Tema 1: Algunos aspectos sobre la teoría general de procesos estocásticos. Procesos gaussianos.

Relación de ejercicios resuelta.

Francisco de Asís Torres Ruiz

Departamento de Estadística e I.O.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Granada, curso 2025/2026

Índice

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t + U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t + U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t + U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t + U)] = 0.$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \dfrac{1}{2}[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \dfrac{1}{2}[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,
    $$C_X(s,t) = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)].$

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \frac{1}{2}[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,
    $$C_X(s,t) = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] =$$
    $$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(t+s+2u) + \cos(t-s)]\,\frac{1}{2\pi}\,du =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \frac{1}{2}\left[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)\right]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,

$$C_X(s,t) = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(t+s+2u) + \cos(t-s)\right]\frac{1}{2\pi}\,du = \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s+2u)\,du\right) =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \frac{1}{2}\left[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)\right]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,
    $$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(t+s+2u)+\cos(t-s)\right]\frac{1}{2\pi}\,du = \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s+2u)\,du\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + 0\right) = \frac{1}{2}\cos(t-s). \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)\right]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(t+s+2u) + \cos(t-s)\right]\frac{1}{2\pi}\,du = \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s+2u)\,du\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + 0\right) = \frac{1}{2}\cos(t-s). \end{aligned}$$

- ¿Es débilmente estacionario?

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  Como X y U son independientes, entonces X y $\cos(t+U)$ también lo son para todo valor de t. Con ello,

  - $m_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X\cos(t+U)] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)] = 0.$
  - En primer lugar, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)]$.

    Teniendo en cuenta que
    $$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$
    se verifica $\cos(t+U)\cos(s+U) = \frac{1}{2}[\cos(t+s+2U) + \cos(t-s)]$ sin más que considerar $t+U = (A+B)/2$ y $s+U = (A-B)/2$ y despejar los valores de A y B. Con ello,
    $$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}[X^2\cos(t+U)\cos(s+U)] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[\cos(t+U)\cos(s+U)] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(t+s+2u)+\cos(t-s)]\,\frac{1}{2\pi}\,du = \left(\frac{1}{2}\cos(t-s) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s+2u)\,du\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\cos(t-s)+0\right) = \frac{1}{2}\cos(t-s). \end{aligned}$$

- ¿Es débilmente estacionario?

  A partir del apartado anterior, la media es constante y la covarianza es función de $t-s$, por lo que el proceso es débilmente estacionario.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

  Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h)-X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\,\frac{1}{2\pi}\,du =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

  Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

  Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

  con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h)-X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

  Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\,\frac{1}{2\pi}\,du =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t+h+2u)\,du\right) =$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\frac{1}{2\pi}\,du = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t+h+2u)\,du\right) = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t}+\mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h)-X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\frac{1}{2\pi}\,du = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t+h+2u)\,du\right) = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h)-X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2} = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\frac{1}{2\pi}\,du =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t+h+2u)\,du\right) = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$

En definitiva,

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2} = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

Por último, como $\mathrm{sen}(x) \leq x$, $\forall x > 0$, se verifica $\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right) \leq \frac{h^2}{4}$, y así $\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] \leq \frac{h^2}{2}$.

Ejercicio 1

Sea $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ un proceso estocástico definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\cos(\mathbf{t} + \mathbf{U})$ donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ son dos variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{U}$ es una ley uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- ¿Es débilmente estacionario?
- Estudiar su continuidad muestral.

Solución

- Estudiar su continuidad muestral.

Supongamos demostrado que el proceso es separable (en otro caso existe una versión separable gracias al Teorema De Doob).

Teniendo en cuenta que $\cos(A) - \cos(B) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, y para $h > 0$, se tiene

$$X(t+h) - X(t) = X\left(\cos(t+h+U) - \cos(t+U)\right) = -2X\,\mathrm{sen}\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right].$$

Ahora bien, como $\mathrm{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$, entonces

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{2t+h+2U}{2}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos(2t+h+2U)}{2}\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2t+h+2u)}{2}\frac{1}{2\pi}\,du = \\ = \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t+h+2u)\,du\right) = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$

En definitiva,

$$\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] = 4\,\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2} = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

Por último, como $\mathrm{sen}(x) \leq x$, $\forall x > 0$, se verifica $\mathrm{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right) \leq \frac{h^2}{4}$, y así $\mathrm{E}\left[(X(t+h) - X(t))^2\right] \leq \frac{h^2}{2}$.

Tomando $\alpha = 2$, $C = 1/2$ y $\beta = 1$ en el criterio de continuidad de Kolmogorov se concluye que el proceso es continuo muestral.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

  En lo que se refiere a la función de covarianza

$$C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

  En lo que se refiere a la función de covarianza

$$C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] = \mathrm{E}\left[(Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t))\,(Y_1 \cos(\lambda s) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda s))\right] =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

  En lo que se refiere a la función de covarianza

$$\begin{aligned} C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] = {} & \mathrm{E}\left[(Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t))\,(Y_1 \cos(\lambda s) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda s))\right] = \\ & = \cos(\lambda s)\cos(\lambda t)\, \mathrm{E}\left[Y_1^2\right] + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\, \mathrm{E}[Y_2^2] + (\cos(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s) + \operatorname{sen}(\lambda t)\cos(\lambda s))\, \mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

  En lo que se refiere a la función de covarianza

$$\begin{aligned} C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] =\ & \mathrm{E}\left[(Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t))\,(Y_1 \cos(\lambda s) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda s))\right] = \\ & = \cos(\lambda s)\cos(\lambda t)\, \mathrm{E}\left[Y_1^2\right] + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\, \mathrm{E}[Y_2^2] + (\cos(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s) + \operatorname{sen}(\lambda t)\cos(\lambda s))\, \mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \\ & = \sigma^2\left(\cos(\lambda s)\cos(\lambda t) + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\right) = \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

En lo que se refiere a la función de covarianza

$$\begin{aligned} C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] = \ & \mathrm{E}\left[(Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t))\,(Y_1 \cos(\lambda s) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda s))\right] = \\ & = \cos(\lambda s)\cos(\lambda t)\, \mathrm{E}\left[Y_1^2\right] + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\, \mathrm{E}[Y_2^2] + (\cos(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s) + \operatorname{sen}(\lambda t)\cos(\lambda s))\, \mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \\ & = \sigma^2\left(\cos(\lambda s)\cos(\lambda t) + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\right) = \sigma^2 \cos(\lambda(t-s)) \end{aligned}$$

ya que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las funciones media y covarianza.

  En cuanto a la función media se tiene

$$m_X(t) = \mathrm{E}\left[Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t)\right] = \cos(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_1] + \operatorname{sen}(\lambda t)\, \mathrm{E}[Y_2] = 0.$$

  En lo que se refiere a la función de covarianza

$$\begin{aligned} C_X(s,t) = Cov[X(t), X(s)] = &\ \mathrm{E}\left[(Y_1 \cos(\lambda t) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda t))\,(Y_1 \cos(\lambda s) + Y_2 \operatorname{sen}(\lambda s))\right] = \\ &= \cos(\lambda s)\cos(\lambda t)\, \mathrm{E}\left[Y_1^2\right] + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\, \mathrm{E}[Y_2^2] + (\cos(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s) + \operatorname{sen}(\lambda t)\cos(\lambda s))\, \mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \\ &= \sigma^2\left(\cos(\lambda s)\cos(\lambda t) + \operatorname{sen}(\lambda t)\operatorname{sen}(\lambda s)\right) = \sigma^2 \cos(\lambda(t-s)) \end{aligned}$$

  ya que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

  En particular, la función varianza es $\mathrm{Var}[X(t)] = \sigma^2$, por lo que el proceso es de segundo orden. Además, el proceso es débilmente estacionario ya que la media es constante y la covarianza es función de $t - s$.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(t_j)\right)\right] =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right] =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^n \lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^n \lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right] =$$

$$= \phi_{Y_1}\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\phi_{Y_2}\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j\cos(\lambda t_j)\right]^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right] =$$

$$= \phi_{Y_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\phi_{Y_2}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right]^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\cos^2(\lambda t_j) + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda t_l)\cos(\lambda t_j) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\,\mathrm{sen}^2(\lambda t_j) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_l)\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right]\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j))\right]\right) =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] &= \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j)+Y_2\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right] = \\
&= \phi_{Y_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\phi_{Y_2}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right]^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\cos^2(\lambda t_j) + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda t_l)\cos(\lambda t_j) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\operatorname{sen}^2(\lambda t_j) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_l)\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l-t_j))\right]\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l-t_j))\right) =
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

  Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] &= \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right] = \\
&= \phi_{Y_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\phi_{Y_2}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right]^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\cos^2(\lambda t_j) + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda t_l)\cos(\lambda t_j) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\operatorname{sen}^2(\lambda t_j) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_l)\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j)\right]\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\lambda_j C_X(t_l, t_j)\right).
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right)\right] =$$

$$= \phi_{Y_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\phi_{Y_2}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\lambda t_j)\right]^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\cos^2(\lambda t_j) + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda t_l)\cos(\lambda t_j) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\,\mathrm{sen}^2(\lambda t_j) +\right.\right.$$

$$\left.\left. +2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\,\mathrm{sen}(\lambda t_l)\,\mathrm{sen}(\lambda t_j)\right]\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 + 2\sum_{l<j}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j)\right]\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\lambda_j C_X(t_l, t_j)\right).$$

Por tanto, por la caracterización el proceso es gaussiano. En consecuencia, las distribuciones finito dimensionales $(X(t_1), \ldots, X(t_n))'$ son, $\forall t_1, \ldots, t_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, normales de media cero y matriz de varianzas covarianzas Σ cuyos elementos son $\sigma_{ij} = C_X(t_i, t_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq 0$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_n$ con $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j\left(Y_1\cos(\lambda t_j) + Y_2\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(iY_1\sum_{j=1}^n \lambda_j\cos(\lambda t_j)\right)\exp\left(iY_2\sum_{j=1}^n \lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right)\right] =$$

$$\cdots \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]^2\right) =$$

El hecho de que el proceso sea Gaussiano y débilmente estacionario hace que sea también estrictamente estacionario. En particular, la distribución estacionaria es la normal de media cero y varianza uno, como veremos en el próximo apartado. Obviamente, todas las distribuciones finito-dimensionales son normales multivariantes.

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^2\cos^2(\lambda t_j) + 2\sum_{l<j}\lambda_l\lambda_j\cos(\lambda t_l)\cos(\lambda t_j) + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2\operatorname{sen}^2(\lambda t_j) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\sum_{l<j}^n \lambda_l\lambda_j\operatorname{sen}(\lambda t_l)\operatorname{sen}(\lambda t_j)\right]\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 + 2\sum_{l<j}^n \lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j))\right]\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_l\lambda_j\cos(\lambda(t_l - t_j))\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_l\lambda_j C_X(t_l, t_j)\right).$$

Por tanto, por la caracterización el proceso es gaussiano. En consecuencia, las distribuciones finito dimensionales $(X(t_1), \ldots, X(t_n))'$ son, $\forall t_1, \ldots, t_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, normales de media cero y matriz de varianzas covarianzas Σ cuyos elementos son $\sigma_{ij} = C_X(t_i, t_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq 0$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1 \left[\cos(\lambda(s-t))x; \sigma^2 \left(1 - \cos^2(\lambda(s-t))\right) \right].$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\operatorname{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1\left[\cos(\lambda(s-t))x; \sigma^2\left(1 - \cos^2(\lambda(s-t))\right)\right].$$

- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1 \left[\cos(\lambda(s-t))x; \sigma^2 \left(1 - \cos^2(\lambda(s-t))\right) \right].$$

- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.

  La continuidad estocástica es inmediata ya que el proceso es gaussiano, con función media y varianza continuas (lo cual es evidente ya que son constantes).

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq 0$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq 0\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1 \left[\cos(\lambda(s-t))x; \sigma^2 \left(1 - \cos^2(\lambda(s-t))\right) \right].$$

- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.

  La continuidad estocástica es inmediata ya que el proceso es gaussiano, con función media y varianza continuas (lo cual es evidente ya que son constantes).

  En cuanto a la continuidad muestral, consideremos una versión separable del proceso. La función media es continua, mientras que

$$C_X(t+h, t+h) + C_X(t,t) - 2C_X(t, t+h) =$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq 0$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1\left[\cos(\lambda(s-t))x; \sigma^2\left(1-\cos^2(\lambda(s-t))\right)\right].$$

- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.

  La continuidad estocástica es inmediata ya que el proceso es gaussiano, con función media y varianza continuas (lo cual es evidente ya que son constantes).

  En cuanto a la continuidad muestral, consideremos una versión separable del proceso. La función media es continua, mientras que

$$C_X(t+h, t+h) + C_X(t,t) - 2C_X(t, t+h) = \sigma^2\left(1+1-2\cos(\lambda h)\right) = 2\sigma^2\left(1-\cos(\lambda h)\right).$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Calcular las densidades de transición.

  Como caso particular del apartado anterior tenemos, dados s y t,

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda(s-t)) \\ \cos(\lambda(s-t)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Por lo tanto,

$$X(t)|X(s) = x \rightsquigarrow N_1 \left[\cos(\lambda(s-t))x ; \sigma^2 \left(1 - \cos^2(\lambda(s-t))\right) \right].$$

- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.

  La continuidad estocástica es inmediata ya que el proceso es gaussiano, con función media y varianza continuas (lo cual es evidente ya que son constantes).

  En cuanto a la continuidad muestral, consideremos una versión separable del proceso. La función media es continua, mientras que

$$C_X(t+h, t+h) + C_X(t,t) - 2C_X(t, t+h) = \sigma^2 (1 + 1 - 2\cos(\lambda h)) = 2\sigma^2 (1 - \cos(\lambda h)).$$

  Puesto que $1 - \cos(2x) = 2 \operatorname{sen}^2(x)$, entonces

$$|C_X(t+h, t+h) + C_X(t,t) - 2C_X(t, t+h)| = 4\sigma^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \leq \sigma^2 \lambda^2 h^2$$

  de donde se deduce que el proceso es continuo muestral.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\operatorname{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \ t_1 < t_2 < t_3.$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \; t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \ t_1 < t_2 < t_3.$$

Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} [\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))]$$

por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

  $$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)},\ t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1))\cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

  $$\cos(\lambda(t_2 - t_1))\cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))\right]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \ t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} \left[\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))\right]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \; t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} [\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

  $$C_X(t_1,t_3) = \frac{C_X(t_1,t_2)C_X(t_2,t_3)}{C_X(t_2,t_2)},\ t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3-t_1)) = \cos(\lambda(t_2-t_1))\cos(\lambda(t_3-t_2))$, pero

  $$\cos(\lambda(t_2-t_1))\cos(\lambda(t_3-t_2)) = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda(t_3-t_1)+\cos(\lambda(2t_2-t_3-t_1)))\right]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3-t_1)) = \cos(\lambda(2t_2-t_3-t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2)-X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

  $$\begin{pmatrix} X(t_2)-X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

  por lo que

  $$\begin{pmatrix} X(t_2)-X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2\begin{pmatrix} 2-2\cos(\lambda(t_2-t_1)) & -1+\cos(\lambda(t_2-t_1)) \\ -1+\cos(\lambda(t_2-t_1)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \; t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1))\cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1))\cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))\right]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

  por lo que

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(\lambda(t_2 - t_1)) & -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \\ -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

  Puesto que la distribución es normal bidimensional, una condición necesaria y suficiente para la independencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. Por lo tanto el proceso no es de incrementos independientes.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

  Pues El código en R para generar 100 réplicas de diversas trayectorias sería el siguiente:

  $$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \; t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

  $$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} [\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

  $$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

  por lo que

  $$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(\lambda(t_2 - t_1)) & -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \\ -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Puesto que la distribución es normal bidimensional, una condición necesaria y suficiente para la independencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. Por lo tanto el proceso no es de incrementos independientes.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

- Estudiar si es de Markov.

Pues

El código en R para generar 100 réplicas de diversas trayectorias sería el siguiente:

```
Ntra<-50
Rep<-100
t<-seq(0,10,0.01)
Lambda<-1.5
sigma<-2
Trayec3<-array(0,c(length(t),Ntra,Rep))
for(i in 1:Rep)
{
  B1<-rnorm(Ntra,0,sigma)
  B2<-rnorm(Ntra,0,sigma)
  for(j in 1:Ntra) Trayec3[,j,i]<-B1[j]*cos(Lambda*t)+B2[j]*sin(Lambda*t)
}
SumaMedia<-rep(0,length(t))
SumaVar<-rep(0,length(t))
for(i in 1:Rep)
{
  SumaMedia<-SumaMedia+apply(Trayec3[,,i],1,mean)
  SumaVar<-SumaVar+apply(Trayec3[,,i],1,var)
}
MediaDef<-as.vector(SumaMedia/Rep)
VarDef<-as.vector(SumaVar/Rep)
Replica<-10
matplot(t,Trayec3[,,Replica],lty=1,lwd=1,type="l")
matplot(t,cbind(MediaDef,VarDef),main="",lty=1,lwd=1,type="l",xlab="Tiempo",ylab="",col=c("blue","green"))
```

Si el

por ... el proceso
no e

- Estu

Cons ... ndientes,
amb

por

$$\left(X(t_1)\right) \; N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \sigma \begin{pmatrix} -1+\cos(\lambda(t_2-t_1)) & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Puesto que la distribución es normal bidimensional, una condición necesaria y suficiente para la independencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. Por lo tanto el proceso no es de incrementos independientes.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

Esta gráfica representa algunas de las trayectorias para una réplica concreta:

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \ t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} [\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

  por lo que

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(\lambda(t_2 - t_1)) & -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \\ -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Puesto que la distribución es normal bidimensional, una condición necesaria y suficiente para la independencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. Por lo tanto el proceso no es de incrementos independientes.

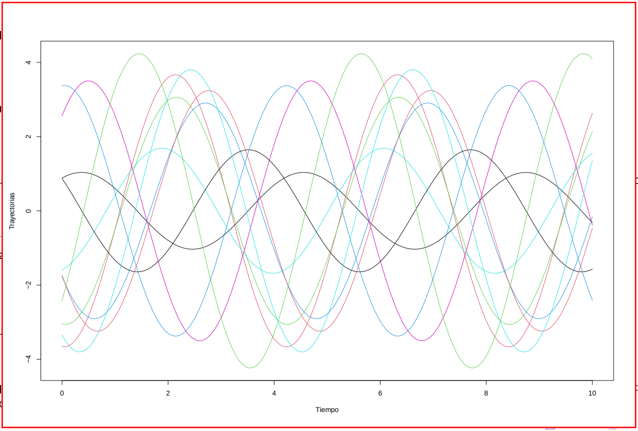
Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza σ^2. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X(t)} : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X(t)} = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

Esta gráfica representa algunas de las trayectorias para una réplica concreta:



- Estudiar

  Puesto q

  Si ello fu

  por lo qu … cia, el proceso
  no es de
- Estudiar

  Consider … dependientes,
  ambas va

  por lo qu

  Puesto q … covarianza sea
  cero, lo

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1} \cos(\lambda \mathbf{t}) + \mathbf{Y_2} \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución Esta gráfica representa las funciones media y varianza muestral:

- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es gaussiano, para comprobar si es de Markov basta con estudiar si se verifica

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2) C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}, \ t_1 < t_2 < t_3.$$

  Si ello fuera así debería verificarse $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2))$, pero

$$\cos(\lambda(t_2 - t_1)) \cos(\lambda(t_3 - t_2)) = \frac{1}{2} [\cos(\lambda(t_3 - t_1) + \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1)))]$$

  por lo que tendría que ocurrir $\cos(\lambda(t_3 - t_1)) = \cos(\lambda(2t_2 - t_3 - t_1))$, cuestión que no siempre se verifica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

  Consideremos la distribución conjunta de $X(t_2) - X(t_1)$ y de $X(t_1)$ con $t_1 < t_2$. Si el proceso fuera de incrementos independientes, ambas variables serían independientes. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix},$$

  por lo que

$$\begin{pmatrix} X(t_2) - X(t_1) \\ X(t_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(\lambda(t_2 - t_1)) & -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) \\ -1 + \cos(\lambda(t_2 - t_1)) & 1 \end{pmatrix} \right].$$

  Puesto que la distribución es normal bidimensional, una condición necesaria y suficiente para la independencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. Por lo tanto el proceso no es de incrementos independientes.

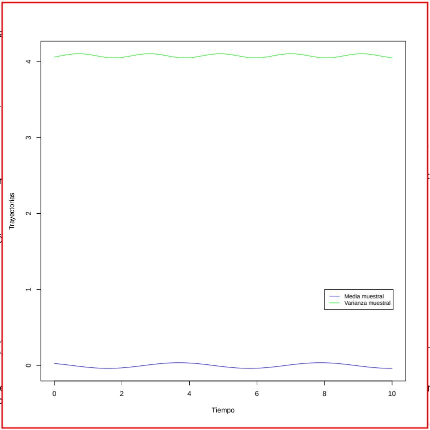
Ejercicio 2

Sean $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}$ variables independientes e idénticamente distribuidas según normales de media cero y varianza $\sigma^{\mathbf{2}}$. Sea, para $\lambda \geq \mathbf{0}$, el proceso $\{\mathbf{X}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ definido por $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_1}\cos(\lambda\mathbf{t}) + \mathbf{Y_2}\,\mathrm{sen}(\lambda\mathbf{t})$.

- Calcular las funciones media y covarianza.
- Calcular las distribuciones finito dimensionales y demostrar que el proceso es gaussiano.
- Calcular las densidades de transición.
- Estudiar la continuidad estocástica y la continuidad muestral.
- Estudiar si es de Markov.
- Estudiar si el proceso es de incrementos independientes.

Solución

Esta gráfica representa las funciones media y varianza muestral:



- Estudiar si es de Markov.

  Puesto que el proceso es ga

  Si ello fuera así debería ver

  $))]$

  por lo que tendría que ocur … fica. En consecuencia, el proceso no es de Markov.

- Estudiar si el proceso es de

  Consideremos la distribució … de incrementos independientes, ambas variables serían inde

  por lo que

  $$\Big(X(\quad - t_1)) \Big) \Big].$$

  Puesto que la distribución … ndencia es que la covarianza sea cero, lo cual no es cierto. P