1. Notas sobre la esperanza y la matriz de varianzas-covarianzas de un vector aleatorio

Definición 1.1. *Dado un vector aleatorio* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^t$*, se define su esperanza matemática como el vector* $\mathrm{E}[\mathbf{x}] = (\mathrm{E}[x_1], \ldots, \mathrm{E}[x_p])^t$

A partir de la definición anterior son inmediatas las siguientes conclusiones:

- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{c}_{p\times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{x}+\mathbf{c}] = \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{c}$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{p\times 1}$ son dos vectores aleatorios, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{x}+\mathbf{y}] = \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathrm{E}[\mathbf{y}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{p\times 1}$ son dos vectores aleatorios y $\mathbf{A}_{n\times p}$ y $\mathbf{B}_{n\times p}$ son dos matrices de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{y}] = \mathbf{A}\,\mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{B}\,\mathrm{E}[\mathbf{y}]$.
- Como consecuencia del apartado anterior, si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{a}_{p\times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{a}^t\mathbf{x}] = \mathbf{a}^t\,\mathrm{E}[\mathbf{x}]$.

Definición 1.2. *Sea* $\mathbf{X} = (x_{ij})$*,* $i = 1, \ldots n$*;* $j = 1, \ldots, p$ *una matriz aleatoria, esto es, todas sus componentes* x_{ij} *son variables aleatorias unidimensionales. Se define la esperanza matemática de* $\mathbf{X}$ *como la matriz cuyas componentes son las correspondientes esperanzas de las variables* x_{ij}*. O sea* $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = (\mathrm{E}[x_{ij}])$*,* $i = 1, \ldots n$*;* $j = 1, \ldots, p$*.*

A partir de la definición anterior son inmediatas las siguientes conclusiones:

- Si $\mathbf{X}_{n\times p}$ es una matriz aleatoria y $\mathbf{C}_{n\times p}$ es una matriz de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{X}+\mathbf{C}] = \mathrm{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{C}$.
- Si $\mathbf{X}_{n\times p}$ e $\mathbf{Y}_{n\times p}$ son dos matrices aleatorias, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}] = \mathrm{E}[\mathbf{X}] + \mathrm{E}[\mathbf{Y}]$.
- Si $\mathbf{X}_{n\times p}$ e $\mathbf{Y}_{q\times p}$ son dos matrices aleatorias y $\mathbf{A}_{s\times n}$ y $\mathbf{B}_{s\times q}$ son dos matrices de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathbf{Y}] = \mathbf{A}\,\mathrm{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{B}\,\mathrm{E}[\mathbf{Y}]$.
- Si $\mathbf{X}_{n\times p}$ es una matriz aleatoria y si $\mathbf{A}_{s\times n}$, $\mathbf{B}_{p\times l}$ y $\mathbf{C}_{s\times l}$ son tres matrices de constantes, entonces $\mathrm{E}[\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}\,\mathrm{E}[\mathbf{X}]\mathbf{B} + \mathbf{C}$.

A partir de la definición anterior podemos introducir la definición de matriz de varianzas-covarianzas para un vector aleatorio.

Definición 1.3. *Sean* $\mathbf{x}_{p\times 1}$ *e* $\mathbf{y}_{q\times 1}$ *dos vectores aleatorios. Se define la covarianza entre ambos vectores, que notaremos por* $\mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$*, como la esperanza de la matriz aleatoria* $(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{y}-\mathrm{E}[\mathbf{y}])^t$*.*

Ahondando un poco en la anterior definición, observemos que

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{E}[(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{y}-\mathrm{E}[\mathbf{y}])^t] =$$

$$= \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} x_1 - \mathrm{E}[x_1] \\ \vdots \\ x_i - \mathrm{E}[x_i] \\ \vdots \\ x_p - \mathrm{E}[x_p] \end{pmatrix} (y_1 - \mathrm{E}[y_1], \ldots, y_j - \mathrm{E}[y_j], \ldots, y_q - \mathrm{E}[y_q])\right] =$$

$$= \mathrm{E}\begin{bmatrix} (x_1-\mathrm{E}[x_1])(y_1-\mathrm{E}[y_1]) & \cdots & (x_1-\mathrm{E}[x_1])(y_j-\mathrm{E}[y_j]) & \cdots & (x_1-\mathrm{E}[x_1])(y_q-\mathrm{E}[y_q]) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_i-\mathrm{E}[x_i])(y_1-\mathrm{E}[y_1]) & \cdots & (x_i-\mathrm{E}[x_i])(y_j-\mathrm{E}[y_j]) & \cdots & (x_i-\mathrm{E}[x_i])(y_q-\mathrm{E}[y_q]) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_p-\mathrm{E}[x_p])(y_1-\mathrm{E}[y_1]) & \cdots & (x_p-\mathrm{E}[x_p])(y_j-\mathrm{E}[y_j]) & \cdots & (x_p-\mathrm{E}[x_p])(y_q-\mathrm{E}[y_q]) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}[x_1,y_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_1,y_j] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_1,y_q] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[x_i,y_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_i,y_j] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_i,y_q] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[x_p,y_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_p,y_i] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_p,y_q] \end{pmatrix}$$

Veamos algunas propiedades y consecuencias inmediatas de la definición anterior:

- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{q\times 1}$ son dos vectores aleatorios, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathrm{E}[\mathbf{x}\mathbf{y}^t] - (\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathrm{E}[\mathbf{y}])^t$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{q\times 1}$ son dos vectores aleatorios y si $\mathbf{a}_{p\times 1}$ y $\mathbf{b}_{q\times 1}$ son dos vectores de constantes, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{y}-\mathbf{b}] = \mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{q\times 1}$ son dos vectores aleatorios y $\mathbf{A}_{s\times p}$ y $\mathbf{B}_{t\times q}$ son dos matrices de constantes, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{B}\mathbf{y}] = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\mathbf{B}^t$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ e $\mathbf{y}_{q\times 1}$ son dos vectores aleatorios y si $\mathbf{a}_{p\times 1}$ y $\mathbf{b}_{q\times 1}$ son dos vectores de constantes, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{a}^t\mathbf{x},\mathbf{b}^t\mathbf{y}] = \mathbf{a}^t\,\mathrm{Cov}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\mathbf{b}$.

En el caso particular de que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tenemos la matriz de varianzas-covarianzas del vector aleatorio $\mathbf{x}$.

Definición 1.4. *Sea $\mathbf{x}_{p\times 1}$ un vector aleatorio p-dimensional. Se define la matriz de varianzas-covarianzas de $\mathbf{x}$, que será notada por $\mathrm{Cov}[\mathbf{x}]$, como la esperanza de la matriz aleatoria $(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])^t$.*

Ahondando un poco en la anterior definición, observemos que

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{x}] = \mathrm{E}[(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x}-\mathrm{E}[\mathbf{x}])^t] =$$

$$= \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} x_1-\mathrm{E}[x_1] \\ \vdots \\ x_i-\mathrm{E}[x_i] \\ \vdots \\ x_p-\mathrm{E}[x_p] \end{pmatrix} (x_1-\mathrm{E}[x_1],\ldots,x_i-\mathrm{E}[x_i],\ldots,x_p-\mathrm{E}[x_p])\right] =$$

$$= \mathrm{E}\begin{bmatrix} (x_1-\mathrm{E}[x_1])^2 & \cdots & (x_1-\mathrm{E}[x_1])(x_i-\mathrm{E}[x_i]) & \cdots & (x_1-\mathrm{E}[x_1])(x_p-\mathrm{E}[x_p]) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_i-\mathrm{E}[x_i])(x_1-\mathrm{E}[x_1]) & \cdots & (x_i-\mathrm{E}[x_i])^2 & \cdots & (x_i-\mathrm{E}[x_i])(x_p-\mathrm{E}[x_p]) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_p-\mathrm{E}[x_p])(x_1-\mathrm{E}[x_1]) & \cdots & (x_p-\mathrm{E}[x_p])(x_i-\mathrm{E}[x_i]) & \cdots & (x_p-\mathrm{E}[x_p])^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[x_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_1,x_i] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_1,x_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[x_i,x_1] & \cdots & \mathrm{Var}[x_i] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_i,x_p] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[x_p,x_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[x_p,x_i] & \cdots & \mathrm{Var}[x_p] \end{pmatrix}$$

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de la definición anterior y de lo expuesto para el operador covarianza anteriormente introducido:

- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{x}] = \mathrm{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^t] - (\mathrm{E}[\mathbf{x}])(\mathrm{E}[\mathbf{x}])^t$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio y si $\mathbf{a}_{p\times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{x}-\mathbf{a}] = \mathrm{Cov}[\mathbf{x}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{A}_{s\times p}$ es una matriz de constantes, entonces $\mathrm{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}[\mathbf{x}]\mathbf{A}^t$.
- Si $\mathbf{x}_{p\times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{a}_{p\times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathrm{Var}[\mathbf{a}^t\mathbf{x}] = \mathbf{a}^t\,\mathrm{Cov}[\mathbf{x}]\mathbf{a}$.