

Máster en Estadística Aplicada
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada



Trabajo fin de máster
Estimación KDE: fundamentos y aplicaciones

Juan Rubio Cobeta
Granada, 16 de diciembre de 2025

Máster en Estadística Aplicada
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada



Trabajo de investigación presentado por **Don Juan Rubio** y dirigido por la
profesora **Dña. María Dolores Martínez Miranda**.

VºBº

Maria Dolores Martínez Miranda

Juan Rubio Cobeta

Índice

1. Introducción y Motivación	1
1.1. Contexto y Justificación	1
1.2. Motivación Práctica	2
1.3. Objetivos y Estructura del Trabajo	2
2. Preliminares Probabilísticos	4
2.1. Fundamentos de Probabilidad	4
2.2. Momentos	5
2.3. Convergencia Estocástica y Notación de Orden	8
2.3.1. Modos de Convergencia	8
2.3.2. Notación de Orden Estocástica (o_p y O_p)	9
2.4. Herramientas de Análisis y Aproximación	10
2.4.1. Clases de Suavidad	11
2.4.2. Desarrollo de Taylor	11
2.4.3. Convolución	11
3. El Estimador de Densidad Tipo Núcleo	13
3.1. Motivación: Del Histograma al Estimador Ingenuo	13
3.1.1. Ilustración Gráfica	14

1. Introducción y Motivación

1.1. Contexto y Justificación

La inferencia estadística constituye el pilar fundamental para la extracción de conocimiento a partir de datos observados. En el contexto del Máster en Estadística Aplicada de la Universidad de Granada, este trabajo aborda uno de los problemas centrales de la disciplina: la estimación de la función de densidad de probabilidad subyacente a una variable aleatoria, sin imponer restricciones fuertes sobre su forma funcional.

Tradicionalmente, la estadística clásica ha abordado este problema desde un enfoque **paramétrico**. Bajo este paradigma, se asume que los datos provienen de una familia conocida de distribuciones $\mathcal{P} = \{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$, como la distribución Normal, Gamma o Weibull. En tal escenario, el problema de estimación se reduce drásticamente a la inferencia de un vector de parámetros finito-dimensional θ . Si bien este enfoque es potente y eficiente cuando el modelo asumido es correcto, presenta una debilidad crítica: la **rigidez**. La realidad de los fenómenos estocásticos complejos raramente se ajusta con precisión a estas formas ideales. La imposición de una estructura paramétrica incorrecta conlleva un *sesgo de especificación* sistemático que puede invalidar cualquier análisis posterior, ocultando características locales importantes.

Como respuesta a esta limitación, surge la **estadística no paramétrica** y, específicamente, los métodos de suavizado. La filosofía subyacente es permitir que los datos “hablen por sí mismos” (*data-driven approach*), dejando que sea la propia estructura de la muestra la que determine la forma de la densidad estimada \hat{f} .

Históricamente, el **histograma** ha sido la herramienta precursora en esta tarea. A pesar de su ubicuidad, el histograma padece de defectos teóricos y prácticos notables:

1. Es una función discontinua, lo que impide el uso de herramientas de cálculo diferencial.
2. Su forma depende excesivamente de la elección del origen de la partición y del ancho de los intervalos.
3. Carece de propiedades de eficiencia en dimensiones altas.

Para solventar estas deficiencias, Rosenblatt (1956) y Parzen (1962) formalizaron el **Estimador de Densidad Tipo Núcleo** (Kernel Density Estimator o KDE). Este estimador generaliza la idea del histograma colocando una “masa de probabilidad” suave (el núcleo) sobre cada observación, proporcionando una estimación diferenciable e integrable a uno.

1.2. Motivación Práctica

La relevancia de estudiar el estimador KDE trasciende el interés puramente teórico; su aplicación es crítica en escenarios donde detectar desviaciones sutiles respecto a la normalidad es vital para la gestión de riesgos. Este trabajo toma como caso de estudio central el índice **Standard & Poor's 500 (S&P 500)**, considerado el barómetro más representativo del mercado bursátil global.

Una de las “hechos estilizados” más documentados en la econometría financiera es que la distribución de los rendimientos de los activos **no es Normal**: presenta colas más pesadas (*leptocurtosis*) y asimetrías que los modelos gaussianos subestiman sistemáticamente. Ignorar estas características, especialmente durante períodos de crisis financiera, lleva a una infravaloración del riesgo de eventos extremos (cisnes negros).

El uso de la Estimación de Densidad Tipo Núcleo permite capturar la forma real de la distribución de los rendimientos del S&P 500 sin supuestos previos. Esto es fundamental para:

1. **Cálculo de métricas de riesgo:** Obtener estimaciones más precisas del Valor en Riesgo (VaR) y del *Expected Shortfall* en las colas de la distribución.
2. **Detección de regímenes de mercado:** Visualizar cómo la densidad de los rendimientos cambia de forma bimodal o se aplana en períodos de alta volatilidad, comportamientos que un modelo paramétrico estático no podría revelar.

La aplicación práctica de este trabajo (Capítulo 7) demostrará cómo el KDE ofrece una radiografía superior del comportamiento del mercado en comparación con el ajuste de una curva de campana tradicional.

1.3. Objetivos y Estructura del Trabajo

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es presentar una revisión teórica rigurosa, exhaustiva y autocontenido de la estimación de densidad tipo núcleo, analizando sus propiedades asintóticas, los desafíos de la selección del ancho de banda y su aplicación a datos financieros reales.

Para garantizar una exposición clara y detallada, la memoria se estructura en los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2:** Se establecen los **preliminares probabilísticos**, fijando la notación y recordando definiciones clave sobre convergencia estocástica y funciones de distribu-

ción.

- **Capítulo 3:** Se dedica a la construcción formal del **Estimador Núcleo Univariante**, definiendo los requisitos analíticos de la función núcleo K y presentando las familias de núcleos más usuales.
- **Capítulo 4:** Aborda las **propiedades estadísticas** del estimador. Se descompone el error de estimación (MISE) en sesgo y varianza, demostrando el compromiso (*trade-off*) necesario.
- **Capítulo 5:** Trata el problema central de la práctica del KDE: la **selección del ancho de banda** (h). Se discuten métodos como la Regla de Silverman y la Validación Cruzada (LSCV).
- **Capítulo 6:** Extiende los conceptos al caso **multivariante**, discutiendo brevemente la “maldición de la dimensionalidad”.
- **Capítulo 7:** Presenta la **aplicación práctica** al índice S&P 500. Se realizará un análisis exploratorio y se aplicarán los estimadores desarrollados teóricamente para modelar la distribución de sus rendimientos, comparando los resultados obtenidos mediante diferentes selecciones de ancho de banda.
- Finalmente, se presentan las **conclusiones** y líneas de trabajo futuro.

2. Preliminares Probabilísticos

El objetivo de este capítulo es establecer el marco matemático y la notación que se utilizarán a lo largo del trabajo. Dado que la estimación de densidad tipo núcleo se fundamenta en propiedades de convergencia de sumas de variables aleatorias, es necesario definir con rigor los conceptos de espacio de probabilidad, variable aleatoria y los modos de convergencia estocástica.

2.1. Fundamentos de Probabilidad

Comenzamos definiendo la estructura formal donde se modelan los experimentos aleatorios.

Definición 2.1 (Espacio de Probabilidad).

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde:

1. Ω es el **espacio muestral**, un conjunto no vacío que contiene todos los posibles resultados del experimento.
2. \mathcal{F} es una **σ -álgebra** sobre Ω , es decir, una colección de subconjuntos de Ω que cumple:
 - $\Omega \in \mathcal{F}$.
 - Si $A \in \mathcal{F}$, entonces su complemento $A^c \in \mathcal{F}$.
 - Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una **medida de probabilidad**, que satisface $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y la propiedad de σ -aditividad para conjuntos disjuntos.

En el contexto de la inferencia estadística, trabajamos con funciones que trasladan la aleatoriedad desde el espacio abstracto Ω a los números reales.

Definición 2.2 (Variable Aleatoria Real).

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **variable aleatoria** (v.a.) si es \mathcal{F} -medible; es decir, si para todo conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos de \mathbb{R}), se cumple que la preimagen $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Cada variable aleatoria induce una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, caracterizada únicamente por su función de distribución acumulada.

Definición 2.3 (Función de Distribución).

La función de distribución (CDF, por sus siglas en inglés) de una variable aleatoria X se define como la función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta función es no decreciente, continua por la derecha y satisface $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

En este trabajo nos centraremos exclusivamente en variables aleatorias **absolutamente continuas**. Formalmente, esto significa que la medida inducida por X es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue μ en \mathbb{R} . Por el Teorema de Radon-Nikodym, esto garantiza la existencia de una función de densidad.

Definición 2.4 (Función de Densidad de Probabilidad).

Se dice que una variable aleatoria X tiene una función de densidad de probabilidad (PDF) f , si existe una función no negativa e integrable tal que para todo conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(t) dt$$

Como consecuencia inmediata, la relación entre la función de distribución y la densidad viene dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Además, si f es continua en x , entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

El objetivo central de la estimación de densidad no paramétrica es estimar esta función f desconocida a partir de una muestra aleatoria simple X_1, \dots, X_n distribuida según F .

2.2. Momentos

Una vez definida la densidad de probabilidad, las características numéricas más relevantes de una variable aleatoria son sus momentos. Estos valores resumen la información contenida en la densidad, describiendo aspectos como la localización, la dispersión o la forma de la distribución. En el contexto de la estimación tipo núcleo, el cálculo de esperanzas y

varianzas de transformaciones de la variable aleatoria constituirá la herramienta analítica principal para evaluar la calidad del estimador \hat{f} .

Definición 2.5 (Esperanza Matemática).

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f . Se define la **esperanza matemática** (o valor esperado) de X , denotada por $\mathbb{E}[X]$ o μ , como la integral de Lebesgue:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

siempre que la integral sea absolutamente convergente, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty$. Si esta condición no se cumple, la esperanza no existe.

La esperanza es un operador lineal. Dadas dos variables aleatorias X, Y definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y constantes $a, b \in \mathbb{R}$, se satisface:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Para el desarrollo de las propiedades del estimador núcleo, raramente trabajaremos directamente con $\mathbb{E}[X]$, sino con la esperanza de funciones de X (específicamente, el núcleo K evaluado en los datos). El siguiente resultado permite calcular dicha esperanza utilizando directamente la densidad original f .

Teorema 2.1 (Esperanza de una función de una v.a.).

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Borel. Si X es una variable aleatoria con densidad f , entonces:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$$

siempre que $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$.

Este resultado es crucial en este trabajo. Por ejemplo, al calcular el sesgo del estimador, evaluaremos la esperanza de $g(X_i) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$, lo que se traducirá directamente en una integral de convolución entre el núcleo y la densidad verdadera.

Definición 2.6 (Varianza y Momentos Superiores).

La **varianza** de una variable aleatoria X , denotada por $\mathbb{V}(X)$ o σ^2 , es una medida de dispersión cuadrática en torno a la media. Se define como el segundo momento central:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Desarrollando el cuadrado, se obtiene la expresión operativa habitual:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

De forma general, definimos el **k -ésimo momento** respecto al origen como $\mu'_k = \mathbb{E}[X^k]$, y el **k -ésimo momento central** como $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mu)^k]$. La varianza corresponde a μ_2 . La existencia de estos momentos depende del decaimiento de las colas de la densidad f ; distribuciones de cola pesada (como las observadas en finanzas) pueden carecer de momentos de orden superior.

Propiedades de la Varianza.

1. **No negatividad:** $\mathbb{V}(X) \geq 0$.
2. **Invarianza por traslación y escala:** Para constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
3. **Aditividad:** Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes dos a dos, entonces la varianza de la suma es la suma de las varianzas:

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$$

Esta última propiedad es fundamental para derivar la varianza del estimador KDE, ya que este se construye como una suma lineal de variables aleatorias independientes.

Teorema 2.2 (Cambio de Variable en Integración).

Dado que el análisis asintótico del ancho de banda h implica reescalar la variable aleatoria, recordamos la fórmula de cambio de variable, esencial para las demostraciones del Capítulo 4. Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un difeomorfismo. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(u))|\phi'(u)| du = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

En particular, para la transformación lineal $x = \mu + hu$ (con $h > 0$), tenemos $dx = h du$. Esto nos permite reescribir integrales de convolución de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) f(x - hu) du$$

Esta identidad convierte el parámetro de escala h en un argumento de la función f , permitiendo posteriormente aplicar desarrollos de Taylor para analizar el comportamiento local del estimador cuando $h \rightarrow 0$.

2.3. Convergencia Estocástica y Notación de Orden

El comportamiento del estimador de densidad tipo núcleo depende intrínsecamente del tamaño de la muestra n . Para analizar sus propiedades asintóticas —es decir, cuando $n \rightarrow \infty$ — es imprescindible formalizar en qué sentido las aproximaciones estocásticas se acercan a los valores teóricos poblacionales.

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria, todas ellas definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.3.1. Modos de Convergencia

Distinguimos tres modos principales de convergencia, ordenados de mayor a menor exigencia sobre la estructura probabilística subyacente.

Definición 2.7 (Convergencia Casi Segura).

Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge **casi seguramente** (o con probabilidad 1) a X , denotado por $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, si el conjunto de eventos donde la sucesión no converge tiene medida nula:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Esta es la forma más fuerte de convergencia clásica. En el contexto de estimación, si un estimador $\hat{\theta}_n$ satisface $\hat{\theta}_n \xrightarrow{c.s.} \theta$, se dice que es **fueramente consistente**.

Definición 2.8 (Convergencia en Probabilidad).

La sucesión $\{X_n\}$ converge **en probabilidad** a X , denotado por $X_n \xrightarrow{p} X$, si para todo $\epsilon > 0$, la probabilidad de que la distancia entre X_n y X exceda ϵ tiende a cero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Esta convergencia implica la **consistencia débil** de un estimador. Es una condición más relajada que la casi segura, permitiendo que existan eventos raros donde la discrepancia sea grande, siempre que su probabilidad se desvanezca asintóticamente.

Definición 2.9 (Convergencia en Distribución).

Sean F_n y F las funciones de distribución acumuladas de X_n y X respectivamente. Se dice que X_n converge **en distribución** (o en ley) a X , denotado por $X_n \xrightarrow{d} X$, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

para todo punto $x \in \mathbb{R}$ donde F sea continua.

A diferencia de las anteriores, la convergencia en distribución no requiere que las variables estén definidas en el mismo espacio de probabilidad, ya que se refiere únicamente a sus leyes. Es fundamental para la construcción de intervalos de confianza asintóticos mediante el Teorema Central del Límite.

Teorema 2.3 (Jerarquía y Relaciones).

Las implicaciones entre los modos de convergencia son las siguientes:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \implies X_n \xrightarrow{p} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$$

Las implicaciones inversas no son ciertas en general, salvo en el caso particular en que X es una constante degenerada ($X = c$), donde $X_n \xrightarrow{d} c \implies X_n \xrightarrow{p} c$.

Para operar algebraicamente con límites estocásticos, enunciamos dos resultados clásicos que utilizaremos para simplificar las expresiones del error asintótico.

Teorema 2.4 (Teorema de la Aplicación Continua y Slutsky).

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

1. Si $X_n \xrightarrow{p} X$, entonces $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$.
2. Si $X_n \xrightarrow{d} X$, entonces $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.
3. (**Lema de Slutsky**): Si $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$, donde c es una constante, entonces:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c, \quad X_n Y_n \xrightarrow{d} cX, \quad \text{y} \quad X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c \ (\text{si } c \neq 0)$$

2.3.2. Notación de Orden Estocástica (o_p y O_p)

En el análisis asintótico del KDE, descompondremos el error en términos principales y términos residuales que se desvanecen rápidamente. Para formalizar la “velocidad” a la que estos términos convergen, generalizamos la notación de Landau (o y O) al contexto probabilístico.

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{a_n\}$ una sucesión de constantes positivas reales.

Definición 2.10 (Pequeña “o” en probabilidad).

Escribimos $X_n = o_p(a_n)$ si la razón X_n/a_n converge a cero en probabilidad:

$$X_n = o_p(a_n) \iff \frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{p} 0$$

Intuitivamente, esto significa que X_n es de un orden asintótico estrictamente menor que a_n . Un caso particular importante es $X_n = o_p(1)$, que es equivalente a decir que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

Definición 2.11 (Grande “O” en probabilidad).

Escribimos $X_n = O_p(a_n)$ si la razón X_n/a_n está **acotada en probabilidad**. Formalmente, esto significa que para todo $\epsilon > 0$, existe una constante finita $M_\epsilon > 0$ y un entero N_ϵ tales que:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M_\epsilon\right) < \epsilon, \quad \forall n \geq N_\epsilon$$

Si $X_n = O_p(1)$, decimos que la sucesión es **estocásticamente acotada**. Cabe destacar que toda sucesión convergente en distribución es $O_p(1)$ (Teorema de Prohorov), lo que implica que $X_n \xrightarrow{d} X \implies X_n = O_p(1)$.

Álgebra de órdenes estocásticos.

Estas notaciones simplifican enormemente las demostraciones al permitirnos absorber términos despreciables. Algunas reglas aritméticas que utilizaremos (análogas al caso determinista) son:

1. $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$
2. $O_p(1) + o_p(1) = O_p(1)$
3. $O_p(1) \cdot o_p(1) = o_p(1)$
4. Si $X_n = O_p(n^{-\alpha})$ y $Y_n = O_p(n^{-\beta})$, entonces $X_n Y_n = O_p(n^{-(\alpha+\beta)})$.

Gracias a esta notación, en el Capítulo 4 podremos expresar, por ejemplo, que la varianza del estimador decae a una velocidad específica, escribiendo $\mathbb{V}[\hat{f}(x)] = \frac{1}{nh} f(x) R(K) + o_p\left(\frac{1}{nh}\right)$.

2.4. Herramientas de Análisis y Aproximación

El análisis de las propiedades del estimador núcleo se basa fundamentalmente en aproximaciones locales de la función de densidad desconocida f . Para garantizar la validez de estas aproximaciones, es necesario restringir el espacio de funciones admisibles y disponer de herramientas de cálculo para cuantificar el error de aproximación.

2.4.1. Clases de Suavidad

La velocidad de convergencia del estimador KDE depende directamente de la “suavidad” de la densidad subyacente. Formalizamos este concepto mediante las clases de diferenciabilidad.

Definición 2.12 (Espacio \mathcal{C}^k).

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Definimos $\mathcal{C}^k(I)$ como el conjunto de funciones $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen k derivadas continuas en I . En particular, asumiremos habitualmente que la densidad $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y que su segunda derivada f'' es acotada y continuo-cuadrada integrable. Esta asunción de regularidad es necesaria para asegurar que la curvatura de la densidad está bien definida en todo punto.

2.4.2. Desarrollo de Taylor

La herramienta principal para evaluar el sesgo del estimador será la expansión de Taylor. Dado que el estimador núcleo evalúa la densidad en puntos vecinos $x - hu$, necesitaremos aproximar $f(x - hu)$ en términos de $f(x)$ cuando el ancho de banda h tiende a cero.

Teorema 2.5 (Teorema de Taylor con resto de Peano).

Sea $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ definida en un entorno del punto x . Para un incremento t suficientemente pequeño, se cumple:

$$g(x + t) = g(x) + g'(x)t + \frac{g''(x)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(k)}(x)}{k!}t^k + o(|t|^k)$$

donde el término residual $o(|t|^k)$ satisface $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(|t|^k)}{|t|^k} = 0$.

En el contexto del KDE, aplicaremos este teorema con $t = -hu$. Si $f \in \mathcal{C}^2$, la expansión hasta segundo orden resulta:

$$f(x - hu) = f(x) - huf'(x) + \frac{1}{2}h^2u^2f''(x) + o(h^2)$$

Esta expresión es la llave maestra que nos permitirá demostrar en el Capítulo 4 que el sesgo del estimador es de orden cuadrático ($O(h^2)$) respecto al ancho de banda.

2.4.3. Convolución

Finalmente, observamos que el estimador de densidad puede interpretarse matemáticamente como una operación de convolución.

Definición 2.13 (Convolución).

Dadas dos funciones integrables $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define su **convolución**, denotada por $(f * g)(x)$, como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy$$

Como veremos en el siguiente capítulo, el estimador de densidad es esencialmente la convolución de la función de densidad empírica con la función núcleo reescalada. Esta perspectiva permite utilizar propiedades del análisis armónico (como la Transformada de Fourier) para estudiar la eficiencia del estimador, aunque en este trabajo nos centraremos en el enfoque algebraico directo.

3. El Estimador de Densidad Tipo Núcleo

3.1. Motivación: Del Histograma al Estimador Ingenuo

La construcción del estimador de densidad tipo núcleo surge como una evolución natural necesaria para superar las deficiencias analíticas del histograma clásico. Si bien el histograma es la herramienta exploratoria más ubicua, su formulación matemática presenta limitaciones que lo inhabilitan para la inferencia avanzada.

Consideremos una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n de una variable con densidad f . El histograma se construye definiendo una partición del soporte en intervalos (o *bins*) B_j de longitud h , y contando la frecuencia de observaciones en cada uno. Formalmente, para un $x \in B_j$, el estimador histograma es:

$$\hat{f}_H(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \in B_j)$$

Este estimador presenta dos problemas fundamentales:

1. **Discontinuidad:** \hat{f}_H es una función escalonada, con discontinuidades en los bordes de los intervalos. Esto hace imposible obtener derivadas de la densidad estimada, impidiendo el análisis de puntos de inflexión o la curvatura.
2. **Dependencia de la Rejilla:** La forma del histograma cambia drásticamente dependiendo de la elección del punto de origen de la partición x_0 . Dos estadísticos con los mismos datos podrían llegar a conclusiones visuales distintas simplemente por empezar los intervalos en puntos diferentes.

Para eliminar la arbitrariedad de la rejilla, Rosenblatt (1956) propuso liberar a los intervalos de su posición fija. La idea intuitiva es: en lugar de forzar a x a caer en una caja predefinida, construyamos una caja de ancho $2h$ centrada exactamente en cada x .

Matemáticamente, esto se justifica recordando la definición de densidad como la derivada de la función de distribución F :

$$f(x) = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

Si sustituimos la distribución teórica F por la **Función de Distribución Empírica** $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x)$, obtenemos el llamado **Estimador Ingenuo** (*Naive Estimator*):

$$\hat{f}_{Naive}(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h} = \frac{1}{2nh} \#\{X_i : x-h < X_i \leq x+h\}$$

Podemos reescribir este estimador introduciendo una función de peso o “función núcleo” auxiliar $w(u)$:

$$\hat{f}_{Naive}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n w\left(\frac{x-X_i}{h}\right), \quad \text{donde } w(u) = \frac{1}{2}\mathbb{I}(|u| \leq 1)$$

El estimador ingenuo resuelve el problema de la dependencia del origen, pero **no resuelve el problema de la suavidad**. Dado que la función $w(u)$ es rectangular (vale 1/2 dentro del intervalo y 0 fuera), el estimador resultante \hat{f}_{Naive} sigue siendo una función escalonada, presentando saltos discontinuos cada vez que una observación entra o sale de la ventana deslizante $(x-h, x+h)$.

Para obtener una estimación que sea suave y diferenciable (clase \mathcal{C}^∞), es necesario reemplazar la función rectangular $w(\cdot)$ por una función suave $K(\cdot)$ que decaiga gradualmente. Esta generalización da lugar al Estimador de Densidad Tipo Núcleo.

3.1.1. Ilustración Gráfica

A continuación, ilustramos visualmente esta transición. La Figura 3.1 muestra cómo el histograma depende de los intervalos fijos, mientras que el estimador ingenuo centra las cajas en los datos pero mantiene la rugosidad. Finalmente, el estimador núcleo (con núcleo Gaussiano) recupera la suavidad de la densidad subyacente.

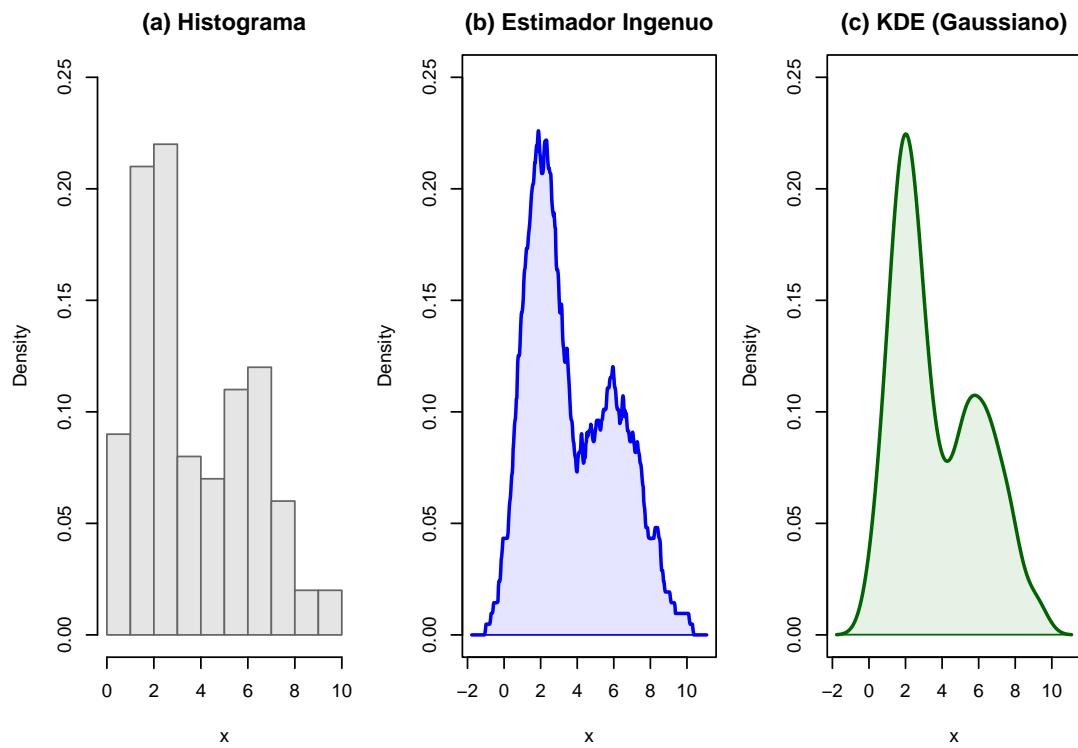


Figura 1: (a) Histograma, (b) Estimador Ingenuo (Rectangular), (c) Estimador Núcleo Suave (Gaussiano)