Tema 1: Fundamentos de la teoría de sistemas dinámicos

1. Etapas en el estudio de un sistema dinámico

2. Descripción matemática de un sistema dinámico

3. Sistemas lineales en tiempo continuo

4. Sistemas lineales en tiempo discreto

5. Análisis cualitativo de sistemas lineales

El objetivo de la Teoría de Sistemas Dinámicos es estudiar la evolución que experimenta a través del tiempo cualquier sistema físico sometido a la influencia de diversos factores que actúan externa o internamente sobre dicho sistema. Cuando todos los factores que afectan el comportamiento de un sistema son determinísticos, su evolución está totalmente determinada si tales factores son conocidos y se conoce también las condiciones iniciales de las que parte el sistema. Sin embargo, en la gran mayoría de situaciones reales, los factores que influyen en la evolución del sistema tienen un carácter aleatorio, por lo que la evolución del sistema es también aleatoria. Estos sistemas se denominan sistemas estocásticos, y uno de los principales problemas que se plantea en su estudio es estimar de alguna manera su evolución en el tiempo. Antes de tratar el problema de estimación en sistemas estocásticos, objetivo fundamental de este curso, en este tema presentamos una introducción general de la Teoría de Sistemas, describiendo las distintas etapas que deben considerarse para el estudio de cualquier sistema físico, y centrándonos principalmente en sistemas lineales.

1 Etapas en el estudio de un sistema dinámico

Las distintas etapas que deben considerarse para el estudio de un sistema dinámico son:

- *Modelización.*
- *Descripción matemática.*
- *Análisis del modelo.*

1.1 Modelización

Para modelizar un sistema físico es preciso definir las variables que intervienen en él, así como explicar las relaciones físicas entre dichas variables. Se distingue esencialmente entre tres tipos de variables:

- *Variables de estado*, que describen las características internas propias del sistema.
- *Variables de entrada*, que representan los estímulos o factores externos a los que está sometido el sistema.
- *Variables de salida* u *observaciones*, que representan la información real que obtenemos al observar el sistema.

1.2 Descripción matemática

Una vez definidas las variables y explicadas sus relaciones físicas, la siguiente etapa consiste en buscar un modelo matemático que describa tales relaciones. La descripción matemática de un sistema se hará generalmente en función de los objetivos planteados en cada situación particular y, según esto, existen básicamente dos tipos de descripción:

- *Descripción entrada-salida*, en la que se especifica exclusivamente el valor de las variables de salida en función de las entradas, ignorando la estructura interna del sistema. Se conoce también como *descripción externa.*
- *Descripción interna*, que proporciona, además, la relación entre las variables de estado y las entradas al sistema. Se denomina también *descripción con variables de estado.*

1.3 Análisis

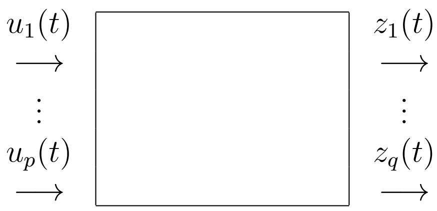
Una vez descrito el modelo matemático del sistema, se plantea el análisis de dicho modelo, que puede ser de dos tipos:

- *Análisis cuantitativo*, que consiste en la determinación de la respuesta del sistema ante diferentes entradas y condiciones iniciales internas del sistema.
- *Análisis cualitativo*, que se refiere al estudio de propiedades generales del modelo que, de alguna manera, permitan realizar un análisis cuantitativo más o menos completo. Entre estas propiedades destacamos las de *observabilidad, controlabilidad* y *estabilidad*, que describiremos en el último apartado de este tema.

2 Descripción matemática de un sistema dinámico

2.1 Descripción entrada-salida

Como ya se ha comentado, se trata de encontrar una relación entre las entradas y las salidas del sistema, sin tener en cuenta su estructura interna. Así, imaginamos el sistema como una caja negra sobre la que, en cada instante de tiempo t, actúan p entradas, $u_1(t), \ldots, u_p(t)$, y se producen q salidas, $z_1(t), \ldots, z_q(t)$:



Notando $u(t)$ y $z(t)$ a los vectores columna formados por las entradas y las salidas, respectivamente,

$$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_p(t))^T \qquad z(t) = (z_1(t), \ldots, z_q(t))^T,$$

y suponiendo que todas las entradas y salidas son reales, y que el estudio del sistema comienza en el instante t_0, se definen las funciones

$$\begin{array}{rcl} u_{[t_0,+\infty)} : [t_0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & u(t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} z_{[t_0,+\infty)} : [t_0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ t & \longmapsto & z(t) \end{array}$$

Entonces, la descripción se realiza mediante un operador funcional H_{t_0}, que actúa sobre cada función entrada, $u_{[t_0,+\infty)}$, determinando unívocamente la salida, $z_{[t_0,+\infty)}$:

$$z_{[t_0,+\infty)} = H_{t_0} u_{[t_0,+\infty)}.$$

El gran inconveniente que presenta la descripción entrada-salida es que en la gran mayoría de situaciones reales, las salidas del sistema dependen no sólo de las entradas sino de las condiciones internas del sistema en cada instante de tiempo. En tales casos, debe recurrirse a la descripción interna que, al considerar todas las variables que intervienen en el sistema, proporciona una descripción más real del mismo.

2.2 Descripción con variables de estado

Para realizar esta descripción, comenzamos estableciendo la definición formal de *estado del sistema*.

Definición: El estado de un sistema en un instante de tiempo t es la cantidad de información necesaria para determinar, junto con las entradas posteriores a t, las salidas futuras del sistema.

En general, el estado de un sistema estará determinado por un conjunto (finito o infinito) de variables, denominadas *variables de estado*, y el vector formado por ellas se denomina *vector de estado*. Se representará mediante una función del tiempo, $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, y en todo nuestro estudio lo supondremos de dimensión finita, n:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \ &\longmapsto x(t). \end{aligned}$$

La descripción con variables de estado incluye dos ecuaciones, denominadas *ecuaciones dinámicas del sistema*:

- *Ecuación del estado*: Describe la evolución del estado en función de las entradas en cada instante de tiempo; usualmente, esta evolución se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = h_t(x(t), u(t)).$$

- *Ecuación de observación*: Especifica la salida del sistema en cada instante, en función del estado y de la entrada en dicho instante:

$$z(t) = g_t(x(t), u(t)).$$

Nota: La descripción de la ecuación del estado mediante una ecuación diferencial es una suposición que se adecúa perfectamente a gran cantidad de situaciones reales y, aunque generalmente las ecuaciones que aparecen son de orden superior a uno, se pueden transformar en ecuaciones de primer orden sin más que introducir variables adicionales en el vector de estado.

Cuando las funciones h_t y g_t que definen las ecuaciones dinámicas son lineales en $x(t)$ y $u(t)$, el sistema descrito por ellas se denomina un sistema lineal. Por su gran importancia, nos centramos a continuación en el análisis de tales sistemas.

3 Sistemas lineales en tiempo continuo

Los sistemas lineales son de gran importancia en esta teoría ya que son aplicables a una gran cantidad de situaciones reales y, además, su estudio constituye la base para el estudio de sistemas no lineales. Como se ha indicado anteriormente, las ecuaciones dinámicas que describen estos sistemas están definidas mediante funciones lineales del estado y de la entrada en cada instante:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= H(t)x(t) + G(t)u(t) \end{aligned}$$

donde A, B, H y G son funciones matriciales de dimensiones apropiadas.

3.1 Análisis cuantitativo del sistema

Para que estas ecuaciones describan correctamente un sistema dinámico, el estado debe estar unívocamente determinado en cada instante de tiempo y, por lo tanto, la ecuación del estado debe tener solución única. Esta solución, junto con las entradas, determinará las salidas del sistema teniendo en cuenta la ecuación de observación.

Nos centramos, por tanto, en la ecuación del estado y, basándonos en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, obtenemos su solución.

Supongamos que el análisis del sistema comienza en un tiempo arbitrario t_0. Para obtener la solución de la ecuación del estado se parte de lo que se denomina la *matriz fundamental del sistema*, que es la única solución de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \quad t \geq t_0$$

con condición inicial $X(t_0) = I_{n\times n}$.

La existencia y unicidad de la matriz fundamental está garantizada si la función A es continua y, además, $X(t)$ es no singular para todo $t \geq t_0$. A partir de X, la solución (única) de la ecuación del estado (supuesto que Bu es continua a trozos) está dada por

$$x(t) = X(t)x(t_0) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Una expresión más práctica de esta solución es a través de la que se denomina *matriz de transición del sistema*, que se define en términos de la matriz fundamental:

$$\Phi(t,s) = X(t)X^{-1}(s), \quad t,s \geq t_0,$$

y que satisface las siguientes propiedades:

- $\dfrac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,s); \quad \Phi(s,s) = I_{n\times n}$.
- $\Phi^{-1}(t,s) = \Phi(s,t)$.
- $\Phi(t,r)\Phi(r,s) = \Phi(t,s)$.

Entonces, teniendo en cuenta que $X(t_0) = I_{n\times n}$ y, por tanto, $\Phi(t,t_0) = X(t)$, la solución de la ecuación del estado se expresa en términos de la matriz de transición como:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Una vez obtenido el estado en cualquier instante t a partir del estado inicial, $x(t_0)$, y las entradas, $u(\tau),\ t_0 \leq \tau \leq t$, la respuesta del sistema a dichas condiciones está dada por:

$$z(t) = H(t)\left[\Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + G(t)u(t), \quad t \geq t_0.$$

4 Sistemas lineales en tiempo discreto

A diferencia de los sistemas descritos en el apartado 3, existen muchos sistemas físicos que sólo experimentan cambios en instantes discretos de tiempo. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que los instantes en que el sistema cambia están igualmente espaciados, y notando tales instantes por k, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la descripción matemática de un sistema lineal en tiempo discreto está dada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ z(k) &= H(k)x(k) + G(k)u(k), \end{aligned}$$

donde, como en el caso continuo, $x(k), u(k)$ y $z(k)$ son los vectores estado (n-dimensional), entrada (p-dimensional) y salida (q-dimensional) en el instante k, respectivamente, y A, B, H y G son funciones matriciales de dimensiones apropiadas.

Nótese que ahora la ecuación del estado es una ecuación en diferencias en vez de una ecuación diferencial como en el caso continuo. A continuación, como se ha hecho en tal caso, obtenemos la solución de dicha ecuación, con objeto de determinar las salidas del sistema a partir de las entradas y de la condición inicial.

4.1 Análisis cuantitativo del sistema

Se define la *matriz de transición del sistema* como:

- $\Phi(k, s) = A(k-1)A(k-2)\cdots A(s), \quad k > s$
- $\Phi(k, k) = I_{n\times n}$.

Entonces, sin más que aplicar sucesivamente la ecuación del estado, se obtiene el estado en cualquier instante de tiempo en términos del estado en cualquier instante inicial k_0, y las entradas hasta dicho instante:

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B(i)u(i), \quad k > k_0.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de observación, se obtiene la respuesta del sistema en un instante arbitrario en función de cualquier estado inicial y las entradas hasta dicho instante:

$$z(k) = H(k)\left[\Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B(i)u(i)\right] + G(k)u(k), \quad k > k_0.$$

4.2 Discretización de un sistema continuo

Además de modelizar muchas situaciones prácticas, los sistemas en tiempo discreto adquieren significado cuando se introduce un procedimiento de muestreo discreto en un sistema continuo. A veces, fundamentalmente por razones económicas, sólo se dispone de observaciones de un sistema continuo en instantes de tiempo discretos; además, en muchas ocasiones, la implementación de los diversos algoritmos para el análisis de los sistemas se hace en tiempo discreto, por lo que es conveniente disponer de un método que permita aproximar un sistema continuo por uno discreto. A continuación describimos dicho método.

Consideremos el sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= H(t)x(t) + G(t)u(t), \end{aligned}$$

y supongamos que sólo estamos interesados en el comportamiento del sistema en determinados instantes discretos, $t_k, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si suponemos que la función entrada, $u_{[t_0,+\infty)}$, es prácticamente constante en cada intervalo de integración $[t_k, t_{k+1})$, teniendo en cuenta la expresión de la solución de la ecuación del estado dada en el apartado 3.1, el estado $x(t_{k+1})$ se puede expresar (aproximadamente) en términos de $x(t_k)$ de la siguiente forma:

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau\right] u(t_k), \quad k \geq 0,$$

y las salidas del sistema en los instantes de tiempo considerados son

$$z(t_k) = H(t_k)x(t_k) + G(t_k)u(t_k), \quad k \geq 0.$$

5 Análisis cualitativo de sistemas lineales

En este apartado exponemos algunas propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos y realizamos un estudio de estas propiedades en sistemas lineales continuos y discretos, de los tipos considerados en los apartados 3 y 4, respectivamente.

5.1 Observabilidad

La observabilidad de un sistema es una propiedad que se refiere a la posibilidad de determinar la trayectoria del estado en un intervalo de tiempo finito, a partir de las entradas y las salidas en dicho intervalo.

- **Observabilidad en sistemas lineales continuos**

  Consideremos un sistema lineal en tiempo continuo,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= H(t)x(t) + G(t)u(t). \end{aligned}$$

  Según se estableció en el apartado 3.1, si A es una función continua y Bu es continua a trozos, el estado de este sistema en cualquier instante de tiempo puede obtenerse a partir de cualquier estado anterior y de las entradas hasta dicho instante mediante la expresión

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0.$$

  Por lo tanto, ya que el objetivo es conocer el estado en un intervalo de tiempo a partir de las entradas y las salidas en dicho intervalo, basta determinar el estado inicial, $x(t_0)$, a partir de ellas. Aparecen así las siguientes definiciones para el tipo de sistemas considerado:

– El sistema es *observable en* t_0 si $\exists t_1 \geq t_0$ tal que $x(t_0)$ puede determinarse a partir de $u_{[t_0,t_1]}$ y de $z_{[t_0,t_1]}$.
– El sistema es *completamente observable* si lo es en todo instante t_0.

Exponemos a continuación algunas condiciones para la observabilidad.

Condición suficiente para la observabilidad: Si la dimensión del vector salida (q) es mayor o igual que la dimensión del vector estado (n) y $H(t_0)$ tiene rango n, el sistema es observable en t_0:

$$x(t_0) = [H^T(t_0)H(t_0)]^{-1}H^T(t_0)\left[z(t_0) - G(t_0)u(t_0)\right].$$

La siguiente condición, necesaria y suficiente para la observabilidad de los sistemas considerados, se establece en términos de la denominada *matriz de observabilidad*:

$$\mathcal{O}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)H(t)\Phi(t, t_0)dt, \quad t_1 > t_0.$$

Condición necesaria y suficiente para la observabilidad: El sistema es observable en t_0 si y sólo si $\exists t_1 \geq t_0$ tal que $\mathcal{O}(t_0, t_1)$ es no singular; en tal caso,

$$\begin{aligned} x(t_0) = \quad & \mathcal{O}^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)z(t)dt - \\ & \mathcal{O}^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)\left[H(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - G(t)u(t)\right]dt. \end{aligned}$$

- **Observabilidad en sistemas lineales discretos**

Consideremos el sistema discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ z(k) &= H(k)x(k) + G(k)u(k). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión del estado en términos de cualquier estado inicial y de las entradas hasta dicho instante (apartado 4.1),

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B(i)u(i), \quad k > k_0,$$

se obtienen, como en el caso continuo, las siguientes definiciones.

– El sistema es *observable en* k_0 si $\exists k_1 \geq k_0$ tal que $x(k_0)$ puede determinarse a partir de $u(k_0), \ldots, u(k_1)$ y de $z(k_0), \ldots, z(k_1)$.

– El sistema es *completamente observable* si lo es en todo instante k_0.

La *matriz de observabilidad* se define también de forma similar al caso continuo:

$$\mathcal{O}(k_0, k_1) = \sum_{i=k_0}^{k_1} \Phi^T(i, k_0) H^T(i) H(i) \Phi(i, k_0), \quad k_1 \geq k_0,$$

y se tiene la siguiente condición para la observabilidad.

Condición necesaria y suficiente para la observabilidad: El sistema es observable en k_0 si y sólo si $\exists k_1 \geq k_0$ tal que $\mathcal{O}(k_0, k_1)$ es no singular; en tal caso,

$$\begin{aligned} x(k_0) &= \mathcal{O}^{-1}(k_0, k_1) \sum_{i=k_0}^{k_1} \Phi^T(i, k_0) H^T(i) z(i) - \\ & \mathcal{O}^{-1}(k_0, k_1) \sum_{i=k_0}^{k_1} \Phi^T(i, k_0) H^T(i) \left[H(i) \sum_{j=k_0}^{i-1} \Phi(i, j+1) B(j) u(j) - G(i) u(i) \right]. \end{aligned}$$

5.2 Controlabilidad

La propiedad de controlabilidad se refiere a la posibilidad de determinar entradas que permitan transferir cualquier estado en un instante de tiempo a cualquier otro estado en un intervalo de tiempo finito. Esta propiedad, por tanto, se refiere exclusivamente a la ecuación del estado, ya que las salidas no intervienen. Analizamos la propiedad en sistemas lineales continuos y discretos.

- **Controlabilidad en sistemas lineales continuos**

  Consideremos la ecuación del estado en un sistema lineal en tiempo continuo,

  $$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

  Dada la linealidad de esta ecuación, el paso de un estado $x(t_0)$ a cualquier estado x equivale al paso de $x(t_0) - x$ al estado 0 y se tienen las siguientes definiciones:

  – El sistema es *controlable en* t_0 si para cualquier valor $x(t_0)$ existe $t_1 > t_0$ y $u_{[t_0,t_1]}$ tal que $x(t_1) = 0$.

  – El sistema es *completamente controlable* si lo es en todo instante t_0.

  La siguiente condición, necesaria y suficiente para la controlabilidad de los sistemas considerados, se establece en términos de la denominada *matriz de controlabilidad* :

  $$\mathcal{C}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt, \quad t_1 > t_0.$$

Condición necesaria y suficiente para la controlabilidad: El sistema es controlable en t_0 si y sólo si $\exists t_1 > t_0$ tal que $\mathcal{C}(t_0, t_1)$ es no singular; en tal caso, introduciendo en el sistema la entrada

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\mathcal{C}^{-1}(t_0, t_1)x(t_0), \quad t \in [t_0, t_1],$$

se transfiere $x(t_0)$ a $x(t_1) = 0$.

- **Controlabilidad en sistemas lineales discretos**

  Consideremos la ecuación del estado de un sistema lineal discreto:

$$x(k+1) \quad = \quad A(k)x(k) + B(k)u(k).$$

  - El sistema es *controlable en* k_0 si para cualquier $x(k_0)$ existe $k_1 > k_0$ y existe $u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)$ tal que $x(k_1) = 0$.
  - El sistema es *completamente controlable* si lo es en todo k_0.

  La *matriz de controlabilidad* se define también de forma similar al caso continuo:

$$\mathcal{C}(k_0, k_1) = \sum_{i=k_0}^{k_1-1} \Phi(k_0, i+1)B(i)B^T(i)\Phi^T(k_0, i+1), \quad k_1 > k_0,$$

  y se tiene la siguiente condición para la controlabilidad del sistema.

  Condición necesaria y suficiente para la controlabilidad: El sistema es controlable en k_0 si y sólo si $\exists k_1 > k_0$ tal que $\mathcal{C}(k_0, k_1)$ es no singular; en tal caso, introduciendo en el sistema la entrada

$$u(j) = -B^T(j)\Phi^T(k_0, j+1)\mathcal{C}^{-1}(k_0, k_1)x(k_0), \quad j : k_0, \ldots, k_1 - 1,$$

  se transfiere cualquier estado $x(k_0)$ a $x(k_1) = 0$.

5.3 Estabilidad

La estabilidad es una propiedad que se refiere al comportamiento del estado de un sistema cuando se introducen entradas nulas. Es, por lo tanto, una propiedad referida exclusivamente a la ecuación del estado y, de forma genérica, puede decirse que la ecuación es estable si sus soluciones no tienden a crecer indefinidamente cuando $t \to +\infty$.

- **Estabilidad en sistemas lineales continuos**

  Consideremos la ecuación del estado de un sistema lineal continuo con entrada nula:

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad = \quad A(t)x(t).$$

– El sistema es *estable (en el sentido de Lyapunov)* si

$$\forall t_0, \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta(\epsilon, t_0) > 0 \; / \; ||x(t_0)|| \leq \delta(\epsilon, t_0) \Rightarrow ||x(t)|| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

O sea, partiendo de un estado $x(t_0)$ suficientemente próximo a cero, e introduciendo entradas nulas en el sistema, el estado en instantes sucesivos permanece uniformemente acotado.

– El sistema es *asintóticamente estable* si es estable y

$$\forall t_0, \; \exists \rho(t_0) > 0 \; / \; ||x(t_0)|| \leq \rho(t_0) \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} ||x(t)|| = 0.$$

En este caso, si se introducen entradas nulas, el estado del sistema tiende a cero, siempre que se parta de una condición inicial suficientemente próxima a cero.

- **Estabilidad en sistemas lineales discretos**

Las definiciones de estabilidad son totalmente análogas a las del caso continuo. Establecemos ahora estas definiciones en términos de la matriz de transición.

Consideremos la ecuación del estado de un sistema lineal discreto con entrada nula:

$$x(k+1) \;\; = \;\; A(k)x(k),$$

cuya matriz de transición viene dada por $\Phi(k, s) = A(k-1)A(k-2) \cdots A(s), \quad k > s$ (apartado 4.1).

– El sistema es *estable* si la matriz $\Phi(k, k_0)$ está uniformemente acotada; esto es,

$$\forall k_0 \; / \; ||\Phi(k, k_0)|| \leq c, \quad k \geq k_0.$$

– El sistema es *asintóticamente estable* si es estable y

$$\lim_{k \to +\infty} ||\Phi(k, k_0)|| = 0, \quad \forall k_0.$$