# Ejercicios Propuestos

Juan Rubio Cobeta

November 24, 2025

## Contents

# 1 Apartado a)

Suponiendo que la distribución inicial en $t_1$ es degenerada, dar la expresión de la función de verosimilitud de la muestra. ¿Qué cambios se producirían en ella si la distribución fuera lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$?

## 1.1 Contexto del proceso

Sea $\{X(t); t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión lognormal homogéneo con espacio de estados $I = \mathbb{R}^+$ y momentos infinitesimales dados por:

$$A_1(x) = mx \quad \text{y} \quad A_2(x) = \sigma^2 x^2 \tag{1}$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.

Para construir la función de verosimilitud, primero debemos determinar la función de densidad de transición. Sabemos que este proceso es solución de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$dX_t = mX_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{2}$$

Aplicando el Lema de Itô con la transformación $Y_t = \ln(X_t)$, obtenemos que $X(t)$ sigue una distribución lognormal condicionada. Específicamente, la densidad de transición $f(y, t|x, s)$ para $s < t$ corresponde a una variable aleatoria lognormal $\Lambda_1$ con parámetros:

- **Media logarítmica:** $\ln(x) + (m - \frac{\sigma^2}{2})(t - s)$
- **Varianza logarítmica:** $\sigma^2(t - s)$

Por tanto, la función de densidad de transición es:

$$f(x_{ij}, t_{ij}|x_{i,j-1}, t_{i,j-1}) = \frac{1}{x_{ij}\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta_{ij}}} \exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}}\right) - (m - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_{ij}\right]^2}{2\sigma^2\Delta_{ij}}\right) \tag{3}$$

donde hemos denotado el incremento de tiempo como $\Delta_{ij} = t_{ij} - t_{i,j-1}$.

## 1.2 Resolución del Apartado a)

El ejercicio solicita la función de verosimilitud para una muestra de $d$ trayectorias observadas en los instantes $\{t_{ij}\}$. La estructura general de la verosimilitud para múltiples trayectorias se basa en la propiedad de Markov.

### 1. Caso: Distribución inicial degenerada en $t_1$

Supongamos que la distribución en $t_1$ es degenerada, es decir, $P(X(t_{i1}) = x_{i1}) = 1$. Esto implica que los valores iniciales son constantes conocidas.

La función de verosimilitud $\mathbb{L}_x(m, \sigma^2)$ se construye multiplicando las densidades de transición de todas las observaciones $j = 2, \ldots, n_i$ para todas las trayectorias $i = 1, \ldots, d$:

$$\mathbb{L}_x(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij}|x_{i,j-1}, t_{i,j-1}) \tag{4}$$

Sustituyendo la expresión de la densidad de transición del proceso lognormal:

$$\mathbb{L}_x(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=2}^{n_i}\left[\frac{1}{x_{ij}\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta_{ij}}} \exp\left(-\frac{\left[\ln(x_{ij}) - \ln(x_{i,j-1}) - (m - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_{ij}\right]^2}{2\sigma^2\Delta_{ij}}\right)\right] \tag{5}$$

Esta expresión depende únicamente de los parámetros $m$ y $\sigma^2$.

## 2. Caso: Distribución inicial Lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$

Ahora suponemos que el valor inicial no es determinista, sino que $X(t_{i1})$ sigue una distribución lognormal con parámetros $\mu_1$ y $\sigma_1^2$. La densidad inicial para el primer dato de cada trayectoria $x_{i1}$ es:

$$f_1(x_{i1}) = \frac{1}{x_{i1}\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x_{i1}) - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \tag{6}$$

Según la teoría expuesta, cuando la distribución inicial no es degenerada, la función de verosimilitud debe incluir el producto de las densidades iniciales de las $d$ trayectorias. La nueva función de verosimilitud $\mathbb{L}_x^*(\mu_1, \sigma_1^2, m, \sigma^2)$ será:

$$\mathbb{L}_x^* = \left(\prod_{i=1}^{d} f_1(x_{i1})\right) \times \mathbb{L}_x(m, \sigma^2) \tag{7}$$

Expandiendo la expresión completa:

$$\mathbb{L}_x^* = \underbrace{\left[\prod_{i=1}^{d} \frac{1}{x_{i1}\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x_{i1} - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\right]}_{\text{Contribución Inicial}} \times \underbrace{\left[\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=2}^{n_i} \frac{1}{x_{ij}\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta_{ij}}} \exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}}\right) - (m - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_{ij}\right]^2}{2\sigma^2\Delta_{ij}}\right)\right]}_{\text{Contribución de Transición}} \tag{8}$$

**Cambios producidos:**

1. **Dimensionalidad del espacio paramétrico:** Pasamos de estimar 2 parámetros $(m, \sigma^2)$ a estimar 4 parámetros $(\mu_1, \sigma_1^2, m, \sigma^2)$.
2. **Separabilidad:** La maximización del logaritmo de la verosimilitud se puede realizar de forma independiente para ambos grupos de parámetros, ya que los términos están factorizados.

# 2 Apartado b)

Para los dos casos anteriores plantear las ecuaciones de verosimilitud y resolverlas (si es factible de forma explícita).

## 2.1 Planteamiento General

Para resolver las ecuaciones de verosimilitud de forma explícita, es fundamental simplificar la estructura de la función de densidad de transición.

Sabemos que si $X(t)$ es un proceso lognormal homogéneo con parámetros $m$ y $\sigma^2$, la transformación $Y(t) = \ln(X(t))$ convierte el proceso en un proceso de Wiener con tendencia (Movimiento Browniano Aritmético) $Y(t) \sim N(\mu_W t, \sigma^2 t)$, donde los parámetros del proceso transformado son:

$$\mu_W = m - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma_W^2 = \sigma^2 \tag{9}$$

Esta reparametrización permite utilizar los resultados directos de la estimación del proceso Wiener (vistos en los ejemplos de la teoría) para estimar $\mu_W$ y $\sigma^2$, y posteriormente recuperar $\hat{m}$ mediante el Teorema de Zehna.

Definimos las siguientes variables transformadas para la muestra:

- $y_{ij} = \ln(x_{ij})$: Logaritmos de las observaciones.
- $\Delta_{ij} = t_{ij} - t_{i,j-1}$: Incrementos de tiempo.
- $N = \sum_{i=1}^{d}(n_i - 1)$: Número total de transiciones observadas.

## 2.2 Caso 1: Distribución inicial degenerada

En este caso, la función de log-verosimilitud $\ell(m, \sigma^2) = \ln \mathbb{L}_x$ depende únicamente de las transiciones.

### 1. Función de Log-Verosimilitud

A partir de la expresión obtenida en el Apartado a, y aplicando la transformación logarítmica:

$$\ell(m,\sigma^2) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\ln(x_{ij}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\frac{\left[(y_{ij} - y_{i,j-1}) - (m - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_{ij}\right]^2}{\Delta_{ij}} \tag{10}$$

Para facilitar la resolución, sustituimos $\alpha = m - \frac{\sigma^2}{2}$ (tendencia del Wiener subyacente). La función a maximizar respecto a $\alpha$ y $\sigma^2$ es:

$$\ell^*(\alpha,\sigma^2) \propto -\frac{N}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\frac{[y_{ij} - y_{i,j-1} - \alpha\Delta_{ij}]^2}{\Delta_{ij}} \tag{11}$$

### 2. Ecuaciones de Verosimilitud

Derivamos $\ell^*$ respecto a $\alpha$ y $\sigma^2$ e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \ell^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}(y_{ij} - y_{i,j-1} - \alpha\Delta_{ij}) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \ell^*}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\frac{(y_{ij} - y_{i,j-1} - \alpha\Delta_{ij})^2}{\Delta_{ij}} = 0 \tag{13}$$

## 3. Resolución Explícita

De la primera ecuación, despejamos $\hat{\alpha}$:

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}(y_{ij} - y_{i,j-1}) = \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\Delta_{ij} \tag{14}$$

Dado que la suma de incrementos es la diferencia total, obtenemos:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{d}(y_{i,n_i} - y_{i,1})}{\sum_{i=1}^{d}(t_{i,n_i} - t_{i,1})} = \frac{\sum_{i=1}^{d}(\ln x_{i,n_i} - \ln x_{i,1})}{\sum_{i=1}^{d}(t_{i,n_i} - t_{i,1})} \tag{15}$$

De la segunda ecuación, despejamos $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=2}^{n_i}\frac{[\ln x_{ij} - \ln x_{i,j-1} - \hat{\alpha}(t_{ij} - t_{i,j-1})]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \tag{16}$$

Finalmente, por la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud (Teorema de Zehna), recuperamos el estimador de $m$:

$$\hat{m} = \hat{\alpha} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \tag{17}$$

## 2.3 Caso 2: Distribución inicial Lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$

En este caso, el espacio paramétrico es $\Theta = (\mu_1, \sigma_1^2, m, \sigma^2)$. La log-verosimilitud se descompone en dos partes independientes:

$$\ell_{total} = \ell_{inicial}(\mu_1, \sigma_1^2) + \ell_{transicion}(m, \sigma^2) \tag{18}$$

## 1. Estimación de los parámetros del proceso $(m, \sigma^2)$

Dado que $\ell_{transicion}$ es idéntica a la función del Caso 1, los estimadores $\hat{m}$ y $\hat{\sigma}^2$ son exactamente los mismos que los obtenidos anteriormente.

## 2. Estimación de los parámetros iniciales $(\mu_1, \sigma_1^2)$

Consideramos los datos iniciales de las $d$ trayectorias: $\{x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{d,1}\}$. Sabemos que $X(t_{i1}) \sim \Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$, lo que implica que sus logaritmos $u_i = \ln(x_{i,1})$ siguen una distribución Normal $N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

La función de log-verosimilitud para la parte inicial es:

$$\ell_{inicial} = -\frac{d}{2}\ln(2\pi) - \frac{d}{2}\ln(\sigma_1^2) - \sum_{i=1}^{d}\ln(x_{i,1}) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{d}(\ln x_{i,1} - \mu_1)^2 \tag{19}$$

Las ecuaciones de verosimilitud son las estándar para una distribución normal:

$$\frac{\partial \ell_{inicial}}{\partial \mu_1} = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{d}(\ln x_{i,1} - \mu_1) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \ell_{inicial}}{\partial \sigma_1^2} = -\frac{d}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_1^4}\sum_{i=1}^{d}(\ln x_{i,1} - \mu_1)^2 = 0 \tag{21}$$

## 3. Solución Explícita

Resolviendo el sistema, obtenemos los estimadores muestrales clásicos sobre los logaritmos iniciales:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \ln(x_{i,1}) \tag{22}$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} (\ln x_{i,1} - \hat{\mu}_1)^2 \tag{23}$$

# 3 Apartado c)

Dar la expresión de la función media del proceso y su correspondiente estimación máximo verosímil.

## 3.1 Obtención de la Función Media Teórica

Para determinar la función media (tendencia) del proceso $X(t)$, partimos de la definición de sus momentos infinitesimales dada en el enunciado:

$$A_1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[X(t+h) - X(t)|X(t) = x] = mx \tag{24}$$

Tomando esperanzas a ambos lados de la ecuación diferencial $d(E[X(t)]) = E[dX(t)]$, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) para la media $\mu_X(t) = E[X(t)]$:

$$\frac{d}{dt}\mu_X(t) = m\mu_X(t) \tag{25}$$

La solución general de esta EDO es una función exponencial. Dependiendo de la condición inicial en $t_1$, distinguimos dos casos:

### 1. Caso: Distribución inicial degenerada en $t_1$

Si $P(X(t_1) = x_1) = 1$, el valor inicial es una constante determinista $x_1$. La función media condicionada al instante inicial es:

$$E[X(t)|X(t_1) = x_1] = x_1 e^{m(t-t_1)}, \quad \text{para } t \geq t_1 \tag{26}$$

### 2. Caso: Distribución inicial Lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$

Si $X(t_1)$ es una variable aleatoria con distribución $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$, utilizamos la propiedad de la esperanza iterada:

$$E[X(t)] = E[E[X(t)|X(t_1)]] = E[X(t_1)e^{m(t-t_1)}] = e^{m(t-t_1)}E[X(t_1)] \tag{27}$$

Recordando que la media de una distribución lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$ es $e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}}$, la función media del proceso es:

$$E[X(t)] = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) e^{m(t-t_1)} = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2} + m(t-t_1)\right) \tag{28}$$

## 3.2 Estimación Máximo Verosímil (EMV)

Para obtener los estimadores de la función media, usamos el Teorema de Invarianza de Zehna, el cual establece que si $\hat{\theta}$ es el EMV de $\theta$, entonces para cualquier función paramétrica $\psi(\theta)$, su EMV es $\psi(\hat{\theta})$.

Utilizamos los estimadores $\hat{m}, \hat{\sigma}^2, \hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1^2$ obtenidos explícitamente en el Apartado b.

### 1. Estimación con inicio degenerado

La función paramétrica de interés es $\psi(m) = x_1 e^{m(t-t_1)}$. Sustituyendo el parámetro por su estimador:

$$\widehat{E[X(t)]} = x_1 \exp\left(\hat{m}(t-t_1)\right) \tag{29}$$

Donde $\hat{m} = \hat{\alpha} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$, siendo $\hat{\alpha}$ la pendiente estimada de la transformación logarítmica del proceso.

## 2. Estimación con inicio Lognormal

La función paramétrica depende ahora del vector $\theta = (\mu_1, \sigma_1^2, m)$. El estimador máximo verosímil es:

$$\widehat{E[X(t)]} = \exp\left(\hat{\mu}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} + \hat{m}(t - t_1)\right) \tag{30}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en el apartado anterior:

- $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d}\sum \ln x_{i,1}$ (Media muestral de los logaritmos iniciales).
- $\hat{\sigma}_1^2$ (Varianza muestral de los logaritmos iniciales).
- $\hat{m}$ (Estimador de la deriva del proceso basado en las transiciones).