

Índice general

4. Tiempos de primer paso	3
4.1. Introducción	3
4.2. Obtención de la ecuación integral	6
4.3. Estudio de la existencia de solución única de la ecuación integral y obtención de soluciones explícitas	8
4.3.1. Justificación	8
4.3.2. Un caso particular: el proceso lognormal con factores exógenos	9
4.3.3. Obtención de la ecuación integral para procesos transformados del proceso Wiener	13
4.3.4. Caracterización de $k(t)$ en función de los momentos infinitesimales de la difusión.	17
4.3.5. La ecuación integral para procesos no homogéneos en general	17
4.4. Cálculo de densidades de tiempo de primer paso a partir de otras conocidas.	20
4.4.1. Procesos transformados del proceso Wiener	20
4.4.2. Procesos con transición obtenida por factorización a partir de la de otro proceso	23
A. Ecuaciones integrales de Volterra	25
A.1. Ecuaciones integrales de Volterra	25

Tema 4

Tiempos de primer paso

4.1. Introducción

En el estudio de fenómenos que involucran variables que evolucionan en el tiempo, y que por tanto se pueden modelar mediante procesos estocásticos, es frecuente plantearse cuestiones acerca de la evolución temporal de la variable en estudio. Por ejemplo:

- En Economía, el tiempo que tarda una variable, por ejemplo el P.I.B., en alcanzar un determinado valor.
- En Ecología, el tiempo que tarda un animal en atravesar una determinada zona.
- En piscifactorías, el tamaño de un animal (bien sea el peso, o la longitud, o una combinación de ambas variables).
- En estudios de poblaciones, el tamaño total en un instante determinado, o el tiempo que tarda una población en alcanzar un determinado nivel.

Por tanto, cuando se dispone de variables que evolucionan en el tiempo y sobre las cuales se desea determinar cuándo se cumple una determinada condición, es lógico considerar el problema de estudiar la distribución de la variable *instante en el cual la variable en estudio verifica una determinada condición*. En las situaciones en las que el fenómeno esté regido por un proceso estocástico en tiempo continuo, es evidente que lo que estamos planteando es estudiar el tiempo en el cual dicho proceso satisface una determinada propiedad.

Dentro de este tipo de situaciones merece especial atención aquéllas en las que la variable temporal que se desea estudiar es el tiempo en el que el proceso verifica por primera vez una propiedad; es decir la variable

$$\inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) \text{ verifica una propiedad dada}\},$$

para la cual se debe calcular su distribución.

Por ejemplo, en la cría controlada de especies para consumo, como piscifactorías, es importante saber el primer instante en el que el organismo alcanza una determinada talla o un determinado peso, ya que eso determina el instante en el que es apto para el consumo y no se debe seguir invirtiendo en su cría. Otro ejemplo lo podemos encontrar en Economía, cuando se desea conocer cuándo una variable, como el P.I.B. o el I.P.C, atraviesa por primera vez un determinado umbral (el cual puede tener un importante significado desde el punto de vista económico). Un último ejemplo lo tenemos en Neurobiología, donde la actividad de una neurona puede ser estudiada a través del instante en el que el proceso que modela la diferencia de potencial de la membrana neuronal atraviesa un determinado umbral.

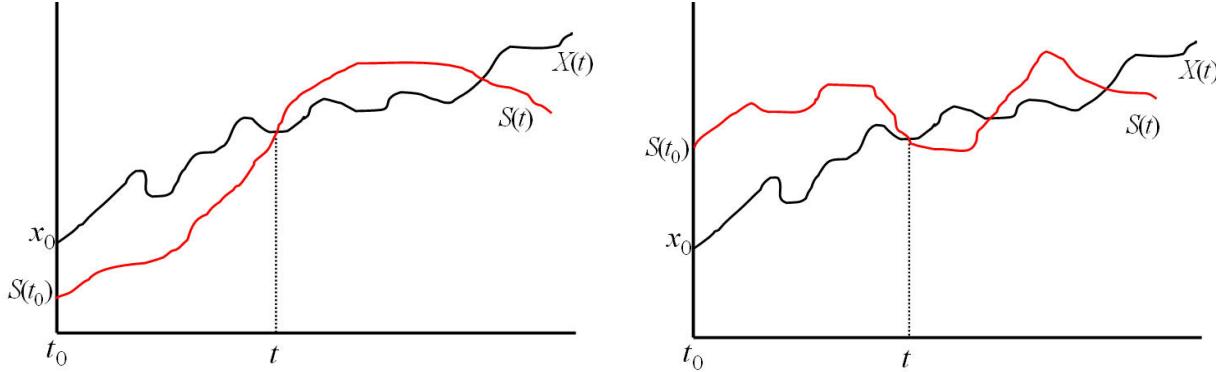
Todos estos últimos ejemplos obedecen a un esquema que se conoce como *problemas de tiempo de primer paso* y que puede ser modelado matemáticamente de la siguiente forma:

Sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso estocástico en tiempo continuo y $S = S(t)$ una función continua (a la que denominaremos barrera) definida en $[t_0, T]$. Se define la variable tiempo de primer paso de $X(t)$ a través de

$S(t)$, condicionada a que $X(t_0) = x_0$, como

$$T_{S(t),x_0} = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t) | X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.1)$$

y notaremos por $g(S(t), t | x_0, t_0)$ a su función de densidad.



Esta definición puede generalizarse al caso en el que no se condicione a un valor inicial. En tal caso el tiempo de primer paso depende de la variable $X(t_0)$ y se define como

$$T_{S(t),X(t_0)} = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t)\} & \text{si } X(t_0) < S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t)\} & \text{si } X(t_0) > S(t_0). \end{cases} \quad (4.2)$$

En esta situación, y si notamos por J al rango de variación de $X(t_0)$, la función de densidad de la variable (4.2) puede obtenerse a partir de la familia de densidades $\{g(S(t), t | x_0, t_0), x_0 \in J - \{S(t_0)\}\}$ mediante la expresión

$$g(S(t), t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{S(t_0)-\epsilon} g(S(t), t | x_0, t_0) f_{X(t_0)}(x_0) dx_0 + \int_{S(t_0)+\epsilon}^{+\infty} g(S(t), t | x_0, t_0) f_{X(t_0)}(x_0) dx_0 \right], \quad (4.3)$$

donde $f_{X(t_0)}$ es la densidad de $X(t_0)$. Por tanto, este caso puede reducirse al dado en (4.1), que será el que consideremos en este tema. Asimismo, nos centraremos en el caso de procesos de difusión, si bien algunos de los resultados que comentaremos han sido extendidos a clases de procesos más generales, como es el caso de los procesos de Markov o la clase de procesos gaussianos.

En lo que respecta a este problema en el ámbito de los procesos de difusión, son numerosos los resultados que se han obtenido, a lo largo de los últimos años, dependiendo, sobre todo, del tipo de funciones S consideradas y de las características del proceso de difusión que se estuviera considerando.

Así, por ejemplo, en el caso de barreras constantes existe una ecuación integro-diferencial, denominada *ecuación de Schrödinger* (aunque también la obtuvo Siegert), y que puede ser resuelta en determinados casos como son el caso de procesos homogéneos (mediante el empleo de transformadas de Laplace) o en el caso en el que la densidad de transición sea *simétrica* en S (entendiéndose por ello que $f(S + \delta, t | S, \tau) = f(S - \delta, t | S, \tau)$, $\forall \delta, t, \tau$). De igual forma, Siegert obtuvo, para el caso de procesos homogéneos, un procedimiento mediante el cual se puede calcular la transformada de Laplace de la densidad de tiempo de primer paso siempre y cuando se

conozca la correspondiente a la de la densidad de transición del proceso. En el caso en el que no se conozca la densidad de transición también es posible abordar el cálculo de la densidad de tiempo de primer paso. En esta situación, Siegert demostró que para ello basta con resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden (con coeficientes, en general, variables ya que son los momentos infinitesimales del proceso).

En un contexto más general, considerando barreras variables en el tiempo, el estudio de este tema ha pasado por numerosas etapas. Así, Doob (1953) y Shepp (1966) consideraron este tipo de estudio para el proceso Wiener estándar, considerando barreras constantes y lineales en el tiempo. Durbin (1971), siguiendo con el proceso de Wiener, consideró el caso de barreras más generales, obteniendo una ecuación integral cuya solución proporciona la probabilidad del tiempo de primer paso; sin embargo, dicha ecuación presentaba el inconveniente de no ser resoluble de forma analítica y había que usar métodos numéricos para aproximar la solución. Posteriormente Park y Paranjape (1974) consiguieron una expresión explícita para la solución de una ecuación integral como la planteada por Durbin, en el caso de barreras diferenciables verificando la condición $|S'(t)| \leq Ct^{-p}$ con $p < 1/2$ y C una cierta constante.

En un estudio posterior, Ricciardi, Sacerdote y Sato (1984) establecieron que, para un proceso de difusión, la función de densidad del tiempo de primer paso a través de una barrera derivable con derivada acotada, verifica una ecuación integral de Volterra de segunda especie, cuyo núcleo puede ser expresado en función de las funciones que hemos denominado *flujo de probabilidad* (página 18 del tema 2), y la aplicaron a los procesos Wiener y Ornstein-Uhlenbeck. Este fue un buen avance en dos sentidos: de una parte, permitía resolver el problema para el proceso de Wiener estándar, no sólo para las barreras introducidas por Park y Paranjape, sino también para barreras del tipo $S(t) = a + bt^{1/p}$, ($p \geq 2$); por otro lado, haciendo uso de las relaciones que transforman un proceso de difusión en el Wiener (ver tema 2), se podía obtener la densidad del tiempo de primer paso a través de barreras móviles para ciertos procesos de difusión conociendo la del proceso Wiener a través de las correspondientes barreras transformadas. Ello fue de utilidad, por ejemplo, al considerarlo de forma recíproca; concretamente, a partir de la densidad del tiempo de primer paso a través de barreras constantes para el proceso Ornstein-Uhlenbeck se obtuvo, de forma explícita, la del proceso de Wiener a través de barreras del tipo $S(t) = C\sqrt{t}$.

No obstante, el resultado anterior tenía ciertas restricciones en su aplicación a casos concretos; por ejemplo, la ecuación integral obtenida no tenía por qué poseer un núcleo no singular, a no ser que se consideraran cierto tipos de barreras como las tratadas por los autores. Es por ello por lo que se prosiguió con el estudio de condiciones bajo las cuales ese tipo de ecuaciones integrales tuvieran núcleos no singulares, lo que garantizaría la existencia de solución. En ese sentido, y centrándose en el caso homogéneo, Buonocore, Nobile y Ricciardi (1987), ayudándose de dos funciones continuas arbitrarias en principio, probaron que la densidad del tiempo de primer paso a través de barreras variables satisfacía una nueva ecuación integral de Volterra de segunda especie (que ya no venía dada en función de los *flujos de probabilidad*). Con una conveniente elección de las funciones mencionadas probaron que, para los procesos Wiener y Ornstein-Uhlenbeck, la singularidad del núcleo podía ser evitada si se utilizaban barreras de clase C^2 ; además, encontraron tipos de barreras para las cuales era factible, sin necesidad de resolver la ecuación integral, obtener formas explícitas para las densidades de tiempo de primer paso, al mismo tiempo que propusieron esquemas numéricos en el caso de no poder resolver de forma explícita la ecuación integral.

Siguiendo con esta idea, el siguiente paso fue intentar encontrar funciones que garantizaran la regularización del núcleo de la ecuación integral obtenida. Giorno, Nobile, Ricciardi y Sato proporcionaron en 1989 la esperada generalización, probando que el método empleado para hacer no singular el núcleo de la ecuación integral es válido, no sólo para el proceso Wiener y Ornstein-Uhlenbeck, sino para una clase más general de difusiones homogéneas cuyas densidades de transición fueran conocidas.

No obstante, los resultados anteriores se circunscriben al ámbito de procesos de difusión homogéneos. La extensión de los anteriores resultados al caso no homogéneo ha pasado por diversas etapas, considerando determinadas clases de procesos. Por ejemplo, para la clase de procesos no homogéneos cuya transición se puede obtener a partir de la de procesos homogéneos mediante una cierta factorización de la misma (ver tema 2), Gutiérrez, Román y Torres (1994) verificaron que la densidad de tiempo de primer paso verifica una ecuación integral de Volterra de segunda especie del mismo tipo (con algunas lógicas modificaciones debido a la naturaleza no homogénea del proceso) que en el caso anterior. Posteriormente, en 1995 los mismos autores comprobaron que también este hecho era verificado por la clase de procesos no homogéneos transformables al Wiener mediante una transformación del tipo estudiada en el tema 2. Finalmente, en 1997, Gutiérrez, Ricciardi, Román y Torres consiguieron extender este resultado a la clase de procesos de difusión no homogéneos en general. Al

igual que en el caso homogéneo, es posible encontrar barreras para las cuales la solución de la ecuación integral puede hallarse de forma explícita sin necesidad de resolver la ecuación, mientras que en otro caso es necesario disponer de procedimientos de integración numérica de la misma, siendo el método del trapecio compuesta el más comúnmente extendido para este fin.

4.2. Obtención de la ecuación integral

$\forall t, \tau > t_0$, ($\tau < t$) y $\forall x, y \in I$, sean $F(x, t|y, \tau)$ y $f(x, t|y, \tau)$ las funciones de distribución y de densidad de transición del proceso respectivamente. Asimismo sea T la variable tiempo de primer paso del proceso a través de $S(t)$, definida como

$$T = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) \mid X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t) \mid X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.4)$$

y notemos por $g(S(t), t \mid x_0, t_0)$ a su función de densidad.

En los desarrollos siguientes serán necesarias algunas relaciones, probadas por Fortet, que las funciones verifican entre sí y que no probaremos. En concreto:

$$f(x, t \mid x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau \mid x_0, t_0) f(x, t \mid S(\tau), \tau) d\tau$$

(4.5)

si $(x_0 < S(t_0) \text{ y } x \geq S(t)) \text{ ó } (x_0 > S(t_0) \text{ y } x \leq S(t))$

y

$$\lim_{\tau \uparrow t} F(S(t), t \mid S(\tau), \tau) = \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

A continuación exponemos el resultado que proporciona una primera expresión para la ecuación integral de Volterra verificada por la densidad del tiempo de primer paso.

Teorema 4.2.1. *Sea S una función continua en $[t_0, T]$ y consideremos, $\forall y \in I$ y $\tau < t$,*

$$\phi(x, t \mid y, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} F(x, t \mid y, \tau).$$

Entonces se verifica:

$$g(S(t), t \mid x_0, t_0) = \begin{cases} -2\phi(S(t), t \mid x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau \mid x_0, t_0) \phi(S(t), t \mid S(\tau), \tau) d\tau & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ 2\phi(S(t), t \mid x_0, t_0) - 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau \mid x_0, t_0) \phi(S(t), t \mid S(\tau), \tau) d\tau & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.7)$$

Demostración

Supongamos en primer lugar que $x_0 < S(t_0)$. Integrando los dos miembros de (4.5), respecto a x , entre $S(t)$ y r_2 se tiene

$$1 - F(S(t), t \mid x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau \mid x_0, t_0) [1 - F(S(t), t \mid S(\tau), \tau)] d\tau,$$

(4.8)

y derivando esta expresión con respecto a t ,

$$\begin{aligned}
-S'(t)f(S(t), t | x_0, t_0) - \phi(S(t), t | x_0, t_0) &= g(S(t), t | x_0, t_0) \lim_{\tau \uparrow t} [1 - F(S(t), t | S(\tau), \tau)] - \\
&\quad - S'(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) f(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau - \\
&\quad - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \phi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau ,
\end{aligned}$$

y haciendo uso de (4.5) y (4.6) se concluye. La demostración en el caso $x_0 > S(t_0)$ es análoga, integrando ahora (4.5) entre r_1 y $S(t)$. ■

A continuación vamos a obtener una nueva expresión de la anterior ecuación integral pero introduciendo en ella dos funciones arbitrarias.

Teorema 4.2.2. *Sean S , k y r funciones continuas en $[t_0, T]$. Consideremos, $\forall y \in I$ y $\tau < t$*

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} \phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) + r(t)[1 - F(S(t), t | y, \tau)] & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ \phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) + r(t)F(S(t), t | y, \tau) & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.9)$$

Entonces se verifica:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \begin{cases} -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ 2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) - 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.10)$$

Demostración

Consideremos $x_0 < S(t_0)$ (el caso $x_0 > S(t_0)$ se resuelve de forma análoga). De (4.9) despejamos la función ϕ y sustituimos su expresión en el miembro derecho de (4.7), obteniéndose

$$\begin{aligned}
g(S(t), t | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + 2k(t)f(S(t), t | x_0, t_0) + 2r(t)[1 - F(S(t), t | x_0, t_0)] + \\
&\quad + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau - \\
&\quad - 2r(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) [1 - F(S(t), t | S(\tau), \tau)] d\tau - \\
&\quad - 2k(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) f(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau
\end{aligned}$$

y haciendo uso de (4.8) y (4.5) se concluye la demostración. ■

Seguidamente vamos a obtener una expresión para el núcleo de la ecuación integral (4.10), dado por (4.9), en función de los momentos infinitesimales del proceso de difusión. Para ello calculamos el valor de $\phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau)$ y lo sustituimos en la expresión (4.9).

$$\begin{aligned}
\phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{S(t)} f(x, t | y, \tau) dx + k(t)f(S(t), t | y, \tau) = \\
&= S'(t)f(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) + \int_{r_1}^{S(t)} \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial t} dx .
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f(x, t | y, \tau)$ verifica la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x, t)f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t)f(x, t | y, \tau)]}{\partial x^2},$$

la expresión anterior queda en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) &= \left[S'(t) + k(t) \right] f(S(t), t | y, \tau) - \\ &- \int_{r_1}^{S(t)} \left[\frac{\partial [A_1(x, t)f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t)f(x, t | y, \tau)]}{\partial x^2} \right] dx = \\ &= \left[S'(t) + k(t) \right] f(S(t), t | y, \tau) - A_1(S(t), t)f(S(t), t | y, \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial [A_2(x, t)f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} \right|_{x=S(t)} = \\ &= \left[S'(t) + k(t) - A_1(S(t), t) \right] f(S(t), t | y, \tau) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} f(S(t), t | y, \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \left. \frac{\partial [f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} \right|_{x=S(t)} = \\ &= f(S(t), t | y, \tau) \left[S'(t) + k(t) - A_1(S(t), t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial [A_2(x, t)]}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \left. \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=S(t)}. \end{aligned}$$

Con ello, la expresión de la función Ψ , en términos de los momentos infinitesimales, es la siguiente:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} \Gamma(S(t), t | y, \tau) + r(t)[1 - F(S(t), t | y, \tau)] & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ \Gamma(S(t), t | y, \tau) + r(t)F(S(t), t | y, \tau) & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (4.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(S(t), t | y, \tau) &= f(S(t), t | y, \tau) \left[S'(t) + k(t) - A_1(S(t), t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \left. \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=S(t)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3. Estudio de la existencia de solución única de la ecuación integral y obtención de soluciones explícitas

4.3.1. Justificación

Como ya se ha demostrado, la función de densidad del tiempo de primer paso a través de barreras variables para un proceso de difusión verifica las ecuaciones (4.7) y (4.10). Ambas son ecuaciones integrales de Volterra

de segunda especie. Dado que la primera de ellas plantea el problema de que su núcleo no es necesariamente no singular, de hecho presenta una singularidad del tipo $(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}$, el estudio se centrará en la segunda, cuyo núcleo viene expresado en términos de dos funciones continuas, $k(t)$ y $r(t)$, que intentan paliar el problema anteriormente comentado. La cuestión que se plantea, por lo tanto, es encontrar tales funciones de tal forma que suavicen el comportamiento de dicho núcleo y lo hagan no singular; ello nos garantizaría, según la teoría general de ecuaciones integrales de Volterra, la existencia de solución.

En nuestro caso particular, la no singularidad del núcleo equivale a $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$. Si, además de dicha condición, se verifica $\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0, \forall t, \tau : t_0 \leq \tau < t$, podremos obtener expresiones explícitas para la densidad del tiempo de primer paso sin necesidad de resolver la ecuación integral. En dicho caso, la densidad del tiempo de primer paso vendrá dada por

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = 2 |\Psi(S(t), t | x_0, t_0)| .$$

4.3.2. Un caso particular: el proceso lognormal con factores exógenos

Consideremos $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso de difusión logarítmico normal unidimensional con factores exógenos, definido en $I = (0, +\infty)$ y caracterizado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = h(t)x \quad \text{y} \quad A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$$

donde h es una función continua del tiempo.

Su función densidad de transición es (ejercicio propuesto 3 de la relación segunda)

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{\left[\log(x/y) - \int_\tau^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)\right]^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right)$$

a partir de la cual calculamos la función de distribución de transición:

$$F(x, t | y, \tau) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{z \sqrt{2\pi\sigma^2(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{\left[\log(z/y) - \int_\tau^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)\right]^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right) dz.$$

Haciendo el cambio de variable

$$v = \frac{\log(z/y) - \int_\tau^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}}$$

se tiene

$$F(x, t | y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/y) - \int_\tau^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\log(x/y) - \int_\tau^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}}} e^{-z^2} dz$$

puesto que

$$\int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dz = [v = z^2 \rightarrow dv = dz/(2\sqrt{z})] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} v^{-1/2} e^{-v} dv = \frac{1}{2} \Gamma[1/2] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalmente, considerando la conocida como *función de error*,

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy,$$

se concluye

$$F(x, t | y, \tau) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\log(x/y) - \int_{\tau}^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}} \right) \right].$$

A partir de este cálculo vamos a encontrar la forma explícita que adopta la ecuación integral de Volterra verificada por la densidad de tiempo de primer paso para este proceso a través de una barrera $S = S(t)$. En primer lugar tenemos el siguiente resultado

Lema 4.3.1. *Sea S una función derivable en $[t_0, T]$ y h continua en el mismo intervalo. Entonces, para el proceso logarítmico normal con factores exógenos y $\forall y \in \mathbb{R}^+$ y $\tau < t$, se tiene:*

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} [1 - \operatorname{Erf}(M(t, \tau, y))] & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} [1 + \operatorname{Erf}(M(t, \tau, y))] & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

donde

$$M(t, \tau, y) = \frac{\log(S(t)/y) - \int_{\tau}^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}}$$

y

$$\bar{h}(t, \tau, y) = S(t) \left[\frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\log(S(t)/y) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t-\tau)} \right] + k(t),$$

siendo r y k funciones continuas en $[t_0, T]$.

Demostración

Para obtener el resultado deseado basta hallar $\frac{\partial}{\partial t} F(S(t), t | y, \tau)$, la cual se puede obtener a partir de la expresión de la función de distribución de transición obtenida anteriormente.

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(S(t), t | y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{M(t, \tau, y)} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[2\sigma^2(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} \exp(-M^2(t, \tau, y)) \times \\ &\quad \times \left\{ [2\sigma^2(t-\tau)] \left[\frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right] - \left[\log(S(t)/y) - \int_{\tau}^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau) \right] \sigma^2 \right\} = \\ &= f(S(t), t | y, \tau) S(t) \left[\frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\log(S(t)/y) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t-\tau)} \right] = \\ &= f(S(t), t | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y), \end{aligned}$$

de donde se deduce directamente el resultado deseado teniendo en cuenta la expresión (4.11). ■

Teorema 4.3.1. *Sea S de clase $C^2[t_0, T]$ y h derivable en el mismo intervalo. Entonces, para el proceso logarítmico normal con factores exógenos, se tiene*

1.

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= 0 \quad \forall \tau, t : t_0 \leq \tau < t \\ \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} S(t) = A \exp(Bt + H(t)) \\ k(t) = -\frac{1}{2} \left[B + \frac{\sigma^2}{2} \right] S(t) \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

donde H es una primitiva de h y $A, B \in \mathbb{R}$.

Demostración

1. Supongamos que $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{\tau \uparrow t} M(t, \tau, S(\tau)) = \lim_{\tau \uparrow t} \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{S'(\tau)}{S(\tau)} - h(\tau) + \frac{\sigma^2}{2} \right] \sqrt{2\sigma^2(t - \tau)} = 0 ,$$

con lo cual, $\lim_{\tau \uparrow t} \text{Erf}(M(t, \tau, S(\tau))) = 0$ y con ello $\lim_{\tau \uparrow t} \frac{r(t)}{2} [1 \pm \text{Erf}(M(t, \tau, S(\tau)))] = \frac{r(t)}{2}$. Ahora bien, tenemos que imponer la existencia del límite $\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau))f(S(t), t | S(\tau), \tau)$, y como $f(S(t), t | S(\tau), \tau)$ diverge cuando τ se aproxima a t , para la existencia de ese límite debe verificarse $\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$, o sea,

$$\lim_{\tau \uparrow t} \left[S'(t) - S(t)h(t) + S(t)\frac{\sigma^2}{4} - S(t) \frac{\log(S(t)/S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t - \tau)} + k(t) \right] = 0 ,$$

lo que, junto al hecho de que $\lim_{\tau \uparrow t} \frac{\log(S(t)/S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t - \tau)} = -\frac{h(t)}{2} + \frac{S'(t)}{2S(t)}$, conduce a

$$k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad y \quad r(t) = 0 . \quad (4.13)$$

Se puede verificar que, en tal caso, $\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau))f(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$, y esto demuestra la condición necesaria. Recíprocamente, si se verifica (4.13), entonces $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$, teniéndose así la condición suficiente.

2. Por la hipótesis $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$ se tiene, aplicando el apartado anterior,

$$k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad y \quad r(t) = 0 .$$

Con ello,

$$\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = \frac{f(S(t), t | S(\tau), \tau)}{2} \left[S'(t) - h(t)S(t) - S(t) \frac{\log(S(t)/S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{t - \tau} \right] . \quad (4.14)$$

Por hipótesis, el miembro izquierdo de (4.14) tiende a cero para $t_0 \leq \tau < t$ y $\tau \uparrow t$ y, por tanto, ha de verificarse

$$S'(t) = h(t)S(t) + S(t) \frac{\log(S(t)/S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{t - \tau} .$$

Esa es una ecuación diferencial ordinaria que, tras el cambio de variable $V(t) = \log(S(t))$, se reduce a una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución general es del tipo

$$S(t) = A \exp \left(Bt + \int^t h(s) ds \right) = A \exp (Bt + H(t)),$$

y entonces,

$$k(t) = -\frac{1}{2} \left[B + \frac{\sigma^2}{2} \right] A \exp (Bt + H(t)) = -\frac{1}{2} \left[B + \frac{\sigma^2}{2} \right] S(t),$$

verificándose la condición necesaria. La condición suficiente es inmediata a partir de las expresiones de $S(t)$, $k(t)$ y $r(t)$. ■

Como corolario del anterior teorema se tiene:

Corolario 4.3.1. *Para el proceso logarítmico normal con factores exógenos, la densidad del tiempo de primer paso a través de la barrera $S(t) = A \exp(Bt + H(t))$, donde H es una primitiva de la función h , viene dada por*

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{|\log(A/x_0) + Bt_0 + H(t_0)|}{(t - t_0)^{3/2} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[\log(A/x_0) + Bt + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + H(t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right)$$

con $x_0 \neq A \exp(Bt_0 + H(t_0))$.

Demostración

Es inmediato ya que en este caso se verifica

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{f(S(t), t | y, \tau)}{2} \frac{S(t)}{t - \tau} (-\log(A) - B\tau + \log(y) - H(\tau)),$$

por lo que

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = 2 |\Psi(S(t), t | x_0, t_0)| = f(S(t), t | x_0, t_0) \frac{S(t) |\log(A/x_0) + Bt_0 + H(t_0)|}{t - t_0}.$$

Sustituyendo la expresión de la densidad del proceso, y simplificando, se obtiene el resultado.

Comentario 4.3.1. *Notemos que en el apartado segundo de teorema 4.3.1, tenemos que suponer que la barrera es de clase C^2 , lo cual se traduce en que la función h debe ser derivable.*

Comentario 4.3.2. *En el caso concreto del proceso lognormal homogéneo, $h(t) = m$ ($m \in \mathbb{R}$), las barreras para las cuales se tiene solución explícita sin resolver la ecuación integral son de la forma $S(t) = A \exp(Ct)$ (basta tomar $C = B + m$ en la expresión de la función S en el teorema anterior), resultando en este caso*

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{|\log(A/x_0) + Ct_0|}{(t - t_0)^{3/2} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[\log(A/x_0) + Ct - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right).$$

Esta expresión es inmediata sin más que tener en cuenta que $H(t) = mt$ y que $C = B + m$. El único detalle que comentar es que en el numerador del exponente realizamos la siguiente operación

$$\begin{aligned} \log(A/x_0) + Bt + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + mt_0 &= \log(A/x_0) + Bt + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + mt_0 + mt - mt = \\ &= \log(A/x_0) + (B + m)t - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0) = \\ &= \log(A/x_0) + Ct - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0). \end{aligned}$$

Particularizando aún más, si tomamos $C = 0$ (o sea, $B = -m$), obtenemos la conocida (por otros procedimientos) densidad de tiempo de primer paso del proceso lognormal homogéneo a través de una barrera constante

$$g(S, t | x_0, t_0) = \frac{|\log(S/x_0)|}{(t - t_0)^{3/2} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[\log(S/x_0) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right).$$

4.3.3. Obtención de la ecuación integral para procesos transformados del proceso Wiener

Como ya vimos en el tema 2 (consultar apartado 2.6.4), existe una amplia clase de procesos que se pueden obtener a partir del proceso Wiener mediante transformaciones del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \bar{\Psi}(x, t) & x'_0 &= \bar{\Psi}(x_0, t_0) \\ t' &= \Phi(t) & t'_0 &= \Phi(t_0). \end{aligned} \tag{4.15}$$

En concreto, se tenía el siguiente resultado

Teorema 4.3.2. Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función densidad de transición $f(x, t|x_0, t_0)$ y momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, definido en un intervalo I , pueda transformarse al proceso Wiener estándar, $\{W(t'); t' \geq t'_0\}$, es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que verifiquen

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{(A_2(y, t))^{3/2}} dy \right\}. \tag{4.16}$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' &= \bar{\psi}(x, t) = (k_1)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{(A_2(y, t))^{1/2}} dy - \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_2 \\ t' &= \phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(- \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3 \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_i \in [0, \infty)$ y k_i constantes arbitrarias con la restricción $k_1 > 0$.

Además, puesto que, para cada t , $\frac{\partial \bar{\psi}(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{\phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$, la transformación $x' = \bar{\psi}(x, t)$ es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado es

$$f(x, t|x_0, t_0) = \frac{\partial \bar{\psi}(x, t)}{\partial x} f'(x', t'|x'_0, t'_0), \tag{4.17}$$

donde f es la densidad de transición del proceso transformado y f' la del proceso Wiener

Asimismo, las densidades de tiempo de primer paso a través de barreras variables están relacionadas, según muestra el siguiente resultado, que no demostraremos:

Teorema 4.3.3. Sea $\{X(t); t \geq t_0\}$ un proceso de difusión unidimensional definido sobre un intervalo I con $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y sea el proceso de Wiener estándar $\{W(t'); t' \geq t'_0\}$ con $E[W(t')] = x'_0$, $\text{Cov}[W(t'); W(s')] = t' \wedge s'$ y $P[W(t'_0) = x'_0] = 1$. Consideremos una función del tipo (4.15) que transforme el proceso $X(t)$ en el proceso de Wiener estándar. Entonces, si $\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \neq 0$, se verifica

$$g_X(S(t), t | x_0, t_0) = g_W(S_w(t'), t' | x'_0, t'_0) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \tag{4.18}$$

donde g_X es la función de densidad del tiempo de primer paso del proceso $X(t)$ a través de la barrera $S(t)$ y g_W es la de $W(t')$ a través de la barrera transformada

$$S_w(t') = \bar{\Psi}(S(\Phi^{-1}(t')), \Phi^{-1}(t')). \tag{4.19}$$

Comentario 4.3.3. Notemos que, mediante la transformación dada y (4.18), la función de densidad de tiempo de primer paso para un proceso de difusión $X(t)$ a través de la barrera $S(t) = \bar{\Psi}^{-1}(S_W(\Phi(t)), t)$ se puede obtener a partir de la función de densidad de tiempo de primer paso de $W(t)$ a través de la barrera $S_W(t')$, si ésta es conocida. Asimismo, conocida la densidad de tiempo de primer paso para algún proceso de difusión a través de una barrera $S(t)$, se puede obtener la del proceso Wiener a través de la barrera transformada $S_W(t')$.

Esta puede parecer una cuestión sin excesiva trascendencia, ya que el teorema 4.3.3 nos da la relación existente entre las densidades del tiempo de primer paso para el proceso Wiener y un proceso transformado de él. Sin embargo, el citado teorema garantiza el conocimiento de la densidad del tiempo de primer paso a través de la barrera $S(t)$ para un proceso $X(t)$, si es conocida la del proceso Wiener estándar a través de la barrera $S_W(t')$, obtenida a partir de $S(t)$ mediante la transformación Ψ .

Obviamente, el problema es ahora conocer dicha densidad, bien en forma explícita, lo cual podría hacerse (en virtud del teorema 4.3.3) si la barrera transformada S_W es lineal (para la cual la ecuación de Volterra tiene soluciones explícitas), o bien teniendo que recurrir a aproximaciones de tipo numérico.

Aún así, se observa que la barrera transformada, $S_W(t')$, va expresada en términos de $\Phi^{-1}(t')$, lo cual obliga a conocer de forma explícita la inversa de la función $\Phi(t)$, cuya existencia está asegurada. Esta cuestión ya no es tan trivial, como se puede observar en el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos (ver tema 3). En efecto, para tal proceso la función $\Phi(t)$ que hay que considerar en la transformación al proceso Wiener es

$$t' = \phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(2 \int_{t_0}^s h(\theta) d\theta \right) ds + k_3$$

y si pensamos en el caso particular $h(\theta) = \theta$, se tiene

$$t' = k_1 e^{-t_0^2} \int_{t_1}^t \exp(s^2) ds + k_3 .$$

Para invertir dicha función hay que hacer uso de aproximaciones numéricas, por lo que el problema del cálculo de la densidad del tiempo de primer paso se va complicando, y se complicaría aún más si hemos de aproximar también de forma numérica la correspondiente densidad para el proceso de Wiener.

Es este planteamiento el que nos motiva a intentar ampliar el estudio de la ecuación integral al caso de procesos obtenidos a partir del proceso de Wiener.

Así pues, sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión con momentos infinitesimales infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, definido en $I = (r_1, r_2)$, con r_1 y r_2 barreras naturales, y tal que $P[X(t_0) = x_0] = 1$. Supongamos que se dan las condiciones que permiten obtenerlo a partir del proceso Wiener, de tal forma que existe una transformación del tipo (4.15).

Utilizando la conocida forma de la densidad de transición del proceso de Wiener, se puede calcular la densidad de transición para $X(t)$ usando la relación (4.17):

$$f(x, t | x_0, t_0) = [2\pi(\Phi(t) - \Phi(t_0))]^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{[\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(x_0, t_0)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(t_0)]} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} .$$

Siguiendo un razonamiento análogo al hecho para el caso particular del proceso logarítmico normal, pero haciendo el cambio de variable

$$v = \frac{\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(x_0, t_0)}{\sqrt{2(\Phi(t) - \Phi(t_0))}},$$

se puede obtener la función de distribución de transición del proceso

$$F(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Erf} \left(\frac{\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(x_0, t_0)}{\sqrt{2}(\Phi(t) - \Phi(t_0))^{\frac{1}{2}}} \right) \right] .$$

A continuación vamos a seguir un esquema parecido al realizado en el caso particular del proceso logarítmico normal con factores exógenos. De esta forma tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.3.2. En las hipótesis generales de este apartado, si $S = S(t)$ es una función derivable, y k, r son funciones continuas en $[t_0, T]$, entonces, $\forall y \in I$ y $\forall \tau < t$ se verifica

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} f(S(t), t | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \left[1 - \text{Erf} \left(\frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right], & x_0 < S(t_0) \\ f(S(t), t | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \left[1 + \text{Erf} \left(\frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right], & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

donde

$$\bar{h}(t, \tau, y) = S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} + k(t).$$

Demostración

Para verificar el resultado, y dada la expresión de $\Psi(S(t), t | y, \tau)$ dada por (4.9), basta calcular $\frac{\partial F(S(t), t | y, \tau)}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(S(t), t | y, \tau)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(- \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \left[\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \\ &= f(S(t), t | y, \tau) \left[\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \right\} = \\ &= f(S(t), t | y, \tau) \left\{ S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)]}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{\Phi'(t)}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right\} \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación estudiamos, en términos de las funciones k y r , condiciones bajo las cuales se verifica $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$. Con ello lo que intentamos es encontrar una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de la ecuación integral de Volterra de segunda especie (4.10) sea no singular. Así se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.3.4. Sean k y r dos funciones continuas en el intervalo $[t_0, T]$. Si S es de clase $C^2[t_0, T]$, se verifica

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = 0 \\ k(t) = -\frac{1}{2} \left[S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x}} \Big|_{x=S(t)} \right]. \end{cases}$$

Demostración

Supongamos primero que $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \uparrow t} \frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}}} &= \lim_{\tau \uparrow t} \frac{-\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(\tau)} S'(\tau) - \frac{\partial \bar{\Psi}(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=S(\tau)}}{-\Phi'(\tau) [2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{\tau \uparrow t} \frac{1}{\Phi'(\tau)} \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(\tau)} S'(\tau) + \frac{\partial \bar{\Psi}(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=S(\tau)} \right\} [2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{r(t)}{2} \left[1 \pm \text{Erf} \left(\frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \frac{r(t)}{2}.$$

A continuación hay que imponer la existencia del límite $\lim_{\tau \uparrow t} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \bar{h}(t, \tau, S(\tau))$.

Ahora bien, como $f(S(t), t | S(\tau), \tau)$ diverge cuando τ se aproxima a t , para la existencia de dicho límite ha de verificarse $\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$, lo cual, junto a que

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{\Phi(t) - \Phi(\tau)} = \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\Phi'(t)}$$

conduce a

$$k(t) = -\frac{1}{2} \left[S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right].$$

Se puede verificar que con esa elección de k se tiene $\lim_{\tau \uparrow t} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$.

Con ello y con $r(t) = 0$ tenemos demostrada la condición necesaria. Recíprocamente, tomando $r(t) = 0$ y la función k anterior, se deduce fácilmente la condición suficiente. ■

Comentario 4.3.4. Probado este teorema se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= \frac{1}{2} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \times \\ &\quad \times \left\{ S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)] \Phi'(t)}{[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

de donde se pueden extraer más conclusiones. En efecto, podemos plantearnos bajo cuales condiciones se verifica, además de la condición $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$, el hecho de que la función Ψ se anule para valores t, τ con $t_0 \leq \tau < t$.

Para ello, a partir de (4.20), se observa que es necesario y suficiente que la expresión entre llaves sea idénticamente nula, lo cual conduce a una ecuación diferencial ordinaria en $S(t)$. Las soluciones de dicha ecuación nos darán los tipos de barreras para los cuales se tiene una expresión explícita de la densidad del tiempo de primer paso sin necesidad de resolver la ecuación integral de Volterra. En concreto se tendrá $g(S(t), t | x_0, t_0) = 2 |\Psi(S(t), t | x_0, t_0)|$.

4.3.4. Caracterización de $k(t)$ en función de los momentos infinitesimales de la difusión.

Para obtener esta caracterización haremos uso de la transformación (que hemos supuesto existe) que nos lleva un proceso de difusión al proceso de Wiener estándar.

Observemos que, de la expresión de dicha transformación, se puede deducir

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} = [\Phi'(t)]^{\frac{1}{2}} [A_2(x, t)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} [\Phi'(t)]^{\frac{1}{2}} [A_2(x, t)]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x},$$

y

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} + A_1(x, t) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} + \frac{A_2(x, t)}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} \right|_{x=S(t)} &= -A_1(S(t), t) + \frac{1}{4} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \\ \left. \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} & \end{aligned}$$

con lo cual se deduce la siguiente expresión de k en función de los momentos infinitesimales

$$k(t) = \frac{1}{2} \left[A_1(S(t), t) - S'(t) - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \right]. \quad (4.21)$$

Con ello, la expresión de la función Ψ , en términos de los momentos infinitesimales, es:

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) &= \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[S'(t) + \frac{3}{4} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} - A_1(S(t), t) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \left. \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=S(t)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3.5. La ecuación integral para procesos no homogéneos en general

La expresión que hemos obtenido en el apartado anterior para la ecuación integral de Volterra, asociada a la densidad de tiempo de primer paso para procesos no homogéneos transformables al proceso Wiener, es válida, en general para la clase completa de procesos de difusión no homogéneos.

No obstante, la verificación de tal hecho no es inmediato ya que se obtiene tras unos complicados (y un poco tediosos) cálculos que se realizan en la función de densidad de transición de proceso. Dichos cálculos se realizan bajo la base de un desarrollo en serie que Fortet obtuvo para la función de densidad de transición de un proceso de difusión que verifique unas condiciones, las cuales no son excesivamente restrictivas. Por ello no vamos a proceder a su desarrollo (el cálculo en la clase de procesos transformables al Wiener se ha hecho porque no es complejo), si bien se pueden consultar los detalles a partir del trabajo de Gutiérrez, Ricciardi, Román y Torres (1997).

En definitiva se tiene:

Teorema 4.3.5. En las condiciones generales consideradas, si $S(t)$ es una función de clase $C_2[t_0, T]$. Entonces:

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k(t) = \frac{1}{2} \left[A_1(S(t), t) - \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} - S'(t) \right] \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) &= \frac{f(S(t), t | y, \tau)}{2} \left[S'(t) - A_1(S(t), t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] + \\ &+ \frac{A_2(S(t), t)}{2} \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por lo tanto, para un proceso de difusión $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ con momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, definido en un intervalo $I = (r_1, r_2)$ con r_1 y r_2 barreras naturales, y si S es una función de clase C^2 en $[t_0, T]$, la función de densidad de la variable tiempo de primer paso de $X(t)$ a través de $S(t)$ verifica la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \rho \left\{ -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau \right\}, \quad (4.24)$$

donde $\rho = \text{Sgn}(S(t_0) - x_0)$ y el núcleo Ψ viene dado por (4.23).

El teorema anterior asegura que núcleo Ψ es regular. Por otro lado, cuando se verifique que el núcleo se anule para t, τ con $t_0 \leq \tau < t$, dicha ecuación tiene por solución

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = |2\Psi(S(t), t | x_0, t_0)|.$$

Sin embargo, en general dicha ecuación no es resoluble de forma explícita. En tales casos hay que recurrir a esquemas numéricos. Uno de los más ampliamente utilizados se basa en la aproximación numérica de la integral que aparece en la expresión de la ecuación (4.24) mediante la regla del trapecio compuesta. Ello da origen a un método iterativo cuya expresión, para $S(t_0) > x_0$ (la expresión para $S(t_0) < x_0$ es inmediata) es la siguiente:

$$\begin{aligned} g(S(t_0 + h), t_0 + h | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t_0 + h), t_0 + h | x_0, t_0) \\ g(S(t_0 + kh), t_0 + kh | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t_0 + kh), t_0 + kh | x_0, t_0) + 2h \sum_{j=1}^{k-1} g(S(t_0 + jh), t_0 + jh | x_0, t_0) \times \\ &\times \Psi(S(t_0 + kh), t_0 + kh | S(t_0 + jh), t_0 + jh) \\ &k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

siendo h el paso de integración.

Ejemplo 4.3.1. Consideremos el proceso de Wiener con factores exógenos, el cual está definido en $I = (-\infty, +\infty)$ y tiene momentos infinitesimales $A_1(x, t) = h(t)\mu$ y $A_2(x, t) = \sigma^2$, siendo h una función derivable y $\mu \in \mathbb{R}$.

El cambio de variable, salvo constantes, que lo transforma al proceso de Wiener estándar es

$$\begin{aligned} x' &= \bar{\Psi}(x, t) = \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left(x - z - \int_{t_2}^t h(s) ds \right) + k_2 \\ t' &= \Phi(t) = k_1(t - t_1) + k_3 \end{aligned}$$

por lo que la función de densidad de transición es

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(t - \tau)]^{1/2}} \exp \left(-\frac{\left[x - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds \right]^2}{2\sigma^2(t - \tau)} \right).$$

Calculemos la expresión que adopta el núcleo de la ecuación integral en este caso. Como

$$\frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} = -f(x, t | y, \tau) \frac{x - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{\sigma^2(t - \tau)}$$

y teniendo en cuenta la expresión de los momentos infinitesimales (observemos que A_2 no depende de x), la expresión del núcleo es

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[S'(t) - h(t)\mu - \frac{S(t) - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{t - \tau} \right].$$

A continuación veamos para qué tipo de barreras se puede obtener de forma explícita la densidad de tiempo de primer paso sin necesidad de resolver la ecuación integral de Volterra. Para ello basta con anular el núcleo anterior, lo cual conduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$S'(t) = h(t)\mu + \frac{S(t) - S(\tau) - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{(t - \tau)}$$

o, equivalentemente

$$S'(t) - \frac{S(t)}{t - \tau} = h(t)\mu - \frac{S(\tau) + \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{t - \tau}.$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución general es

$$S(t) = A + Bt + \mu \int_{\tau}^t h(s) ds = A + Bt + \mu H(t)$$

donde H es una primitiva de h . A partir de esta solución el núcleo de la ecuación integral es

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{y - A - B\tau - \mu H(\tau)}{2(t - \tau)} f(S(t), t | y, \tau)$$

Para estas barreras, y si se verifica $x_0 \neq A + Bt_0 + \mu H(t_0)$, la densidad de tiempo de primer paso viene dada por

$$\begin{aligned} g(S(t), t | x_0, t_0) &= 2|\Psi(S(t), t | x_0, t_0)| = \frac{|A + Bt_0 + \mu H(t_0) - x_0|}{t - t_0} f(S(t), t | x_0, t_0) = \\ &= \frac{|A + Bt_0 + \mu H(t_0) - x_0|}{(t - t_0)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[A + Bt - x_0 + \mu H(t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right). \end{aligned}$$

En particular, si $h(t) = 1, \forall t$ (caso homogéneo), la barrera para la cual hay soluciones explícitas, sin resolver la ecuación integral, es de tipo lineal $S(t) = A + Ct$, (basta considerar $C = B + \mu$ en la expresión anterior de la barrera), y la densidad de tiempo de primer paso se obtiene a partir de la anterior. Concretamente

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{|A + Ct_0 - x_0|}{(t - t_0)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[A + Ct - x_0 - \mu(t - t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right).$$

Más particularmente, y considerando el proceso Wiener estándar ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$), la densidad es

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{|A + Ct_0 - x_0|}{(t - t_0)^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[A + Ct - x_0]^2}{2(t - t_0)}\right).$$

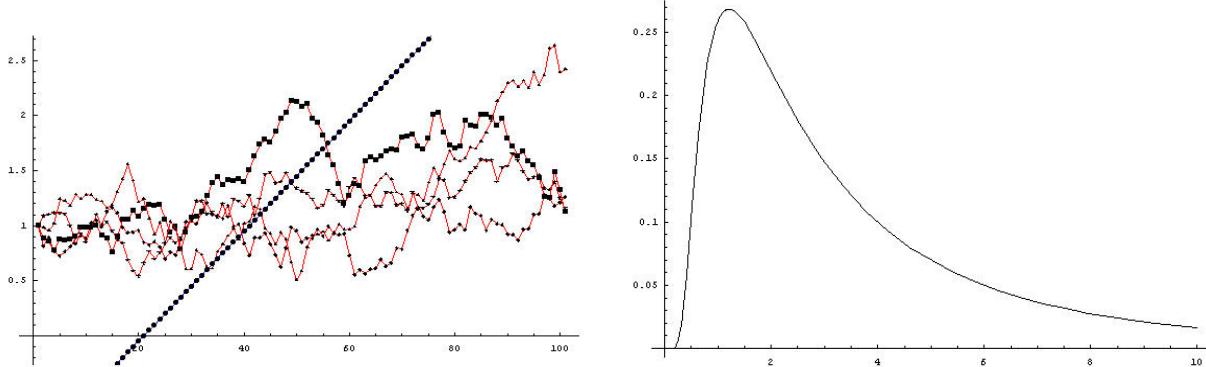
Veamos gráficamente algún ejemplo, considerando el proceso Wiener estándar (trasladado a t_0 con valor x_0). En primer lugar vamos a simular algunas trayectorias, para lo cual basta con recordar (ver tema 1) que el proceso Wiener tiene incrementos independientes, por lo que

$$W(t+h) = W(t) + W(t+h) - W(t) = W(t) + Z$$

donde Z es una variable normal de media cero y varianza h . De esta forma se puede generar fácilmente una trayectoria de tamaño N de este proceso con paso h mediante el algoritmo

- $w_1 = x_0$.
- $w_i = w_{i-1} + z_i$, $i = 2, \dots, N$, donde z_i es un número aleatorio generado de una normal de media cero y varianza h .

Considerando $x_0 = 1$ y $t_0 = 1$, hemos generado cuatro trayectorias de tamaño 101 con paso $h = 0.1$ y hemos considerado la barrera $S(t) = -1 + t/2$. La gráfica de la izquierda muestra las trayectorias y la barrera, mientras que la de la derecha muestra la densidad de tiempo de primer paso (la escala en el eje de abscisas es la misma ya que en la gráfica de la izquierda están representados los 101 puntos con paso 0.1 desde $t = 0$).



4.4. Cálculo de densidades de tiempo de primer paso a partir de otras conocidas.

4.4.1. Procesos transformados del proceso Wiener

Como ya se ha comentado con anterioridad, si un proceso de difusión $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ con momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, definido en un intervalo I , puede transformarse al proceso Wiener estándar mediante una transformación del tipo (4.15), es posible relacionar las densidades de tiempo de primer paso para ambos procesos. En concreto, se verifica la siguiente relación

$$g_X(S(t), t | x_0, t_0) = g_W(S_W(t'), t' | x'_0, t'_0) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}$$

donde g_X es la función de densidad del tiempo de primer paso del proceso $X(t)$ a través de la barrera $S(t)$ y g_W es la del proceso de Wiener $W(t')$ a través de la barrera transformada

$$S_W(t') = \bar{\Psi}(S(\Phi^{-1}(t')), \Phi^{-1}(t')) .$$

Notemos que, mediante la transformación dada y (4.18), la función de densidad de tiempo de primer paso para un proceso de difusión $X(t)$ a través de la barrera $S(t) = \bar{\Psi}^{-1}(S_W(\Phi(t)), t)$ se puede obtener a partir de la función de densidad de tiempo de primer paso de $W(t)$ a través de la barrera $S_W(t')$, si ésta es conocida. Asimismo, conocida la densidad de tiempo de primer paso para algún proceso de difusión a través de una barrera $S_X(t)$, se puede obtener la del proceso Wiener a través de la barrera transformada $S_W(t)$.

Ejemplo 4.4.1. Consideremos $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso lognormal homogéneo con momentos infinitesimales $A_1(x) = mx$ y $A_2(x) = \sigma^2 x^2$, definido en \mathbb{R}^+ y donde $m \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$. Es conocido (ejercicio 3 de la relación propuesta del tema 2, considerando $h(t) = m$), que este proceso puede obtenerse a partir del proceso Wiener estándar mediante la transformación

$$\begin{aligned}x' &= \bar{\psi}(x, t) = \frac{(k_1)^{1/2}}{\sigma} \left[\log(x/z) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_2) \right] + k_2 \\t' &= \phi(t) = k_1(t - t_1) + k_3\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para el proceso Wiener estándar se conocen de forma explícita las densidades de tiempo de primer paso a través de barreras lineales, veamos, a partir del comentario anterior, para qué tipo de barreras podemos encontrar expresiones explícitas para el proceso lognormal. Para ello debemos calcular $S_X(t) = \bar{\Psi}^{-1}(S_W(\Phi(t)), t)$.

Ahora bien,

$$x = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(x, t), t) = \bar{\Psi}^{-1}(x', t) = \exp \left(\frac{\sigma(x' - k_2)}{k_1^{1/2}} + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_2) + \log(z) \right),$$

por lo que si consideramos $S_W(t') = a + bt'$ una barrera lineal para el proceso Wiener, la correspondiente transformada para el proceso lognormal es

$$\begin{aligned}S_X(t) &= \bar{\Psi}^{-1}(S_W(\Phi(t)), t) = \exp \left(\frac{\sigma(a + bt' - k_2)}{k_1^{1/2}} + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_2) + \log(z) \right) = \\&= \exp \left(\frac{\sigma(a + b(k_1(t - t_1) + k_3) - k_2)}{k_1^{1/2}} + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_2) + \log(z) \right) = A \exp(Bt)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A &= \exp \left(\frac{\sigma(a - bk_1 t_1 + bk_3 - k_2)}{k_1^{1/2}} + \log(z) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_2 \right) \\B &= \sigma b k_1^{1/2} + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Observemos que se han obtenido barreras de tipo exponencial, lo cual ya se obtuvo anteriormente al final de la sección 4.3.2.

Por lo tanto, si deseamos obtener la densidad de tiempo de primer paso para el proceso lognormal homogéneo a través de la barrera $S_X(t) = Ae^{Bt}$ debemos conocer la del proceso Wiener a través de la barrera $S_W(t') = a + bt'$, donde (despejando de la expresión anterior)

$$\begin{aligned}b &= \frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} \\a &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left[\log(A/z) + Bt_1 + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) \right] - \frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} k_3 + k_2\end{aligned}$$

Aplicando ahora la relación entre las densidades de tiempo de primer paso para ambos procesos a través de las barreras consideradas, y teniendo en cuenta la expresión obtenida en el ejemplo (4.3.1), se tiene

$$g_X(S_X(t), t | x_0, t_0) = g_W(S_W(t'), t' | x'_0, t'_0) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \frac{|a + bt'_0 - x'_0|}{(t' - t'_0)^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{|a + bt' - x'_0|^2}{2(t' - t'_0)} \right) k_1.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las expresiones de a y b en función de A y B , así como las transformaciones $\Psi(x, t)$ y $\Phi(t)$, se verifica

$$\begin{aligned}
 t' - t'_0 &= [k_1(t - t_1) + k_3] - [k_1(t_0 - t_1) + k_3] = k_1(t - t_0). \\
 a + bt'_0 - x'_0 &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left[\log(A/z) + Bt_1 + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) \right] - \frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} k_3 + k_2 + \\
 &\quad + \left(\frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} \right) (k_1(t_0 - t_1) + k_3) - \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left[\log(x_0/z) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_0 - t_2) \right] - k_2 = \\
 &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} (\log(A/x_0) + Bt_0). \\
 a + bt' - x'_0 &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left[\log(A/z) + Bt_1 + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) \right] - \frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} k_3 + k_2 + \\
 &\quad + \left(\frac{B - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma k_1^{1/2}} \right) (k_1(t - t_1) + k_3) - \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left[\log(x_0/z) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_0 - t_2) \right] - k_2 = \\
 &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \left(\log(A/x_0) + Bt - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) \right).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la anterior se concluye

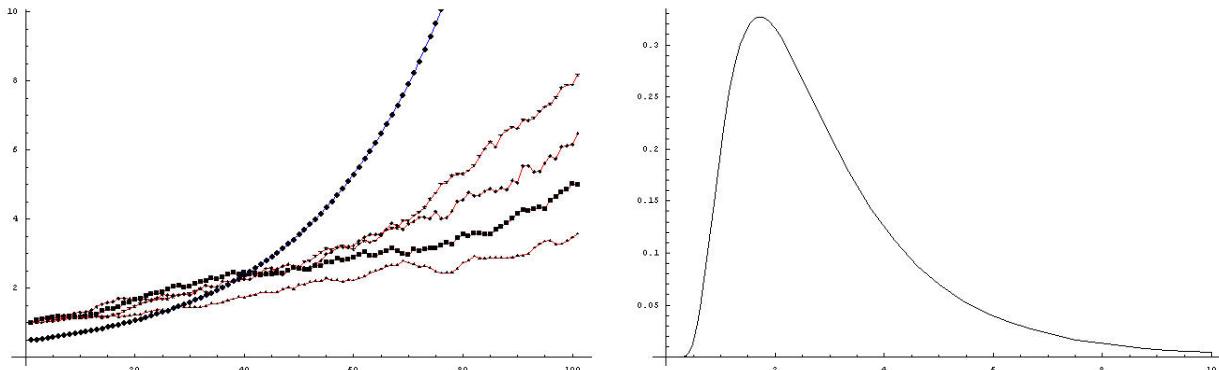
$$g_X(S_X(t), t | x_0, t_0) = \frac{|\log(A/x_0) + Bt_0|}{(t - t_0)^{3/2} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{[\log(A/x_0) + Bt - \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right).$$

que coincide con la obtenida en el comentario 4.3.2.

Al igual que antes podemos generar trayectorias y representar la densidad de tiempo de primer paso para una barrera, en este caso exponencial. Para generar las trayectorias podemos basarnos en la relación existente entre las trayectorias de ambos procesos (ver ejercicio 3 de la relación 2 de ejercicios propuestos)

$$X(t) = x_{t_0} \exp \left(\sigma W(t - t_0) + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) \right).$$

donde $x_{t_0} > 0$ es el valor del proceso lognormal en t_0 . Por lo tanto basta generar valores de un proceso Wiener estándar (como se hizo en el ejemplo 4.3.1) y aplicar la transformación anterior. En nuestro caso hemos generado 101 valores considerando $t_0 = 0$ (observemos que $W(0) = 0$), $x_0 = 1$, $m = 0.2$ y $\sigma = 0.25$, siendo el paso de la simulación $h = 0.1$. La barrera que hemos considerado es $S(t) = 0.5e^{0.4t}$. Las gráficas obtenidas son las siguientes:



4.4.2. Procesos con transición obtenida por factorización a partir de la de otro proceso

Sea $\{Y(t); t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media infinitesimal $\alpha_1(x, t)$ y varianza infinitesimal $\alpha_2(x, t)$, definido en un intervalo $I = (r_1, r_2)$, siendo ϕ su función de densidad de transición.

En el tema 2 analizamos bajo qué condiciones existe un proceso de difusión $X(t)$ definido en I y tal que su densidad de probabilidad de transición, $f(x, t|x_0, t_0)$, se obtenga a partir de $\phi(x, t|x_0, t_0)$ de la forma

$$f(x, t|x_0, t_0) = k(x, t)h(x_0, t_0)\phi(x, t|x_0, t_0) \quad (4.26)$$

con k y h funciones apropiadas. En concreto se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.4.1. *La función $f(x, t|x_0, t_0)$ dada por (4.26) satisface la ecuación de Kolmogorov*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} + A_1(x_0, t_0) \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2} A_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} = 0, \quad (4.27)$$

la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A_1(x, t)f(x, t|x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x, t)f(x, t|x_0, t_0)] \quad (4.28)$$

y la condición inicial

$$\lim_{t \downarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0) \quad (4.29)$$

si

$$h(x, t) = [k(x, t)]^{-1}, \quad (4.30)$$

$$A_1(x, t) = \alpha_1(x, t) + \frac{1}{k(x, t)} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \alpha_2(x, t), \quad (4.31)$$

$$A_2(x, t) = \alpha_2(x, t), \quad (4.32)$$

y

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + \alpha_1(x, t) \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_2(x, t) \frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.33)$$

donde $k(x, t)$ es una función continua que no cambia de signo en $I \times [t_0, T]$.

Una vez obtenidas las condiciones según las cuales el proceso de difusión $X(t)$ puede ser obtenido a partir de $Y(t)$ vía la relación (4.26), vamos a relacionar las densidades del tiempo de primer paso para ambos procesos a través de una barrera variable $S(t)$. Dicha relación viene dada en el siguiente teorema:

Teorema 4.4.2. *Sea $X(t)$ un proceso de difusión unidimensional no necesariamente homogéneo en el tiempo, definido en $I = (r_1, r_2)$ y obtenido a partir de otro proceso $Y(t)$ vía (4.26) con $k(x, t)$ satisfaciendo (4.33) y conservando el mismo signo en $I \times [t_0, T]$. Sean $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, dadas por (4.31) y (4.32), su media y varianza infinitesimal, respectivamente. Entonces, si $S(t)$ es una función continua en $[t_0, T]$, se verifica*

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{k(S(t), t)}{k(x_0, t_0)} \rho(S(t), t|x_0, t_0) \quad (4.34)$$

donde $g(S(t), t|x_0, t_0)$ es la función de densidad de probabilidad de $X(t)$ a través de $S(t)$ dado que $X(t_0) = x_0$ y $\rho(S(t), t|x_0, t_0)$ la del proceso $Y(t)$ a través de la misma barrera.

Ejemplo 4.4.2. *Sea $\{Y(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de Wiener estándar y consideremos la función*

$$k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{x^2}{2t}\right).$$

Esta función cumple la condición (4.33) del teorema 4.4.1, por lo que se puede construir un proceso de difusión $X(t)$ con momentos infinitesimales obtenidos a partir de (4.31) y (4.32),

$$A_1(x, t) = \frac{x}{t} \quad A_2(x, t) = 1.$$

y función de densidad de transición obtenida a partir de (4.26):

$$f(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{[2\pi t((t/t_0) - 1)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2t((t/t_0) - 1)} \left(x - x_0 \frac{t}{t_0}\right)^2\right).$$

Puesto que la densidad del tiempo de primer paso para el proceso Wiener a través de barreras lineales $S(t) = A + Bt$ es conocida, usando (4.34), se tiene que la densidad del tiempo de primer paso de $X(t)$ para las mismas barreras es

$$\begin{aligned} g(S(t), t|x_0, t_0) &= \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{\exp\left(\frac{S(t)^2}{2t}\right)}{\exp\left(\frac{x_0^2}{2t_0}\right)} \frac{|x_0 - A - Bt_0|}{\sqrt{2\pi}(t - t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{[A + Bt - x_0]^2}{2(t - t_0)}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{|x_0 - A - Bt_0|}{\sqrt{2\pi}(t - t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{[At_0 + Btt_0 - x_0 t]^2}{2tt_0(t - t_0)}\right). \end{aligned}$$

Apéndice A

Ecuaciones integrales de Volterra

A.1. Ecuaciones integrales de Volterra

Las ecuaciones integrales de Volterra son un tipo especial de ecuaciones integrales que surgen principalmente asociadas a determinados problemas de la física. Distinguiremos entre ecuaciones de primera especie y de segunda.

Definición A.1.1. *Dadas dos funciones conocidas $f = f(x)$ y $K = K(x, t)$, llamamos ecuación integral de Volterra de primera especie a la ecuación*

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)\phi(t) dt$$

donde ϕ es la función incógnita.

Definición A.1.2. *Dadas dos funciones conocidas $f = f(x)$ y $K = K(x, t)$ y λ un escalar, la ecuación integral*

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\phi(t) dt$$

es conocida como ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie. En el caso $f = 0$ la ecuación recibe el nombre de ecuación homogénea de Volterra de segunda especie.

A la función K se le llama *núcleo de la ecuación*.