MÁSTER UNIVERSITARIO EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CURSO: CÁLCULO Y MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA. PROCESOS DE DIFUSIÓN

Segunda relación de ejercicios propuestos

Procesos de difusión unidimensionales

1. Demostrar que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de difusión homogéneo.

   Indicación: Considerar la distribución de $\mathbf{Y(t+h)|Y(t) = x}$ y expresar

   $$\int (\mathbf{y-x})^{\mathbf{k}} \mathbf{f(y, t+h|x, t)dy} = \int (\mathbf{y - m(x,h) + m(x,h) - x})^{\mathbf{k}} \mathbf{f(y, t+h|x, t)dy}$$

   donde $\mathbf{m(x, h)}$ es la media de dicha variable. Tomar $\mathbf{k = 4}$. Asimismo, usar la expresión de los momentos centrados de una distribución normal.

2. Comprobar si existe un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ para el cual las ecuaciones de Kolmogorov tengan solución única, siendo

   $$A_1(x,t) = xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)}, \qquad A_2(x) = \sigma^2 x^2$$

   donde $a \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$), $\sigma > 0$ y $x > 0$. g es una función continua en $t \in [t_0, T]$ o bien lo es en $t \geq t_0 > 0$, siendo en este caso acotada, y

   $$h(t) = \exp\left(-a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t + \int^t g(s)\,ds\right]\right).$$

3. Sea $\{X(t) : t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t) = g(t)\,x$ y $A_2(x,t) = \sigma^2 x^2$, donde $\sigma > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ y g es una función continua acotada. Si además suponemos que la distribución inicial es constante, o sea $X(t_0) = x_{t_0}$ casi seguramente, demostrar que este proceso coincide con el proceso dado por

   $$Y(t) = x_{t_0} \exp\left(\sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^t g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right), \quad t \geq t_0,$$

   donde $\{W(t) : t \geq 0\}$ es el proceso de Wiener estándar, o sea, con momentos infinitesimales $A_1(x,t) = 0$ y $A_2(x,t) = 1$.

   Nota: Este proceso es conocido como proceso logarítmico-normal con factores exógenos.

   Indicaciones:

   a) **Para hacer este ejercicio es conveniente repasar previamente la distribución logarítmico-normal multidimensional o, al menos, su versión bidimensional.**

   b) **En primer lugar, verifica que el proceso $\{\mathbf{Y(t) : t \geq t_0}\}$ es de Markov usando alguna de las propiedades vistas en el tema 1.**

   c) **Calcula las densidades bidimensionales mediante un cambio de variable adecuado, teniendo en cuenta que el proceso Wiener es gaussiano. De ellas deduce las densidades de transición.**

d) **Teniendo en cuenta el ejercicio anterior y el razonamiento hecho en el ejercicio 3 de la relación resuelta, concluye el resultado.**

4. Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ el proceso Wiener con momentos infinitesimales $A_1(x) = \mu$ y $A_2(x) = \sigma^2$ y definido en $I = (r_1, r_2)$. Estudiar la naturaleza de las barreras del espacio de estados.

5. Consideremos $\{X(t) : t \geq t_0\}$ el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, en el cual $A_1(x, t) = h(t)x$, $A_2(x) = \sigma^2$, $x \in \mathbb{R}$, siendo h una función continua y $\sigma^2 > 0$. Estudiar si este proceso verifica la condición para ser transformado al proceso Wiener estándar. En caso afirmativo, obtener dicha transformación, así como la densidad de transición correspondiente.

6. Sea $\{X(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión considerado en el ejercicio 2 e $\{Y(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión lognormal con factores exógenos introducido en el ejercicio 3. Comprobar que el proceso $X(t)$ no puede ser construido mediante una transformación del proceso Wiener pero su función de densidad de transición sí puede obtenerse a partir de la de $\{Y(t)\}$ por el método de la factorización de las densidades. En caso afirmativo, obtener tal densidad de transición.

7. (Proceso logarítmico-normal con factores exógenos). Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$
\begin{aligned}
&dX(t) = h(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\
&X(t_0) = x_0,
\end{aligned}
$$

donde h es una función continua, $\sigma > 0$, $t \geq t_0 > 0$ y x_0 es una variable lognormal $\Lambda_1[\mu_0, \sigma_0^2]$. Comprobar que se verifican las condiciones de existencia y unicidad de solución para esta ecuación y resolverla. ¿Cómo se pueden obtener las distribuciones finito dimensionales? ¿A qué familia de distribuciones pertenecen las distribuciones finito-dimensionales así como las transiciones?

Indicaciones:

a) **Observa que esta ecuación no es lineal en sentido restringido.**

b) **Este ejercicio es una generalización del ejemplo 2.8.1. Por ello, primero considera la transformación $\mathbf{Y(t)} = \log(\mathbf{X(t)})$ y calcula $\mathbf{dY(t)}$ mediante la generalización de la fórmula de Itô. Obtendrás una ecuación lineal autónoma cuya solución es inmediata (Teorema 2.8.1). Deshaciendo el cambio obtendrás la forma de las trayectorias y, con ello, las distribuciones unidimensionales.**

c) **Comprueba que el proceso $\{\mathbf{Y(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{t_0}\}$ transformado es gaussiano. ¿Por qué? A partir de ello, deduce cómo obtener las distribuciones finito-dimensionales, así como el tipo de distribución.**

Nota: Confronta la solución de la ecuación con el enunciado del ejercicio 3.

8. Sean $m(t), h_1(t), h_2(t)$ funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, siendo $h_i(t)$, $i = 1, 2$ positivas con $h_2(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso gaussiano con media $m(t)$ y función de covarianza dada por $C_X(s, t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$, donde $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ y $s \wedge t = \text{Min}(s, t)$. Supuesto que $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tiene trayectorias continuas, demostrar que el proceso es de difusión.