

# Tema 1: Notas sobre la teoría general de procesos estocásticos. Procesos gaussianos.

**Francisco de Asís Torres Ruiz**

Departamento de Estadística e I.O.



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Granada, curso 2025/2026

# Definición de proceso estocástico

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .

# Definición de proceso estocástico

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

# Definición de proceso estocástico

## Definición

*Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .*

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ).

# Definición de proceso estocástico

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ).

En este curso trataremos con procesos unidimensionales, o sea, tomarán valores en  $\mathbb{R}$ , si bien muchas de las cuestiones que se abordarán pueden ser generalizadas al caso multidimensional.

# Definición de proceso estocástico

## Definición

*Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .*

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ). Dicho conjunto será denominado **espacio de estados**, que será un espacio medible considerando la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathcal{B}$ ), o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

# Definición de proceso estocástico

## Definición

*Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .*

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ). Dicho conjunto será denominado **espacio de estados**, que será un espacio medible considerando la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathcal{B}$ ), o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

Dado un espacio topológico  $\mathcal{Y}$  dotado de una topología  $\mathcal{T}$ , se llama  $\sigma$ -álgebra de Borel a la  $\sigma$ -álgebra engendrada por los abiertos de la topología.

# Definición de proceso estocástico

## Definición

*Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .*

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ). Dicho conjunto será denominado **espacio de estados**, que será un espacio medible considerando la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathcal{B}$ ), o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

Según que el espacio paramétrico considerado sea discreto o continuo se puede hacer una primera clasificación de procesos estocásticos, diferenciando entre **procesos en tiempo discreto** (habitualmente llamadas cadenas aleatorias) y **procesos en tiempo continuo**, respectivamente. Dentro de cada clase anterior se puede hacer otra clasificación atendiendo al espacio de estados. Así, si las variables del proceso son discretas hablaremos de **proceso discreto**, mientras que si toman valores continuos hablaremos de **proceso continuo**.



# Definición de proceso estocástico

## Definición

*Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .*

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ). Dicho conjunto será denominado **espacio de estados**, que será un espacio medible considerando la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathcal{B}$ ), o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

Según que el espacio paramétrico considerado sea discreto o continuo se puede hacer una primera clasificación de procesos estocásticos, diferenciando entre **procesos en tiempo discreto** (habitualmente llamadas cadenas aleatorias) y **procesos en tiempo continuo**, respectivamente. Dentro de cada clase anterior se puede hacer otra clasificación atendiendo al espacio de estados. Así, si las variables del proceso son discretas hablaremos de **proceso discreto**, mientras que si toman valores continuos hablaremos de **proceso continuo**.

Por otro lado, para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o de  $\mathbb{R}^n$ ) que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^n$ ), podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

# Definición de proceso estocástico

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un **Proceso Estocástico** es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Dicha familia se encuentra indexada por un parámetro  $t$  que varía en un conjunto ordenado de índices  $T$  que se denomina el **espacio paramétrico**. Notaremos al proceso en la forma  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  o, más abreviadamente,  $\{X_t : t \in T\}$ .

En lo que sigue supondremos que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , bien sea un intervalo o un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria que tomará valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^n$ ). Dicho conjunto será denominado **espacio de estados**, que será un espacio medible considerando la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathcal{B}$ ), o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

Según que el espacio paramétrico considerado sea discreto o continuo se puede hacer una primera clasificación de procesos estocásticos, diferenciando entre **procesos en tiempo discreto** (habitualmente llamadas cadenas aleatorias) y **procesos en tiempo continuo**, respectivamente. Dentro de cada clase anterior se puede hacer otra clasificación atendiendo al espacio de estados. Así, si las variables del proceso son discretas hablaremos de **proceso discreto**, mientras que si toman valores continuos hablaremos de **proceso continuo**.

Por otro lado, para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o de  $\mathbb{R}^n$ ) que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^n$ ), podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : \begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}\end{aligned}$$

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \rightarrow X_n(\omega) \end{aligned}$$

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \rightarrow X_n(\omega) \end{aligned}$$

Puesto que  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio medible, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$ . Para ello es necesario construir una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lo cual se resuelve mediante la  $\sigma$ -álgebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , y que llamaremos  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \longrightarrow X_n(\omega) \end{aligned}$$

Puesto que  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio medible, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$ . Para ello es necesario construir una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lo cual se resuelve mediante la  $\sigma$ -álgebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , y que llamaremos  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ .

Un rectángulo de lados  $B_1, \dots, B_n$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es un conjunto de la forma  $\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $B_i \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Si, en particular,  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , diremos que el rectángulo es medible.

Así pues, un rectángulo es un conjunto de sucesiones para las cuales se impone una restricción en  $n$  de sus elementos ( $n$  arbitrario). Se puede demostrar que la clase de rectángulos medibles es una semiálgebra y así se define  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por ella.

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \rightarrow X_n(\omega) \end{aligned}$$

Puesto que  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio medible, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$ . Para ello es necesario construir una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lo cual se resuelve mediante la  $\sigma$ -álgebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , y que llamaremos  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ .

Una vez realizada dicha construcción, el **Teorema de Medibilidad** resuelve la cuestión planteada:



# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \rightarrow X_n(\omega) \end{aligned}$$

Puesto que  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio medible, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$ . Para ello es necesario construir una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lo cual se resuelve mediante la  $\sigma$ -álgebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , y que llamaremos  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ .

Una vez realizada dicha construcción, el **Teorema de Medibilidad** resuelve la cuestión planteada:

## Teorema

$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  es medible  $\Leftrightarrow X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  es medible  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo discreto

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Discreto** a cualquier sucesión de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, o sea,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  donde  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , el proceso proporciona una sucesión de números reales  $\{X_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , sucesión que constituye la **Trayectoria Muestral** del proceso asociada a  $\omega$ .

En este caso el espacio  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es el espacio de las sucesiones de números reales y la aplicación que asocia a cada  $\omega \in \Omega$  con su trayectoria es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow \mathcal{X}(\omega) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad n \rightarrow X_n(\omega)\end{aligned}$$

Puesto que  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio medible, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$ . Para ello es necesario construir una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lo cual se resuelve mediante la  $\sigma$ -álgebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , y que llamaremos  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ .

Una vez realizada dicha construcción, el **Teorema de Medibilidad** resuelve la cuestión planteada:

## Teorema

$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  es medible  $\Leftrightarrow X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  es medible  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

El Teorema de Medibilidad permite establecer una definición *más rigurosa* de Proceso Estocástico en Tiempo Discreto:

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , un proceso estocástico en tiempo discreto es una función medible  $\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ .

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

## Teorema

Sean  $P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  verificando la condición de consistencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n), \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  tal que su restricción a los rectángulos medibles viene dada por  $\hat{P}(\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n)$ .

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

## Teorema

Sean  $P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  verificando la condición de consistencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n), \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  tal que su restricción a los rectángulos medibles viene dada por  $\hat{P}(\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n)$ .

El Teorema de Consistencia tiene una implicación fundamental sobre la distribución del proceso. En efecto,

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

## Teorema

Sean  $P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  verificando la condición de consistencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n), \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  tal que su restricción a los rectángulos medibles viene dada por  $\hat{P}(\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n)$ .

El Teorema de Consistencia tiene una implicación fundamental sobre la distribución del proceso. En efecto,

## Teorema

La distribución del proceso queda unívocamente determinada por las distribuciones finito-dimensionales, o sea, la distribución de  $(X_1, \dots, X_n)^t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .



# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

## Teorema

Sean  $P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  verificando la condición de consistencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n), \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  tal que su restricción a los rectángulos medibles viene dada por  $\hat{P}(\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n)$ .

El Teorema de Consistencia tiene una implicación fundamental sobre la distribución del proceso. En efecto,

## Teorema

La distribución del proceso queda unívocamente determinada por las distribuciones finito-dimensionales, o sea, la distribución de  $(X_1, \dots, X_n)^t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto, para manejar la distribución del proceso es suficiente considerar vectores aleatorios  $n$ -dimensionales (de ahí la importancia de conocer bien los aspectos referentes al cálculo con vectores aleatorios).

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto

La medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  que da origen a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** del proceso, y que viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ , y que se interpreta como la distribución conjunta de las variables que componen el proceso.

Un proceso estocástico en tiempo discreto transforma un espacio de probabilidad en un espacio probabilístico  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \hat{P}_{\mathcal{X}})$ , por lo que el estudio del proceso se reduce al estudio de su distribución de probabilidad.

Ya que  $\hat{P}_{\mathcal{X}}$  es una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ , surge el problema de cómo especificarla sin que sea necesario dar su valor en todos los elementos de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ . Esta cuestión queda resuelta gracias al **Teorema de Consistencia de Kolmogorov**:

## Teorema

Sean  $P_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  verificando la condición de consistencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n), \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$  tal que su restricción a los rectángulos medibles viene dada por  $\hat{P}(\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_n(B_1 \times \cdots \times B_n)$ .

El Teorema de Consistencia tiene una implicación fundamental sobre la distribución del proceso. En efecto,

## Teorema

La distribución del proceso queda unívocamente determinada por las distribuciones finito-dimensionales, o sea, la distribución de  $(X_1, \dots, X_n)^t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto, para manejar la distribución del proceso es suficiente considerar vectores aleatorios  $n$ -dimensionales (de ahí la importancia de conocer bien los aspectos referentes al cálculo con vectores aleatorios).

La distribución puede especificarse también a partir de la distribución de  $X_1$  y de las condicionadas  $X_n | X_1, \dots, X_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Ello es así porque, como es bien sabido,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2|x_1) \cdots f(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2})f(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}).$$



# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : \begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}\end{aligned}$$

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X}: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega): T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X}: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega): T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

Un rectángulo en  $\mathbb{R}^T$  es un conjunto de la forma  $\{f \in \mathbb{R}^T : f(t_i) \in B_i, i = 1, \dots, n\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $t_i \in T$  y  $B_i \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Si, en particular,  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , diremos que el rectángulo es medible.

Así se define  $\mathcal{B}^T$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de rectángulos medibles.

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X}: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega): T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

Un rectángulo en  $\mathbb{R}^T$  es un conjunto de la forma  $\{f \in \mathbb{R}^T : f(t_i) \in B_i, i = 1, \dots, n\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $t_i \in T$  y  $B_i \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Si, en particular,  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , diremos que el rectángulo es medible.

Así se define  $\mathcal{B}^T$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de rectángulos medibles.

Una propiedad importante de  $\mathcal{B}^T$  es que puede ser caracterizada en términos de sucesiones. En efecto, se verifica que si  $B \in \mathcal{B}^T$  entonces

$$B \in \mathcal{B}^T \Leftrightarrow \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T, \exists D \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} : B = \{f \in \mathbb{R}^T : \{f(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in D\}$$



# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

Una vez realizada dicha construcción podemos considerar la versión continua del **Teorema de Medibilidad**:

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

Una vez realizada dicha construcción podemos considerar la versión continua del **Teorema de Medibilidad**:

## Teorema

$$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T) \text{ es medible} \Leftrightarrow X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ es medible } \forall t \in T$$

# Definición de proceso estocástico en tiempo continuo

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y un intervalo  $T \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **Proceso Estocástico en Tiempo Continuo** con espacio paramétrico  $T$  a una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, que notaremos  $\{X_t : t \in T\}$ .

Para cada valor  $\omega \in \Omega$ , podemos considerar el conjunto  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ , que será un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denominaremos la **trayectoria muestral asociada a  $\omega$** . De esta forma, si notamos por  $\mathbb{R}^T$  al conjunto de funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ , podemos considerar una aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^T$  que a cada valor  $\omega$  le asigna su trayectoria; esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^T \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{X}(\omega) : T \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longrightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, surge la cuestión de estudiar la medibilidad de  $\mathcal{X}$  para lo cual hay que considerar una  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^T$ .

Una vez realizada dicha construcción podemos considerar la versión continua del **Teorema de Medibilidad**:

## Teorema

$$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T) \text{ es medible} \Leftrightarrow X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ es medible } \forall t \in T$$

A partir de este teorema es posible dar una definición alternativa de Proceso Estocástico en Tiempo Continuo:

## Definición

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y  $T \subseteq \mathbb{R}$ , un proceso estocástico en tiempo continuo es una función medible  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ .

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo continuo

Al igual que ocurría en el caso discreto, la medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}^{\mathbb{T}})$  que da origen a la **distribución de probabilidad** del proceso la cual viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{T}}$ .

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo continuo

Al igual que ocurría en el caso discreto, la medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}^{\mathbb{T}})$  que da origen a la **distribución de probabilidad** del proceso la cual viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{T}}$ .

Como en el caso discreto, la manejabilidad de la distribución del proceso se ve favorecida por el **Teorema de Consistencia de Kolmogorov** en su versión continua:

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo continuo

Al igual que ocurría en el caso discreto, la medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$  que da origen a la **distribución de probabilidad** del proceso la cual viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Como en el caso discreto, la manejabilidad de la distribución del proceso se ve favorecida por el **Teorema de Consistencia de Kolmogorov** en su versión continua:

## Teorema

*Supongamos que  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$ ,  $P_{t_1, \dots, t_n}$  son medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$  que verifican la condición de consistencia*

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times \mathbb{R} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = P_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$ ;  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ .

*En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$  tal que*

$$\hat{P}(\{f \in \mathbb{R}^T : f(t_i) \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n), \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_n \in T; \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$$

*o sea,  $\hat{P}$  viene determinada por su valor en la clase de rectángulos medibles.*

# Distribución de un proceso estocástico en tiempo continuo

Al igual que ocurría en el caso discreto, la medibilidad de  $\mathcal{X}$  permite definir una medida de probabilidad en  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$  que da origen a la **distribución de probabilidad** del proceso la cual viene dada por  $\hat{P}_{\mathcal{X}}(B) = P(\mathcal{X}^{-1}(B))$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Como en el caso discreto, la manejabilidad de la distribución del proceso se ve favorecida por el **Teorema de Consistencia de Kolmogorov** en su versión continua:

## Teorema

*Supongamos que  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$ ,  $P_{t_1, \dots, t_n}$  son medidas de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$  que verifican la condición de consistencia*

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times \mathbb{R} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = P_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $\forall t_1 < \dots < t_n \in T$ ;  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ .

*En estas condiciones existe una única medida de probabilidad  $\hat{P}$  sobre  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$  tal que*

$$\hat{P}(\{f \in \mathbb{R}^T : f(t_i) \in B_i, i = 1, \dots, n\}) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n), \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_n \in T; \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$$

*o sea,  $\hat{P}$  viene determinada por su valor en la clase de rectángulos medibles.*

De nuevo, como en el caso discreto, el Teorema de Consistencia conduce a concluir que la distribución del proceso queda únivocamente determinada por las distribuciones finito-dimensionales, o sea, la distribución de  $(X_1, \dots, X_n)^t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son *estocásticamente equivalentes en sentido amplio* si sus distribuciones coinciden.



# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias.

Dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , se dicen equivalentes si  $P(X \neq Y) = 0$ , o sea,

$$P(\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0$$

es decir, difieren en un conjunto de media nula.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

La relación entre ambas definiciones es que si dos procesos son estocásticamente equivalentes, lo son en sentido amplio, pero el recíproco no es cierto.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

La relación entre ambas definiciones es que si dos procesos son estocásticamente equivalentes, lo son en sentido amplio, pero el recíproco no es cierto.

El recíproco no es cierto ni tan siquiera para variables aleatorias. Por ejemplo, sean  $X$  e  $Y$  variables independientes distribuidas según una Bernoulli de parámetro  $p = 1/2$ . Entonces,

$$P(X = Y) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

por lo que, si bien sus distribuciones coinciden (son la misma), no son estocásticamente equivalentes ( $P(X = Y) \neq 1$ ).

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

La relación entre ambas definiciones es que si dos procesos son estocásticamente equivalentes, lo son en sentido amplio, pero el recíproco no es cierto.

Asimismo, es posible establecer una relación de equivalencia entre procesos atendiendo a las trayectorias. Así se tiene

## Definición

Dos procesos  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **indistinguibles** si  $A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \in \mathcal{A}$  y  $P(A) = 1$ , es decir, las trayectorias de ambos procesos coinciden.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

La relación entre ambas definiciones es que si dos procesos son estocásticamente equivalentes, lo son en sentido amplio, pero el recíproco no es cierto.

Asimismo, es posible establecer una relación de equivalencia entre procesos atendiendo a las trayectorias. Así se tiene

## Definición

Los procesos  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **indistinguibles** si  $A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \in \mathcal{A}$  y  $P(A) = 1$ , es decir, las trayectorias de ambos procesos coinciden.

Es fácil comprobar que dos procesos indistinguibles son estocásticamente equivalentes, aunque el recíproco no es cierto.



# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

**Definición** Supongamos que los procesos son indistinguibles y sea  $t_0 \in T$ . Entonces

$$\{X_t : t \in T\} \text{ coinciden} \quad A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \subseteq B = \{\omega : X_{t_0}(\omega) = Y_{t_0}(\omega)\}$$

Puesto que  $P(A) = 1$ , entonces  $P(B) = 1$ . Al ser  $t_0$  arbitrario, se concluye.

que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

La siguiente definición de equivalencia entre procesos es algo más restrictiva y se basa en la noción de equivalencia entre variables aleatorias. Así se tiene

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes** si  $\forall t \in T$  se verifica  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que los procesos son versiones uno del otro.

La relación entre ambas definiciones es que si dos procesos son estocásticamente equivalentes, lo son en sentido amplio, pero el recíproco no es cierto.

Asimismo, es posible establecer una relación de equivalencia entre procesos atendiendo a las trayectorias. Así se tiene

## Definición

Los procesos  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **indistinguibles** si  $A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \in \mathcal{A}$  y  $P(A) = 1$ , es decir, las trayectorias de ambos procesos coinciden.

Es fácil comprobar que dos procesos indistinguibles son estocásticamente equivalentes, aunque el recíproco no es cierto.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

**Definición** Supongamos que los procesos son indistinguibles y sea  $t_0 \in T$ . Entonces

$\{X_t : t$   
coinciden

$$A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \subseteq B = \{\omega : X_{t_0}(\omega) = Y_{t_0}(\omega)\}$$

uciones

Puesto que  $P(A) = 1$ , entonces  $P(B) = 1$ . Al ser  $t_0$  arbitrario, se concluye.

que dos procesos son estocásticamente equivalentes en sentido amplio si verifican

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue (longitud del intervalo). Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0, \forall \omega \in [0, 1]$  y

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \neq t \\ 1 & \omega = t \end{cases}$$

Sea  $t \in T$  fijo y arbitrario. Entonces  $P(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = P(\omega : \omega = t) = P(\{\omega\}) = 0$ , por lo que  $P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1$ , y como  $t$  es arbitrario, entonces  $X(t)$  e  $Y(t)$  son estocásticamente equivalentes. En cuanto a las trayectorias, las de  $X(t)$  son constantemente igual a cero, mientras que las de  $Y(t)$  tienen un salto en  $t = \omega$ , por lo que

$$P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T) = P(\emptyset) = 0$$

y con ello los procesos no son indistinguibles.

tiene

## Definición

*Dos procesos  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **indistinguibles** si  $A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \in \mathcal{A}$  y  $P(A) = 1$ , es decir, las trayectorias de ambos procesos coinciden.*

Es fácil comprobar que dos procesos indistinguibles son estocásticamente equivalentes, aunque el recíproco no es cierto.

# Procesos equivalentes

Sean  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  dos procesos estocásticos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **estocásticamente equivalentes en sentido amplio** si sus distribuciones coinciden.

Puesto que las distribuciones vienen determinadas por las distribuciones finito dimensionales, podemos decir que dos procesos son estocásticamente equivalente en sentido amplio si verifican

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n], \forall t_1, \dots, t_n \in T; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}.$$

El porqué de esta cuestión radica en lo siguiente:

- En la definición de procesos estocásticamente equivalentes,  $\forall t \in T$  el conjunto  $\Lambda_t = \{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$  es de medida nula.
- Por otro lado, en la definición de procesos indistinguibles el conjunto  $\Lambda = \{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega), \forall t \in T\}$  es de medida nula.

Es evidente que  $\Lambda = \bigcup_{t \in T} \Lambda_t$ . Por tanto, si  $\Lambda$  es de medida nula (procesos indistinguibles), todos los conjuntos  $\Lambda_t$  lo son también (procesos estocásticamente indistinguibles). Pero como la unión no es numerable, el hecho de que los  $\Lambda_t$  sean de medida nula no implica que  $\Lambda$  lo sea (lo cual no ocurriría en el caso de procesos en tiempo discreto). Ello da lugar a la introducción del concepto de proceso separable.

Asimismo, es posible establecer una relación de equivalencia entre procesos atendiendo a las trayectorias. Así se tiene

## Definición

Dos procesos  $\{X_t : t \in T\}$  y  $\{Y_t : t \in T\}$  son **indistinguibles** si  $A = \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T\} \in \mathcal{A}$  y  $P(A) = 1$ , es decir, las trayectorias de ambos procesos coinciden.

Es fácil comprobar que dos procesos indistinguibles son estocásticamente equivalentes, aunque el recíproco no es cierto.

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Recordemos que  $\in \mathcal{B}^T \Leftrightarrow \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T, \exists D \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} : B = \{f \in \mathcal{R}^T : \{f(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in D\}$

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:



# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:

$$\hat{P}_X(A) = P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\Omega) = 1$$

mientras que

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:

$$\hat{P}_X(A) = P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{mientras que } \hat{P}_Y(A) = P(\omega : Y_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\emptyset) = 0.$$

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:

$$\hat{P}_X(A) = P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{mientras que } \hat{P}_Y(A) = P(\omega : Y_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\emptyset) = 0.$$

Este resultado puede parecer contradictorio ya que  $\hat{P}_X = \hat{P}_Y$ . Pero no es así ya que lo que ocurre es que  $A$  no es un conjunto medible en  $\mathcal{B}^T$  y, en consecuencia, ni  $\hat{P}_X$  ni  $\hat{P}_Y$  están determinadas sobre él.

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:

$$\hat{P}_X(A) = P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{mientras que } \hat{P}_Y(A) = P(\omega : Y_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\emptyset) = 0.$$

Este resultado puede parecer contradictorio ya que  $\hat{P}_X = \hat{P}_Y$ . Pero no es así ya que lo que ocurre es que  $A$  no es un conjunto medible en  $\mathcal{B}^T$  y, en consecuencia, ni  $\hat{P}_X$  ni  $\hat{P}_Y$  están determinadas sobre él.

Podría pensarse en ampliar la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}^T$  incluyendo conjuntos de interés que no fueran medibles. Esto no es solución ya que el Teorema de Consistencia asegura la distribución de probabilidad, a partir de las distribuciones finito-dimensionales, sólo a  $\mathcal{B}^T$  y no a una  $\sigma$ -álgebra más grande.

# Procesos separables

Cuando se trabaja con procesos en tiempo continuo es usual plantearse conocer la probabilidad de que las trayectorias muestrales verifiquen determinadas propiedades.

Por ejemplo, podemos estar interesados en saber la probabilidad del suceso formado por los valores  $\omega \in \Omega$  para los cuales existe un punto  $t \in T$  tal que  $X_t = 0$ . Este conjunto puede expresarse como la imagen inversa por  $\mathcal{X}$  del conjunto  $\{f \in \mathbb{R}^T : \exists t \in T, X_t = 0\}$ , por lo que podríamos calcular la probabilidad de tal *posible* suceso. No obstante, para ello ese conjunto debería ser medible, cuestión que no está asegurada. En efecto, los rectángulos medibles de  $\mathcal{B}^T$  se obtienen imponiendo restricciones en un conjunto numerable de puntos de  $T$ , cuestión que no podemos asegurar en el caso expuesto. En consecuencia no podemos, a priori, hablar de la probabilidad asociada a tal conjunto.

Retomemos el ejemplo visto anteriormente:

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1]}$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideremos  $T = [0, 1]$  y definimos,  $\forall t \in [0, 1]$  los procesos  $X_t(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [0, 1]$  y  $Y_t(\omega) = 0$  si  $\omega \neq t$  y  $Y_t(\omega) = 1$  si  $\omega = t$ .

Sabemos que ambos procesos son estocásticamente equivalentes y, por tanto equivalentes en sentido amplio. Así, sus distribuciones son iguales, es decir  $\hat{P}_X(B) = \hat{P}_Y(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}^T$ .

Consideremos el conjunto  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t) < 1, \forall t \in T\}$  y vamos a *medirlo* con ambas distribuciones (debería obtenerse el mismo resultado). Ahora bien:

$$\hat{P}_X(A) = P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{mientras que } \hat{P}_Y(A) = P(\omega : Y_t(\omega) < 1, \forall t \in T) = P(\emptyset) = 0.$$

Este resultado puede parecer contradictorio ya que  $\hat{P}_X = \hat{P}_Y$ . Pero no es así ya que lo que ocurre es que  $A$  no es un conjunto medible en  $\mathcal{B}^T$  y, en consecuencia, ni  $\hat{P}_X$  ni  $\hat{P}_Y$  están determinadas sobre él.

Podría pensarse en ampliar la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}^T$  incluyendo conjuntos de interés que no fueran medibles. Esto no es solución ya que el Teorema de Consistencia asegura la distribución de probabilidad, a partir de las distribuciones finito-dimensionales, sólo a  $\mathcal{B}^T$  y no a una  $\sigma$ -álgebra más grande.

La solución se obtiene introduciendo el concepto de **separabilidad** debido a Doob.

# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

La idea de separabilidad es bastante general. Por ejemplo, recordemos que un espacio topológico es un espacio separable si admite un subconjunto denso y numerable.

# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

## Definición

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  con espacio paramétrico  $T \subseteq \mathbb{R}$  que sea separable, es decir existe  $S = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$  denso y numerable. Entonces, el proceso es **separable** si existe  $N \subseteq \Omega$  de medida nula tal que para cualquier conjunto cerrado  $C \subseteq \mathbb{R}$  y cualquier abierto  $J$  de  $T$  se verifica que los conjuntos  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t_n \in J \cap S\}$  y  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t \in J\}$  difieren en un subconjunto incluido en  $N$ .



# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

## Definición

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  con espacio paramétrico  $T \subseteq \mathbb{R}$  que sea separable, es decir existe  $S = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$  denso y numerable. Entonces, el proceso es **separable** si existe  $N \subseteq \Omega$  de medida nula tal que para cualquier conjunto cerrado  $C \subseteq \mathbb{R}$  y cualquier abierto  $J$  de  $T$  se verifica que los conjuntos  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t_n \in J \cap S\}$  y  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t \in J\}$  difieren en un subconjunto incluido en  $N$ .

## Comentario

- Al conjunto  $S$  se le llama **separante** o conjunto de separabilidad.
- De forma intuitiva, la definición implica que no hay diferencia en imponer restricciones (mediante conjuntos cerrados) en puntos de un abierto de  $T$  o imponerlas en subconjuntos numerables de dicho intervalo ya que la diferencia es un subconjunto de un conjunto de medida nula.

# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

## Definición

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  con espacio paramétrico  $T \subseteq \mathbb{R}$  que sea separable, es decir existe  $S = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$  denso y numerable. Entonces, el proceso es **separable** si existe  $N \subseteq \Omega$  de medida nula tal que para cualquier conjunto cerrado  $C \subsetneq \mathbb{R}$  y cualquier abierto  $J$  de  $T$  se verifica que los conjuntos  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t_n \in J \cap S\}$  y  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t \in J\}$  difieren en un subconjunto incluido en  $N$ .

## Comentario

- Al conjunto  $S$  se le llama **separante** o conjunto de separabilidad.
- De forma intuitiva, la definición implica que no hay diferencia en imponer restricciones (mediante conjuntos cerrados) en puntos de un abierto de  $T$  o imponerlas en subconjuntos numerables de dicho intervalo ya que la diferencia es un subconjunto de un conjunto de medida nula.

La idea base que subyace en la separabilidad es que el manejo del proceso se puede hacer a partir del conocimiento que se tenga en un conjunto denso y numerable, por lo que es posible redefinir este concepto en términos de sucesiones. Así se tiene:

# Procesos separables

A grandes rasgos, un proceso es separable si todas sus propiedades probabilísticas están determinadas por los valores del proceso en conjuntos numerables de  $T$ .

## Definición

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  con espacio paramétrico  $T \subseteq \mathbb{R}$  que sea separable, es decir existe  $S = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$  denso y numerable. Entonces, el proceso es **separable** si existe  $N \subseteq \Omega$  de medida nula tal que para cualquier conjunto cerrado  $C \subsetneq \mathbb{R}$  y cualquier abierto  $J$  de  $T$  se verifica que los conjuntos  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t_n \in J \cap S\}$  y  $\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \in C, \forall t \in J\}$  difieren en un subconjunto incluido en  $N$ .

## Comentario

- Al conjunto  $S$  se le llama **separante** o conjunto de separabilidad.
- De forma intuitiva, la definición implica que no hay diferencia en imponer restricciones (mediante conjuntos cerrados) en puntos de un abierto de  $T$  o imponerlas en subconjuntos numerables de dicho intervalo ya que la diferencia es un subconjunto de un conjunto de medida nula.

La idea base que subyace en la separabilidad es que el manejo del proceso se puede hacer a partir del conocimiento que se tenga en un conjunto denso y numerable, por lo que es posible redefinir este concepto en términos de sucesiones. Así se tiene:

## Definición

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  con espacio paramétrico  $T$  separable, es decir existe  $S = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$  denso y numerable. Entonces, el proceso es **separable** si existe  $N \subseteq \Omega$  de medida nula tal que

$$\forall \omega \notin N, \forall t \in T, \exists \{t_{nk}\} \subseteq S : t_{nk} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t \text{ y } X_{t_{nk}}(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X_t(\omega)$$

o sea, casi todas las trayectorias del proceso cumplen que su valor en cualquier punto de  $T$  puede aproximarse por los valores de dicha trayectoria en puntos de  $S$ .

# Procesos separables

La importancia de este tipo de procesos radica en el Teorema de Doob que permite, en la mayor parte de los casos, trabajar con procesos separables.

# Procesos separables

La importancia de este tipo de procesos radica en el Teorema de Doob que permite, en la mayor parte de los casos, trabajar con procesos separables.

## Teorema

*Todo proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  en tiempo continuo, real valuado y definido sobre un espacio de probabilidad completo admite una versión separable.*

# Procesos separables

La importancia de este tipo de procesos radica en el Teorema de Doob que permite, en la mayor parte de los casos, trabajar con procesos separables.

## Teorema

*Todo proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  en tiempo continuo, real valuado y definido sobre un espacio de probabilidad completo admite una versión separable.*

Notemos la importancia de la hipótesis de que el espacio de probabilidad sea completo.

# Procesos separables

La importancia de este tipo de procesos radica en el Teorema de Doob que permite, en la mayor parte de los casos, trabajar con procesos separables.

## Teorema

*Todo proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  en tiempo continuo, real valuado y definido sobre un espacio de probabilidad completo admite una versión separable.*

Notemos la importancia de la hipótesis de que el espacio de probabilidad sea completo.

Un espacio de probabilidad es completo si son medibles los subconjuntos de los conjuntos de medida nula.

# Procesos separables

La importancia de este tipo de procesos radica en el Teorema de Doob que permite, en la mayor parte de los casos, trabajar con procesos separables.

## Teorema

*Todo proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  en tiempo continuo, real valuado y definido sobre un espacio de probabilidad completo admite una versión separable.*

Notemos la importancia de la hipótesis de que el espacio de probabilidad sea completo. En efecto, recordemos que la definición de proceso separable implica que no hay diferencia en imponer restricciones (mediante conjuntos cerrados) en puntos de un abierto de  $T$  o imponerlas en subconjuntos numerables de dicho intervalo ya que la diferencia es un subconjunto de un conjunto de medida nula y, por tanto, interesa que sea medible tal diferencia (y en consecuencia sea de medida nula).



## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} X_{t_0}$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{P}(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución común a todas ellas, que vamos a suponer continua. Definimos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $\forall t \geq 0$ , siendo  $I_A$  la función indicadora en el conjunto  $A$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{P}(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución común a todas ellas, que vamos a suponer continua. Definimos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $\forall t \geq 0$ , siendo  $I_A$  la función indicadora en el conjunto  $A$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución. Recordemos que la desigualdad de Markov dice:  $P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|^r]}{a^r}$ . Nos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $t \geq 0$ , donde  $I_A$  es la variable indicadora de la sucesión de eventos  $A$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución. Recordemos que la desigualdad de Markov dice:  $P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|^r]}{a^r}$ . Nos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un Si  $h > 0$  entonces  $X_{t+h} \geq X_t$  por lo que

col

$$E[|X_{t+h} - X_t|] = E[X_{t+h}] - E[X_t] = \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t+h) - \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t) = N(F(t+h) - F(t)).$$

Ej

Se.  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$  y sea  $F$  la función de distribución común a todas ellas, que vamos a suponer continua. Definimos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $\forall t \geq 0$ , siendo  $I_A$  la función indicadora en el conjunto  $A$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un Si  $h > 0$  entonces  $X_{t+h} \geq X_t$  por lo que

col

$$E[|X_{t+h} - X_t|] = E[X_{t+h}] - E[X_t] = \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t+h) - \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t) = N(F(t+h) - F(t)).$$

Ej

Se. Si  $h < 0$  entonces  $X(t+h) \leq X(t)$  por lo que

F

$X_t$

$$E[|X_{t+h} - X_t|] = E[X_t] - E[X_{t+h}] = N(F(t) - F(t+h)).$$

Ob

col. andas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad en más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un Si  $h > 0$  entonces  $X_{t+h} \geq X_t$  por lo que

col

$$E[|X_{t+h} - X_t|] = E[X_{t+h}] - E[X_t] = \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t+h) - \sum_{i=1}^N P(T_i \leq t) = N(F(t+h) - F(t)).$$

Ej

Se. Si  $h < 0$  entonces  $X(t+h) \leq X(t)$  por lo que

F

$X_t$

$$E[|X_{t+h} - X_t|] = E[X_t] - E[X_{t+h}] = N(F(t) - F(t+h)).$$

Ob

col. como ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad en más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto  $P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{N|F(t+h) - F(t)|}{\varepsilon}$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta que  $F$  es continua, haciendo tender  $h$  a cero se tiene que el proceso es continuo en probabilidad para todo  $t \in T$ .



# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución común a todas ellas, que vamos a suponer continua. Definimos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $\forall t \geq 0$ , siendo  $I_A$  la función indicadora en el conjunto  $A$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto  $P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{N|F(t+h) - F(t)|}{\varepsilon}$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta que  $F$  es continua, haciendo tender  $h$  a cero se tiene que el proceso es continuo en probabilidad para todo  $t \in T$ .

La continuidad en probabilidad puede caracterizarse en el siguiente sentido:

### Teorema

Sea  $\{X(t) : t \in T\}$  un proceso estocástico con valores en  $\mathbb{R}$ , siendo  $T \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto. Una condición necesaria y suficiente para que sea continuo en probabilidad sobre  $T$  es que

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} P\{|X(t) - X(s)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad estocástica o en probabilidad

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se dice continuo en probabilidad (o estocásticamente continuo) en  $t_0 \in T$  si  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{P}(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = 0$ , o sea,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{\mathcal{P}} X_{t_0}$ .

### Ejemplo

Sean  $T_1, \dots, T_N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y sea  $F$  la función de distribución común a todas ellas, que vamos a suponer continua. Definimos el proceso dado por  $X_t = \sum_{i=1}^N I_{[T_i \leq t]}$ ,  $\forall t \geq 0$ , siendo  $I_A$  la función indicadora en el conjunto  $A$ .

Observemos que si  $s \leq t$  entonces  $X_s \leq X_t$  por lo que las trayectorias son no decrecientes y además no son continuas ya que crecen a saltos de longitud uno. Sin embargo el proceso es continuo en probabilidad sin más que aplicar la desigualdad de Markov a los incrementos  $X_{t+h} - X_t$ . Así, para  $a = \varepsilon$ ,  $r = 1$  y  $\forall \varepsilon > 0$  se verifica

$$\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|]}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto  $\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{N[F(t+h) - F(t)]}{\varepsilon}$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta que  $F$  es continua, haciendo tender  $h$  a cero se tiene que el proceso es continuo en probabilidad para todo  $t \in T$ .

## Continuidad en media $r$ -ésima

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , es continuo en media  $r$ -ésima en  $t_0 \in T$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}|X_t - X_{t_0}|^r = 0$ , o sea  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{m.r.} X_{t_0}$ . El caso  $r = 2$  se conoce como continuidad en media cuadrática.

# Continuidad de procesos estocásticos

En el ejemplo anterior hemos visto que un proceso puede ser continuo en probabilidad siendo todas sus trayectorias discontinuas. Surgen así otros conceptos de continuidad.

# Continuidad de procesos estocásticos

En el ejemplo anterior hemos visto que un proceso puede ser continuo en probabilidad siendo todas sus trayectorias discontinuas. Surgen así otros conceptos de continuidad.

## Continuidad casi segura

### Definición

*Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo casi seguro en  $t_0 \in T$  si el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula.*

# Continuidad de procesos estocásticos

En el ejemplo anterior hemos visto que un proceso puede ser continuo en probabilidad siendo todas sus trayectorias discontinuas. Surgen así otros conceptos de continuidad.

## Continuidad casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo casi seguro en  $t_0 \in T$  si el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula.

### Comentario

Si llamamos  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f \text{ es discontinua en } t_0\}$ , la definición dada puede expresarse como

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathcal{X}}(A) &= P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t_0) = \\ &= P\left(\left\{\omega : \lim_{t \rightarrow t_0} |X_t(\omega) - X_{t_0}(\omega)| \neq 0\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

# Continuidad de procesos estocásticos

En el ejemplo anterior hemos visto que un proceso puede ser continuo en probabilidad siendo todas sus trayectorias discontinuas. Surgen así otros conceptos de continuidad.

## Continuidad casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo casi seguro en  $t_0 \in T$  si el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula.

### Comentario

Si llamamos  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f \text{ es discontinua en } t_0\}$ , la definición dada puede expresarse como

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathcal{X}}(A) &= P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t_0) = \\ &= P\left(\left\{\omega : \lim_{t \rightarrow t_0} |X_t(\omega) - X_{t_0}(\omega)| \neq 0\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

### Comentario

La continuidad casi seguro en  $t_0 \in T$  significa que si consideramos  $N_{t_0} = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t_0\}$  entonces  $P(N_{t_0}) = 0$ , o sea, el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula. Por otro lado, el complementario de  $N_{t_0}$ , podría no ser medible, y por ello se exige la separabilidad.

# Continuidad de procesos estocásticos

En el ejemplo anterior hemos visto que un proceso puede ser continuo en probabilidad siendo todas sus trayectorias discontinuas. Surgen así otros conceptos de continuidad.

## Continuidad casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo casi seguro en  $t_0 \in T$  si el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula.

### Comentario

Si llamamos  $A = \{f \in \mathbb{R}^T : f \text{ es discontinua en } t_0\}$ , la definición dada puede expresarse como

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathcal{X}}(A) &= P(\mathcal{X}^{-1}(A)) = P(\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A) = P(\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t_0) = \\ &= P\left(\left\{\omega : \lim_{t \rightarrow t_0} |X_t(\omega) - X_{t_0}(\omega)| \neq 0\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

### Comentario

La continuidad casi seguro en  $t_0 \in T$  significa que si consideramos  $N_{t_0} = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t_0\}$  entonces  $P(N_{t_0}) = 0$ , o sea, el conjunto de trayectorias discontinuas en  $t_0$  es de medida nula. Por otro lado, el complementario de  $N_{t_0}$ , podría no ser medible, y por ello se exige la separabilidad.

### Comentario

Si  $P(N_{t_0}) = 0$  se dice que  $t_0$  es un punto de continuidad casi seguro, mientras que si  $P(N_{t_0}) > 0$  se dice que es un punto de discontinuidad fijo.

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

*Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).*



## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad. Un conjunto  $N \in \mathcal{A}$  es nulo si  $P(N) = 0$ . Un conjunto  $B \subseteq \Omega$  es *negligible* si existe un conjunto nulo  $N$  tal que  $B \subseteq N$ . De esta forma, un espacio completo es aquel en el que todos los conjuntos *negligibles* son nulos, o sea, contiene a todos los subconjuntos de un conjunto de medida nula.

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, 1]$  y  $\mathcal{P}$  la medida de Lebesgue. Sea  $T = [0, 1]$  y definimos el proceso  $\{X_t : t \in T\}$  dado por  $X_t(\omega) = 0$  si  $\omega > t$  y  $X_t(\omega) = 1$  si  $\omega \leq t$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, 1]$  y  $\mathcal{P}$  la medida de Lebesgue. Sea  $T = [0, 1]$  y definimos el proceso  $\{X_t : t \in T\}$  dado por  $X_t(\omega) = 0$  si  $\omega > t$  y  $X_t(\omega) = 1$  si  $\omega \leq t$ .

Dados  $s_1, s_2 < 1$ ,  $\Gamma = (s_1, s_2) \subseteq T$  y  $\mathbb{Q}$  el conjunto de los números racionales se verifica

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0, \forall t \in \Gamma\} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0, \forall t \in \Gamma \cap \mathbb{Q}\} = [s_2, 1]$$

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 1, \forall t \in \Gamma\} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 1, \forall t \in \Gamma \cap \mathbb{Q}\} = [0, s_1]$$

por lo que el proceso es separable con conjunto de separabilidad  $\mathbb{Q}$ , siendo  $N = \emptyset$ .

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, 1]$  y  $\mathcal{P}$  la medida de Lebesgue. Sea  $T = [0, 1]$  y definimos el proceso  $\{X_t : t \in T\}$  dado por  $X_t(\omega) = 0$  si  $\omega > t$  y  $X_t(\omega) = 1$  si  $\omega \leq t$ .

Dados  $s_1, s_2 < 1$ ,  $\Gamma = (s_1, s_2) \subseteq T$  y  $\mathbb{Q}$  el conjunto de los números racionales se verifica

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0, \forall t \in \Gamma\} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0, \forall t \in \Gamma \cap \mathbb{Q}\} = [s_2, 1]$$

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 1, \forall t \in \Gamma\} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 1, \forall t \in \Gamma \cap \mathbb{Q}\} = [0, s_1]$$

por lo que el proceso es separable con conjunto de separabilidad  $\mathbb{Q}$ , siendo  $N = \emptyset$ .

Por otro lado,  $\forall t \in T$  se verifica  $N_t = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua en } t\} = \{t\}$  y así  $P(N_t) = 0$ . Por tanto el proceso es continuo casi seguro en  $t$ . Al ser un punto arbitrario, el proceso lo es en  $T$ . Además,  $B = P(\cup_{t \in T} N_t) = \Omega$  por lo que  $P(B) = 1$  y el proceso no es continuo muestral.

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

### Comentario

Si un proceso es continuo muestral casi seguro en  $T$ , entonces lo es casi seguro, lo cual implica además que es continuo en probabilidad en  $T$ . Asimismo, si es continuo en media  $r$ -ésima, es continuo en probabilidad.

# Continuidad de procesos estocásticos

## Continuidad muestral casi segura

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  real valuado, definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  y separable se dice continuo muestral casi seguro (o que tiene trayectorias continuas casi seguro) si el conjunto de trayectorias discontinuas es negligible (despreciable).

### Comentario

Si definimos  $N = \{\omega : X_t(\omega) \text{ es discontinua}\}$  entonces  $N^c = \bigcap_{t \in T} N_t^c$ , de donde  $N = \bigcup_{t \in T} N_t$ . Por lo tanto la continuidad casi seguro en  $T$  no equivale a la continuidad muestral casi segura ya que aunque los conjuntos  $N_t$  sean de medida nula para todo  $t$  de  $T$ , la unión no numerable de ellos no tiene por qué serlo. En ese sentido exigimos la separabilidad en la definición de continuidad muestral casi seguro.

### Comentario

Si un proceso es continuo muestral casi seguro en  $T$ , entonces lo es casi seguro, lo cual implica además que es continuo en probabilidad en  $T$ . Asimismo, si es continuo en media  $r$ -ésima, es continuo en probabilidad.

### Comentario

La continuidad muestral no es fácilmente verificable en términos de las distribuciones finito-dimensionales. El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para ello:

### Teorema

**Criterio de continuidad de Kolmogorov.** Sea  $\{X(t) : t \in T\}$  un proceso estocástico separable, real valuado y  $T$  un intervalo compacto. Si existen constantes  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $C > 0$ , tales que  $E|X_{t+h} - X_t|^\alpha \leq Ch^{1+\beta}$ , entonces el proceso es continuo muestral casi seguro.

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:



# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

• **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t], \forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))], \forall s, t \in T$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t], \forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))], \forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t], \forall t \in T$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t], \forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))], \forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t], \forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)], \forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

- ❶ **Función de cumulantes:**  $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

- ❶ **Función de cumulantes:**  $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$ .
- ❷ **Funciones momentos de orden  $k$ :**  $m_X^k(t) = E[X_t^k]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

- ❶ **Función de cumulantes:**  $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$ .
- ❷ **Funciones momentos de orden  $k$ :**  $m_X^k(t) = E[X_t^k]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .
- ❸ **Funciones percentiles de orden  $\alpha$ :**  $P_X^\alpha(t) = \text{percentil de orden } \alpha \text{ de } X_t$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .



# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

- ❶ **Función de cumulantes:**  $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$ .
- ❷ **Funciones momentos de orden  $k$ :**  $m_X^k(t) = E[X_t^k]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .
- ❸ **Funciones percentiles de orden  $\alpha$ :**  $P_X^\alpha(t) = \text{percentil de orden } \alpha \text{ de } X_t$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .
- ❹ **Función moda:**  $M_X^\alpha(t) = \text{Moda de } X_t$ ,  $\forall t \in T$ .

# Características asociadas a un proceso

Sea  $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$  un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Como sabemos, para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria y es planteable el cálculo de sus principales características. Al variar  $t$  en el espacio paramétrico, dichas características darán origen a determinadas funciones temporales. Las funciones más usuales son la función media, la función covarianza y la función característica:

- ❶ **Función Media:**  $m_X(t) = E[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❷ **Función Covarianza:**  $C_X(s, t) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ ,  $\forall s, t \in T$ .
- ❸ **Función Varianza:**  $V_X(t) = \text{Var}[X_t]$ ,  $\forall t \in T$ .
- ❹ **Función Característica:**  $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X_t)]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

No obstante, es obvio que se pueden definir toda una serie de funciones, cada una de ellas referida a una característica concreta. Así tenemos:

- ❶ **Función de cumulantes:**  $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$ .
- ❷ **Funciones momentos de orden  $k$ :**  $m_X^k(t) = E[X_t^k]$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .
- ❸ **Funciones percentiles de orden  $\alpha$ :**  $P_X^\alpha(t) = \text{percentil de orden } \alpha \text{ de } X_t$ ,  $\forall t \in T$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .
- ❹ **Función moda:**  $M_X^\alpha(t) = \text{Moda de } X_t$ ,  $\forall t \in T$ .

así como pueden definirse otras funciones de varias variables atendiendo a las distribuciones finito-dimensionales, como por ejemplo

$$m_X^{k_1, \dots, k_n}(t_1, \dots, t_n) = E[X_{t_1}^{k_1} X_{t_2}^{k_2} \dots X_{t_n}^{k_n}]$$

para  $t_i \in T$  y  $k_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

En efecto, llamando  $Y_{t_1} = X_{t_1}$ ,  $Y_{t_j} = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ ,  $j = 2, \dots, n$ , entonces  $X_{t_j} = \sum_{i=1}^j Y_{t_i}$ .

Por lo tanto, supuesta conocida la distribución conjunta de  $Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$ , las distribuciones finito dimensionales del proceso pueden ser calculadas a partir de ella. En efecto

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) &= \\ &= P\left(Y_{t_1} \leq x_1, Y_{t_1} + Y_{t_2} \leq x_2, \dots, \sum_{i=1}^n Y_{t_i} \leq x_n\right) = \\ &= P(Y_{t_1} \leq x_1, Y_{t_2} \leq x_2 - x_1, \dots, Y_{t_n} \leq x_n - x_{n-1}) = \\ &= P(Y_{t_1} \leq x_1) \prod_{i=2}^n P(Y_{t_i} \leq x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

### Definición

Si la distribución de los incrementos  $X_t - X_s$  depende sólo de  $t - s$  se dirá que los incrementos son estacionarios. Si se verifica que la distribución de  $X_{t+s} - X_s$  coincide con la de  $X_t$ ,  $\forall s, t \geq 0$  entonces diremos que los incrementos son homogéneos.

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

### Definición

Si la distribución de los incrementos  $X_t - X_s$  depende sólo de  $t - s$  se dirá que los incrementos son estacionarios. Si se verifica que la distribución de  $X_{t+s} - X_s$  coincide con la de  $X_t$ ,  $\forall s, t \geq 0$  entonces diremos que los incrementos son homogéneos.

## Procesos estrictamente estacionarios

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice estrictamente estacionario si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$  tal que  $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$  y  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  se verifica  $P(X_{t_1+h} \in A_1, \dots, X_{t_n+h} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n)$ .

# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

### Definición

Si la distribución de los incrementos  $X_t - X_s$  depende sólo de  $t - s$  se dirá que los incrementos son estacionarios. Si se verifica que la distribución de  $X_{t+s} - X_s$  coincide con la de  $X_t$ ,  $\forall s, t \geq 0$  entonces diremos que los incrementos son homogéneos.

## Procesos estrictamente estacionarios

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice estrictamente estacionario si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$  tal que  $t_{1+h}, \dots, t_{n+h} \in T$  y  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  se verifica  $P(X_{t_1+h} \in A_1, \dots, X_{t_n+h} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n)$ .

### Comentario

La definición anterior significa que las distribuciones finito dimensionales del proceso son invariantes frente a una traslación en el espacio paramétrico.



# Distintos tipos de procesos

Vamos a definir algunas clases de procesos según algunas características concretas asociadas a los mismos.

## Procesos con incrementos independientes

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

### Comentario

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

### Definición

Si la distribución de los incrementos  $X_t - X_s$  depende sólo de  $t - s$  se dirá que los incrementos son estacionarios. Si se verifica que la distribución de  $X_{t+s} - X_s$  coincide con la de  $X_t$ ,  $\forall s, t \geq 0$  entonces diremos que los incrementos son homogéneos.

## Procesos estrictamente estacionarios

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice estrictamente estacionario si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$  tal que  $t_{1+h}, \dots, t_{n+h} \in T$  y  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  se verifica  $P(X_{t_1+h} \in A_1, \dots, X_{t_n+h} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n)$ .

Además se tiene:

- 1 Si existe la función media entonces es constante ya que las distribuciones unidimensionales coinciden.
- 2 Si los momentos de segundo orden existen, la función de covarianza depende sólo de la diferencia  $t - s$ . En efecto, como las distribuciones bidimensionales  $(X_s, X_s)^t$  y  $(X_{s+h}, X_{t+h})^t$  coinciden para todo  $h$ , entonces  $\text{Cov}[X_s, X_t] = \text{Cov}[X_{s+h}, X_{t+h}]$  y tomando  $h = -s$  se verificará  $C_X(s, t) = C_X(0, t - s)$ .

## Procesos débilmente estacionarios

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  con momentos de segundo orden finitos (proceso de segundo orden), es débilmente estacionario si

- 1 La función media es constante.
- 2 La función de covarianza depende sólo de la diferencia  $t - s$ .

# Distintos tipos de procesos

## Procesos débilmente estacionarios

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  con momentos de segundo orden finitos (proceso de segundo orden), es débilmente estacionario si

- 1 La función media es constante.
- 2 La función de covarianza depende sólo de la diferencia  $t - s$ .

### Comentario

Todo proceso estrictamente estacionario es débilmente estacionario pero el recíproco no es cierto.

# Distintos tipos de procesos

## Procesos débilmente estacionarios

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  con momentos de segundo orden finitos (proceso de segundo orden), es débilmente estacionario si

- 1 La función media es constante.
- 2 La función de covarianza depende sólo de la diferencia  $t - s$ .

### Comentario

Todo proceso estrictamente estacionario es débilmente estacionario pero el recíproco no es cierto.

## Martingalas

### Definición

Un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  es una martingala si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$  se verifica  $E[X_{t_n} | X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}] = X_{t_{n-1}}$  (c.s.). Si la igualdad se cambia por  $\leq$  se dirá que es una supermartingala y si se cambia por  $\geq$  se dirá que es una submartingala.

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice de Markov si  $\forall n \geq 0$  y para cualesquiera  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in T$  se verifica  $P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$ .

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice de Markov si  $\forall n \geq 0$  y para cualesquiera  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in T$  se verifica  $P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$ .

### Comentario

La propiedad que define a este tipo de procesos se conoce como propiedad de Markov e indica que el comportamiento del proceso en el instante  $t = t_{n+1}$  sólo depende del estado del proceso en la etapa  $t = t_n$ , por lo que se prescinde de la información que del proceso se tiene antes de  $t_n$ .

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

### Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice de Markov si  $\forall n \geq 0$  y para cualesquiera  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in T$  se verifica  $P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$ .

### Comentario

La propiedad que define a este tipo de procesos se conoce como propiedad de Markov e indica que el comportamiento del proceso en el instante  $t = t_{n+1}$  sólo depende del estado del proceso en la etapa  $t = t_n$ , por lo que se prescinde de la información que del proceso se tiene antes de  $t_n$ .

### Definición

Dados dos instantes  $s, t$ , ( $s < t$ ),  $x$  un valor del espacio de estados y  $A$  un conjunto medible, las probabilidades  $P(X_t \in A | X_s = x)$  se conocen con el nombre de probabilidades de transición. Esta es una función de cuatro variables,  $A, t, x, s$  y verifica las siguientes propiedades:

- 1  $P(A, t; \cdot, s)$  es medible sobre el espacio de estados (considerando sobre él la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ ),  $\forall s, t$ ,  $s < t$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}$ .
- 2  $P(\cdot, t; x, s)$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}$ , para todo  $x$  en el espacio de estados y  $\forall s, t$ ,  $s < t$ .
- 3 Ecuación de Chapman-Kolmogorov:  $\forall s \leq u \leq t$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}$  y  $\forall x$  se verifica

$$P(A, t; x, s) = \int P(B, t; y, u) P(dy, u; x, s)$$

donde la integral se extiende sobre el espacio de estados.

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

En lo que sigue consideraremos procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo para los cuales existen las densidades asociadas a las distribuciones anteriores (densidades de transición). Llamaremos  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  a las densidades asociadas a las distribuciones  $n$ -dimensionales  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , mientras que por  $f(x, t|y, s)$  notaremos a las densidades de transición, asociadas a las probabilidades de transición anteriores.



## Procesos de Markov

En lo que sigue consideraremos procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo para los cuales existen las densidades asociadas a las distribuciones anteriores (densidades de transición). Llamaremos  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  a las densidades asociadas a las distribuciones  $n$ -dimensionales  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , mientras que por  $f(x, t|y, s)$  notaremos a las densidades de transición, asociadas a las probabilidades de transición anteriores.

De esta forma, la propiedad de Markov se escribe

$$f(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T.$$

## Procesos de Markov

En lo que sigue consideraremos procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo para los cuales existen las densidades asociadas a las distribuciones anteriores (densidades de transición). Llamaremos  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  a las densidades asociadas a las distribuciones  $n$ -dimensionales  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , mientras que por  $f(x, t|y, s)$  notaremos a las densidades de transición, asociadas a las probabilidades de transición anteriores.

De esta forma, la propiedad de Markov se escribe

$$f(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T.$$

La ecuación de Chapman-Kolmogorov adopta la expresión

$$f(x, t | y, s) = \int f(x, t | z, \tau) f(z, \tau | y, s) dz, \quad \forall x, y, \quad \forall s \leq \tau \leq t$$

que indica que la transición, desde el estado  $y$  en el instante  $s$  al estado  $x$  en el instante  $t$ , puede analizarse en dos etapas pasando a través de un estado arbitrario  $z$  en un instante de tiempo arbitrario  $\tau$  intermedio entre  $s$  y  $t$ .

## Procesos de Markov

En lo que sigue consideraremos procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo para los cuales existen las densidades asociadas a las distribuciones anteriores (densidades de transición). Llamaremos  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  a las densidades asociadas a las distribuciones  $n$ -dimensionales  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , mientras que por  $f(x, t|y, s)$  notaremos a las densidades de transición, asociadas a las probabilidades de transición anteriores.

De esta forma, la propiedad de Markov se escribe

$$f(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T.$$

La ecuación de Chapman-Kolmogorov adopta la expresión

$$f(x, t | y, s) = \int f(x, t | z, \tau) f(z, \tau | y, s) dz, \quad \forall x, y, \quad \forall s \leq \tau \leq t$$

e indica que la transición, desde el estado  $y$  en el instante  $s$  al estado  $x$  en el instante  $t$ , puede analizarse en dos etapas pasando a través de un estado arbitrario  $z$  en un instante de tiempo arbitrario  $\tau$  intermedio entre  $s$  y  $t$ .

Realmente, la ecuación de Chapman-Kolmogorov es la expresión del Teorema de la Probabilidad Total. Incluso para procesos no markovianos se verifica una ecuación de este tipo, si bien las transiciones no quedan en la forma anterior.

## Procesos de Markov

### Comentario

*La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):*

## Procesos de Markov

### Comentario

*La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):*

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

### Comentario

La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

### Comentario

Un caso particular es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad

$$P(A, t; x, s) = P(A, t + h; x, s + h), \forall x, \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \leq t, \forall h \in \mathbb{R}$$

en cuyo caso diremos que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo. En este caso las probabilidades de transición (y evidentemente las densidades si estas existen) dependen de  $t - s$  (basta considerar  $h = -s$  en la propiedad anterior).

# Distintos tipos de procesos

## Procesos de Markov

### Comentario

*La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):*

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

### Comentario

*Un caso particular es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad*

$$P(A, t; x, s) = P(A, t + h; x, s + h), \forall x, \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \leq t, \forall h \in \mathbb{R}$$

*en cuyo caso diremos que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo. En este caso las probabilidades de transición (y evidentemente las densidades si estas existen) dependen de  $t - s$  (basta considerar  $h = -s$  en la propiedad anterior).*

A continuación veamos algunos resultados básicos interesantes sobre procesos de Markov, algunos de los cuales los relacionan con otros tipos de procesos:

## Procesos de Markov

### Comentario

*La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):*

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

### Comentario

*Un caso particular es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad*

$$P(A, t; x, s) = P(A, t + h; x, s + h), \forall x, \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \leq t, \forall h \in \mathbb{R}$$

*en cuyo caso diremos que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo. En este caso las probabilidades de transición (y evidentemente las densidades si estas existen) dependen de  $t - s$  (basta considerar  $h = -s$  en la propiedad anterior).*

A continuación veamos algunos resultados básicos interesantes sobre procesos de Markov, algunos de los cuales los relacionan con otros tipos de procesos:

- 1 Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso de Markov y  $g$  una función medible Borel con inversa. Entonces  $\{g(X_t) : t \in T\}$  es un proceso de Markov.



## Procesos de Markov

### Comentario

*La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):*

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

### Comentario

*Un caso particular es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad*

$$P(A, t; x, s) = P(A, t + h; x, s + h), \forall x, \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \leq t, \forall h \in \mathbb{R}$$

*en cuyo caso diremos que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo. En este caso las probabilidades de transición (y evidentemente las densidades si estas existen) dependen de  $t - s$  (basta considerar  $h = -s$  en la propiedad anterior).*

A continuación veamos algunos resultados básicos interesantes sobre procesos de Markov, algunos de los cuales los relacionan con otros tipos de procesos:

- ❶ Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso de Markov y  $g$  una función medible Borel con inversa. Entonces  $\{g(X_t) : t \in T\}$  es un proceso de Markov.
- ❷ Todo proceso de Markov con incrementos independientes y media constante es una martingala.

## Procesos de Markov

### Comentario

La propiedad de Markov permite obtener, a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones, cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si consideramos  $t_0 \in T$  el origen del espacio paramétrico, se verifica (lo hacemos para el caso de existencia de las densidades, si bien el resultado es general):

$$\begin{aligned} f(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= f(x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_n, t_n | x_0, t_0; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \dots \\ &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

### Comentario

Un caso particular es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad

$$P(A, t; x, s) = P(A, t + h; x, s + h), \forall x, \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \leq t, \forall h \in \mathbb{R}$$

en cuyo caso diremos que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo. En este caso las probabilidades de transición (y evidentemente las densidades si estas existen) dependen de  $t - s$  (basta considerar  $h = -s$  en la propiedad anterior).

A continuación veamos algunos resultados básicos interesantes sobre procesos de Markov, algunos de los cuales los relacionan con otros tipos de procesos:

- ❶ Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso de Markov y  $g$  una función medible Borel con inversa. Entonces  $\{g(X_t) : t \in T\}$  es un proceso de Markov.
- ❷ Todo proceso de Markov con incrementos independientes y media constante es una martingala.
- ❸ Si  $\{X_t : t \in T\}$  es un proceso con incrementos independientes para el cual existen las densidades finito dimensionales, es de Markov.

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

# Procesos gaussianos

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice *gaussiano* si cualquier combinación lineal finita de la forma  $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$  es una variable normal unidimensional para cualesquiera  $t_1 < \dots < t_n$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice *gaussiano* si cualquier combinación lineal finita de la forma  $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$  es una variable normal unidimensional para cualesquiera  $t_1 < \dots < t_n$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

## Comentario

Atendiendo a la caracterización de la ley normal multivariante por combinaciones lineales, la definición dada equivale a que para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^t$  es normal multivariante, lo cual proporciona todas las distribuciones finito-dimensionales.

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice *gaussiano* si cualquier combinación lineal finita de la forma  $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$  es una variable normal unidimensional para cualesquiera  $t_1 < \dots < t_n$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

## Comentario

Atendiendo a la caracterización de la ley normal multivariante por combinaciones lineales, la definición dada equivale a que para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^t$  es normal multivariante, lo cual proporciona todas las distribuciones finito-dimensionales.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización en términos de las distribuciones finito dimensionales del proceso.

## Teorema

$\{X_t : t \in T\}$  es gaussiano si y sólo si se verifica

- 1. Es de segundo orden, o sea,  $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in T$ .
- 2. Para cualquier colección finita  $\{t_1, \dots, t_n\}$  con  $t_i \in T$  y  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$

$$E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{t_j} \right) \right] = \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j m_X(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_j \lambda_l C_X(t_j, t_l) \right)$$

donde  $m_X(t_j) = E[X_{t_j}]$  y  $C_X(t_j, t_l) = \text{Cov}[X_{t_j}, X_{t_l}]$ ,  $j, l = 1, \dots, n$ .

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice *gaussiano* si cualquier combinación lineal finita de la forma  $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$  es una variable normal unidimensional para cualesquiera  $t_1 < \dots < t_n$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Coment** Un vector  $\mathbf{X}$  normal de media  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}$  tiene por función característica  $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(i\mathbf{u}^t \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right)$ .  
Atendien  $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(i\mathbf{u}^t \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right)$ .  
que para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^t$  es normal multivariante, lo cual proporciona todas las distribuciones finito-dimensionales.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización en términos de las distribuciones finito dimensionales del proceso.

## Teorema

$\{X_t : t \in T\}$  es gaussiano si y sólo si se verifica

1. Es de segundo orden, o sea,  $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in T$ .
2. Para cualquier colección finita  $\{t_1, \dots, t_n\}$  con  $t_i \in T$  y  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$

$$E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{t_j} \right) \right] = \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j m_X(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_j \lambda_l C_X(t_j, t_l) \right)$$

donde  $m_X(t_j) = E[X_{t_j}]$  y  $C_X(t_j, t_l) = \text{Cov}[X_{t_j}, X_{t_l}]$ ,  $j, l = 1, \dots, n$ .

## Definición y caracterización

A continuación vamos a dar unas breves notas sobre la clase de procesos gaussianos. A esta familia pertenecen algunos procesos de gran importancia como el proceso de Wiener o el de Ornstein-Uhlenbeck (entre otros).

## Definición

$\{X_t : t \in T\}$  se dice *gausiano* si cualquier combinación lineal finita de la forma  $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$  es una variable normal unidimensional para cualesquiera  $t_1 < \dots < t_n$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Coment** Un vector  $\mathbf{X}$  normal de media  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}$  tiene por función característica

Atendien  $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(i\mathbf{u}^t \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right)$ .

que para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$  es normal multivariante, lo cual proporciona todas las distribuciones finito-dimensionales.

El siguiente proceso. La condición 2 representa la función característica del vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$  considerando como argumento de la función  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$  y siendo el vector de medias  $\boldsymbol{\mu} = (m_X(t_1), \dots, m_X(t_n))^t$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianzas de componentes  $C_X(t_j, t_l)$ ,  $j, l = 1, \dots, n$ .

## Teorema

$\{X_t : t \in T\}$  es gausiano si y sólo si se verifica

- 1 Es de segundo orden, o sea,  $E[X_t^2] < \infty$ ,  $\forall t \in T$ .
- 2 Para cualquier colección finita  $\{t_1, \dots, t_n\}$  con  $t_i \in T$  y  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{t_j} \right) \right] = \exp \left( i \sum_{j=1}^n \lambda_j m_X(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_j \lambda_l C_X(t_j, t_l) \right)$$

donde  $m_X(t_j) = E[X_{t_j}]$  y  $C_X(t_j, t_l) = \text{Cov}[X_{t_j}, X_{t_l}]$ ,  $j, l = 1, \dots, n$ .



## Continuidad de los procesos gaussianos

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media  $m_X$  y covarianza  $C_X$ . Si para  $t_0 \in T$  se verifica

- 1  $m_X$  es continua en  $t_0$ .
- 2  $C_X$  es continua en  $(t_0, t_0)$ .

entonces el proceso es estocásticamente continuo en  $t_0$ .

## Continuidad de los procesos gaussianos

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media  $m_X$  y covarianza  $C_X$ . Si para  $t_0 \in T$  se verifica

- ❶  $m_X$  es continua en  $t_0$ .
- ❷  $C_X$  es continua en  $(t_0, t_0)$ .

entonces el proceso es estocásticamente continuo en  $t_0$ .

### Comentario

En la demostración de este resultado no se usa la normalidad de las distribuciones finito-dimensionales. Realmente se emplea la existencia de la función covarianza (lo cual implica la existencia de la función media) así como la continuidad de ambas funciones.

## Continuidad de los procesos gaussianos

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media  $m_X$  y covarianza  $C_X$ . Si para  $t_0 \in T$  se verifica

- ❶  $m_X$  es continua en  $t_0$ .
- ❷  $C_X$  es continua en  $(t_0, t_0)$ .

entonces el proceso es estocásticamente continuo en  $t_0$ .

### Comentario

*En la demostración de este resultado no se usa la normalidad de las distribuciones finito-dimensionales. Realmente se emplea la existencia de la función covarianza (lo cual implica la existencia de la función media) así como la continuidad de ambas funciones.*

La continuidad muestral también está asegurada bajo ciertas condiciones.

## Continuidad de los procesos gaussianos

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media  $m_X$  y covarianza  $C_X$ . Si para  $t_0 \in T$  se verifica

- ❶  $m_X$  es continua en  $t_0$ .
- ❷  $C_X$  es continua en  $(t_0, t_0)$ .

entonces el proceso es estocásticamente continuo en  $t_0$ .

### Comentario

En la demostración de este resultado no se usa la normalidad de las distribuciones finito-dimensionales. Realmente se emplea la existencia de la función covarianza (lo cual implica la existencia de la función media) así como la continuidad de ambas funciones.

La continuidad muestral también está asegurada bajo ciertas condiciones.

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano separable con función media  $m_X$  continua y covarianza  $C_X$ . Si existen dos constantes positivas  $C$  y  $\alpha$  tales que  $|C_X(t_1, t_1) + C_X(t_2, t_2) - 2C_X(t_1, t_2)| \leq C|t_2 - t_1|^\alpha$ ,  $t_i \in T$ , entonces el proceso es continuo muestral casi seguro.

## Continuidad de los procesos gaussianos

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media  $m_X$  y covarianza  $C_X$ . Si para  $t_0 \in T$  se verifica

- 1  $m_X$  es continua en  $t_0$ .
- 2  $C_X$  es continua en  $(t_0, t_0)$ .

entonces el proceso es estocásticamente continuo en  $t_0$ .

### Comentario

En la demostración de este resultado no se usa la normalidad de las distribuciones finito-dimensionales. Realmente se emplea la existencia de la función covarianza (lo cual implica la existencia de la función media) así como la continuidad de ambas funciones.

La continuidad muestral también está asegurada bajo ciertas condiciones.

### Teorema

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano separable con función media  $m_X$  continua y covarianza  $C_X$ . Si existen dos constantes positivas  $C$  y  $\alpha$  tales que  $|C_X(t_1, t_1) + C_X(t_2, t_2) - 2C_X(t_1, t_2)| \leq C|t_2 - t_1|^\alpha$ ,  $t_i \in T$ , entonces el proceso es continuo muestral casi seguro.

### Comentario

Si imponemos alguna condición más sobre el proceso se pueden rebajar las condiciones para que sea continuo muestral. En concreto se puede demostrar que si el proceso, además, tiene incrementos independientes entonces es continuo muestral casi seguro en un intervalo cerrado si y sólo si las funciones media y varianza son continuas.

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_X$ . Entonces el proceso es markoviano si y solamente si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 \in T$  se verifica*

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}.$$



## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_X$ . Entonces el proceso es markoviano si y solamente si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 \in T$  se verifica*

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}.$$

El anterior resultado puede extenderse. Para ello se necesita esta definición:

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_X$ . Entonces el proceso es markoviano si y solamente si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 \in T$  se verifica*

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}.$$

El anterior resultado puede extenderse. Para ello se necesita esta definición:

### Definición

*La covarianza  $C_X(s, t)$  de un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  se denomina triangular si verifica la propiedad:*

$$C_X(s, t) = f(s \wedge t) \cdot g(s \vee t), s, t \in T,$$

*donde  $s \vee t = \max(s, t)$  y  $s \wedge t = \min(s, t)$ .*

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_X$ . Entonces el proceso es markoviano si y solamente si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 \in T$  se verifica*

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}.$$

El anterior resultado puede extenderse. Para ello se necesita esta definición:

### Definición

*La covarianza  $C_X(s, t)$  de un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  se denomina triangular si verifica la propiedad:*

$$C_X(s, t) = f(s \wedge t) \cdot g(s \vee t), s, t \in T,$$

*donde  $s \vee t = \max(s, t)$  y  $s \wedge t = \min(s, t)$ .*

A partir de ella tenemos la siguiente caracterización para procesos gaussianos markovianos:

## Procesos gaussianos markovianos

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y markovianos. Dicha conexión existe y viene dada en los siguientes resultados.

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  con función media cero es de Markov si y sólo si para cualesquiera instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se verifica*

$$E[X_{t_n} | X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}] = E[X_{t_n} | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}].$$

El siguiente resultado muestra una caracterización en términos de la matriz de covarianzas.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_X$ . Entonces el proceso es markoviano si y solamente si para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 \in T$  se verifica*

$$C_X(t_1, t_3) = \frac{C_X(t_1, t_2)C_X(t_2, t_3)}{C_X(t_2, t_2)}.$$

El anterior resultado puede extenderse. Para ello se necesita esta definición:

### Definición

*La covarianza  $C_X(s, t)$  de un proceso  $\{X_t : t \in T\}$  se denomina triangular si verifica la propiedad:*

$$C_X(s, t) = f(s \wedge t) \cdot g(s \vee t), s, t \in T,$$

*donde  $s \vee t = \max(s, t)$  y  $s \wedge t = \min(s, t)$ .*

A partir de ella tenemos la siguiente caracterización para procesos gaussianos markovianos:

### Teorema

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  es markoviano si y solo si su función de covarianza es triangular.*

# Procesos gaussianos

## Procesos gaussianos estacionarios

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y estacionarios. De acuerdo con la definición asociada a la estacionariedad estricta, es necesario que sus distribuciones marginales no cambien a lo largo del tiempo. Ahora bien, cuando se habla de *procesos gaussianos*, podemos relacionar esto con una propiedad específica de su función covarianza.

## Procesos gaussianos estacionarios

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y estacionarios. De acuerdo con la definición asociada a la estacionariedad estricta, es necesario que sus distribuciones marginales no cambien a lo largo del tiempo. Ahora bien, cuando se habla de *procesos gaussianos*, podemos relacionar esto con una propiedad específica de su función covarianza.

### Proposición

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  real-valuado, de media constante y función covarianza  $C_X(s, t)$  es estacionario si y sólo si para cualquier par de instantes de tiempo  $0 \leq s \leq t$ , la función covarianza satisface*

$$C_X(s, t) = C_X(0, t - s) = R_X(t - s),$$

*donde,  $R_X(t - s)$  es una notación que subraya que la covarianza solo depende del periodo de tiempo que transcurre entre  $s$  y  $t$ .*

## Procesos gaussianos estacionarios

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y estacionarios. De acuerdo con la definición asociada a la estacionariedad estricta, es necesario que sus distribuciones marginales no cambien a lo largo del tiempo. Ahora bien, cuando se habla de *procesos gaussianos*, podemos relacionar esto con una propiedad específica de su función covarianza.

### Proposición

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  real-valuado, de media constante y función covarianza  $C_X(s, t)$  es estacionario si y sólo si para cualquier par de instantes de tiempo  $0 \leq s \leq t$ , la función covarianza satisface*

$$C_X(s, t) = C_X(0, t - s) = R_X(t - s),$$

*donde,  $R_X(t - s)$  es una notación que subraya que la covarianza solo depende del periodo de tiempo que transcurre entre  $s$  y  $t$ .*

Como corolario se tiene el siguiente resultado

### Corolario

*Un proceso gaussiano estacionario en sentido amplio y media constante también verifica la propiedad de estacionariedad estricta.*

## Procesos gaussianos estacionarios

A continuación vamos a tratar la conexión entre procesos gaussianos y estacionarios. De acuerdo con la definición asociada a la estacionariedad estricta, es necesario que sus distribuciones marginales no cambien a lo largo del tiempo. Ahora bien, cuando se habla de *procesos gaussianos*, podemos relacionar esto con una propiedad específica de su función covarianza.

### Proposición

*Un proceso gaussiano  $\{X_t : t \in T\}$  real-valuado, de media constante y función covarianza  $C_X(s, t)$  es estacionario si y sólo si para cualquier par de instantes de tiempo  $0 \leq s \leq t$ , la función covarianza satisface*

$$C_X(s, t) = C_X(0, t - s) = R_X(t - s),$$

*donde,  $R_X(t - s)$  es una notación que subraya que la covarianza solo depende del periodo de tiempo que transcurre entre  $s$  y  $t$ .*

Como corolario se tiene el siguiente resultado

### Corolario

*Un proceso gaussiano estacionario en sentido amplio y media constante también verifica la propiedad de estacionariedad estricta.*

## Procesos de incrementos independientes y procesos gaussianos

También existe una conexión entre procesos gaussianos y procesos con incrementos independientes tal como muestra el siguiente teorema.

### Teorema

*Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico separable con incrementos independientes. Si además tiene trayectorias continuas casi seguro, entonces es gaussiano.*



## Definición

*El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones*

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

*Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.*

## Definición

*El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones*

- ❶  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- ❷  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

*Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.*

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 1 Es inmediato ya que  $m_W(0) = 0$  y  $C_W(0, 0) = \text{Var}[W_0] = 0$ .

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 1 Es inmediato ya que  $m_W(0) = 0$  y  $C_W(0, 0) = \text{Var}[W_0] = 0$ .
- 2 Sean  $t_1 < t_2 < t_3$ . Entonces se verifica

$$C_W(t_1, t_3) = C_W(t_1, t_2) = t_1 \text{ y } C_W(t_2, t_3) = C_W(t_2, t_2) = t_2$$

por lo que

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 1 Es inmediato ya que  $m_W(0) = 0$  y  $C_W(0, 0) = \text{Var}[W_0] = 0$ .
- 2 Sean  $t_1 < t_2 < t_3$ . Entonces se verifica

$$C_W(t_1, t_3) = C_W(t_1, t_2) = t_1 \text{ y } C_W(t_2, t_3) = C_W(t_2, t_2) = t_2$$

por lo que

$$C_W(t_1, t_3) = \frac{C_W(t_1, t_2)C_W(t_2, t_3)}{C_W(t_2, t_2)}$$

y al ser gaussiano, es de Markov.

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 3 Como el proceso es gaussiano con función media cero y función de covarianza  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , entonces, si  $s < t$  se verifica

$$(W_s, W_t)^t \rightsquigarrow N_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix} \right]$$

y con ello  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s].$



## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0$ .
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \min(s, t)$ .

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 4 Al ser gaussiano, si  $s < t$  se tiene  $W_t - W_s = (1, -1) \begin{pmatrix} W_t \\ W_s \end{pmatrix}$  y así  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ . Con ello los incrementos son estacionarios.

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \min(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 4 Al ser gaussiano, si  $s < t$  se tiene  $W_t - W_s = (1, -1) \begin{pmatrix} W_t \\ W_s \end{pmatrix}$  y así  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ . Con ello los incrementos son estacionarios. Por ello  $W_{t+s} - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t]$ , que coincide con la distribución de  $W_t$  y así los incrementos son homogéneos.

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 4 Al ser gaussiano, si  $s < t$  se tiene  $W_t - W_s = (1, -1) \begin{pmatrix} W_t \\ W_s \end{pmatrix}$  y así  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ . Con ello los incrementos son estacionarios. Por ello  $W_{t+s} - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t]$ , que coincide con la distribución de  $W_t$  y así los incrementos son homogéneos. Para comprobar que los incrementos son independientes basta comprobar que son incorrelados al ser la distribución conjunta normal. Sean  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , entonces

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 4 Al ser gaussiano, si  $s < t$  se tiene  $W_t - W_s = (1, -1) \begin{pmatrix} W_t \\ W_s \end{pmatrix}$  y así  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ . Con ello los incrementos son estacionarios. Por ello  $W_{t+s} - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t]$ , que coincide con la distribución de  $W_t$  y así los incrementos son homogéneos. Para comprobar que los incrementos son independientes basta comprobar que son incorrelados al ser la distribución conjunta normal. Sean  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W_{s_2} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{t_1}] &= E[(W_{s_2} - W_{s_1})(W_{t_2} - W_{t_1})] - E[W_{s_2} - W_{s_1}]E[W_{t_2} - W_{t_1}] \\ &= E[W_{s_2}W_{t_2}] - W_{s_2}W_{t_1} - W_{s_1}W_{t_2} + W_{s_1}W_{t_1} = s_2 - s_2 - s_1 + s_1 = 0. \end{aligned}$$

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 6 Sea  $\{\xi_t : t \geq 0\}$  una versión separable del proceso Wiener (existe en virtud del resultado de Doob). Usando la conocida expresión de los momentos de una distribución normal a los incrementos  $\xi(t+h) - \xi(t) \rightsquigarrow N_1[0, h]$ , entonces  $E[(\xi(t+h) - \xi(t))^4] = 3h^2$  y con ello basta aplicar el criterio de continuidad de Kolmogorov con  $C = 3$ ,  $\alpha = 4$  y  $\beta = 1$ .

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \text{Min}(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 6 Sea  $\{\xi_t : t \geq 0\}$  una versión separable del proceso Wiener (existe en virtud del resultado de Doob). Usando la conocida expresión de los momentos de una distribución normal a los incrementos  $\xi(t+h) - \xi(t) \rightsquigarrow N_1[0, h]$ , entonces  $E[(\xi(t+h) - \xi(t))^4] = 3h^2$  y con ello basta aplicar el criterio de continuidad de Kolmogorov con  $C = 3$ ,  $\alpha = 4$  y  $\beta = 1$ .

Dada  $X \rightsquigarrow N_1[\mu, \sigma^2]$ , los momentos centrados de orden impar son cero, mientras que para los de orden par se verifica

$$E[(X - \mu)^{2n}] = \frac{\sigma^{2n} 2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

## Definición

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso gaussiano  $\{W_t : t \geq 0\}$  cuyas distribuciones finito dimensionales vienen determinadas por las condiciones

- 1  $m_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$
- 2  $C_W(s, t) = s \wedge t$ , donde  $s \wedge t = \min(s, t).$

Llamaremos proceso de Wiener en  $[0, I]$  a un proceso con las propiedades anteriores pero restringidas al intervalo  $[0, I]$ . Si  $I = 1$  se le llama proceso de Wiener estándar.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Wiener verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Es un proceso de Markov.
- 3  $W_t | W_s = w_s \rightsquigarrow N_1[w_s; t - s]$  para  $s < t$ .
- 4 Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.
- 5 Es continuo muestral casi seguro.

## Demostración

- 6 Sea  $\{\xi_t : t \geq 0\}$  una versión separable del proceso Wiener (existe en virtud del resultado de Doob). Usando la conocida expresión de los momentos de una distribución normal a los incrementos  $\xi(t+h) - \xi(t) \rightsquigarrow N_1[0, h]$ , entonces observemos que este apartado se comprueba, asimismo, sin más que tener en cuenta que como el proceso de Wiener con  $C =$  proceso tiene media constante

$$E[(\xi(t+h) - \xi(t))^2] = C_\xi(t+h, t+h) + C_\xi(t, t) - 2C_\xi(t+h, t) = h.$$

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- ❶  $W_0 = 0$  c.s.
- ❷ Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .



# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- ❶  $W_0 = 0$  c.s.
- ❷ Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano.

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- ❶  $W_0 = 0$  c.s.
- ❷ Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano. Además,  $\forall t \geq 0$  y  $0 < s < t$  se tiene  $W_t = W_s + W_t - W_s = W_s - W_0 + W_t - W_s$  y, por tanto,  $W_t$  es suma de dos variables normales e independientes, por lo que es normal de media cero y varianza  $\text{Var}[W_t] = s + t - s = t$ .

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- ❶  $W_0 = 0$  c.s.
- ❷ Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano. Además,  $\forall t \geq 0$  y  $0 < s < t$  se tiene  $W_t = W_s + W_t - W_s = W_s - W_0 + W_t - W_s$  y, por tanto,  $W_t$  es suma de dos variables normales e independientes, por lo que es normal de media cero y varianza  $\text{Var}[W_t] = s + t - s = t$ .

Además, si  $s < t$  se verifica

$$\text{Cov}[W_s, W_t] = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] = s = s \wedge t.$$

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- ❶  $W_0 = 0$  c.s.
- ❷ Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano. Además,  $\forall t \geq 0$  y  $0 < s < t$  se tiene  $W_t = W_s + W_t - W_s = W_s - W_0 + W_t - W_s$  y, por tanto,  $W_t$  es suma de dos variables normales e independientes, por lo que es normal de media cero y varianza  $\text{Var}[W_t] = s + t - s = t$ .

Además, si  $s < t$  se verifica

$$\text{Cov}[W_s, W_t] = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] = s = s \wedge t.$$

Para  $t \geq s$  la demostración es similar. En resumen, la definición segunda implica la primera y viceversa.

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

*El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:*

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_t[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano. Además,  $\forall t \geq 0$  y  $0 < s < t$  se tiene  $W_t = W_s + W_t - W_s = W_s - W_0 + W_t - W_s$  y, por tanto,  $W_t$  es suma de dos variables normales e independientes, por lo que es normal de media cero y varianza  $\text{Var}[W_t] = s + t - s = t$ .

Además, si  $s < t$  se verifica

$$\text{Cov}[W_s, W_t] = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] = s = s \wedge t.$$

Para  $t \geq s$  la demostración es similar. En resumen, la definición segunda implica la primera y viceversa.

Incluso podemos considerar una tercera definición, que es la que aparece de forma natural en la formulación que históricamente se hizo de este proceso:

## Definición

*Se define el proceso Wiener o movimiento Browniano como un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  verificando:*

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Tiene incrementos  $W_t - W_s$  independientes cuya distribución depende sólo de  $t - s$ .
- 3 Tiene trayectorias continuas.

La equivalencia con la anterior definición (y por lo tanto con la primera) es inmediata si tenemos en cuenta que estas condiciones determinan un proceso gaussiano.

# El proceso de Wiener

La forma de introducir el proceso de Wiener no es única. De hecho hay múltiples basadas en diversas caracterizaciones. Por ejemplo:

## Definición

El proceso Wiener, o movimiento Browniano, es un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  que verifica las siguientes propiedades:

- 1  $W_0 = 0$  c.s.
- 2 Tiene incrementos independientes distribuidos  $W_t - W_s \rightsquigarrow N_1[0; t - s]$ .

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto, razonando igual que antes, tiene trayectorias continuas casi seguro y, al ser de incrementos independientes y verificar  $W_0 = 0$ , entonces es gaussiano. Además,  $\forall t \geq 0$  y  $0 < s < t$  se tiene  $W_t = W_s + W_t - W_s = W_s - W_0 + W_t - W_s$  y, por tanto,  $W_t$  es suma de dos variables normales e independientes, por lo que es normal de media cero y varianza  $\text{Var}[W_t] = s + t - s = t$ .

Además, si  $s < t$  se verifica

$$\text{Cov}[W_s, W_t] = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] = s = s \wedge t.$$

Para  $t \geq s$  la demostración es similar. En resumen, la definición segunda implica la primera y viceversa.

Incluso podemos considerar una tercera definición, que es la que aparece de forma natural en la formulación que históricamente se hizo de este proceso:

## Definición

Se define el proceso Wiener o movimiento Browniano como un proceso  $\{W_t : t \geq 0\}$  verificando:

- 1  $W_0$
  - 2  $T_{ier}$
  - 3  $T_{ier}$
- Se puede extender la definición de proceso de Wiener a partir de desplazamientos del mismo. Así se tiene que si  $\{W_t : t \geq 0\}$  es un proceso Wiener, entonces el proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  definido como  $X_t = \alpha t + \sigma W_t$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$  es conocido como el proceso de Wiener con *drift*  $\alpha$  y coeficiente de difusión  $\sigma$ .

La equivalencia con la anterior definición (y por lo tanto con la primera) es inmediata si tenemos en cuenta que estas condiciones determinan un proceso gaussiano.

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

## Demostración

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = (s \wedge t)(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración



# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = (s \wedge t)(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 1 El carácter gaussiano es inmediato ya que el proceso Wiener lo es. En efecto, dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , entonces

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{t_1} - t_1 W_1 \\ W_{t_2} - t_2 W_1 \\ \vdots \\ W_{t_n} - t_n W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -t_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix}$$

La normalidad de  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})^t$  se deduce a partir de la de  $(W_1, W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t$ .

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

$$C_B(s, t) = E[B_t B_s] = E[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)] =$$

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

$$C_B(s, t) = E[B_t B_s] = E[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)] = E[W_s W_t - tW_s W_1 - sW_t W_1 + stW_1^2] =$$

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

$$\begin{aligned} C_B(s, t) &= E[B_t B_s] = E[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)] = E[W_s W_t - tW_s W_1 - sW_t W_1 + stW_1^2] = \\ &= s \wedge t - ts - ts + ts = s \wedge t - ts = \end{aligned}$$

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

$$\begin{aligned} C_B(s, t) &= E[B_t B_s] = E[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)] = E[W_s W_t - tW_s W_1 - sW_t W_1 + stW_1^2] = \\ &= s \wedge t - ts - ts + ts = s \wedge t - ts = \begin{cases} s - st = s(1 - t) & \text{si } s < t \\ t - st = t(1 - s) & \text{si } t \leq s \end{cases} = \end{aligned}$$

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 2 Por un lado,  $m_{B_t} = E[W_t - tW_1] = E[W_t] - tE[W_1] = 0$ , y por otro

$$\begin{aligned} C_B(s, t) &= E[B_t B_s] = E[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)] = E[W_s W_t - tW_s W_1 - sW_t W_1 + stW_1^2] = \\ &= s \wedge t - ts - ts + ts = s \wedge t - ts = \begin{cases} s - st = s(1 - t) & \text{si } s < t \\ t - st = t(1 - s) & \text{si } t \leq s \end{cases} = \\ &= (s \wedge t)(1 - s \vee t). \end{aligned}$$

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 1 Tengamos en cuenta que, para  $h$  tal que  $0 \leq t + h \leq 1$ , se verifica

$$B_{t+h} - B_t = W_{t+h} - (t+h)W_1 - W_t + tW_1 = W_{t+h} - hW_1 - W_t =$$



# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 1 Tengamos en cuenta que, para  $h$  tal que  $0 \leq t + h \leq 1$ , se verifica

$$B_{t+h} - B_t = W_{t+h} - (t+h)W_1 - W_t + tW_1 = W_{t+h} - hW_1 - W_t = (1, -1, h) \begin{pmatrix} W_{t+h} \\ W_t \\ W_1 \end{pmatrix}$$

por lo que  $B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N_1[0; h(1-h)]$ .

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 1 Tengamos en cuenta que, para  $h$  tal que  $0 \leq t + h \leq 1$ , se verifica

$$B_{t+h} - B_t = W_{t+h} - (t+h)W_1 - W_t + tW_1 = W_{t+h} - hW_1 - W_t = (1, -1, h) \begin{pmatrix} W_{t+h} \\ W_t \\ W_1 \end{pmatrix}$$

por lo que  $B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N_1[0; h(1-h)]$ . Con ello, como la media es constante, se tiene

$$E[(B(t+h) - B(t))^2] = \text{Var}[B(t+h) - B(t)] = C_B(t+h, t+h) + C_B(t, t) - 2C_B(t+h, t) = h(1-h) < h$$

ya que  $h < 1$ .

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 1 Es inmediato ya que, por una parte,  $E[B_0] = E[B_1] = 0$  y además
  - $\text{Var}[B_0] = E[B_0^2] = E[W_0^2] = \text{Var}[W_0] = 0$ .

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- ❶ Es gaussiano.
- ❷ Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- ❸ Es continuo muestral casi seguro.
- ❹  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- ❺  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- ❶ Es inmediato ya que, por una parte,  $E[B_0] = E[B_1] = 0$  y además
  - $\text{Var}[B_0] = E[B_0^2] = E[W_0^2] = \text{Var}[W_0] = 0$ .
  - $\text{Var}[B_1] = \text{Var}[W_1(1 - 1)] = 0$ .

# El Puente Browniano

Íntimamente relacionado con el proceso Wiener o movimiento Browniano está el siguiente proceso gaussiano considerado: el puente Browniano.

## Definición

Sea  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  un proceso Wiener estándar. Se define el proceso Puente Browniano como un proceso  $\{B_t : t \in [0, 1]\}$  tal que  $\forall t \in [0, 1]$  se verifica  $B_t = W_t - tW_1$ .

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado:

## Teorema

El proceso Puente Browniano verifica:

- 1 Es gaussiano.
- 2 Tiene función media cero y función covarianza dada por  $C_B(s, t) = s \wedge t(1 - s \vee t)$ , donde  $s \vee t = \text{Max}(s, t)$ .
- 3 Es continuo muestral casi seguro.
- 4  $B_0 = B_1 = 0$  c.s.
- 5  $B_t$  es independiente de  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

## Demostración

- 5 Como  $B_t = W_t - tW_1$ , entonces la distribución conjunta de  $B_t$  y  $W_1$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , es normal bidimensional de media cero y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(1-t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que  $\text{Cov}[B_t, W_1] = 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  y con ello  $B_t$  y  $W_1$  son independientes.

# El Puente Browniano

Al igual que ocurría con el proceso Wiener, la definición dada no es la única posible para introducir este proceso. Concretamente se podía haber dado la siguiente definición equivalente:

## Definición

$\{B_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Puente Browniano si  $\forall t \in [0, 1]$  la variable  $B_t$  tiene la misma distribución que  $W_t | W_1 = 0$ , donde  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Wiener estándar.

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto:

# El Puente Browniano

Al igual que ocurría con el proceso Wiener, la definición dada no es la única posible para introducir este proceso. Concretamente se podía haber dado la siguiente definición equivalente:

## Definición

$\{B_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Puente Browniano si  $\forall t \in [0, 1]$  la variable  $B_t$  tiene la misma distribución que  $W_t | W_1 = 0$ , donde  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Wiener estándar.

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto:

- El carácter gaussiano es inmediato ya que dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , el vector  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t$  es normal multivariante y con ello también lo será  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t | W_1 = 0$ .

# El Puente Browniano

Al igual que ocurría con el proceso Wiener, la definición dada no es la única posible para introducir este proceso. Concretamente se podía haber dado la siguiente definición equivalente:

## Definición

$\{B_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Puente Browniano si  $\forall t \in [0, 1]$  la variable  $B_t$  tiene la misma distribución que  $W_t | W_1 = 0$ , donde  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Wiener estándar.

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto:

- El carácter gaussiano es inmediato ya que dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , el vector  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t$  es normal multivariante y con ello también lo será  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t | W_1 = 0$ .
- Por lo tanto falta calcular su función media y covarianza que son las que determinan las distribuciones finito-dimensionales de cualquier proceso gaussiano.



# El Puente Browniano

Al igual que ocurría con el proceso Wiener, la definición dada no es la única posible para introducir este proceso. Concretamente se podía haber dado la siguiente definición equivalente:

## Definición

$\{B_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Puente Browniano si  $\forall t \in [0, 1]$  la variable  $B_t$  tiene la misma distribución que  $W_t | W_1 = 0$ , donde  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Wiener estándar.

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto:

- El carácter gaussiano es inmediato ya que dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , el vector  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t$  es normal multivariante y con ello también lo será  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t | W_1 = 0$ .
- Por lo tanto falta calcular su función media y covarianza que son las que determinan las distribuciones finito-dimensionales de cualquier proceso gaussiano. Sean ahora  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  con  $t_1 < t_2$  (el caso  $t_2 < t_1$  se hace de forma análoga). Entonces

# El Puente Browniano

Al igual que ocurría con el proceso Wiener, la definición dada no es la única posible para introducir este proceso. Concretamente se podía haber dado la siguiente definición equivalente:

## Definición

$\{B_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Puente Browniano si  $\forall t \in [0, 1]$  la variable  $B_t$  tiene la misma distribución que  $W_t | W_1 = 0$ , donde  $\{W_t : t \in [0, 1]\}$  es un proceso Wiener estándar.

Esta definición es equivalente a la anterior. En efecto:

- El carácter gaussiano es inmediato ya que dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , el vector  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t$  es normal multivariante y con ello también lo será  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^t | W_1 = 0$ .
- Por lo tanto falta calcular su función media y covarianza que son las que determinan las distribuciones finito-dimensionales de cualquier proceso gaussiano. Sean ahora  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  con  $t_1 < t_2$  (el caso  $t_2 < t_1$  se hace de forma análoga). Entonces

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_{t_1} \\ W_{t_2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_3 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ t_1 & t_1 & t_1 \\ t_2 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} \right]$$

por lo que  $(W_{t_1}, W_{t_2})^t | W_1 = 0$  se distribuye como una normal bidimensional de media cero y matriz de covarianzas

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} (t_1, t_2) &= \begin{pmatrix} t_1(1-t_1) & t_1(1-t_2) \\ t_1(1-t_2) & t_2(1-t_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t_1(1-t_1) & (t_1 \wedge t_2)(1-t_1 \vee t_2) \\ (t_1 \wedge t_2)(1-t_1 \vee t_2) & t_2(1-t_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- ❶  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- ❷  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

Demostración

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- ❶  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- ❷  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- ❶  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- ❷ Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- ❸ Es un proceso de Markov.
- ❹ Es continuo muestral casi seguro.
- ❺  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 1 Es inmediato a partir de la definición.

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 1 Es inmediato a partir de la definición.
- 2 La propia definición muestra que es de segundo orden y débilmente estacionario.

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 1 Es inmediato a partir de la definición.
- 2 La propia definición muestra que es de segundo orden y débilmente estacionario. Ahora bien, sean  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y  $h > 0$ . Puesto que el proceso es gaussiano, la distribución de  $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h})^t$  será normal n-dimensional de media cero y matriz de covarianzas con diagonal de unos y fuera de la diagonal

$$\text{Cov}[Y_{t_i+h}, Y_{t_j+h}] = e^{-|t_j+h-t_i-h|} = e^{-|t_j-t_i|} = \text{Cov}[Y_{t_i}, Y_{t_j}]$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 1 Es inmediato a partir de la definición.
- 2 La propia definición muestra que es de segundo orden y débilmente estacionario. Ahora bien, sean  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y  $h > 0$ . Puesto que el proceso es gaussiano, la distribución de  $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h})^t$  será normal n-dimensional de media cero y matriz de covarianzas con diagonal de unos y fuera de la diagonal

$$\text{Cov}[Y_{t_i+h}, Y_{t_j+h}] = e^{-|t_j+h-t_i-h|} = e^{-|t_j-t_i|} = \text{Cov}[Y_{t_i}, Y_{t_j}]$$

coincidiendo, por lo tanto, con la distribución de  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^t$  y así el proceso es estrictamente estacionario.



## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 9 Puesto que el proceso es gaussiano bastará comprobar que para todo  $t_1 < t_2 < t_3$  se verifica

$$\frac{C_Y(t_1, t_2)C_Y(t_2, t_3)}{C_Y(t_2, t_2)} = \frac{e^{-t_2+t_1}e^{-t_3+t_2}}{1} = e^{-(t_3-t_1)} = C_Y(t_1, t_3).$$

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 9 Puesto que el proceso es gaussiano bastará comprobar que para todo  $t_1 < t_2 < t_3$  se verifica

$$\frac{C_Y(t_1, t_2)C_Y(t_2, t_3)}{C_Y(t_2, t_2)} = \frac{e^{-t_2+t_1}e^{-t_3+t_2}}{1} = e^{-(t_3-t_1)} = C_Y(t_1, t_3).$$

- 4 Si  $h > 0$  entonces, como la función media es constante,

$$E[(Y_{t+h} - Y_t)^2] = \text{Var}[Y_{t+h} - Y_t] = C_Y(t+h, t+h) + C_Y(t, t) - 2C_Y(t+h, t) = 2(1 - e^{-h}) \leq 2h$$

mientras que si  $h < 0$  se tendrá  $E[(Y_{t+h} - Y_t)^2] = 2(1 - e^h) \leq 2h.$

## Definición

Se define el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como un proceso gaussiano  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  que verifica

- 1  $m_Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2  $C_Y(s, t) = e^{-|t-s|}, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck verifica:

- 1  $Y_t \rightsquigarrow N_1[0, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$
- 2 Es un proceso de segundo orden estrictamente estacionario.
- 3 Es un proceso de Markov.
- 4 Es continuo muestral casi seguro.
- 5  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

## Demostración

- 5 Es inmediato ya que

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_s \end{pmatrix} \rightsquigarrow N_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & e^{-|t-s|} \\ e^{-|t-s|} & 1 \end{pmatrix} \right]$$

por lo que  $Y_t | Y_s = y_s \rightsquigarrow N_1[y_s e^{-|t-s|}, 1 - e^{-2|t-s|}], \forall s, t \in \mathbb{R}.$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- ❶  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- ❷  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

Demostración

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} \mathbb{E}[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} =$$



# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- ❶  $Y_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$
- ❷  $W_t = \sqrt{t}Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s}e^{-t} \mathbb{E}[W_{e^{2s}}W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)}(e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)}e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)}e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t}Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- ❶  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- ❷  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

$$C_W(s, t) =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- ❶  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- ❷  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} \mathbb{E}[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

$$C_W(s, t) = \sqrt{st} \operatorname{Cov} \left[ Y_{\ln(\sqrt{s})}, Y_{\ln(\sqrt{t})} \right] =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener y  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

$$C_W(s, t) = \sqrt{st} \operatorname{Cov} \left[ Y_{\ln(\sqrt{s})}, Y_{\ln(\sqrt{t})} \right] = \sqrt{st} e^{-|\ln(\sqrt{t}) - \ln(\sqrt{s})|} =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

$$C_W(s, t) = \sqrt{st} \operatorname{Cov} [Y_{\ln(\sqrt{s})}, Y_{\ln(\sqrt{t})}] = \sqrt{st} e^{-|\ln(\sqrt{t}) - \ln(\sqrt{s})|} = \begin{cases} \sqrt{ste}^{-\ln(\sqrt{t}) + \ln(\sqrt{s})}, & s \leq t \\ \sqrt{ste}^{-\ln(\sqrt{s}) + \ln(\sqrt{t})}, & t < s \end{cases} =$$

# Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para finalizar vamos a mostrar la relación que existe entre los procesos de Wiener y el de Ornstein-Uhlenbeck. A partir de esta definición podemos verificar las propiedades resumidas en el siguiente teorema:

## Teorema

Sea  $\{W_t : t \geq 0\}$  el proceso de Wiener e  $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces ambos procesos están relacionados por las expresiones

- 1  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$
- 2  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$

## Demostración

Puesto que el proceso de Wiener es gaussiano, entonces el proceso dado por  $Y_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$  también lo es y además tiene media cero. Por último

$$C_Y(s, t) = e^{-s} e^{-t} E[W_{e^{2s}} W_{e^{2t}}] = e^{-(t+s)} (e^{2s} \wedge e^{2t}) = e^{-(t+s)} e^{2(s \wedge t)} = e^{-(t+s)} e^{-2\left[\frac{s+t}{2} - \frac{|t-s|}{2}\right]} = e^{-|t-s|}.$$

Por lo tanto se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Recíprocamente, el carácter gaussiano del proceso de Ornstein-Uhlenbeck garantiza el del proceso  $W_t = \sqrt{t} Y_{\ln(\sqrt{t})}$  así como que su media es cero. Además

$$C_W(s, t) = \sqrt{st} \operatorname{Cov} [Y_{\ln(\sqrt{s})}, Y_{\ln(\sqrt{t})}] = \sqrt{st} e^{-|\ln(\sqrt{t}) - \ln(\sqrt{s})|} = \begin{cases} \sqrt{ste}^{-\ln(\sqrt{t}) + \ln(\sqrt{s})}, & s \leq t \\ \sqrt{ste}^{-\ln(\sqrt{s}) + \ln(\sqrt{t})}, & t < s \end{cases} = s \wedge t.$$