RELACIÓN DE PROBLEMAS (Tema 4):

Estimación en sistemas lineales con observaciones inciertas

1. Consideremos el sistema con observaciones inciertas definido en el Tema 4:

$$\begin{array}{l} x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + \Gamma(k+1,k)w(k), \quad k \geq 0; \quad x(0) = x_0 \\ z(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0 \end{array}$$

verificando las siguientes hipótesis:

- El estado inicial, x_0, es un vector aleatorio n-dimensional gaussiano con media cero y matriz de covarianzas $E[x_0 x_0^T] = P_0$.
- El proceso $\{w(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión ruido blanco gaussiana, centrada, con matrices de covarianzas $E[w(k)w^T(k)] = Q(k),\ k \geq 0$.
- El ruido multiplicativo $\{\gamma(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, con $P(\gamma(k) = 1) = p(k)$.
- El proceso $\{v(k);\ k \geq 0\}$ es un ruido blanco gaussiano, centrado y con covarianzas $E[v(k)v^T(k)] = R(k),\ k \geq 0$, siendo $R(k)$ una matriz definida positiva.
- El estado inicial x_0 y los ruidos $\{w(k);\ k \geq 0\}, \{v(k);\ k \geq 0\}, \{\gamma(k);\ k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

(a) Demostrar que la matriz de covarianzas, $\Pi(k) = E[\widetilde{z}(k/k-1)\widetilde{z}^T(k/k-1)]$, del proceso innovación verifica

$$\begin{array}{rcl} \Pi(k) & = & p(k)(1-p(k))H(k)D(k)H^T(k) + p^2(k)H(k)P\left(k/k-1\right)H^T(k) + R(k) \\ \Pi(0) & = & p(0)H(0)P_0H^T(0) + R(0), \end{array}$$

donde $D(k) = E[x(k)x^T(k)]$ y $P(k/k-1) = E\left[\widetilde{x}\left(k/k-1\right)\widetilde{x}^T\left(k/k-1\right)\right]$ vienen dadas por

$$\begin{array}{rcl} D(k) & = & \Phi(k,k-1)D(k-1)\Phi^T(k,k-1) + \Gamma(k,k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k,k-1) \\ D(0) & = & P_0, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(k/k-1) = \Phi(k,k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k,k-1) \\ \qquad\qquad\qquad + \Gamma(k,k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k,k-1), \quad k > 0, \\ P(0/-1) = P_0. \end{array}$$

siendo $P(k/k) = E\left[\widetilde{x}\left(k/k\right)\widetilde{x}^T\left(k/k\right)\right]$.

(b) Utilizando el Lema de Proyecciones Ortogonales, deducir el algoritmo recursivo para el problema de suavizamiento punto fijo lineal.

(c) Escribir el ciclo computacional a seguir para la obtención del filtro y el suavizador punto fijo y realizar un programa en Matlab considerando el siguiente sistema con observaciones inciertas:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 0.95x(k) + w(k), \ k \geq 0; \quad x(0) = x_0 \\ z(k) &= \gamma(k)x(k) + v(k), \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

donde x_0, es una variable gaussiana con media cero y varianza $P_0 = 1$, el ruido $\{w(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión blanca gaussiana, centrada con varianzas $Q(k) = 0.1,\ \forall k \geq 0$, el ruido multiplicativo $\{\gamma(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, con $P(\gamma(k) = 1) = p = 0.5$ y $\{v(k);\ k \geq 0\}$ es un proceso ruido blanco gaussiano, centrado y con varianzas $R(k) = 0.5,\ \forall k \geq 0$.

(d) Para el sistema con observaciones inciertas del apartado anterior y considerando 50 iteraciones, representar en una misma gráfica una trayectoria del estado, las correspondientes observaciones y estimaciones de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 2$. Representar en otra gráfica las varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 1,\ 2,\ 4$. Comentar todos los resultados.

(e) Hacer una gráfica con las varianzas de los errores de filtrado considerando distintos valores de la probabilidad p y comentar los resultados.

2. Sea $\{x(k);\ k \geq 0\}$ un proceso estocástico escalar definido mediante la relación

$$x(k+1) = (-1)^{2k+1} x(k), \quad k \geq 0$$

donde x_0, es una variable gaussiana con media 0 y varianza 1.

Supongamos que disponemos de observaciones de este proceso de la forma

$$z(k) = \gamma(k) x(k) + v(k), \qquad k \geq 0$$

donde el ruido multiplicativo $\{\gamma(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, con $P\left(\gamma(k) = 1\right) = p$ y el ruido aditivo $\{v(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión blanca gaussiana, centrada y con varianzas $E[v^2(k)] = 0.5,\ k \geq 0$.

(a) Representar los 20 primeros valores de dos trayectorias del proceso $\{x(k);\ k \geq 0\}$ y sus correspondientes valores observados, considerando distintos valores de la probabilidad p; comentar los resultados.

(b) Escribir el algoritmo de filtrado y el algoritmo de suavizamiento punto fijo y hacer un programa en Matlab para dichos algoritmos.

(c) Considerando $p = 0.5$ y 20 iteraciones de los algoritmos, representar en una misma gráfica una trayectoria del estado, las correspondientes observaciones y estimaciones filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 2$. Hacer otra gráfica con las varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 1,\ 2,\ 4$. Comentar todos los resultados.

(d) Hacer una gráfica con las varianzas de los errores de filtrado considerando distintos valores de la probabilidad p y comentar los resultados.