Ejercicios Propuestos

Juan Rubio Cobeta

October 11, 2025

Ejercicio 1:

Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ variables aleatorias tales que $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y_i] = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Var}[X_i] = \mathrm{Var}[Y_i] = \sigma_i^2 < \infty$, $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[Y_i Y_j] = \mathbb{E}[X_i Y_j] = 0$, $\forall i \neq j$. Sea el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ definido por

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} [X_j \cos(\lambda_j t) + Y_j \sin(\lambda_j t)] \ , \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Proporcionar una condición suficiente sobre las variables X_i e Y_i para que el proceso sea débilmente estacionario.

Solución

Cálculo de la Función Media

La función media $\mu_Z(t) = \mathbb{E}[Z(t)]$ se calcula por linealidad de la esperanza.

$$\begin{aligned}
\mu_Z(t) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} (X_j \cos(\lambda_j t) + Y_j \sin(\lambda_j t))\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{E}[X_j] \cos(\lambda_j t) + \mathbb{E}[Y_j] \sin(\lambda_j t)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} ((0) \cos(\lambda_j t) + (0) \sin(\lambda_j t)) = 0
\end{aligned}$$

La función media del proceso es constante e igual a cero: $\boldsymbol{\mu_Z(t) = 0}$.

Cálculo de la Función de Covarianza

Dado que la media es cero, la función de covarianza es $K_Z(t,s) = \mathbb{E}[Z(t)Z(s)]$.

$$K_Z(t,s) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} [X_j \cos(\lambda_j t) + Y_j \sin(\lambda_j t)]\right)\left(\sum_{k=1}^{n} [X_k \cos(\lambda_k s) + Y_k \sin(\lambda_k s)]\right)\right]$$

Expandiendo el producto y aplicando la linealidad de la esperanza, obtenemos:

$$K_Z(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}[X_j X_k] \cos(\lambda_j t) \cos(\lambda_k s) + \mathbb{E}[X_j Y_k] \cos(\lambda_j t) \sin(\lambda_k s) + \ldots)$$

Los términos de la suma son nulos cuando $\boldsymbol{j \neq k}$ debido a las condiciones de incorrelación dadas. Por lo tanto, solo sobreviven los términos donde $\boldsymbol{j = k}$. La doble sumatoria se reduce a una suma simple:

$$K_Z(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_j\cos(\lambda_j t) + Y_j\sin(\lambda_j t))(X_j\cos(\lambda_j s) + Y_j\sin(\lambda_j s))\right]$$

Expandiendo el producto para $j = k$:

$$\begin{aligned} K_Z(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \Big(& \mathbb{E}[X_j^2]\cos(\lambda_j t)\cos(\lambda_j s) + \mathbb{E}[X_jY_j]\cos(\lambda_j t)\sin(\lambda_j s) \\ & + \mathbb{E}[Y_jX_j]\sin(\lambda_j t)\cos(\lambda_j s) + \mathbb{E}[Y_j^2]\sin(\lambda_j t)\sin(\lambda_j s)\Big) \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbb{E}[X_j^2] = \mathrm{Var}(X_j) = \sigma_j^2$ y $\mathbb{E}[Y_j^2] = \mathrm{Var}(Y_j) = \sigma_j^2$. El término $\mathbb{E}[X_jY_j]$ no es necesariamente cero. Agrupando términos:

$$\begin{aligned} K_Z(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \Big[& \sigma_j^2\left(\cos(\lambda_j t)\cos(\lambda_j s) + \sin(\lambda_j t)\sin(\lambda_j s)\right) \\ & + \mathbb{E}[X_jY_j]\left(\cos(\lambda_j t)\sin(\lambda_j s) + \sin(\lambda_j t)\cos(\lambda_j s)\right)\Big] \end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas para $\cos(A - B)$ y $\sin(A + B)$, la expresión se simplifica a:

$$K_Z(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sigma_j^2\cos(\lambda_j(t-s)) + \mathbb{E}[X_jY_j]\sin(\lambda_j(t+s))\right]$$

Esta es la función de covarianza del proceso.

Condición Suficiente para Estacionariedad Débil

Un proceso es débilmente estacionario si su media es constante y su función de covarianza $K_Z(t,s)$ depende únicamente de la diferencia $\tau = t - s$.

1. **Media:** $\mu_Z(t) = 0$, que es constante. Esta condición se cumple.
2. **Covarianza:** La función $K_Z(t,s)$ que hemos calculado tiene dos componentes:
   - Un término $\sum \sigma_j^2\cos(\lambda_j(t-s))$, que sí depende solo de $t - s$.
   - Un término $\sum \mathbb{E}[X_jY_j]\sin(\lambda_j(t+s))$, que depende de la suma $t + s$.

Para que el proceso sea débilmente estacionario, el segundo término, que viola la condición, debe ser cero para todo t y s. La única manera de asegurar esto es que los coeficientes sean nulos. Por lo tanto, la condición adicional requerida es:

$$\mathbb{E}[X_jY_j] = 0, \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}$$

Esto significa que X_j y Y_j deben ser incorrelacionadas para el mismo índice j.

Conclusión: Una condición suficiente para que el proceso $Z(t)$ sea débilmente estacionario es que se cumplan las hipótesis del enunciado y, adicionalmente, que $\boldsymbol{\mathbb{E}[X_jY_j] = 0}$ para todo j. En otras palabras, la condición $\mathbb{E}[X_jY_k] = 0$ debe ser cierta para todos los pares de índices (j,k), sin excepción.

Si esta condición se cumple, la función de covarianza se convierte en:

$$K_Z(t,s) = C(t-s) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\cos(\lambda_j(t-s))$$

y el proceso es, en efecto, débilmente estacionario.

Ejercicio 2:

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal de media cero y varianza uno. Sea $\{Z(t); t > 0\}$ el proceso estocástico definido por $Z(t) = (X_1 + X_2)t$. Se pide estudiar sus propiedades.

Solución

Definimos la variable aleatoria $Y = X_1 + X_2$. Siendo $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d., la suma es también normal, con $\mathbb{E}[Y] = 0$ y $\mathrm{Var}(Y) = 1 + 1 = 2$. Así, $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ y el proceso es $Z(t) = Yt$.

Funciones de media y covarianza

Media.

$$\mu_Z(t) = \mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[Yt] = t\,\mathbb{E}[Y] = t \cdot 0 = 0$$

Covarianza. Como la media es cero, $C_Z(s,t) = \mathbb{E}[Z(s)Z(t)]$.

$$C_Z(s,t) = \mathbb{E}[(Ys)(Yt)] = st\,\mathbb{E}[Y^2]$$

Dado que $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$, tenemos $\mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}(Y) = 2$.

$$C_Z(s,t) = 2st$$

Funciones características, de momentos y cumulantes

Para un t fijo, $Z(t) = Yt$ se distribuye como una $\mathcal{N}(t \cdot 0, t^2 \cdot 2)$, es decir, $Z(t) \sim \mathcal{N}(0, 2t^2)$.

- **Función Característica:** $\phi_{Z(t)}(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right) = e^{-t^2u^2}$.
- **Función Generadora de Momentos:** $M_{Z(t)}(u) = \exp\left(\mu u + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right) = e^{t^2u^2}$.
- **Función Generadora de Cumulantes:** $K_{Z(t)}(u) = \ln(M_{Z(t)}(u)) = t^2u^2$.
- **Momentos de orden k:** Para $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2t^2)$, los momentos $\mu_k = \mathbb{E}[Z(t)^k]$ son:

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ (2t^2)^{k/2}(k-1)!! & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Proceso Gaussiano y distribuciones finito-dimensionales

El vector $(Z(t_1), \ldots, Z(t_n)) = Y \cdot (t_1, \ldots, t_n)$ es una transformación lineal de una variable aleatoria normal Y. Por tanto, el vector tiene una distribución normal multivariante y el proceso es Gaussiano.

Densidades de transición

Dado $Z(s) = z_s$, tenemos $Y = z_s/s$. Entonces $Z(t) = Yt = (z_s/s)t$. El valor futuro está determinado. La distribución condicional es una delta de Dirac, $\delta(z_t - z_s t/s)$. Por tanto, no existen densidades de transición en el sentido de funciones ordinarias.

Continuidad

Continuidad Estocástica. Se cumple si $\lim_{s\to t} P(|Z(t) - Z(s)| > \epsilon) = 0$.

$$P(|Yt - Ys| > \epsilon) = P\left(|Y| > \frac{\epsilon}{|t-s|}\right) \xrightarrow[s\to t]{} 0$$

El proceso es estocásticamente continuo.

Continuidad Muestral. Una trayectoria es $z(t) = (x_1 + x_2)t$, que es una función lineal y, por tanto, continua. El proceso tiene trayectorias continuas.

Proceso de Markov

Un proceso Gaussiano es de Markov si su covarianza $C(s,t)$ es factorizable para $s \leq t$. Aquí, $C(s,t) = 2st = (2s)(t)$. Se factoriza con $f(s) = 2s$ y $g(t) = t$. Por lo tanto, el proceso es de Markov.

Proceso de incrementos independientes

Consideremos dos incrementos en intervalos no solapados, $I_1 = Z(t_2) - Z(t_1) = Y(t_2 - t_1)$ y $I_2 = Z(t_4) - Z(t_3) = Y(t_4 - t_3)$, con $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Su covarianza es:

$$\text{Cov}(I_1, I_2) = \mathbb{E}[I_1 I_2] = (t_2 - t_1)(t_4 - t_3)\mathbb{E}[Y^2] = 2(t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \neq 0$$

Como la covarianza no es nula, los incrementos no son independientes. El proceso no es de incrementos independientes.

Ejercicio 3:

Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. Para $t_1 < t_2 < t_3$ demostrar que

$$\mathbb{E}\left[W(t_2) \mid W(t_1) = x_1, W(t_3) = x_3\right] = x_1 + \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1).$$

Solución:

Para resolver este ejercicio, vamos a utilizar la teoría de procesos gaussianos y la proyección ortogonal en el espacio L^2. El vector $(W(t_1), W(t_2), W(t_3))$ sigue una distribución normal multivariante, con la matriz de covarianza $\Sigma_{ij} = \min\{t_i, t_j\}$.

Sabemos que la esperanza condicional de un proceso gaussiano dado otros valores es una función lineal de las variables condicionadas. Por lo tanto, se puede escribir:

$$\mathbb{E}\left[W(t_2) \mid W(t_1), W(t_3)\right] = aW(t_1) + bW(t_3),$$

donde a y b son constantes que se determinan a partir de las covarianzas.

A partir de las propiedades de los procesos de Wiener, tenemos que la covarianza entre $W(t_1)$, $W(t_2)$, y $W(t_3)$ es:

$$\mathbb{E}[W(t_1)W(t_2)] = t_1, \quad \mathbb{E}[W(t_2)W(t_3)] = t_2, \quad \mathbb{E}[W(t_1)W(t_3)] = t_1.$$

El error de la proyección debe ser ortogonal a las componentes $W(t_1)$ y $W(t_3)$, lo que lleva a las siguientes ecuaciones:

$$0 = \mathbb{E}[W(t_2)W(t_1)] - a\mathbb{E}[W(t_1)^2] - b\mathbb{E}[W(t_3)W(t_1)] = t_1 - at_1 - bt_1,$$
$$0 = \mathbb{E}[W(t_2)W(t_3)] - a\mathbb{E}[W(t_1)W(t_3)] - b\mathbb{E}[W(t_3)^2] = t_2 - at_1 - bt_3.$$

De la primera ecuación obtenemos que $a + b = 1$. Sustituyendo esta relación en la segunda ecuación, obtenemos:

$$t_2 - (1-b)t_1 - bt_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}, \quad a = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}.$$

Por lo tanto, la esperanza condicional es:

$$\mathbb{E}\left[W(t_2) \mid W(t_1), W(t_3)\right] = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}W(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}W(t_3).$$

Finalmente, sustituyendo $W(t_1) = x_1$ y $W(t_3) = x_3$, obtenemos la solución:

$$\mathbb{E}\left[W(t_2) \mid W(t_1) = x_1, W(t_3) = x_3\right] = x_1 + \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1),$$

lo que completa la demostración.

Ejercicio 4:

Sea $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ un proceso puente Browniano y definimos

$$Y(t) = (1+t)\,B\left(\frac{t}{1+t}\right), \quad t \geq 0.$$

Demostrar que $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Wiener.

Solución

Para demostrar que $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener, debemos verificar las tres propiedades que lo definen:

1. $Y(0) = 0$.
2. $\{Y(t)\}$ es un proceso Gaussiano.
3. Su función de media es $\mathbb{E}[Y(t)] = 0$ y su función de covarianza es $\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) = \min(s,t)$.

Para esta demostración, utilizaremos las propiedades conocidas de un puente Browniano $\{B(t) : t \in [0,1]\}$: es un proceso Gaussiano con $\mathbb{E}[B(t)] = 0$ y $\mathrm{Cov}(B(s), B(t)) = \min(s,t) - st$. Además, $B(0) = 0$.

Verificación de las propiedades

1. Condición inicial. Evaluamos el proceso en $t = 0$:

$$Y(0) = (1+0)B\left(\frac{0}{1+0}\right) = 1 \cdot B(0)$$

Dado que $B(t)$ es un puente Browniano, sabemos que $B(0) = 0$. Por lo tanto, $Y(0) = 0$.

2. Proceso Gaussiano. Un puente Browniano $\{B(t)\}$ es un proceso Gaussiano. El proceso $\{Y(t)\}$ se define mediante una transformación de $B(t)$. Para cualquier conjunto finito de tiempos $t_1, \ldots, t_n$, las variables aleatorias $Y(t_1), \ldots, Y(t_n)$ son una transformación lineal de las variables $B(u_1), \ldots, B(u_n)$ (donde $u_i = t_i/(1+t_i)$), las cuales tienen una distribución normal multivariante. Una transformación lineal de un vector Gaussiano es también un vector Gaussiano. Por lo tanto, $\{Y(t)\}$ es un proceso Gaussiano.

3. Media y Covarianza.

Media. Calculamos el valor esperado de $Y(t)$:

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[(1+t)B\left(\frac{t}{1+t}\right)\right] = (1+t)\mathbb{E}\left[B\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]$$

La media de un puente Browniano es cero para todo $t \in [0,1]$. Así,

$$\mathbb{E}[Y(t)] = (1+t) \cdot 0 = 0$$

Covarianza. Calculamos la covarianza de $Y(s)$ y $Y(t)$. Como la media es cero, $\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) = \mathbb{E}[Y(s)Y(t)]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) &= \mathbb{E}\left[(1+s)B\left(\frac{s}{1+s}\right)(1+t)B\left(\frac{t}{1+t}\right)\right] \\
&= (1+s)(1+t)\mathbb{E}\left[B\left(\frac{s}{1+s}\right)B\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]
\end{aligned}$$

Sean $u = \frac{s}{1+s}$ y $v = \frac{t}{1+t}$. La expresión en la esperanza es la covarianza del puente Browniano:

$$\mathbb{E}[B(u)B(v)] = \mathrm{Cov}(B(u), B(v)) = \min(u, v) - uv$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que $s \leq t$. La función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ es creciente para $x \geq 0$, por lo que $s \leq t \implies u \leq v$. Entonces, $\min(u, v) = u = \frac{s}{1+s}$. Sustituyendo esto:

$$\mathbb{E}[B(u)B(v)] = \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{s}{1+s} - \frac{st}{(1+s)(1+t)}$$

Ahora, sustituimos este resultado en la expresión de la covarianza de Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) &= (1+s)(1+t)\left[\frac{s}{1+s} - \frac{st}{(1+s)(1+t)}\right] \\
&= (1+s)(1+t)\frac{s}{1+s} - (1+s)(1+t)\frac{st}{(1+s)(1+t)} \\
&= s(1+t) - st \\
&= s + st - st \\
&= s
\end{aligned}$$

Dado que asumimos $s \leq t$, este resultado es $s = \min(s, t)$.

Conclusión

El proceso $\{Y(t) : t \geq 0\}$ satisface las tres propiedades requeridas: $Y(0) = 0$, es un proceso Gaussiano, tiene media nula y su función de covarianza es $\min(s, t)$. Por lo tanto, $\{Y(t)\}$ es un proceso de Wiener.

Ejercicio 5

Sean $m(t), h_1(t), h_2(t)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$. Supongamos que $h_i(t)$, $i = 1, 2$ son funciones positivas y $h_2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso gaussiano con media $m(t)$ y función de covarianza dada por $C_X(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$, donde $s \vee t = \max(s,t)$ y $s \wedge t = \min(s,t)$. Demostrar que ese proceso puede escribirse en la forma $X(t) = m(t) + h_2(t)W(r(t))$ donde $r(t) = h_1(t)/h_2(t)$ y $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener estándar. ¿Es de Markov? Aplicar este resultado al proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Solución

Parte 1: Representación del Proceso

Para demostrar que $X(t)$ puede representarse como $Y(t) = m(t) + h_2(t)W(r(t))$, debemos verificar que ambos procesos, al ser Gaussianos, tienen la misma función de media y de covarianza.

Media. La media de $X(t)$ es $\mathbb{E}[X(t)] = m(t)$. La media de $Y(t)$ es:

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[m(t) + h_2(t)W(r(t))] = m(t) + h_2(t)\mathbb{E}[W(r(t))]$$

Como $\mathbb{E}[W(u)] = 0$ para un proceso de Wiener estándar, tenemos $\mathbb{E}[Y(t)] = m(t)$. Las medias coinciden.

Covarianza. La covarianza de $X(t)$ es $C_X(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$. Para $Y(t)$, la covarianza es:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) &= \mathbb{E}[(Y(s) - m(s))(Y(t) - m(t))] \\ &= \mathbb{E}[h_2(s)W(r(s)) \cdot h_2(t)W(r(t))] \\ &= h_2(s)h_2(t)\mathbb{E}[W(r(s))W(r(t))]\end{aligned}$$

Usando $\mathbb{E}[W(u)W(v)] = \min(u, v)$, obtenemos:

$$\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) = h_2(s)h_2(t)\min(r(s), r(t))$$

Para que esta representación sea válida, la función $r(t) = h_1(t)/h_2(t)$ debe ser creciente. Asumiendo esto, tomemos $s \leq t$. Entonces $s \wedge t = s$, $s \vee t = t$ y $\min(r(s), r(t)) = r(s)$. La igualdad de covarianzas requiere:

$$h_1(s)h_2(t) = h_2(s)h_2(t)r(s)$$

Dividiendo por $h_2(t) \neq 0$, obtenemos $h_1(s) = h_2(s)r(s)$, lo que confirma que $r(s) = h_1(s)/h_2(s)$. Por lo tanto, la representación es correcta, condicionada a que $r(t)$ sea creciente.

Parte 2: Propiedad de Markov

Un proceso Gaussiano es de Markov si para $s \leq t$, su función de covarianza puede ser factorizada como $C(s,t) = f(s)g(t)$. Para el proceso $X(t)$, si tomamos $s \leq t$:

$$C_X(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t) = h_1(s)h_2(t)$$

Esta expresión se ajusta a la forma requerida con $f(s) = h_1(s)$ y $g(t) = h_2(t)$. Por lo tanto, **el proceso es de Markov**.

Parte 3: Aplicación al Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) estacionario de media cero tiene una función de covarianza:

$$C_{OU}(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t-s|}$$

Para $s \leq t$, tenemos $|t-s| = t-s$, por lo que:

$$C_{OU}(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta(t-s)} = \left(\frac{\sigma^2}{2\theta} e^{\theta s}\right)\left(e^{-\theta t}\right)$$

Esta expresión coincide con la forma $h_1(s)h_2(t)$ si definimos:

$$h_1(t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{\theta t} \quad \text{y} \quad h_2(t) = e^{-\theta t}$$

Ahora, definimos y verificamos la función $r(t)$:

$$r(t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \frac{(\sigma^2/2\theta)e^{\theta t}}{e^{-\theta t}} = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{2\theta t}$$

Para verificar si es creciente, calculamos su derivada:

$$r'(t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot (2\theta) e^{2\theta t} = \sigma^2 e^{2\theta t}$$

Dado que $\sigma^2 > 0$, la derivada $r'(t)$ es siempre positiva, por lo que $r(t)$ es estrictamente creciente. La condición se cumple, y podemos aplicar la representación de la Parte 1 (con $m(t) = 0$):

$$X_{OU}(t) = h_2(t) W(r(t)) = e^{-\theta t} W\left(\frac{\sigma^2}{2\theta} e^{2\theta t}\right)$$

Esta es la representación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un movimiento Browniano con cambio de tiempo.