

# Ejercicios Propuestos

Juan Rubio Cobeta

December 1, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Ejercicio 1</b>	<b>2</b>
1.1	Apartado a) . . . . .	2
1.2	Apartado b) . . . . .	4
1.3	Apartado c) . . . . .	5
1.4	Apartado d) . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ejercicio 2</b>	<b>9</b>
2.1	Apartado a) . . . . .	9
2.2	Apartado b) . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ejercicio 3</b>	<b>13</b>
3.1	Apartado a) . . . . .	13
3.2	Apartado b) . . . . .	14

# 1 Ejercicio 1

Sea  $\{X(t); t \geq t_0 > 0\}$  el proceso de difusión con momentos infinitesimales  $A_1(x, t) = -x/t$ ,  $A_2(x, t) = 1$ , definido en  $I = \mathbb{R}$ .

## 1.1 Apartado a)

Verificar que este proceso es transformable al proceso Wiener estándar, encontrando la transformación del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \bar{\Psi}(x, t) & y' &= \bar{\Psi}(y, \tau) \\ t' &= \Phi(t) & \tau' &= \Phi(\tau). \end{aligned}$$

y comprobar que su función de densidad de transición es

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{t}{\sqrt{2\pi \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}} \exp\left(-\frac{(xt - y\tau)^2}{2 \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}\right).$$

## Solución

### 1. Identificación de los momentos infinitesimales

El proceso de difusión  $\{X(t); t \geq t_0 > 0\}$  viene caracterizado por sus momentos infinitesimales dados en el enunciado:

$$A_1(x, t) = -\frac{x}{t}, \quad A_2(x, t) = 1.$$

### 2. Verificación de la condición de reducibilidad

Para que el proceso sea transformable al proceso de Wiener estándar, deben existir dos funciones continuas  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  que satisfagan la relación fundamental para los coeficientes de deriva y difusión:

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{A_2(x, t)}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(u, t) + \frac{\partial A_2(u, t)}{\partial t}}{(A_2(u, t))^{3/2}} du \right\}.$$

Sustituyendo  $A_1(x, t) = -x/t$  y  $A_2(x, t) = 1$  (cuyas derivadas parciales son nulas), y tomando  $z = 0$ :

$$-\frac{x}{t} = 0 + \frac{1}{2} \left\{ C_1(t) + \int_0^x \frac{C_2(t) \cdot 1 + 0}{1} du \right\}.$$

Simplificando la expresión:

$$-\frac{x}{t} = \frac{1}{2} C_1(t) + \frac{1}{2} C_2(t) x.$$

Igualando los coeficientes de los términos en  $x$  y los términos independientes, obtenemos el sistema:

$$\text{Términos en } x : \quad -\frac{1}{t} = \frac{1}{2} C_2(t) \implies C_2(t) = -\frac{2}{t},$$

$$\text{Término independiente:} \quad 0 = \frac{1}{2} C_1(t) \implies C_1(t) = 0.$$

La existencia de estas funciones confirma que el proceso es transformable al proceso de Wiener.

### 3. Obtención de la transformación

Calculamos las funciones de transformación  $\Phi(t)$  y  $\bar{\Psi}(x, t)$  utilizando las fórmulas integrales correspondientes.

*Cálculo de la transformación temporal  $\Phi(t)$ :*

$$t' = \Phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t \exp \left( - \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3.$$

Sustituyendo  $C_2(\theta) = -2/\theta$ :

$$\exp \left( - \int_{t_0}^s -\frac{2}{\theta} d\theta \right) = \exp (2 \ln s - 2 \ln t_0) = \left( \frac{s}{t_0} \right)^2.$$

Asumiendo constantes de integración canónicas ( $k_1/t_0^2 = 1, k_3 = 0, t_1 = 0$ ):

$$\Phi(t) = \int_0^t s^2 ds = \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{3}.$$

Por tanto:

$$t' = \frac{t^3}{3}, \quad \tau' = \frac{\tau^3}{3}.$$

*Cálculo de la transformación espacial  $\bar{\Psi}(x, t)$ :*

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) = \sqrt{k_1} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{\sqrt{A_2(u, t)}} du.$$

El factor exponencial es:

$$\exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t -\frac{2}{s} ds \right) = \exp (\ln t - \ln t_0) = \frac{t}{t_0}.$$

La integral espacial con  $A_2 = 1$  es simplemente  $x$ . Ajustando constantes:

$$\bar{\Psi}(x, t) = xt.$$

La transformación queda definida como:

$$\begin{aligned} x' &= xt, & y' &= y\tau, \\ t' &= \frac{t^3}{3}, & \tau' &= \frac{\tau^3}{3}. \end{aligned}$$

### 4. Obtención de la función de densidad de transición

La densidad de transición  $f(x, t|y, \tau)$  se relaciona con la densidad del proceso de Wiener estándar  $f_W$  mediante:

$$f(x, t|y, \tau) = f_W(x', t'|y', \tau') \cdot \left| \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \right|.$$

La densidad de transición del Wiener es:

$$f_W(x', t'|y', \tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t' - \tau')}} \exp \left( -\frac{(x' - y')^2}{2(t' - \tau')} \right).$$

Calculamos el Jacobiano y sustituimos las variables transformadas:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} = t, \quad (x' - y')^2 = (xt - y\tau)^2, \quad t' - \tau' = \frac{t^3 - \tau^3}{3}.$$

Finalmente:

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}} \exp\left(-\frac{(xt - y\tau)^2}{2 \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}\right) \cdot |t|.$$

Dado que  $t > 0$ , concluimos con la expresión solicitada:

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{t}{\sqrt{2\pi \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}} \exp\left(-\frac{(xt - y\tau)^2}{2 \left(\frac{t^3 - \tau^3}{3}\right)}\right).$$

## 1.2 Apartado b)

Si para el proceso Wiener estándar consideramos la barrera  $S_W(t) = a + bt'$ , verificar que las barreras  $S_X(t)$ , calculadas a partir de la transformación anterior, y para las cuales es posible obtener la densidad de tiempo de primer paso de  $X(t)$  a través de ellas son de la forma

$$S_X(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Comprobar que la densidad de tiempo de primer paso de  $X(t)$  a través de  $S_X(t)$  es

$$g(S_X(t), t|x_0, t_0) = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3}\right)}} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0t_0]^2}{2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3}\right)}\right), \quad x_0 \neq \frac{A}{t_0} + Bt_0^2.$$

**Indicación:** consultar el ejemplo 4.4.1 y seguir la misma metodología de trabajo.

## Solución

### 1. Determinación de la barrera transformada $S_X(t)$

Consideramos la barrera lineal para el proceso de Wiener estándar transformado  $W(t')$ :

$$S_W(t') = a + bt', \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando la transformación espacial inversa derivada del Teorema 4.3.3, donde  $x = x'/t$  y  $t' = t^3/3$ , imponemos la condición de paso por la barrera:

$$S_X(t) = \bar{\Psi}^{-1}(S_W(\Phi(t)), t) = \frac{S_W(t')}{t}.$$

Sustituyendo la expresión de  $S_W(t')$  y  $\Phi(t)$ :

$$S_X(t) = \frac{a + b(t^3/3)}{t} = \frac{a}{t} + \frac{b}{3}t^2.$$

Para que esta expresión coincida con la forma enunciada  $S_X(t) = \frac{A}{t} + Bt^2$ , identificamos los coeficientes:

$$A = a, \quad B = \frac{b}{3} \implies a = A, \quad b = 3B.$$

### 2. Cálculo de la densidad de tiempo de primer paso

Partimos de la relación entre densidades para procesos transformados:

$$g_X(S_X(t), t|x_0, t_0) = g_W(S_W(t'), t'|x'_0, t'_0) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}.$$

La densidad para el proceso de Wiener con barrera lineal es conocida:

$$g_W(\cdot) = \frac{|a + bt'_0 - x'_0|}{\sqrt{2\pi}(t' - t'_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{[a + bt' - x'_0]^2}{2(t' - t'_0)}\right).$$

Realizamos las sustituciones necesarias en función de las variables originales  $t, x_0$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} &= t^2, \\ t' - t'_0 &= \frac{t^3 - t_0^3}{3}, \\ x'_0 &= x_0 t_0, \\ a + bt'_0 - x'_0 &= A + 3B \left(\frac{t_0^3}{3}\right) - x_0 t_0 = A + Bt_0^3 - x_0 t_0, \\ a + bt' - x'_0 &= A + Bt^3 - x_0 t_0.\end{aligned}$$

Sustituimos estos términos en la ecuación general:

$$g_X = \frac{|A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0 t_0]^2}{2 \left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)}\right) \cdot t^2.$$

Para llegar a la expresión final, simplificamos el denominador del término pre-exponencial:

$$\left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)^{3/2} = \left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right) \sqrt{\frac{t^3 - t_0^3}{3}}.$$

Al sustituirlo, el factor  $1/3$  del término lineal pasa al numerador multiplicando:

$$\frac{t^2}{\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3)} = \frac{3t^2}{t^3 - t_0^3}.$$

Finalmente, obtenemos la densidad solicitada:

$$g(S_X(t), t | x_0, t_0) = \frac{3t^2 |A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{(t^3 - t_0^3) \sqrt{2\pi} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3}\right)} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0 t_0]^2}{2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3}\right)}\right).$$

Esta expresión es válida para  $x_0 \neq \frac{A}{t_0} + Bt_0^2$ .

### 1.3 Apartado c)

Para el proceso  $X(t)$ , escribir la forma que adopta el núcleo de la ecuación integral de Volterra que verifica la densidad de tiempo de primer paso a través de una barrera  $S(t)$ .

### Solución

El objetivo es determinar la forma explícita del núcleo  $\Psi(S(t), t | y, \tau)$  de la ecuación integral de Volterra de segunda especie. Utilizaremos la expresión general para procesos de difusión no homogéneos dada por el Teorema 4.3.5 de los apuntes:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{f(S(t), t | y, \tau)}{2} \left[ S'(t) - A_1(S(t), t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] + \frac{A_2(S(t), t)}{2} \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}.$$

## 1. Cálculo de los términos asociados a los momentos infinitesimales

Dados los momentos infinitesimales del proceso:

$$A_1(x, t) = -\frac{x}{t}, \quad A_2(x, t) = 1.$$

Evaluamos estos términos y sus derivadas en la barrera  $x = S(t)$ :

$$\begin{aligned} A_1(S(t), t) &= -\frac{S(t)}{t}, \\ A_2(S(t), t) &= 1, \\ \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en el primer término de la ecuación general (el término entre corchetes):

$$\left[ S'(t) - \left( -\frac{S(t)}{t} \right) + 0 \right] = S'(t) + \frac{S(t)}{t}.$$

## 2. Cálculo de la derivada espacial de la densidad de transición

La densidad de transición obtenida en el apartado a) es:

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{t}{\sqrt{2\pi\Sigma^2(t, \tau)}} \exp\left(-\frac{(xt - y\tau)^2}{2\Sigma^2(t, \tau)}\right), \quad \text{donde } \Sigma^2(t, \tau) = \frac{t^3 - \tau^3}{3}.$$

Calculamos la derivada parcial respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} = f(x, t|y, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{(xt - y\tau)^2}{2\Sigma^2(t, \tau)} \right].$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{(xt - y\tau)^2}{2\Sigma^2(t, \tau)} \right] = -\frac{1}{2\Sigma^2(t, \tau)} \cdot 2(xt - y\tau) \cdot t = -\frac{t(xt - y\tau)}{\Sigma^2(t, \tau)}.$$

Sustituimos  $\Sigma^2(t, \tau) = \frac{t^3 - \tau^3}{3}$ :

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} = -f(x, t|y, \tau) \frac{3t(xt - y\tau)}{t^3 - \tau^3}.$$

Evaluamos en la barrera  $x = S(t)$ :

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} = -f(S(t), t|y, \tau) \frac{3t(S(t)t - y\tau)}{t^3 - \tau^3}.$$

## 3. Construcción del núcleo $\Psi(S(t), t|y, \tau)$

Sustituimos los resultados obtenidos en la fórmula general:

$$\Psi(S(t), t|y, \tau) = \frac{f(S(t), t|y, \tau)}{2} \left[ S'(t) + \frac{S(t)}{t} \right] + \frac{1}{2} \left[ -f(S(t), t|y, \tau) \frac{3t(S(t)t - y\tau)}{t^3 - \tau^3} \right].$$

Extrayendo factor común  $\frac{1}{2}f(S(t), t|y, \tau)$ , obtenemos la forma final del núcleo:

$$\Psi(S(t), t|y, \tau) = \frac{1}{2}f(S(t), t|y, \tau) \left[ S'(t) + \frac{S(t)}{t} - \frac{3t(S(t)t - y\tau)}{t^3 - \tau^3} \right].$$

## 1.4 Apartado d)

A partir del apartado anterior, comprobar que las barreras para las cuales hay solución explícita para la ecuación integral, sin tener que resolverla, son del tipo

$$S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Para dichas barreras, escribir la forma explícita que adopta la densidad del tiempo de primer paso para este proceso. Comprobar que se llega al mismo resultado que en el apartado b) anterior.

## Solución

El objetivo es determinar para qué tipo de barreras la ecuación integral de Volterra admite una solución explícita inmediata, sin necesidad de resolver la integral, y calcular dicha densidad.

### 1. Condición para la existencia de solución explícita

La densidad del tiempo de primer paso satisface la ecuación integral:

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau.$$

Existe una solución explícita directa si el núcleo de la integral se anula idénticamente para todo  $t_0 \leq \tau < t$ . Es decir, busquemos  $S(t)$  tal que:

$$\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0, \quad \forall \tau < t.$$

### 2. Determinación de la forma de la barrera

Utilizando la expresión del núcleo obtenida en el apartado c), la condición de anulación  $\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0$  implica que el término entre corchetes debe ser cero (ya que la densidad  $f$  es positiva):

$$S'(t) + \frac{S(t)}{t} - \frac{3t(S(t)t - S(\tau)\tau)}{t^3 - \tau^3} = 0.$$

Para resolver esta ecuación, realizamos el cambio de variable  $U(t) = S(t)t$ , lo que implica  $S(t) = U(t)/t$  y  $S'(t) = U'(t)/t - U(t)/t^2$ . Sustituyendo:

$$\left( \frac{U'(t)}{t} - \frac{U(t)}{t^2} \right) + \frac{U(t)}{t^2} - \frac{3t(U(t) - U(\tau))}{t^3 - \tau^3} = 0.$$

Simplificando los términos  $U(t)/t^2$  y multiplicando por  $t$ :

$$U'(t) = \frac{3t^2(U(t) - U(\tau))}{t^3 - \tau^3}.$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo  $\tau$ . Proponemos una solución polinómica en  $t^3$  de la forma  $U(t) = A + Bt^3$ :

- Lado izquierdo:  $U'(t) = 3Bt^2$ .
- Lado derecho:  $\frac{3t^2([A+Bt^3]-[A+B\tau^3])}{t^3-\tau^3} = \frac{3t^2(B(t^3-\tau^3))}{t^3-\tau^3} = 3Bt^2$ .

La igualdad se cumple, por lo que la solución es válida. Recuperamos  $S(t)$ :

$$S(t) = \frac{U(t)}{t} = \frac{A + Bt^3}{t} = \frac{A}{t} + Bt^2.$$

Queda demostrado que las barreras son del tipo enunciado.

### 3. Cálculo de la densidad explícita

Cuando el núcleo se anula, la ecuación integral se reduce a  $g(S(t), t|x_0, t_0) = |2\Psi(S(t), t|x_0, t_0)|$ . Evaluamos el núcleo desde  $(x_0, t_0)$  usando la expresión del apartado c):

$$2\Psi = f(S(t), t|x_0, t_0) \left[ S'(t) + \frac{S(t)}{t} - \frac{3t(S(t)t - x_0 t_0)}{t^3 - t_0^3} \right].$$

Calculamos el término entre corchetes, sabiendo que  $S(t)t = A + Bt^3$  y  $S'(t) + S(t)/t = 3Bt$ :

$$\begin{aligned} [\dots] &= 3Bt - \frac{3t(A + Bt^3 - x_0 t_0)}{t^3 - t_0^3} \\ &= 3t \left[ \frac{B(t^3 - t_0^3) - (A + Bt^3 - x_0 t_0)}{t^3 - t_0^3} \right] \\ &= 3t \left[ \frac{-(A + Bt_0^3 - x_0 t_0)}{t^3 - t_0^3} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo este factor y la densidad de transición  $f(S(t), t|x_0, t_0)$ :

$$g = \left| \frac{t}{\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)}} \exp \left( -\frac{(A + Bt^3 - x_0 t_0)^2}{2 \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)} \right) \cdot \frac{-3t(A + Bt_0^3 - x_0 t_0)}{t^3 - t_0^3} \right|.$$

Agrupando los términos algebraicos fuera de la exponencial:

$$\frac{t \cdot 3t|A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)}(t^3 - t_0^3)} = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} \right)}}.$$

Finalmente obtenemos:

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} \right)}} \exp \left( -\frac{[A + Bt^3 - x_0 t_0]^2}{2 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} \right)} \right).$$

Este resultado coincide exactamente con el obtenido en el apartado b).

## 2 Ejercicio 2

El proceso del ejemplo anterior es un caso particular del proceso *Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos*, el cual fue considerado en el tema 3 (ver apuntes) de forma general y con un caso particular (en el caso del ejercicio anterior se ha considerado  $g(t) = 1/t$ ).

### 2.1 Apartado a)

Para el proceso en general, con  $g$  una función continua, calcular la expresión del núcleo de la ecuación integral de Volterra para la densidad de tiempo de primer paso a través de una barrera  $S(t)$  derivable y comprobar que la expresión es

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[ S'(t) + S(t) \left( g(t) - \frac{\exp \left( 2 \int_{\tau}^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_{\tau}^t \exp \left( 2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right) + y \frac{\exp \left( \int_{\tau}^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_{\tau}^t \exp \left( 2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right]$$

### Solución

El objetivo es deducir la expresión analítica del núcleo  $\Psi(S(t), t | y, \tau)$  para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck generalizado con factores exógenos y comprobar que coincide con la fórmula dada.

#### 1. Caracterización del Proceso

El proceso de difusión  $\{X(t); t \geq t_0\}$  se define a través de sus momentos infinitesimales, generalizando el caso del ejercicio anterior:

$$A_1(x, t) = -g(t)x, \quad A_2(x, t) = 1,$$

donde  $g(t)$  es una función continua.

#### 2. Ecuación general del núcleo

Utilizamos la fórmula general del núcleo para la ecuación integral de Volterra de segunda especie (Teorema 4.3.5), válida para procesos de difusión no homogéneos:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{f(S(t), t | y, \tau)}{2} \left[ S'(t) - A_1(S(t), t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] + \frac{A_2(S(t), t)}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}.$$

Sustituyendo los momentos infinitesimales y sus derivadas ( $A_1(S(t), t) = -g(t)S(t)$  y  $\partial_x A_2 = 0$ ):

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) [S'(t) + g(t)S(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}.$$

#### 3. Obtención de la densidad de transición

El proceso obedece a la Ecuación Diferencial Estocástica  $dX_t = -g(t)X_t dt + dW_t$ . La solución condicionada  $X(\tau) = y$  es un proceso gaussiano con media  $\mu(t)$  y varianza  $V(t)$ :

*Cálculo de la media:*

$$\mu(t) = y \exp \left( - \int_{\tau}^t g(\theta) d\theta \right).$$

*Cálculo de la varianza:* Utilizando la propiedad de los procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados:

$$V(t) = \int_{\tau}^t \exp \left( -2 \int_s^t g(\theta) d\theta \right) ds.$$

Reescribimos el integrando separando los límites para facilitar la factorización posterior:

$$\exp \left( -2 \int_s^t g(\theta) d\theta \right) = \frac{\exp \left( 2 \int_\tau^s g(\theta) d\theta \right)}{\exp \left( 2 \int_\tau^t g(\theta) d\theta \right)}.$$

Por tanto:

$$V(t) = \exp \left( -2 \int_\tau^t g(\theta) d\theta \right) \int_\tau^t \exp \left( 2 \int_\tau^s g(\theta) d\theta \right) ds.$$

La densidad de transición es:

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left( -\frac{(x - \mu(t))^2}{2V(t)} \right).$$

#### 4. Cálculo de la derivada espacial y sustitución

Calculamos la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x$  evaluada en la barrera  $S(t)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=S(t)} = -f(S(t), t | y, \tau) \frac{S(t) - \mu(t)}{V(t)}.$$

Sustituimos en la expresión del núcleo:

$$\Psi = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[ S'(t) + g(t)S(t) - \frac{S(t) - \mu(t)}{V(t)} \right].$$

Para simplificar el término  $\frac{S(t) - \mu(t)}{V(t)}$ , definimos:

$$E(t) = \exp \left( \int_\tau^t g(\theta) d\theta \right), \quad H(t) = \int_\tau^t \exp \left( 2 \int_\tau^s g(\theta) d\theta \right) ds.$$

Entonces  $\mu(t) = y/E(t)$  y  $V(t) = H(t)/E(t)^2$ . Sustituyendo:

$$\frac{S(t) - \mu(t)}{V(t)} = \frac{S(t) - \frac{y}{E(t)}}{\frac{H(t)}{E(t)^2}} = \frac{S(t)E(t)^2 - yE(t)}{H(t)} = S(t) \frac{E(t)^2}{H(t)} - y \frac{E(t)}{H(t)}.$$

Llevamos esto a la ecuación del núcleo:

$$\Psi = \frac{1}{2} f \left[ S'(t) + g(t)S(t) - S(t) \frac{E(t)^2}{H(t)} + y \frac{E(t)}{H(t)} \right].$$

Agrupando términos en  $S(t)$  y recuperando la forma integral de  $E(t)$  y  $H(t)$ :

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[ S'(t) + S(t) \left( g(t) - \frac{E(t)^2}{H(t)} \right) + y \frac{E(t)}{H(t)} \right].$$

Sustituyendo explícitamente las integrales, obtenemos la expresión final solicitada:

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) & \left[ S'(t) + S(t) \left( g(t) - \frac{\exp \left( 2 \int_\tau^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_\tau^t \exp \left( 2 \int_\tau^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right) + \right. \\ & \left. + y \frac{\exp \left( \int_\tau^t g(\theta) d\theta \right)}{\int_\tau^t \exp \left( 2 \int_\tau^s g(\theta) d\theta \right) ds} \right]. \end{aligned}$$

## 2.2 Apartado b)

A partir del apartado anterior, comprobar que las barreras para las cuales hay solución explícita para la ecuación integral sin tener que resolverla son el tipo

$$S(t) = \exp\left(-\int g(t) dt\right) \left[A + B \int \exp\left(2 \int g(t) dt\right) dt\right]$$

Para dichas barreras, escribir la forma explícita que adopta la densidad del tiempo de primer paso para este proceso. Comprobar que cuando  $h(t) = 1/t$ , se llega a las mismas barreras obtenidas en el ejercicio anterior.

## Solución

El objetivo es determinar la familia de barreras  $S(t)$  para las cuales el núcleo de la ecuación integral se anula (permitiendo una solución explícita) en el caso general, calcular dicha densidad y verificar la consistencia con el ejercicio anterior.

### 1. Condición de anulación del núcleo

Para que exista una solución explícita directa, el núcleo  $\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau)$  debe anularse para todo  $\tau < t$ . Utilizando la expresión del apartado a) e igualando a cero el término entre corchetes:

$$S'(t) + S(t) \left( g(t) - \frac{\exp\left(2 \int_{\tau}^t g(\theta) d\theta\right)}{\int_{\tau}^t \exp\left(2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta\right) ds} \right) + S(\tau) \frac{\exp\left(\int_{\tau}^t g(\theta) d\theta\right)}{\int_{\tau}^t \exp\left(2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta\right) ds} = 0.$$

Para simplificar la notación, definimos el factor integrante  $\mathcal{E}(t)$  y la integral acumulada  $K(t)$ :

$$\mathcal{E}(t) = \exp\left(\int g(t) dt\right), \quad K(t) = \int \mathcal{E}(t)^2 dt = \int \exp\left(2 \int g(t) dt\right) dt.$$

Las propiedades de las integrales definidas se expresan como:

$$\exp\left(\int_{\tau}^t g(\theta) d\theta\right) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}(\tau)}, \quad \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int_{\tau}^s g(\theta) d\theta\right) ds = \frac{K(t) - K(\tau)}{\mathcal{E}(\tau)^2}.$$

Sustituyendo en la condición de anulación y simplificando  $\mathcal{E}(\tau)^2$ :

$$S'(t) + g(t)S(t) - \frac{S(t)\mathcal{E}(t)^2}{K(t) - K(\tau)} + \frac{S(\tau)\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(\tau)}{K(t) - K(\tau)} = 0.$$

Reordenando términos:

$$S'(t) + g(t)S(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{K(t) - K(\tau)} [S(t)\mathcal{E}(t) - S(\tau)\mathcal{E}(\tau)].$$

### 2. Resolución de la Ecuación Diferencial

Realizamos el cambio de variable  $U(t) = S(t)\mathcal{E}(t)$ . Derivando respecto a  $t$ :

$$U'(t) = S'(t)\mathcal{E}(t) + S(t)\mathcal{E}'(t) = \mathcal{E}(t)[S'(t) + g(t)S(t)].$$

Sustituyendo en la ecuación simplificada:

$$\frac{U'(t)}{\mathcal{E}(t)} = \frac{\mathcal{E}(t)}{K(t) - K(\tau)} [U(t) - U(\tau)] \implies \frac{U'(t)}{\mathcal{E}(t)^2} = \frac{U(t) - U(\tau)}{K(t) - K(\tau)}.$$

Dado que  $K'(t) = \mathcal{E}(t)^2$ , tenemos  $\frac{U'(t)}{K'(t)} = \frac{U(t)-U(\tau)}{K(t)-K(\tau)}$ . Esta igualdad implica que la razón de cambio es constante, digamos  $B$ :

$$U'(t) = BK'(t) \implies U(t) = A + BK(t).$$

Recuperando  $S(t) = U(t)\mathcal{E}(t)^{-1}$ , obtenemos la forma explícita de la barrera:

$$S(t) = \exp\left(-\int g(t) dt\right) \left[A + B \int \exp\left(2 \int g(t) dt\right) dt\right].$$

### 3. Forma explícita de la densidad de primer paso

La densidad es  $g(t) = 2|\Psi(S(t), t|x_0, t_0)|$ . Evaluamos el núcleo simplificado desde  $(x_0, t_0)$ :

$$= \frac{\mathcal{E}(t)}{K(t) - K(t_0)} [x_0\mathcal{E}(t_0) - (A + BK(t_0))].$$

La densidad de transición  $f$  es gaussiana con varianza  $V(t) = \frac{K(t)-K(t_0)}{\mathcal{E}(t)^2}$  y media  $\mu(t) = \frac{x_0\mathcal{E}(t_0)}{\mathcal{E}(t)}$ . Multiplicando  $f$  por el corchete (en valor absoluto):

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{\mathcal{E}(t)^2 |A + BK(t_0) - x_0\mathcal{E}(t_0)|}{(K(t) - K(t_0))\sqrt{2\pi(K(t) - K(t_0))}} \exp\left(-\frac{[A + BK(t) - x_0\mathcal{E}(t_0)]^2}{2(K(t) - K(t_0))}\right).$$

### 4. Comprobación para el caso $g(t) = 1/t$

Si  $g(t) = 1/t$ , entonces  $\mathcal{E}(t) = t$  y  $K(t) = t^3/3$ . Sustituyendo en la barrera general:

$$S(t) = \frac{1}{t} \left[A + B\frac{t^3}{3}\right] = \frac{A}{t} + \frac{B}{3}t^2.$$

Esto coincide con las barreras obtenidas en el Ejercicio 1 ( $S(t) = A/t + Bt^2$ , redefiniendo la constante  $B$ ). Igualmente, la densidad coincide al sustituir estos valores.

### 3 Ejercicio 3

Si consideramos el proceso del ejercicio 1:

#### 3.1 Apartado a)

Comprobar que la función  $k(x, t) = \alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right)$  verifica la condición 4.33 del teorema 4.4.1, por lo que puede construirse un proceso de difusión  $Y(t)$  con momentos infinitesimales calculados a partir de 4.31 y 4.32 y con función de densidad calculada a partir de 4.26. Comprobar que dichos momentos son

$$A_1(x, t) = -\left[\frac{x}{t} + \frac{\beta t \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right)}{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right)}\right] \quad A_2(x, t) = 1,$$

mientras que la función de densidad de transición para  $Y(t)$  es

$$f_Y(x, t|x_0, t_0) = \frac{t}{\sqrt{2\pi(\frac{t^3-t_0^3}{3})}} \frac{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right)}{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0\right]\right)} \exp\left(-\frac{(xt - x_0 t_0)^2}{2(\frac{t^3-t_0^3}{3})}\right).$$

### Solución

Consideramos el proceso base  $X(t)$  del ejercicio 1, con momentos infinitesimales  $\alpha_1(x, t) = -x/t$  y  $\alpha_2(x, t) = 1$ . El objetivo es verificar que la función  $k(x, t)$  cumple la condición necesaria para generar un nuevo proceso  $Y(t)$  por factorización, y calcular sus características.

#### 1. Verificación de la condición del Teorema 4.4.1

La función dada es:

$$k(x, t) = \alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right).$$

Para simplificar la notación, definimos  $E(x, t) = \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right)$ , de modo que  $k(x, t) = \alpha + \beta E(x, t)$ . La condición 4.33 del teorema establece que  $k$  debe satisfacer la ecuación parabólica:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \alpha_1(x, t) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_2(x, t) \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales necesarias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x} &= \beta E(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{t^3}{6} - xt\right) = -t\beta E(x, t), \\ \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (-t\beta E(x, t)) = -t\beta(-t)E(x, t) = t^2\beta E(x, t), \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= \beta E(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{t^3}{6} - xt\right) = \beta E(x, t) \left(-\frac{3t^2}{6} - x\right) = -\beta E(x, t) \left(\frac{t^2}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Sustituimos en el lado izquierdo de la ecuación diferencial (LHS):

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left[-\beta E(x, t) \left(\frac{t^2}{2} + x\right)\right] + \left(-\frac{x}{t}\right) [-t\beta E(x, t)] + \frac{1}{2}(1) [t^2\beta E(x, t)] \\ &= -\frac{t^2}{2}\beta E(x, t) - x\beta E(x, t) + x\beta E(x, t) + \frac{t^2}{2}\beta E(x, t). \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\text{LHS} = \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) \beta E(x, t) + (-x + x) \beta E(x, t) = 0.$$

La condición se verifica idénticamente, garantizando la existencia del proceso  $Y(t)$ .

## 2. Cálculo de los Momentos Infinitesimales

Aplicamos las fórmulas de transformación 4.31 y 4.32:

*Varianza infinitesimal:*

$$A_2(x, t) = \alpha_2(x, t) = 1.$$

*Media infinitesimal:*

$$A_1(x, t) = \alpha_1(x, t) + \frac{1}{k(x, t)} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \alpha_2(x, t).$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$A_1(x, t) = -\frac{x}{t} + \frac{1}{\alpha + \beta E(x, t)} (-t \beta E(x, t)) \cdot 1.$$

Reagrupando y extrayendo el signo negativo:

$$A_1(x, t) = - \left[ \frac{x}{t} + \frac{\beta t \exp \left( - \left[ \frac{t^3}{6} + xt \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t^3}{6} + xt \right] \right)} \right].$$

## 3. Cálculo de la Densidad de Transición

La densidad de  $Y(t)$  se obtiene mediante la relación de factorización 4.26, siendo  $\phi$  la densidad del proceso base  $X(t)$ :

$$f_Y(x, t | x_0, t_0) = \frac{k(x, t)}{k(x_0, t_0)} \phi(x, t | x_0, t_0).$$

Sustituyendo las expresiones explícitas:

$$f_Y = \frac{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t^3}{6} + xt \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0 \right] \right)} \cdot \frac{t}{\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)}} \exp \left( - \frac{(xt - x_0 t_0)^2}{2 \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)} \right).$$

Reordenando para coincidir con el enunciado:

$$f_Y(x, t | x_0, t_0) = \frac{t}{\sqrt{2\pi \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)}} \frac{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t^3}{6} + xt \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0 \right] \right)} \exp \left( - \frac{(xt - x_0 t_0)^2}{2 \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)} \right).$$

### 3.2 Apartado b)

Comprobar que para este nuevo proceso, la densidad de tiempo de primer paso a través de la barrera

$$S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

es

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{3t^2 |A + Bt_0^3 - x_0 t_0|}{(t^3 - t_0^3) \sqrt{2\pi \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)}} \frac{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t^3}{6} + Bt^3 + A \right] \right)}{\alpha + \beta \exp \left( - \left[ \frac{t_0^3}{6} + x_0 t_0 \right] \right)} \exp \left( - \frac{[A + Bt^3 - x_0 t_0]^2}{2 \left( \frac{t^3 - t_0^3}{3} \right)} \right).$$

## Solución

El objetivo es determinar la densidad de tiempo de primer paso  $g_Y(S(t), t|x_0, t_0)$  para el proceso  $Y(t)$  a través de la barrera  $S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2$ , utilizando los resultados obtenidos para el proceso base  $X(t)$ .

### 1. Fundamento Teórico

Aplicando el Teorema 4.4.2, las densidades de tiempo de primer paso a través de la misma barrera  $S(t)$  verifican:

$$g_Y(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{k(S(t), t)}{k(x_0, t_0)} g_X(S(t), t|x_0, t_0).$$

### 2. Elementos Previos

Del Ejercicio 1 (apartados b y d), conocemos la densidad de tiempo de primer paso del proceso base  $X(t)$  para la barrera dada:

$$g_X(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi\left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)}} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0t_0]^2}{2\left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)}\right).$$

Del apartado 3a), tenemos la función de transformación:

$$k(x, t) = \alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + xt\right]\right).$$

### 3. Cálculo del factor de transformación

Evalúamos la función  $k(x, t)$  en los puntos de interés.

Denominador (punto inicial):

$$k(x_0, t_0) = \alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t_0^3}{6} + x_0t_0\right]\right).$$

Numerador (en la barrera): Sustituimos  $x = S(t) = \frac{A}{t} + Bt^2$  en el exponente:

$$\frac{t^3}{6} + S(t)t = \frac{t^3}{6} + \left(\frac{A}{t} + Bt^2\right)t = \frac{t^3}{6} + A + Bt^3.$$

Por tanto:

$$k(S(t), t) = \alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + Bt^3 + A\right]\right).$$

### 4. Construcción de la densidad $g_Y$

Multiplicamos la densidad base  $g_X$  por el cociente de las funciones  $k$ :

$$g_Y = \left[ \frac{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + Bt^3 + A\right]\right)}{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t_0^3}{6} + x_0t_0\right]\right)} \right] g_X(S(t), t|x_0, t_0).$$

Sustituyendo  $g_X$  y reordenando los términos para coincidir con la estructura del enunciado:

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{3t^2|A + Bt_0^3 - x_0t_0|}{(t^3 - t_0^3)\sqrt{2\pi\left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)}} \frac{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t^3}{6} + Bt^3 + A\right]\right)}{\alpha + \beta \exp\left(-\left[\frac{t_0^3}{6} + x_0t_0\right]\right)} \exp\left(-\frac{[A + Bt^3 - x_0t_0]^2}{2\left(\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)}\right).$$

Queda comprobado el resultado.