gamma x} x^\rho \leq M x^{-p+\rho}$ por lo que, a partir del ejemplo B.0.1 y el teorema B.0.4, la función $g(x) = e^{-\gamma x} x^\rho$ es Lebesgue integrable en $[\alpha, +\infty)$ con $\alpha > 0$.*

Por otro lado, dado $\alpha > 0$ es claro que $e^{-\alpha\gamma} x^\rho \leq x^\rho e^{-\gamma x} \leq x^\rho$, $\forall x \in (0, \alpha]$ con lo cual la función g anterior es Lebesgue integrable en $(0, \alpha]$ sí y sólo si $\rho > -1$.

En resumen, $g(x) = e^{-\gamma x} x^\rho$, $\forall x > 0$, $\gamma > 0$ y $\rho \in \mathbb{R}$ verifica

1. *$g \in \mathcal{L}(\alpha, +\infty)$.*

2. *$g \in \mathcal{L}(0, \alpha)$ sí y sólo si $\rho > -1$.*

3. *$g \in \mathcal{L}(0, +\infty)$ sí y sólo si $\rho > -1$.*

Ejemplo B.0.3. *Dado que $e^{\gamma x} \geq \dfrac{\gamma^p}{p!} x^p$, $\forall x > 0$ y $\gamma > 0$, se tiene que dado $\rho \in \mathbb{R}$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $\rho + p > -1$. Por lo tanto, para ρ dado y esa elección de $p \in \mathbb{N}$ se tiene $e^{\gamma x} x^\rho \geq \dfrac{\gamma^p}{p!} x^{p+\rho}$. Con ello la función $g(x) = e^{\gamma x} x^\rho$ no es Lebesgue integrable en $[\alpha, +\infty)$.*

Por otro lado, $x^\rho < e^{\gamma x} x^\rho < e^{\gamma x} x^\rho$, $\forall x \in (0, \alpha]$ con $\alpha > 0$ por lo que g anterior es Lebesgue integrable en $(0, \alpha]$ sí y sólo si $\rho > -1$.

Teorema B.0.5. *(Criterio de comparación por paso al límite). Sean f y g funciones localmente integrables en $[\alpha, \beta)$. Supongamos que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta)$ y que existe el límite*

$$\lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} \frac{f(x)}{g(x)} := \frac{f}{g}(\beta-) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Entonces:

1. *Si $\frac{f}{g}(\beta-) > 0$, f es integrable en $[\alpha, \beta)$ sí y sólo si lo es g.*
2. *f es integrable en $[\alpha, \beta)$ si $\frac{f}{g}(\beta-) = 0$ y g es integrable en $[\alpha, \beta)$.*
3. *g es integrable en $[\alpha, \beta)$ si $\frac{f}{g}(\beta-) = +\infty$ y f es integrable en $[\alpha, \beta)$.*