

RELACIÓN DE PROBLEMAS (Tema 3):

Estimación en sistemas lineales discretos

1. Consideremos el modelo de espacio de estados definido en la Sección 1 del Tema 3:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k), \quad k \geq 0; \quad x(0) = x_0$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

verificando las siguientes hipótesis:

- El estado inicial, x_0 , es un vector aleatorio n -dimensional gaussiano con media cero y matriz de covarianzas $E[x_0 x_0^T] = P_0$.
- El proceso $\{w(k); k \geq 0\}$ es una sucesión ruido blanco gaussiana, centrada, con matrices de covarianzas $E[w(k)w^T(k)] = Q(k)$, $k \geq 0$.
- El proceso $\{v(k); k \geq 0\}$ es un ruido blanco gaussiano, centrado y con covarianzas $E[v(k)v^T(k)] = R(k)$, $k \geq 0$, siendo $R(k)$ una matriz definida positiva.
- El estado inicial, x_0 , y los ruidos aditivos, $\{w(k); k \geq 0\}$ y $\{v(k); k \geq 0\}$, son mutuamente independientes.

(a) Demostrar las siguientes propiedades:

$$(a.1) \quad E[x(j)w^T(k)] = 0, \quad j, k \geq 0, \quad j \leq k$$

$$(a.2) \quad E[z(j)w^T(k)] = 0, \quad j, k \geq 0, \quad j \leq k$$

$$(a.3) \quad E[x(j)v^T(k)] = 0, \quad j, k \geq 0$$

$$(a.4) \quad E[z(j)v^T(k)] = 0, \quad j, k \geq 0, \quad j \neq k.$$

(b) Demostrar que $\forall k \geq 0$, $\hat{x}(k/j)$, el estimador lineal de menor error cuadrático medio de $x(k)$ basado en $z(0), \dots, z(j)$, verifica

$$\hat{x}(k/j) = \hat{x}(k/j-1) + K(k, j) [z(j) - \hat{z}(j/j-1)], \quad j > 0.$$

(c) Determinar el proceso innovación, $\{\tilde{z}(k/k-1); k \geq 0\}$, y demostrar que es un proceso gaussiano, centrado, blanco, y con matrices de covarianzas

$$\Pi(k) = H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k), \quad k > 0$$

$$\Pi(0) = H(0)P_0H^T(0) + R(0).$$

siendo $P(k/k-1) = E[\tilde{x}(k/k-1)\tilde{x}^T(k/k-1)]$ la matriz de covarianzas del error de predicción.

- (d) Demostrar el algoritmo de filtrado de Kalman.
- (e) Demostrar el algoritmo de suavizamiento punto fijo y obtener las matrices de covarianzas de los errores de suavizamiento.
- (f) Escribir el ciclo computacional a seguir para la obtención del suavizador punto fijo $\hat{x}(k/j)$, $j = k+1, \dots, k+N$, y realizar un programa en Matlab considerando el siguiente modelo de espacio de estados:

$$x(k+1) = 0.95x(k) + w(k), \quad k \geq 0; \quad x(0) = x_0$$

$$z(k) = x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

donde x_0 , es una variable gaussiana con media cero y varianza $P_0 = 1$, el ruido $\{w(k); k \geq 0\}$ es una sucesión blanca gaussiana, centrada con varianzas $Q(k) = 0.1, \forall k \geq 0$ y $\{v(k); k \geq 0\}$ es un proceso ruido blanco gaussiano, centrado y con varianzas $R(k) = 0.5, \forall k \geq 0$.

- (g) Para el modelo de espacio de estados del apartado anterior y considerando 50 iteraciones, representar en una misma gráfica una trayectoria del estado, las correspondientes observaciones y estimaciones de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 2$. Hacer otra gráfica con las varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 1, 2, 4$. Comentar todos los resultados.

- 2.** Sea $\{x(k); k \geq 0\}$ un proceso estocástico escalar definido mediante la relación

$$x(k+1) = (-1)^{2k+1}x(k), \quad k \geq 0$$

donde x_0 es una variable gaussiana con media cero y varianza $E[x_0^2] = P_0$.

Supongamos que disponemos de observaciones de este proceso de la forma

$$z(k) = x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

donde $\{v(k); k \geq 0\}$ es una sucesión blanca gaussiana, centrada y con varianzas $E[v^2(k)] = R, k \geq 0$.

- (a) Representar los 20 primeros valores de dos trayectorias del proceso $\{x(k); k \geq 0\}$ y sus correspondientes valores observados, considerando distintos valores de P_0 y/o de R ; comentar los resultados.
- (b) Escribir el algoritmo de filtrado de Kalman y el algoritmo de suavizamiento punto fijo y hacer un programa en Matlab para dichos algoritmos.
- (c) Considerando $P_0 = 1$ y $R = 0.5$ y 20 iteraciones de los algoritmos, representar en una misma gráfica una trayectoria del estado, las correspondientes observaciones y estimaciones de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 2$. Hacer otra gráfica con las varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento punto fijo con $N = 1, 2, 4$. Comentar todos los resultados.
- (d) Hacer una gráfica con las varianzas de los errores de filtrado considerando distintos valores de P_0 y/o de R ; comentar los resultados.