

Entrega 3

Juan Rubio Cobeta

10 de diciembre de 2025

Índice

1. EJERCICIO 1	2
1.1. Apartado a):	2
1.2. Apartado b)	4
1.3. Apartado c)	6
1.4. Apartado d)	10
1.5. Apartado e)	15
2. EJERCICIO 2	19

1. EJERCICIO 1

Consideremos el sistema dinámico lineal en tiempo discreto con observaciones inciertas definido por las siguientes ecuaciones en diferencias estocásticas:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k), \quad k \geq 0, \quad x(0) = x_0 \\ z(k) &= \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

El sistema satisface las siguientes hipótesis estructurales y estocásticas:

1. **Condición Inicial:** El estado inicial x_0 es un vector aleatorio n -dimensional gaussiano centrado, caracterizado por:

$$E[x_0] = 0, \quad E[x_0 x_0^T] = P_0$$

2. **Ruido del Proceso:** La sucesión $\{w(k); k \geq 0\}$ es un proceso de ruido blanco gaussiano centrado con covarianza:

$$E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta_{kj}$$

donde δ_{kj} es la delta de Kronecker.

3. **Incertidumbre en la Observación:** El proceso multiplicativo $\{\gamma(k); k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, que modela la presencia de la señal en la medida:

$$P(\gamma(k) = 1) = p(k), \quad P(\gamma(k) = 0) = 1 - p(k)$$

4. **Ruido de Medida:** La sucesión $\{v(k); k \geq 0\}$ es un ruido blanco gaussiano centrado con covarianza definida positiva:

$$E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta_{kj}, \quad R(k) > 0$$

5. **Independencia Mutua:** El estado inicial x_0 y los procesos estocásticos $\{w(k)\}$, $\{v(k)\}$ y $\{\gamma(k)\}$ son mutuamente independientes para todo $k \geq 0$.

1.1. Apartado a):

El objetivo es demostrar que la matriz de covarianzas del proceso de innovación, definida como $\Pi(k) = E[\tilde{z}(k/k-1)\tilde{z}^T(k/k-1)]$, satisface la siguiente expresión:

$$\Pi(k) = p(k)(1-p(k))H(k)D(k)H^T(k) + p^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)$$

1.1.1. Definición del proceso de innovación

La innovación se define como la diferencia entre la observación actual y su predicción óptima basada en la información previa:

$$\tilde{z}(k/k-1) = z(k) - \hat{z}(k/k-1)$$

Calculamos el predictor de la observación $\hat{z}(k/k-1)$. Dado que $v(k)$ y $\gamma(k)$ son independientes de las observaciones pasadas, y $E[v(k)] = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{z}(k/k-1) &= E[z(k)|Z_{k-1}] \\ &= E[\gamma(k)H(k)x(k) + v(k)|Z_{k-1}] \\ &= E[\gamma(k)]H(k)E[x(k)|Z_{k-1}] + 0 \\ &= p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) \end{aligned}$$

Sustituimos $z(k)$ y $\hat{z}(k/k-1)$ en la expresión de la innovación:

$$\tilde{z}(k/k-1) = [\gamma(k)H(k)x(k) + v(k)] - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1)$$

1.1.2. Descomposición de la innovación

Para calcular la varianza, es útil expresar la innovación en términos del error de estimación del estado, $\tilde{x}(k/k-1) = x(k) - \hat{x}(k/k-1)$. Despejando $\hat{x}(k/k-1) = x(k) - \tilde{x}(k/k-1)$ y sustituyendo arriba:

$$\begin{aligned}\tilde{z}(k/k-1) &= \gamma(k)H(k)x(k) + v(k) - p(k)H(k)[x(k) - \tilde{x}(k/k-1)] \\ &= \gamma(k)H(k)x(k) - p(k)H(k)x(k) + p(k)H(k)\tilde{x}(k/k-1) + v(k)\end{aligned}$$

Agrupamos los términos para identificar las fuentes de aleatoriedad independientes:

$$\tilde{z}(k/k-1) = \underbrace{[\gamma(k) - p(k)]H(k)x(k)}_{\text{Término A}} + \underbrace{p(k)H(k)\tilde{x}(k/k-1)}_{\text{Término B}} + \underbrace{v(k)}_{\text{Término C}}$$

1.1.3. Cálculo de la matriz de covarianzas

Calculamos $\Pi(k) = E[\tilde{z}(k/k-1)\tilde{z}^T(k/k-1)]$. Debido a las hipótesis de independencia del sistema (el ruido blanco $v(k)$ y la variable Bernoulli $\gamma(k)$ son independientes entre sí y respecto al estado $x(k)$ y al error pasado), los términos cruzados (covarianzas cruzadas) se anulan:

- $E[AB^T] = 0$: Porque $\gamma(k)$ es independiente del error de estimación.
- $E[AC^T] = 0$: Porque $\gamma(k)$ y $x(k)$ son independientes de $v(k)$.
- $E[BC^T] = 0$: Porque el error pasado es independiente del ruido presente.

Por tanto, la covarianza es la suma de las covarianzas de los tres términos individuales:

$$\Pi(k) = E[AA^T] + E[BB^T] + E[CC^T]$$

Analizamos cada término:

Término 1 (AA^T): Incertidumbre de observación

$$\begin{aligned}E[AA^T] &= E[(\gamma(k) - p(k))^2 H(k)x(k)x^T(k)H^T(k)] \\ &= E[(\gamma(k) - p(k))^2] H(k)E[x(k)x^T(k)]H^T(k)\end{aligned}$$

Sabemos que la varianza de una variable Bernoulli es $\text{Var}(\gamma(k)) = p(k)(1 - p(k))$ y definimos la matriz de segundos momentos del estado como $D(k) = E[x(k)x^T(k)]$.

$$E[AA^T] = p(k)(1 - p(k))H(k)D(k)H^T(k)$$

Término 2 (BB^T): Error de estimación

$$\begin{aligned}E[BB^T] &= p^2(k)H(k)E[\tilde{x}(k/k-1)\tilde{x}^T(k/k-1)]H^T(k) \\ &= p^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k)\end{aligned}$$

Término 3 (CC^T): Ruido de medida

$$E[CC^T] = E[v(k)v^T(k)] = R(k)$$

1.1.4. Resultado Final

Sumando los tres componentes, obtenemos la expresión deseada:

$$\Pi(k) = p(k)(1 - p(k))H(k)D(k)H^T(k) + p^2(k)H(k)P(k/k - 1)H^T(k) + R(k)$$

Verificación para $k = 0$:

En el instante inicial, el predictor es $\hat{x}(0/-1) = E[x_0] = 0$, por lo que el error es $\tilde{x}(0/-1) = x_0$. Esto implica que $P(0/-1) = E[x_0x_0^T] = P_0$. Asimismo, $D(0) = E[x_0x_0^T] = P_0$.

Sustituyendo en la fórmula general:

$$\begin{aligned}\Pi(0) &= [p(0)(1 - p(0))]H(0)P_0H^T(0) + p^2(0)H(0)P_0H^T(0) + R(0) \\ &= [p(0) - p^2(0) + p^2(0)]H(0)P_0H^T(0) + R(0) \\ &= p(0)H(0)P_0H^T(0) + R(0)\end{aligned}$$

Lo cual coincide con la expresión dada en el enunciado.

1.2. Apartado b)

El objetivo es obtener el estimador de suavizamiento de punto fijo $\hat{x}(L/k)$ para un instante fijo L utilizando las observaciones hasta el instante k ($k > L$).

Utilizando el Lema de Proyecciones Ortogonales, podemos expresar el estimador en el instante k como una actualización del estimador en $k - 1$ más un término de corrección basado en la nueva información (la innovación $\tilde{z}(k/k - 1)$):

$$\hat{x}(L/k) = \hat{x}(L/k - 1) + K_s(k)\tilde{z}(k/k - 1)$$

Donde $K_s(k)$ es la matriz de ganancia del suavizador.

1.2.1. Cálculo de la Ganancia del Suavizador $K_s(k)$

Por el Lema de Proyecciones, la ganancia óptima que minimiza el error cuadrático medio está dada por:

$$K_s(k) = E[x(L)\tilde{z}^T(k/k - 1)]\Pi^{-1}(k)$$

Desarrollamos el término de esperanza cruzada $E[x(L)\tilde{z}^T(k/k - 1)]$. Recordamos la descomposición de la innovación $\tilde{z}(k/k - 1)$ deducida en el apartado anterior:

$$\tilde{z}(k/k - 1) = [\gamma(k) - p(k)]H(k)x(k) + p(k)H(k)\tilde{x}(k/k - 1) + v(k)$$

Multiplicamos por $x(L)$ y tomamos la esperanza. Debido a la independencia de $\gamma(k)$ y $v(k)$ respecto al estado $x(L)$ y al pasado, los primeros y últimos términos se anulan:

1. $E[x(L)(\gamma(k) - p(k))\dots] = 0$
2. $E[x(L)v^T(k)] = 0$

Nos queda el término central:

$$\begin{aligned}E[x(L)\tilde{z}^T(k/k - 1)] &= E[x(L)\tilde{x}^T(k/k - 1)H^T(k)p(k)] \\ &= E[x(L)\tilde{x}^T(k/k - 1)]H^T(k)p(k)\end{aligned}$$

Introducimos el error de suavizamiento $\tilde{x}(L/k-1) = x(L) - \hat{x}(L/k-1)$. Dado que $\hat{x}(L/k-1)$ es una proyección sobre el espacio de observaciones Z_{k-1} y $\tilde{x}(k/k-1)$ es ortogonal a dicho espacio (por propiedad del filtro), podemos sustituir $x(L)$ por $\tilde{x}(L/k-1)$ en la esperanza:

$$E[x(L)\tilde{x}^T(k/k-1)] = E[\tilde{x}(L/k-1)\tilde{x}^T(k/k-1)]$$

Definimos la matriz auxiliar de covarianza cruzada como $\Sigma(k) \triangleq E[\tilde{x}(L/k-1)\tilde{x}^T(k/k-1)]$. Por tanto, la ganancia del suavizador es:

$$K_s(k) = \Sigma(k)H^T(k)p(k)\Pi^{-1}(k)$$

1.2.2. Ecuación Recursiva para $\Sigma(k)$

Necesitamos una recursión para calcular $\Sigma(k)$. Partimos de la ecuación de evolución del error de predicción del filtro:

$$\tilde{x}(k/k-1) = \Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1/k-1) + \Gamma(k, k-1)w(k-1)$$

Sustituimos esto en la definición de $\Sigma(k)$:

$$\begin{aligned}\Sigma(k) &= E[\tilde{x}(L/k-1)\{\Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1/k-1) + \Gamma(k, k-1)w(k-1)\}^T] \\ &= E[\tilde{x}(L/k-1)\tilde{x}^T(k-1/k-1)]\Phi^T(k, k-1)\end{aligned}$$

(El término con $w(k-1)$ se anula por independencia).

Ahora, recordamos que el estimador suavizado en la etapa anterior es $\hat{x}(L/k-1) = \hat{x}(L/k-2) + K_s(k-1)\tilde{z}(k-1/k-2)$. Restando esto de $x(L)$, obtenemos la recursión del error:

$$\tilde{x}(L/k-1) = \tilde{x}(L/k-2) - K_s(k-1)\tilde{z}(k-1/k-2)$$

Sustituimos esto en la esperanza anterior:

$$E[\{\tilde{x}(L/k-2) - K_s(k-1)\tilde{z}(k-1/k-2)\}\tilde{x}^T(k-1/k-1)]\Phi^T(k, k-1)$$

Sabemos que el error de filtrado $\tilde{x}(k-1/k-1)$ es ortogonal a la innovación $\tilde{z}(k-1/k-2)$ (propiedad fundamental del filtro óptimo). Por tanto, el segundo término dentro del corchete es cero. Nos queda:

$$E[\tilde{x}(L/k-2)\tilde{x}^T(k-1/k-1)]\Phi^T(k, k-1)$$

Finalmente, expresamos el error de filtrado en función del error de predicción usando la ganancia del filtro K_f :

$$\tilde{x}(k-1/k-1) = [I - K_f(k-1)p(k-1)H(k-1)]\tilde{x}(k-1/k-2) + \dots$$

Sustituyendo y tomando esperanzas, llegamos a la recursión final para $\Sigma(k)$:

$$\Sigma(k) = \Sigma(k-1)[I - K_f(k-1)p(k-1)H(k-1)]^T\Phi^T(k, k-1)$$

1.2.3. Resumen del Algoritmo

El algoritmo de suavizamiento punto fijo para sistemas con observaciones inciertas se inicializa en $k = L$ con los valores del filtro $\hat{x}(L/L)$ y $P(L/L)$. Para $k = L + 1, L + 2, \dots$:

1. Matrices del Filtro (Nahi): Se asume conocido el cálculo de $\Pi(k)$, $\tilde{z}(k/k - 1)$, $K_f(k)$ y $P(k/k)$.
2. Actualización de Matriz Auxiliar:

$$\Sigma(k) = \Sigma(k - 1)[I - K_f(k - 1)p(k - 1)H(k - 1)]^T \Phi^T(k, k - 1)$$

Inicialización: $\Sigma(L + 1) = P(L/L)\Phi^T(L + 1, L)$.

3. Ganancia de Suavizamiento:

$$K_s(k) = \Sigma(k)H^T(k)p(k)\Pi^{-1}(k)$$

4. Estimación Suavizada:

$$\hat{x}(L/k) = \hat{x}(L/k - 1) + K_s(k)\tilde{z}(k/k - 1)$$

1.3. Apartado c)

Consideramos el sistema escalar específico dado por:

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= 0.95x(k) + w(k) \\ z(k) &= \gamma(k)x(k) + v(k) \end{aligned}$$

Con parámetros: $\Phi = 0.95$, $\Gamma = 1$, $H = 1$, $Q = 0.1$, $R = 0.5$, $p = 0.5$.

El ciclo computacional para la implementación conjunta del filtro y el suavizador de punto fijo en un instante L fijo es el siguiente:

1.3.1. Inicialización ($k = 0$)

Se inicializan las variables del filtro con la media y covarianza a priori:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0/-1) &= 0 \\ P(0/-1) &= P_0 = 1 \\ D(0) &= P_0 = 1 \end{aligned}$$

1.3.2. Bucle de Filtrado (Para $k = 0, 1, \dots, N$)

En cada instante k , se ejecutan los siguientes pasos secuenciales:

1. Cálculo de la covarianza de la innovación ($\Pi(k)$):

$$\Pi(k) = p(1 - p)D(k) + p^2P(k/k - 1) + R$$

($H = 1$).

2. Cálculo de la ganancia del filtro ($K(k)$):

$$K(k) = pP(k/k - 1)\Pi^{-1}(k)$$

3. Cálculo de la innovación ($\tilde{z}(k)$):

$$\tilde{z}(k/k - 1) = z(k) - p\hat{x}(k/k - 1)$$

4. Actualización de la estimación (Filtrado):

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k - 1) + K(k)\tilde{z}(k/k - 1)$$

5. Actualización de la covarianza del error ($P(k/k)$):

$$P(k/k) = P(k/k-1) - pK(k)P(k/k-1)$$

6. Predicción para el siguiente instante ($k+1$):

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi\hat{x}(k/k)$$

$$P(k+1/k) = \Phi^2 P(k/k) + Q$$

$$D(k+1) = \Phi^2 D(k) + Q$$

1.3.3. Bucle del Suavizador de Punto Fijo (Para un L fijo)

Queremos mejorar la estimación de $x(L)$ usando datos futuros $z(k)$ con $k > L$.

Inicialización ($k = L$):

$$\hat{x}(L/L) \quad (\text{Obtenido del filtro})$$

$$\Sigma(L+1) = P(L/L)\Phi \quad (\text{Matriz auxiliar inicial})$$

Iteración (Para $k = L+1, \dots, N$):

1. **Ganancia del Suavizador:**

$$K_s(k) = \Sigma(k)p\Pi^{-1}(k)$$

(Usa $\Pi(k)$ calculado en el filtro).

2. **Actualización de la Estimación Suavizada:**

$$\hat{x}(L/k) = \hat{x}(L/k-1) + K_s(k)\tilde{z}(k/k-1)$$

(Usa \tilde{z} del filtro).

3. **Actualización de la Matriz Auxiliar:**

$$\Sigma(k+1) = \Sigma(k)[1 - K(k)p]\Phi$$

(Usa $K(k)$ del filtro).

```
library(tidyverse)
set.seed(123)
N_iter <- 100
Phi <- 0.95
Gamma <- 1
H <- 1
Q <- 0.1
R <- 0.5
P0 <- 1
p_prob <- 0.5

# 1. Simulación del Sistema Real
x <- numeric(N_iter + 1)
z <- numeric(N_iter + 1)
gamma <- rbinom(N_iter + 1, 1, p_prob)
x[1] <- rnorm(1, 0, sqrt(P0)) # x(0)
for (k in 1:N_iter) {
  v <- rnorm(1, 0, sqrt(R))
  z[k] <- gamma[k] * H * x[k] + v
  w <- rnorm(1, 0, sqrt(Q))
```

```

    x[k+1] <- Phi * x[k] + w
  }
  z[N_iter+1] <- gamma[N_iter+1] * H * x[N_iter+1] + rnorm(1, 0, sqrt(R))

# 2. Implementación del Filtro (Nahi)
x_hat_pred <- numeric(N_iter + 1) # x(k/k-1)
x_hat_filt <- numeric(N_iter + 1) # x(k/k)
P_pred <- numeric(N_iter + 1)    # P(k/k-1)
P_filt <- numeric(N_iter + 1)    # P(k/k)
D <- numeric(N_iter + 1)        # D(k)
Pi_innov <- numeric(N_iter + 1)  # Covarianza innovación
z_tilde <- numeric(N_iter + 1)  # Innovación
K_gain <- numeric(N_iter + 1)   # Ganancia

x_hat_pred[1] <- 0
P_pred[1] <- P0
D[1] <- P0

for (k in 1:(N_iter + 1)) {
  term1 <- p_prob * (1 - p_prob) * H * D[k] * H
  term2 <- p_prob^2 * H * P_pred[k] * H
  Pi_innov[k] <- term1 + term2 + R
  K_gain[k] <- p_prob * P_pred[k] * H * (1/Pi_innov[k])
  z_tilde[k] <- z[k] - p_prob * H * x_hat_pred[k]
  x_hat_filt[k] <- x_hat_pred[k] + K_gain[k] * z_tilde[k]
  P_filt[k] <- (1 - K_gain[k] * p_prob * H) * P_pred[k]
  if (k <= N_iter) {
    x_hat_pred[k+1] <- Phi * x_hat_filt[k]
    P_pred[k+1] <- Phi * P_filt[k] * Phi + Q # Gamma=1
    D[k+1] <- Phi * D[k] * Phi + Q
  }
}

# 3. Implementación del Suavizador Punto Fijo
L_idx <- 20
L_real <- L_idx - 1

x_smooth_L <- numeric(N_iter + 1)
x_smooth_L[1:L_idx] <- NA
x_smooth_L[L_idx] <- x_hat_filt[L_idx]
# Matriz auxiliar Sigma inicial: Sigma(L+1) = P(L/L) * Phi'
Sigma <- P_filt[L_idx] * Phi
for (k in (L_idx + 1):(N_iter + 1)) {
  Ks <- Sigma * H * p_prob * (1/Pi_innov[k])
  x_smooth_L[k] <- x_smooth_L[k-1] + Ks * z_tilde[k]
  Sigma <- Sigma * (1 - K_gain[k] * p_prob * H) * Phi
}

# 4. Visualización de Resultados
df_filter <- data.frame(
  Tiempo = 0:N_iter,
  Real = x,
  Estimado = x_hat_filt,

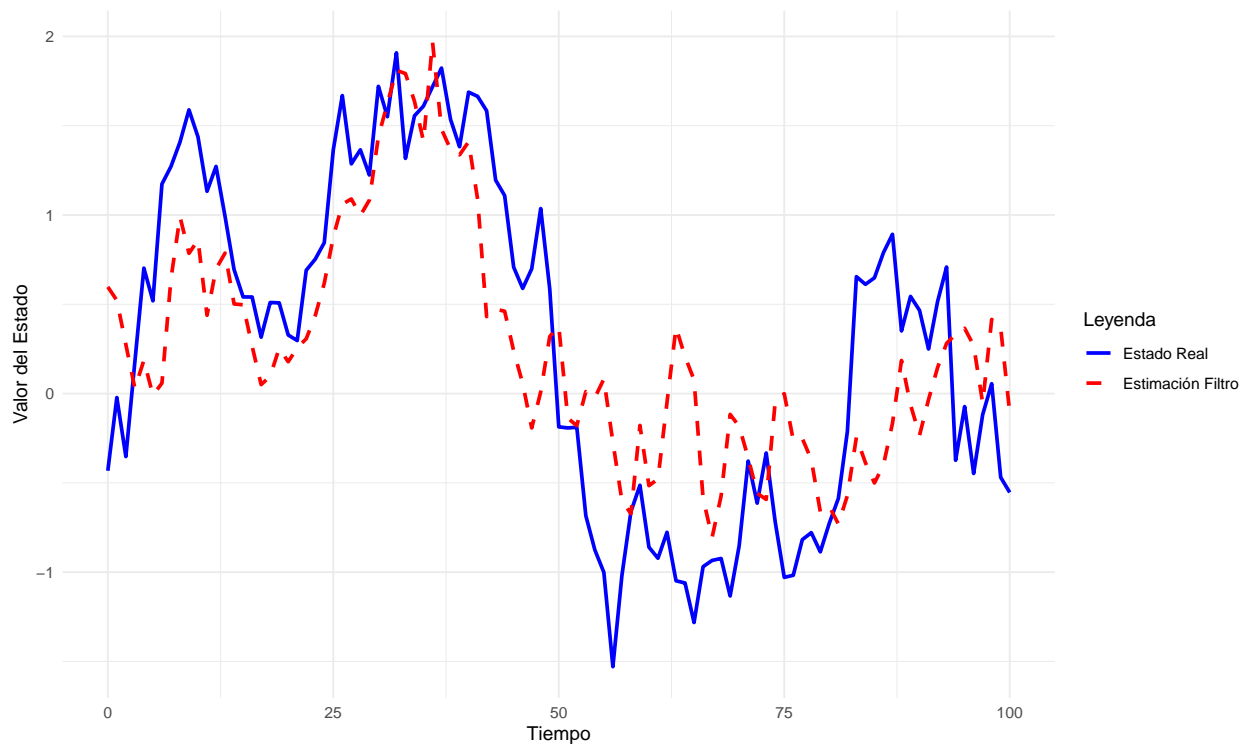
```



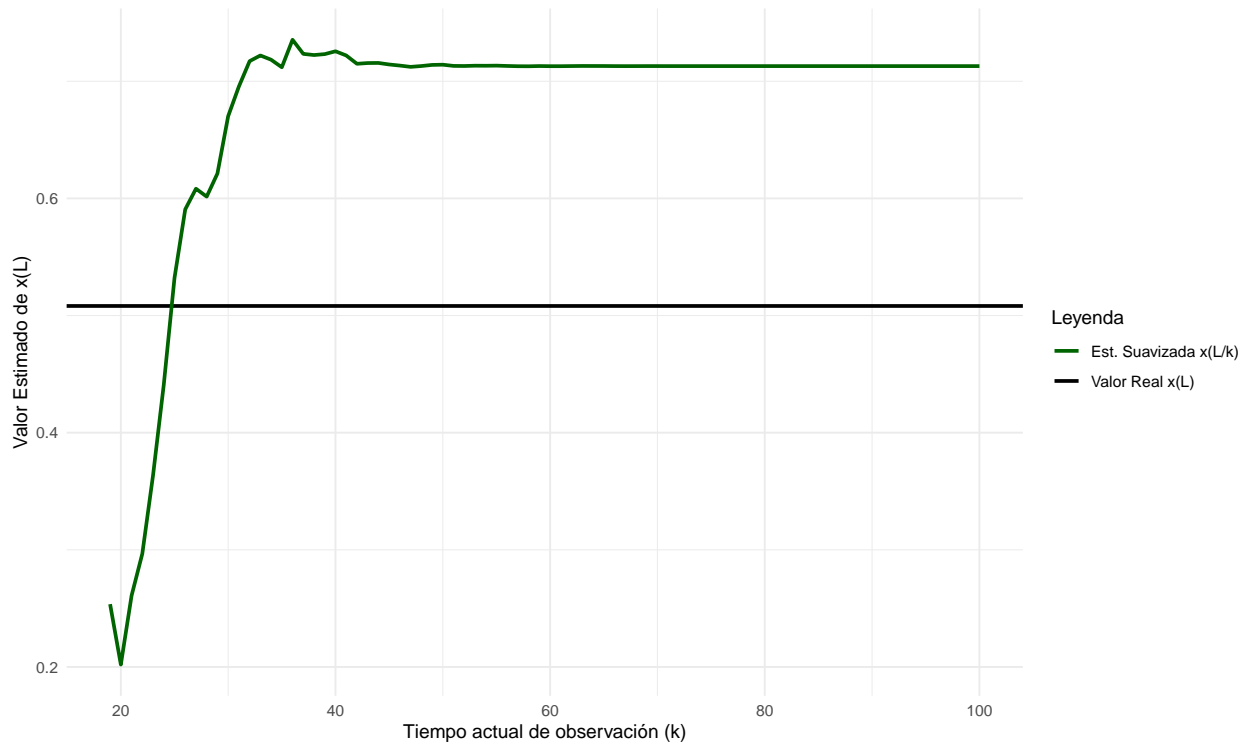
```

Tipo = "Filtro (Nahi)"
)
p1 <- ggplot(df_filter, aes(x=Tiempo)) +
  geom_line(aes(y=Real, color="Estado Real"), linewidth=1) +
  geom_line(aes(y=Estimado, color="Estimación Filtro"), linetype="dashed", linewidth=1) +
  labs(y = "Valor del Estado", color = "Leyenda") +
  theme_minimal() +
  scale_color_manual(values=c("blue", "red"))
df_smooth <- data.frame(
  Tiempo = L_real:N_iter,
  Estimacion_L = x_smooth_L[L_idx:(N_iter+1)],
  Valor_Real_L = x[L_idx]
)
p2 <- ggplot(df_smooth, aes(x=Tiempo)) +
  geom_hline(aes(yintercept=Valor_Real_L, color="Valor Real x(L)"), linewidth=1) +
  geom_line(aes(y=Estimacion_L, color="Est. Suavizada x(L/k)"), linewidth=1) +
  labs(y = "Valor Estimado de x(L)", x = "Tiempo actual de observación (k)",
       color = "Leyenda") +
  theme_minimal() +
  scale_color_manual(values=c("darkgreen", "black"))
print(p1)

```



```
print(p2)
```



1.4. Apartado d)

En este apartado simulamos 50 iteraciones del sistema. Se implementa el cálculo recursivo de la varianza del error de suavizamiento para comparar la incertidumbre del filtro frente a la del suavizador en instantes específicos ($L = 1, 2, 4$).

```
library(tidyverse)

# 1. Configuración y Simulación
set.seed(2024)
N_iter <- 50
Phi <- 0.95
H <- 1
Q <- 0.1
R <- 0.5
P0 <- 1
p_prob <- 0.5
x <- numeric(N_iter + 1)
z <- numeric(N_iter + 1)
gamma <- rbinom(N_iter + 1, 1, p_prob)
x[1] <- rnorm(1, 0, sqrt(P0))
z[1] <- gamma[1] * H * x[1] + rnorm(1, 0, sqrt(R))
for (k in 1:N_iter) {
  w <- rnorm(1, 0, sqrt(Q))
  x[k+1] <- Phi * x[k] + w
  v <- rnorm(1, 0, sqrt(R))
  z[k+1] <- gamma[k+1] * H * x[k+1] + v
}

# 2. Ejecución del Filtro (Nahi)
```

```

x_hat_pred <- numeric(N_iter + 1)
x_hat_filt <- numeric(N_iter + 1)
P_pred <- numeric(N_iter + 1)
P_filt <- numeric(N_iter + 1) # Varianza filtrado  $P(k/k)$ 
D <- numeric(N_iter + 1)
Pi_hist <- numeric(N_iter + 1) # Histórico de  $Pi(k)$ 
z_tilde_hist <- numeric(N_iter + 1) # Histórico de innovaciones
K_hist <- numeric(N_iter + 1) # Histórico de ganancias filtro
x_hat_pred[1] <- 0
P_pred[1] <- P0
D[1] <- P0

for (k in 1:(N_iter + 1)) {
  term1 <- p_prob * (1 - p_prob) * H * D[k] * H
  term2 <- p_prob^2 * H * P_pred[k] * H
  Pi_val <- term1 + term2 + R
  Pi_hist[k] <- Pi_val

  K_val <- p_prob * P_pred[k] * H * (1/Pi_val)
  K_hist[k] <- K_val

  z_tilde <- z[k] - p_prob * H * x_hat_pred[k]
  z_tilde_hist[k] <- z_tilde
  x_hat_filt[k] <- x_hat_pred[k] + K_val * z_tilde

  P_filt[k] <- (1 - K_val * p_prob * H) * P_pred[k]

  if (k <= N_iter) {
    x_hat_pred[k+1] <- Phi * x_hat_filt[k]
    P_pred[k+1] <- Phi * P_filt[k] * Phi + Q
    D[k+1] <- Phi * D[k] * Phi + Q
  }
}

```

3. Ejecución de Suavizadores Punto Fijo

```

run_smoother <- function(L_target) {
  L_idx <- L_target + 1
  x_smooth <- numeric(N_iter + 1)
  P_smooth <- numeric(N_iter + 1)
  x_smooth[1:L_idx] <- NA
  P_smooth[1:L_idx] <- NA
  x_smooth[L_idx] <- x_hat_filt[L_idx]
  P_smooth[L_idx] <- P_filt[L_idx]
  Sigma <- P_filt[L_idx] * Phi
  if (L_idx < (N_iter + 1)) {
    for (k in (L_idx + 1):(N_iter + 1)) {
      Pi_k <- Pi_hist[k]
      z_tilde_k <- z_tilde_hist[k]
      K_filt_k <- K_hist[k]
      Ks <- Sigma * H * p_prob * (1/Pi_k)
      x_smooth[k] <- x_smooth[k-1] + Ks * z_tilde_k
      P_smooth[k] <- P_smooth[k-1] - Ks * Pi_k * Ks
      Sigma <- Sigma * (1 - K_filt_k * p_prob * H) * Phi
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  return(list(x = x_smooth, P = P_smooth))
}
res_L1 <- run_smoother(1)
res_L2 <- run_smoother(2)
res_L4 <- run_smoother(4)

# 4. Preparación de Datos para Gráficas

time_steps <- 0:N_iter
df_main <- data.frame(
  Tiempo = time_steps,
  Estado_Real = x,
  Observaciones = z,
  Filtro = x_hat_filt,
  Suavizado_L2 = res_L2$x
)

df_vars <- data.frame(
  Tiempo = time_steps,
  Var_Filtro = P_filt,
  Var_Smooth_L1 = res_L1$P,
  Var_Smooth_L2 = res_L2$P,
  Var_Smooth_L4 = res_L4$P
) %>%
  pivot_longer(cols = starts_with("Var"), names_to = "Tipo", values_to = "Varianza")

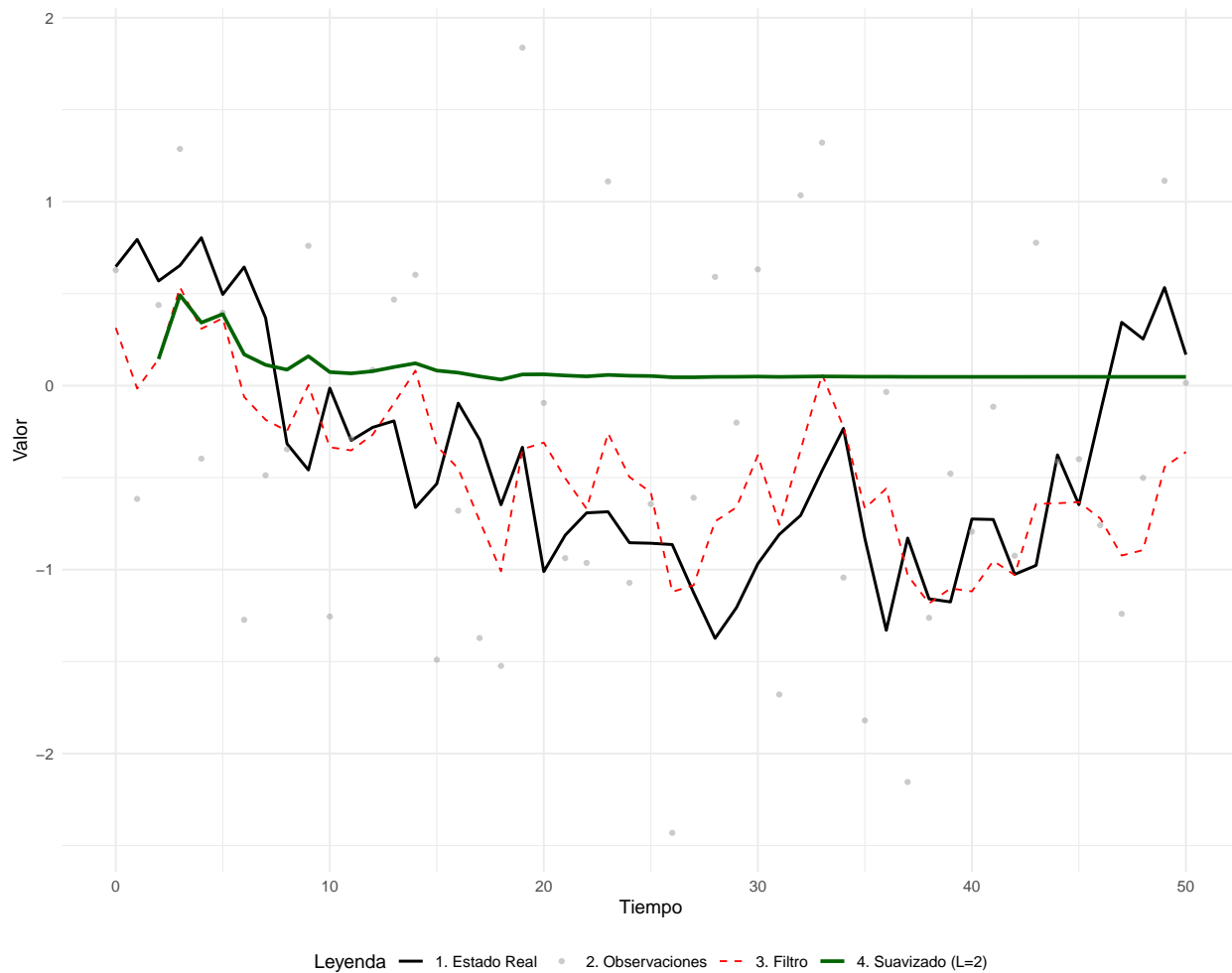
# 5. Generación de Gráficas

# Gráfica 1: Trayectorias (Estado, Obs, Filtro, Suavizado L=2)
p1 <- ggplot(df_main, aes(x = Tiempo)) +
  geom_line(aes(y = Estado_Real, color = "1. Estado Real"), linewidth = 0.8) +
  geom_point(aes(y = Observaciones, color = "2. Observaciones"), size = 1, alpha = 0.5) +
  geom_line(aes(y = Filtro, color = "3. Filtro"), linetype = "dashed") +
  geom_line(aes(y = Suavizado_L2, color = "4. Suavizado (L=2)"), linewidth = 1) +
  labs(y = "Valor", color = "Leyenda") +
  scale_color_manual(values = c("black", "grey60", "red", "darkgreen")) +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "bottom")

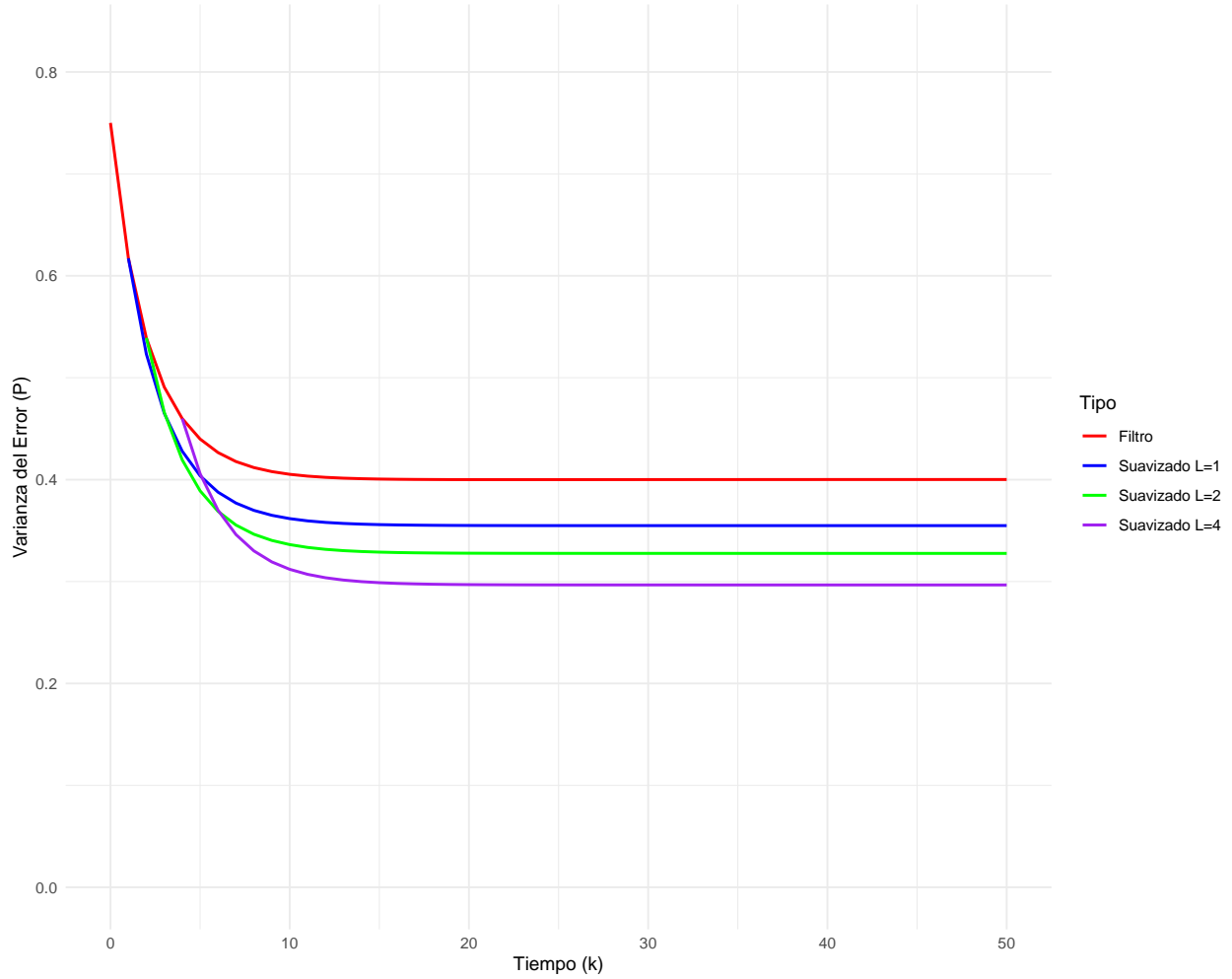
# Gráfica 2: Varianzas de Error
p2 <- ggplot(df_vars, aes(x = Tiempo, y = Varianza, color = Tipo)) +
  geom_line(linewidth = 0.8) +
  labs(x = "Tiempo (k)", y = "Varianza del Error (P)") +
  scale_color_manual(values = c("red", "blue", "green", "purple"),
    labels = c("Filtro", "Suavizado L=1", "Suavizado L=2", "Suavizado L=4")) +
  theme_minimal() +
  coord_cartesian(ylim = c(0, max(P_filt)*1.1))

print(p1)

```



```
print(p2)
```



1.4.1. Comentario de los Resultados

En las simulaciones realizadas para el sistema con observaciones inciertas ($p = 0.5$), se han obtenido dos gráficas fundamentales que permiten validar el correcto funcionamiento del algoritmo de filtrado de Nahi y del suavizador de punto fijo.

1. Análisis de Trayectorias (Gráfica 1)

En la primera gráfica se representa una realización del sistema durante $N = 50$ iteraciones.

Dinámica del Filtro: La estimación del filtro $\hat{x}(k/k)$ (línea roja discontinua) consigue rastrear la evolución del estado real $x(k)$, a pesar de la alta incertidumbre introducida por la probabilidad de falsa alarma ($1 - p = 0.5$). Se observa que el filtro reacciona a las observaciones, pero mantiene un nivel de error apreciable debido a que, en promedio, la mitad de las observaciones contienen únicamente ruido.

Comportamiento del Suavizador ($L = 2$): La línea verde muestra la evolución de la estimación $\hat{x}(L/k)$ para el instante fijo $L = 2$ a medida que avanza el tiempo k . Se aprecia cómo la estimación varía durante las primeras iteraciones posteriores a $k = 2$ (fase transitoria), corrigiendo el valor inicial del filtro gracias a la información aportada por las innovaciones futuras. Pasado un cierto horizonte temporal (aprox. $k > 15$), la estimación se estabiliza y permanece prácticamente constante, lo que indica que las observaciones muy lejanas en el futuro dejan de aportar información significativa sobre el estado en $L = 2$.

2. Análisis de las Varianzas del Error (Gráfica 2)

La segunda gráfica ofrece la validación teórica más robusta de la implementación.

Estabilidad del Filtro: La varianza del error de filtrado $P(k/k)$ (línea roja) parte de $P_0 = 1$ y converge rápidamente hacia un régimen estacionario (alrededor de 0.4). Esto confirma la estabilidad del algoritmo de Nahi.

Mejora por Suavizamiento: Las curvas de varianza de los suavizadores para $L = 1, 2, 4$ (líneas azul, verde y morada) presentan un comportamiento monótonamente decreciente. Parten del valor de la varianza del filtro en el instante L ($P(L/L)$) y disminuyen conforme k aumenta, estabilizándose asintóticamente en un valor inferior (aprox. 0.3).

Conclusión: El hecho de que $P(L/k) < P(L/L)$ para todo $k > L$ confirma que el procesamiento de datos “a posteriori” (suavizamiento) reduce la incertidumbre de la estimación respecto al filtrado en tiempo real. La diferencia entre el nivel estacionario rojo (filtro) y los niveles de los suavizadores cuantifica la ganancia de precisión obtenida mediante el algoritmo de punto fijo.

1.5. Apartado e)

En este apartado estudiamos la sensibilidad del Estimador Lineal Mínimo Cuadrático ante variaciones en la probabilidad de detección de la señal, p . El objetivo es visualizar cómo la incertidumbre sobre la presencia de la señal afecta a la precisión final de la estimación.

Para ello, evaluamos la evolución recursiva de la varianza del error de filtrado $P(k/k)$ para un conjunto de valores $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0\}$, manteniendo constantes el resto de parámetros del sistema.

Las ecuaciones deterministas que gobiernan la evolución de la covarianza son:

1. Evolución del segundo momento del estado:

$$D(k+1) = \Phi D(k) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad D(0) = P_0$$

2. Covarianza de la innovación (dependiente de p):

$$\Pi(k) = p(1-p)HD(k)H^T + p^2HP(k/k-1)H^T + R$$

3. Ganancia del filtro:

$$K(k) = pP(k/k-1)H^T\Pi^{-1}(k)$$

4. Actualización de la varianza del error (Filtrado):

$$P(k/k) = P(k/k-1) - pK(k)HP(k/k-1)$$

5. Predicción de la varianza:

$$P(k+1/k) = \Phi P(k/k)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

```
library(tidyverse)

# --- Parámetros del Sistema ---
N_iter <- 50
Phi <- 0.95
H <- 1
Q <- 0.1
R <- 0.5
P0 <- 1

# Valores de probabilidad p a evaluar
p_valores <- c(0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0)
```

```

# Función para calcular la trayectoria de varianza dado un p
calc_variance_evolution <- function(p_in, N, Phi, H, Q, R, P0) {
  # Inicialización
  P_pred <- P0
  D <- P0
  var_history <- numeric(N + 1)

  # Bucle temporal
  for (k in 1:(N + 1)) {
    # 1. Covarianza Innovación  $P_i(k)$ 
    term1 <- p_in * (1 - p_in) * H * D * H
    term2 <- p_in^2 * H * P_pred * H
    Pi_val <- term1 + term2 + R

    # 2. Ganancia  $K(k)$ 
    K_val <- p_in * P_pred * H * (1/Pi_val)

    # 3. Varianza de Filtrado  $P(k/k)$  -> ESTO ES LO QUE GUARDAMOS
    #  $P(k/k) = P(k/k-1) - p K H P(k/k-1)$ 
    P_filt <- P_pred - p_in * K_val * H * P_pred
    var_history[k] <- P_filt

    # 4. Predicciones para  $k+1$ 
    P_pred <- Phi * P_filt * Phi + Q
    D <- Phi * D * Phi + Q
  }

  return(var_history)
}

# --- Ejecución para todos los valores de p ---
results_list <- list()

for (val in p_values) {
  trayectoria <- calc_variance_evolution(val, N_iter, Phi, H, Q, R, P0)
  results_list[[as.character(val)]] <- data.frame(
    Tiempo = 0:N_iter,
    Varianza = trayectoria,
    Probabilidad = as.factor(val)
  )
}

# Unir todos los resultados en un solo dataframe
df_comparison <- bind_rows(results_list)

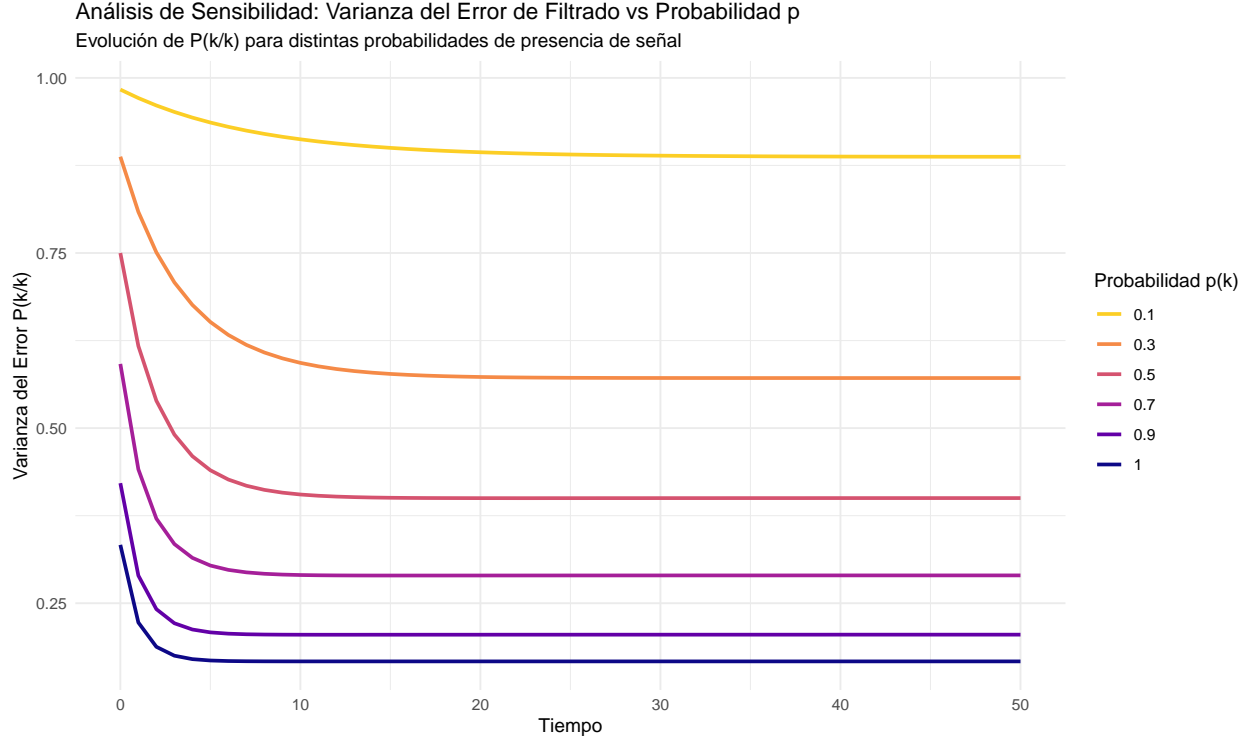
# --- Visualización ---
p_comparison <- ggplot(df_comparison, aes(x = Tiempo, y = Varianza, color = Probabilidad)) +
  geom_line(linewidth = 1) +
  labs(title = "Análisis de Sensibilidad: Varianza del Error de Filtrado vs Probabilidad p",
    subtitle = "Evolución de  $P(k/k)$  para distintas probabilidades de presencia de señal",
    y = "Varianza del Error  $P(k/k)$ ",
    color = "Probabilidad  $p(k)$ ") +
  theme_minimal() +

```



```
scale_color_viridis_d(option = "plasma", end = 0.9, direction = -1) +
theme(legend.position = "right")
```

```
print(p_comparison)
```



1.5.1. Análisis de Sensibilidad y Discusión de Resultados

La gráfica obtenida muestra la evolución temporal de la varianza del error de estimación a posteriori, $P(k/k)$, parametrizada por la probabilidad de presencia de señal $p \in \{0.1, \dots, 1.0\}$. El análisis de estas curvas permite extraer conclusiones fundamentales sobre la robustez y los límites teóricos del estimador:

1. Monotonicidad Inversa respecto a la Incertidumbre Se observa una relación estrictamente monótona decreciente entre la probabilidad p y la varianza del error en estado estacionario (P_∞).

$$\text{Si } p_1 > p_2 \implies P_\infty(p_1) < P_\infty(p_2)$$

Esto es consistente con la teoría de la información: un mayor valor de p implica una mayor relación señal-a-ruido efectiva y una mayor frecuencia de actualizaciones de información válida. El caso límite $p = 1$ (curva azul oscuro) corresponde al **Filtro de Kalman estándar**, estableciendo la cota inferior teórica de la varianza del error (aprox. 0.28 en este sistema).

2. Inflación de la Covarianza por el Término Bernoulli La degradación del desempeño para valores bajos de p (ej. curva amarilla $p = 0.1$) no se debe solo a la “ausencia” de datos, sino a la incertidumbre intrínseca añadida a la innovación. Recordando la expresión de la covarianza de la innovación:

$$\Pi(k) = \underbrace{p(1-p)HD(k)H^T}_{\text{Ruido Multiplicativo}} + \underbrace{p^2HP(k/k-1)H^T}_{\text{Incertidumbre Estado}} + R$$

El término $p(1-p)$ alcanza su máximo en $p = 0.5$, introduciendo un ruido adicional dependiente de la energía del estado ($D(k)$). Para p muy bajos (como 0.1), el término R domina relativamente y la ganancia del filtro $K(k)$ se vuelve muy pequeña, provocando que la varianza $P(k/k)$ se reduzca muy lentamente y se mantenga cercana a la varianza de predicción en bucle abierto.

3. Velocidad de Convergencia La tasa de convergencia hacia el régimen estacionario es directamente proporcional a p . * Para $p \approx 1$: La reducción de la incertidumbre inicial P_0 es drástica en las primeras 3-4 iteraciones, indicando una alta ganancia de filtrado. * Para $p \approx 0.1$: La curva es mucho más suave. El estimador requiere un horizonte temporal mucho más amplio para reducir la incertidumbre inicial, ya que la “cantidad de información” que extrae en cada paso es mínima.

Conclusión El análisis confirma que la probabilidad de falsa alarma $(1 - p)$ actúa como un factor limitante estructural en la precisión del sistema. Incluso con un número infinito de observaciones, la incertidumbre en el mecanismo de observación impide alcanzar el rendimiento del filtro óptimo gaussiano estándar ($p = 1$), estabilizándose el error en niveles superiores cuantificables mediante las ecuaciones de Riccati modificadas utilizadas en este estudio.

2. EJERCICIO 2