Ejercicios Propuestos

Juan Rubio Cobeta

November 15, 2025

Contents

1 Ejercicio 1:

Demostrar que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de difusión homogéneo.

Solución:

Para demostrar que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) es un proceso de difusión homogéneo, utilizaremos las condiciones suficientes establecidas en el Teorema 2.3.1.

Dicho teorema establece que un proceso de Markov con trayectorias continuas es un proceso de difusión si:

1. Existe $\delta > 0$ tal que $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int |y - x|^{2+\delta} F(dy, t + h|x, t) = 0$.
2. Existe $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int (y - x)F(dy, t + h|x, t) = A_1(x, t)$.
3. Existe $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int (y - x)^2 F(dy, t + h|x, t) = A_2(x, t)$.

La indicación del enunciado de tomar $k = 4$ sugiere verificar la condición 1 para $\delta = 2$ (ya que $2 + \delta = 4$). Si esta condición se cumple, los momentos infinitesimales truncados de la Definición 2.3.1 coinciden con los momentos no truncados de este teorema.

Además, el proceso será homogéneo si los momentos infinitesimales A_1 y A_2 no dependen del tiempo t.

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck viene dado por la SDE (ecuación diferencial estocástica en inglés):

$$dY(t) = \theta(\mu - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad \theta > 0, \sigma > 0$$

La distribución condicional $Y(t + h)|Y(t) = x$ es Normal (Gaussiana):

$$Y(t + h)|Y(t) = x \sim N(m(x, h), V(h))$$

donde la media y la varianza condicionales son:

- $m(x, h) = E[Y(t + h)|Y(t) = x] = xe^{-\theta h} + \mu(1 - e^{-\theta h})$
- $V(h) = \mathrm{Var}(Y(t + h)|Y(t) = x) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta h})$

Notamos que ni $m(x, h)$ ni $V(h)$ dependen de t. Esto ya implica que la densidad de transición es $f(y, h|x)$, lo que confirma la homogeneidad temporal.

Para verificar las condiciones del teorema, calcularemos los límites de los momentos condicionales $M_k(x, h) = E[(Y(t + h) - x)^k|Y(t) = x]$. Usamos las expansiones de Taylor para $h \to 0$:

- $e^{-\theta h} = 1 - \theta h + O(h^2)$
- $1 - e^{-\theta h} = \theta h + O(h^2)$
- $1 - e^{-2\theta h} = 2\theta h + O(h^2)$

1.1 Cálculo de $A_1(x)$

Buscamos $A_1(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} M_1(x, h)$.

$$M_1(x, h) = E[Y(t + h) - x|Y(t) = x] = m(x, h) - x$$

$$M_1(x, h) = (xe^{-\theta h} + \mu(1 - e^{-\theta h})) - x = x(e^{-\theta h} - 1) + \mu(1 - e^{-\theta h})$$

$$M_1(x, h) = (\mu - x)(1 - e^{-\theta h})$$

Sustituyendo la expansión de Taylor:

$$M_1(x, h) = (\mu - x)(\theta h + O(h^2)) = \theta(\mu - x)h + O(h^2)$$

$$A_1(x, t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[\theta(\mu - x)h + O(h^2)] = \theta(\mu - x)$$

El coeficiente $A_1(x) = \theta(\mu - x)$ existe y no depende de t.

1.2 Cálculo de $A_2(x)$

Buscamos $A_2(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} M_2(x,h)$.

$$M_2(x,h) = E[(Y(t+h)-x)^2|Y(t)=x]$$

Relacionamos M_2 con la varianza: $E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2$.

$$M_2(x,h) = \mathrm{Var}(Y(t+h)|Y(t)=x) + (E[Y(t+h)-x|Y(t)=x])^2$$

$$M_2(x,h) = V(h) + (M_1(x,h))^2$$

Sustituimos las expansiones de Taylor para $V(h)$ y $M_1(x,h)$:

$$V(h) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta h}) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(2\theta h + O(h^2)) = \sigma^2 h + O(h^2)$$

$$(M_1(x,h))^2 = (\theta(\mu - x)h + O(h^2))^2 = O(h^2)$$

Sustituyendo en M_2:

$$M_2(x,h) = (\sigma^2 h + O(h^2)) + O(h^2) = \sigma^2 h + O(h^2)$$

$$A_2(x,t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[\sigma^2 h + O(h^2)] = \sigma^2$$

El coeficiente $A_2(x) = \sigma^2$ existe y no depende de t.

1.3 Verificación de la Condición 1 del Teorema 2.3.1 con k=4

Usamos la indicación del enunciado ($k = 4$) para verificar la condición 1 del teorema con $\delta = 2$. Buscamos $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} M_4(x,h) = 0$.

$$M_4(x,h) = E[(Y-x)^4] = \int (y-x)^4 f(y,h|x)dy$$

Seguimos la indicación: $m = m(x,h)$ es la media de $Y \equiv Y(t+h)|(Y(t)=x)$. Definimos $Z = Y - m$, donde $Z \sim N(0, V(h))$. Definimos $\delta = m - x = M_1(x,h)$.

$$M_4 = E[((Y-m)+(m-x))^4] = E[(Z+\delta)^4]$$

Expandimos el binomio y usamos la linealidad de la esperanza:

$$M_4 = E[Z^4] + 4\delta E[Z^3] + 6\delta^2 E[Z^2] + 4\delta^3 E[Z] + \delta^4$$

Usamos los momentos centrados de una distribución normal $N(0, V(h))$:

- $E[Z] = 0$
- $E[Z^2] = V(h)$
- $E[Z^3] = 0$
- $E[Z^4] = 3(E[Z^2])^2 = 3(V(h))^2$

Sustituyendo:

$$M_4(x,h) = 3(V(h))^2 + 6\delta^2 V(h) + \delta^4$$

Analizamos el orden de magnitud (en h) de cada término:

- $V(h) = \sigma^2 h + O(h^2) \implies V(h) = O(h)$
- $\delta = M_1(x,h) = \theta(\mu - x)h + O(h^2) \implies \delta = O(h)$

Sustituimos los órdenes:

$$M_4(x,h) = 3 \cdot (O(h))^2 + 6 \cdot (O(h))^2 \cdot O(h) + (O(h))^4$$
$$M_4(x,h) = O(h^2) + O(h^3) + O(h^4) = O(h^2)$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} M_4(x,h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{O(h^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} O(h) = 0$$

La condición 1 del Teorema 2.3.1 se satisface.

Conclusión

Hemos verificado las tres condiciones del Teorema 2.3.1. Los momentos infinitesimales existen y son:

$$A_1(x,t) = a(x) = \theta(\mu - x)$$

$$A_2(x,t) = b(x) = \sigma^2$$

Dado que ambos coeficientes existen, son continuos y no dependen del tiempo t, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso de difusión homogéneo.

2 Ejercicio 2:

Comprobar si existe un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ para el cual las ecuaciones de Kolmogorov tengan solución única, siendo

$$A_1(x,t) = xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)}, \quad A_2(x) = \sigma^2 x^2$$

donde $a \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$), $\sigma > 0$ y $x > 0$. g es una función continua en $t \in [t_0, T]$ o bien lo es en $t \geq t_0 > 0$, siendo en este caso acotada, y

$$h(t) = \exp\left(-a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t + \int^t g(s)ds\right]\right).$$

Solución:

La existencia y unicidad de la solución para las ecuaciones de Kolmogorov está vinculada a la existencia y unicidad de la solución de la Ecuación Diferencial Estocástica (SDE) asociada. Un proceso $X(t)$ es un proceso de difusión con momentos A_1 y A_2 si es solución de la SDE:

$$dX(t) = a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW(t)$$

donde $a(x,t) = A_1(x,t)$ y $b(x,t)^2 = A_2(x,t)$.

A partir de los datos del problema, tenemos:

$$A_2(x) = \sigma^2 x^2 \implies b(x,t) = \sqrt{\sigma^2 x^2} = \sigma x \quad (\text{dado que } \sigma > 0, x > 0)$$

$$a(x,t) = A_1(x,t) = xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)}$$

La forma de $A_1(x,t)$ sugiere una construcción mediante el método de factorización de densidades. Consideremos un proceso "base" $Y(t)$ con momentos infinitesimales $\alpha_1(x,t)$ y $\alpha_2(x,t)$.

La estrategia será: 1. Definir un proceso base $Y(t)$ que sepamos que existe y tiene solución única. 2. Demostrar que el proceso $X(t)$ (con momentos A_1, A_2) se puede construir a partir de $Y(t)$ mediante una transformación de factorización válida.

2.1 Proceso Base $Y(t)$

Elijamos un proceso $Y(t)$ con el mismo coeficiente de difusión que $X(t)$:

$$\alpha_2(x,t) = A_2(x) = \sigma^2 x^2$$

Y como parte de la deriva:

$$\alpha_1(x,t) = xg(t)$$

Este proceso $Y(t)$ es un Movimiento Browniano Geométrico con deriva $g(t)$ dependiente del tiempo, y es la solución de la SDE:

$$dY(t) = Y(t)g(t)dt + \sigma Y(t)dW(t)$$

Los coeficientes $a_Y(y,t) = yg(t)$ y $b_Y(y,t) = \sigma y$ son continuos y C^1 en y (para $y > 0$), por lo que satisfacen las condiciones de Lipschitz local y de crecimiento lineal. Por lo tanto, el proceso base $Y(t)$ existe y es un proceso de difusión único.

2.2 Factorización

Según el método de factorización, si la densidad de transición f_X de $X(t)$ se relaciona con la densidad ϕ_Y de $Y(t)$ mediante una función $k(x,t)$, los momentos están relacionados por:

$$A_2(x,t) = \alpha_2(x,t)$$

$$A_1(x,t) = \alpha_1(x,t) + \frac{\alpha_2(x,t)}{k(x,t)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$$

Sustituimos los momentos conocidos:

$$xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)} = xg(t) + \frac{\sigma^2 x^2}{k(x,t)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$$

Simplificando, buscamos $k(x,t)$ tal que:

$$\frac{a\sigma^2 x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)} = \frac{\sigma^2 x^2}{k(x,t)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{a x^{a-1} h(t)}{1 + x^a h(t)} = \frac{1}{k(x,t)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$$

Esta es una Ecuación Diferencial Ordinaria en x (tratando t como constante), que es separable:

$$\int \frac{1}{k} dk = \int \frac{a x^{a-1} h(t)}{1 + x^a h(t)} dx$$

Usamos la sustitución $u = 1 + x^a h(t)$, $du = a x^{a-1} h(t) dx$:

$$\ln(k) = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + C(t) = \ln(1 + x^a h(t)) + C(t)$$

Eligiendo la constante de integración $C(t) = 0$, obtenemos la función de factorización:

$$k(x,t) = 1 + x^a h(t)$$

2.3 Verificación de $k(x,t)$

Para que esta transformación sea válida, la función $k(x,t)$ debe ser una solución de la ecuación atrasada de Kolmogorov asociada al proceso base $Y(t)$:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \alpha_1(x,t) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_2(x,t) \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = 0$$

Calculamos las derivadas parciales de $k(x,t) = 1 + x^a h(t)$:

- $\frac{\partial k}{\partial t} = x^a h'(t)$
- $\frac{\partial k}{\partial x} = a x^{a-1} h(t)$
- $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = a(a-1) x^{a-2} h(t)$

Sustituimos en la ecuación de Kolmogorov:

$$[x^a h'(t)] + [xg(t)] \cdot [a x^{a-1} h(t)] + \frac{1}{2} [\sigma^2 x^2] \cdot [a(a-1) x^{a-2} h(t)] = 0$$

Simplificamos la expresión:

$$x^a h'(t) + a x^a g(t)h(t) + \frac{a(a-1)\sigma^2}{2} x^a h(t) = 0$$

Dado que $x > 0$ y $h(t)$ (como exponencial) no es cero, podemos dividir toda la ecuación por $x^a h(t)$:

$$\frac{h'(t)}{h(t)} + ag(t) + \frac{a(a-1)\sigma^2}{2} = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse para la $h(t)$ dada. Despejamos la derivada logarítmica:

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -ag(t) - \frac{a(a-1)\sigma^2}{2}$$

2.4 Verificación de $h(t)$

Ahora, comprobamos si la función $h(t)$ dada en el enunciado satisface esta EDO.

$$h(t) = \exp\left(-a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t + \int^t g(s)ds\right]\right)$$

Tomamos el logaritmo natural:

$$\ln(h(t)) = -a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t + \int^t g(s)ds\right]$$

Derivamos respecto a t:

$$\frac{d}{dt}\ln(h(t)) = \frac{h'(t)}{h(t)} = -a\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t\right) + \frac{d}{dt}\left(\int^t g(s)ds\right)\right]$$

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2} + g(t)\right]$$

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -\frac{a(a-1)\sigma^2}{2} - ag(t)$$

Esta es exactamente la EDO que obtuvimos en el paso 3.

Conclusión

Hemos demostrado que los momentos A_1 y A_2 dados se obtienen de un proceso de difusión base $Y(t)$ (que existe y tiene solución única) a través de una transformación de factorización válida $k(x,t) = 1 + x^a h(t)$. Dado que $x > 0$ y $h(t) > 0$ (es una exponencial), la función $k(x,t)$ es continua, diferenciable y estrictamente positiva, garantizando que la transformación está bien definida.

Por lo tanto, sí existe un proceso de difusión con los momentos infinitesimales dados, y las ecuaciones de Kolmogorov asociadas tienen solución única.

3 Ejercicio 3:

Sea $\{X(t) : t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t) = g(t)x$ y $A_2(x,t) = \sigma^2 x^2$, donde $\sigma > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ y g es una función continua acotada. Si además suponemos que la distribución inicial es constante, o sea $X(t_0) = x_{t_0}$ casi seguramente, demostrar que este proceso coincide con el proceso dado por

$$Y(t) = x_{t_0} \exp\left(\sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right), \quad t \geq t_0,$$

donde $\{W(t) : t \geq 0\}$ es el proceso de Wiener estándar, o sea, con momentos infinitesimales $A_1(x,t) = 0$ y $A_2(x,t) = 1$.

Solución:

El objetivo es demostrar que el proceso $\{X(t)\}$, definido por sus momentos infinitesimales, y el proceso $\{Y(t)\}$, definido por su fórmula explícita, son idénticos.

La estrategia más directa es demostrar que el proceso $Y(t)$ es un proceso de difusión y que sus momentos infinitesimales $A_1^Y(x,t)$ y $A_2^Y(x,t)$ son idénticos a los de $X(t)$. Si además coinciden en la condición inicial, por la unicidad de la solución, los procesos son el mismo.

3.1 Hallar la SDE del proceso $Y(t)$

Partimos de la definición de $Y(t)$:

$$Y(t) = x_{t_0} \exp\left(\sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right)$$

Para encontrar la SDE que gobierna $Y(t)$, aplicamos la Fórmula de Itô. Definamos un proceso auxiliar $Z(t)$ como el exponente (sin el x_{t_0}):

$$Z(t) = \sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)$$

La diferencial de $Z(t)$ es:

$$dZ(t) = \sigma dW(t-t_0) + g(t)dt - \frac{\sigma^2}{2}dt$$

Notando que $dW(t-t_0)$ tiene las mismas propiedades de incremento que $dW(t)$, podemos escribir:

$$dZ(t) = \left(g(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t)$$

Esta es una SDE de la forma $dZ(t) = a_Z(t)dt + b_Z(t)dW(t)$, donde los coeficientes son:

$$a_Z(t) = g(t) - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad b_Z(t) = \sigma$$

Ahora, $Y(t)$ se escribe como $Y(t) = f(Z(t))$, donde $f(z) = x_{t_0}e^z$. Aplicamos la Fórmula de Itô a $Y(t) = f(Z(t))$, notando que f no depende explícitamente de t:

$$dY(t) = \left(a_Z(t)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{b_Z(t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dt + \left(b_Z(t)\frac{\partial f}{\partial z}\right)dW(t)$$

Calculamos las derivadas de $f(z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x_{t_0}e^z = Y(t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x_{t_0} e^z = Y(t)$$

Sustituimos todo en la fórmula de Itô:

$$dY(t) = \left(\left(g(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) Y(t) + \frac{\sigma^2}{2} Y(t) \right) dt + (\sigma \cdot Y(t))\, dW(t)$$

Simplificamos el término de deriva:

$$dY(t) = \left(g(t)Y(t) - \frac{\sigma^2}{2} Y(t) + \frac{\sigma^2}{2} Y(t) \right) dt + \sigma Y(t) dW(t)$$

$$dY(t) = g(t)Y(t)dt + \sigma Y(t)dW(t)$$

3.2 Conclusión

Hemos demostrado que $Y(t)$ es un proceso de difusión (ya que es solución de una SDE) gobernado por la ecuación:

$$dY(t) = a_Y(Y,t)dt + b_Y(Y,t)dW(t)$$

donde $a_Y(y,t) = g(t)y$ y $b_Y(y,t) = \sigma y$.

Los momentos infinitesimales de $Y(t)$ son:

$$A_1^Y(y,t) = a_Y(y,t) = g(t)y$$

$$A_2^Y(y,t) = [b_Y(y,t)]^2 = (\sigma y)^2 = \sigma^2 y^2$$

Estos momentos son idénticos a los momentos $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ dados para el proceso $X(t)$.

Finalmente, verificamos la condición inicial de $Y(t)$ en $t = t_0$:

$$Y(t_0) = x_{t_0} \exp\left(\sigma W(0) + \int_{t_0}^{t_0} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(0) \right)$$

$$Y(t_0) = x_{t_0} \exp(0 + 0 - 0) = x_{t_0}$$

El proceso $Y(t)$ tiene la misma condición inicial x_{t_0} que $X(t)$.

Dado que el proceso de difusión $X(t)$ (definido por A_1, A_2 y $X(t_0)$) y el proceso $Y(t)$ (definido explícitamente) tienen los mismos momentos infinitesimales y la misma condición inicial, por la unicidad de la solución de la ecuación diferencial estocástica, ambos procesos son el mismo.

$$X(t) = Y(t), \quad \forall t \geq t_0$$

(Las indicaciones (a), (b) y (c) se cumplen: $Y(t)$ es Lognormal porque $\ln(Y(t))$ es Gaussiano (el proceso $Z(t)$ más una constante), es Markoviano por ser solución de una SDE, y su densidad de transición es la de una Lognormal, que se deriva del cambio de variable sobre la densidad Normal de $Z(t)$).

4 Ejercicio 4:

Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ el proceso Wiener con momentos infinitesimales $A_1(x) = \mu$ y $A_2(x) = \sigma^2$ y definido en $I = (r_1, r_2)$. Estudiar la naturaleza de las barreras del espacio de estados.

Solución:

Para estudiar la naturaleza de las barreras del espacio de estados $I = (r_1, r_2)$, debemos asumir que el proceso está definido en el dominio más amplio posible para estos coeficientes, que es $I = (-\infty, +\infty)$. Por lo tanto, estudiaremos las barreras $r_1 = -\infty$ y $r_2 = +\infty$.

Utilizamos el criterio de clasificación de Feller, que requiere el análisis de la integrabilidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \exp\left(-\int_{x'}^{x} \frac{2A_1(z)}{A_2(z)} dz\right)$$

$$g(x) = \frac{2}{A_2(x)f(x)}$$

Y, si es necesario, de $h(x) = f(x)\int^x g(z)dz$ y $k(x) = g(x)\int^x f(z)dz$.

Los momentos infinitesimales dados son $A_1(x) = \mu$ y $A_2(x) = \sigma^2$. Elegimos un punto de referencia $x' = 0$.

4.1 Cálculo de $f(x)$ y $g(x)$

Calculamos $f(x)$:

$$f(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{2\mu}{\sigma^2} dz\right) = \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}[z]_0^x\right) = \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)$$

Calculamos $g(x)$:

$$g(x) = \frac{2}{\sigma^2 f(x)} = \frac{2}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)$$

4.2 Análisis de la barrera $r_2 = +\infty$

Debemos analizar la integrabilidad de f y g en el intervalo $I_2 = (x', r_2) = (0, +\infty)$. Para ello, distinguimos tres casos según el valor de μ.

Caso 1: $\mu = 0$ (Wiener estándar)

$$f(x) = e^0 = 1$$

$$g(x) = \frac{2}{\sigma^2}$$

Ambas funciones son constantes.

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty 1dx = \infty \implies f \notin \mathcal{L}(I_2)$$

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^\infty \frac{2}{\sigma^2}dx = \infty \implies g \notin \mathcal{L}(I_2)$$

Calculamos $h(x)$ y $k(x)$:

$$h(x) = f(x)\int_0^x g(z)dz = 1 \cdot \int_0^x \frac{2}{\sigma^2}dz = \frac{2x}{\sigma^2}$$

$$k(x) = g(x)\int_0^x f(z)dz = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \int_0^x 1dz = \frac{2x}{\sigma^2}$$

Analizamos su integrabilidad:

$$\int_0^\infty h(x)dx = \int_0^\infty \frac{2x}{\sigma^2}dx = \infty \implies h \notin \mathcal{L}(I_2)$$
$$\int_0^\infty k(x)dx = \int_0^\infty \frac{2x}{\sigma^2}dx = \infty \implies k \notin \mathcal{L}(I_2)$$

Como f, g, h, k no son integrables en I_2, la barrera $r_2 = +\infty$ es natural.

Caso 2: $\mu > 0$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)dx$$

Como $\mu > 0$, el exponente es negativo. La integral converge: $f \in \mathcal{L}(I_2)$.

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^\infty \frac{2}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)dx$$

Como $\mu > 0$, el exponente es positivo. La integral diverge: $g \notin \mathcal{L}(I_2)$. Debemos revisar $h(x)$ y $k(x)$:

$$h(x) = f(x)\int_0^x g(z)dz = e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\left[\frac{1}{\mu}e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}z}\right]_0^x = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}(e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} - 1) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x})$$

La integral $\int_0^\infty h(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\mu}(1 - e^{-kx})dx$ (con $k > 0$) diverge por el término $\int 1dx$. $h \notin \mathcal{L}(I_2)$.

$$k(x) = g(x)\int_0^x f(z)dz = \frac{2}{\sigma^2}e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\left[-\frac{\sigma^2}{2\mu}e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}z}\right]_0^x = \frac{1}{(-\mu)}e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}(e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} - 1) = \frac{1}{\mu}(e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} - 1)$$

La integral $\int_0^\infty k(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\mu}(e^{kx} - 1)dx$ (con $k > 0$) diverge por el término e^{kx}. $k \notin \mathcal{L}(I_2)$. La barrera $r_2 = +\infty$ es natural.

Caso 3: $\mu < 0$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)dx$$

Como $\mu < 0$, el exponente es positivo. La integral diverge: $f \notin \mathcal{L}(I_2)$.

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^\infty \frac{2}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)dx$$

Como $\mu < 0$, el exponente es negativo. La integral converge: $g \in \mathcal{L}(I_2)$. Debemos revisar $h(x)$ y $k(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x})$$

El exponente $-\frac{2\mu}{\sigma^2}$ es positivo. La integral $\int_0^\infty h(x)dx$ diverge. $h \notin \mathcal{L}(I_2)$.

$$k(x) = \frac{1}{\mu}(e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} - 1)$$

El exponente $\frac{2\mu}{\sigma^2}$ es negativo. La integral $\int_0^\infty k(x)dx$ diverge por el término $\int(-1)dx$. $k \notin \mathcal{L}(I_2)$. La barrera $r_2 = +\infty$ es natural.

4.3 Análisis de la barrera $r_1 = -\infty$

Debemos analizar la integrabilidad de f y g en el intervalo $I_1 = (r_1, x') = (-\infty, 0)$. El análisis es simétrico.

Caso 1: $\mu = 0$

$f(x) = 1$ y $g(x) = 2/\sigma^2$.

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 1dx = \infty \implies f \notin \mathcal{L}(I_1)$$

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{\sigma^2}dx = \infty \implies g \notin \mathcal{L}(I_1)$$

El cálculo de $h(x)$ y $k(x)$ es $h(x) = k(x) = \frac{2x}{\sigma^2}$.

$$\int_{-\infty}^{0} h(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{\sigma^2}dx = \left[\frac{x^2}{\sigma^2}\right]_{-\infty}^{0} = 0 - (-\infty) = -\infty$$

La integral diverge. $h \notin \mathcal{L}(I_1)$ y $k \notin \mathcal{L}(I_1)$. La barrera $r_1 = -\infty$ es natural.

Caso 2: $\mu > 0$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) dx$$

$x \in (-\infty, 0)$. Sea $y = -x \implies y \in (0, \infty)$. $dx = -dy$. $\int_{\infty}^{0} e^{ky}(-dy) = \int_{0}^{\infty} e^{ky}dy$ donde $k = 2\mu/\sigma^2 > 0$. La integral diverge. $f \notin \mathcal{L}(I_1)$.

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) dx$$

El exponente es positivo. La integral $\int_{-\infty}^{0} e^{kx}dx$ (con $k = 2\mu/\sigma^2 > 0$) converge. $g \in \mathcal{L}(I_1)$. El análisis de $h(x)$ y $k(x)$ es idéntico al de r_2. Ambas integrales divergen. La barrera $r_1 = -\infty$ es natural.

Caso 3: $\mu < 0$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) dx$$

El exponente $-\frac{2\mu}{\sigma^2}$ es positivo. La integral $\int_{-\infty}^{0} e^{kx}dx$ (con $k > 0$) converge. $f \in \mathcal{L}(I_1)$.

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) dx$$

El exponente $\frac{2\mu}{\sigma^2}$ es negativo. La integral $\int_{-\infty}^{0} e^{-kx}dx$ (con $k > 0$) diverge. $g \notin \mathcal{L}(I_1)$. El análisis de $h(x)$ y $k(x)$ es idéntico al de r_2. Ambas integrales divergen. La barrera $r_1 = -\infty$ es natural.

Conclusión

Independientemente del valor de la deriva μ, en todos los casos ($\mu = 0, \mu > 0, \mu < 0$), ni f, g, h ni k cumplen los requisitos de integrabilidad para ser barreras regulares, de entrada o de salida.

Por lo tanto, para el proceso Wiener con deriva constante, ambas barreras $r_1 = -\infty$ y $r_2 = +\infty$ son barreras naturales.

5 Ejercicio 5:

Consideremos $\{X(t) : t \geq t_0\}$ el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, en el cual $A_1(x,t) = h(t)x$, $A_2(x) = \sigma^2$, $x \in \mathbb{R}$, siendo h una función continua y $\sigma^2 > 0$. Estudiar si este proceso verifica la condición para ser transformado al proceso Wiener estándar. En caso afirmativo, obtener dicha transformación, así como la densidad de transición correspondiente.

Solución:

Para estudiar la transformabilidad al proceso Wiener estándar, usamos la condición del Teorema 2.6.1. Un proceso con momentos $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ puede ser transformado si $A_1(x,t)$ satisface:

$$A_1(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x,t)]^{1/2}}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)A_2(y,t) + \frac{\partial A_2(y,t)}{\partial t}}{[A_2(y,t)]^{3/2}}dy\right\}$$

para algunas funciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$.

5.1 Verificación de la condición

Disponemos de los momentos:

$$A_1(x,t) = h(t)x$$
$$A_2(x,t) = \sigma^2$$

Calculamos las componentes necesarias para la condición, notando que A_2 es constante:

- $\frac{\partial A_2}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial A_2}{\partial t} = 0$
- $[A_2(x,t)]^{1/2} = \sigma$
- $[A_2(x,t)]^{3/2} = \sigma^3$

Sustituimos estos valores en la ecuación de condición, eligiendo un punto z arbitrario:

$$A_1(x,t) = \frac{1}{4}(0) + \frac{\sigma}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)\sigma^2 + 0}{\sigma^3}dy\right\}$$
$$A_1(x,t) = \frac{\sigma}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)}{\sigma}dy\right\}$$
$$A_1(x,t) = \frac{\sigma}{2}\left\{C_1(t) + \frac{C_2(t)}{\sigma}[y]_z^x\right\}$$
$$A_1(x,t) = \frac{\sigma}{2}C_1(t) + \frac{C_2(t)}{2}(x-z)$$
$$A_1(x,t) = \left(\frac{C_2(t)}{2}\right)x + \left(\frac{\sigma C_1(t) - zC_2(t)}{2}\right)$$

Esta es la forma general que debe tener $A_1(x,t)$ para que el proceso sea transformable. El A_1 que nos da el problema es:

$$A_1(x,t) = h(t)x$$

Comparando ambas expresiones (igualando coeficientes de x y términos independientes):

1. $h(t) = \frac{C_2(t)}{2} \implies C_2(t) = 2h(t)$
2. $0 = \frac{\sigma C_1(t) - zC_2(t)}{2} \implies \sigma C_1(t) = zC_2(t) \implies C_1(t) = \frac{zC_2(t)}{\sigma} = \frac{2zh(t)}{\sigma}$

Dado que podemos encontrar $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que solo dependen de t, el proceso sí verifica la condición para ser transformado.

5.2 Obtención de la transformación

Las transformaciones $x' = \psi(x,t)$ y $t' = \phi(t)$ vienen dadas por:

$$\psi(x,t) = (k_1)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} C_2(s)ds\right)\int_z^x \frac{dy}{[A_2(y,t)]^{1/2}} - \frac{(k_1)^{1/2}}{2}\int_{t_2}^{t} C_1(s)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} C_2(\theta)d\theta\right)ds + k_2$$

$$\phi(t) = k_1\int_{t_1}^{t}\exp\left(-\int_{t_0}^{s} C_2(\theta)d\theta\right)ds + k_3$$

Para simplificar, elegimos $z = 0$, lo que implica $C_1(t) = 0$. También elegimos las constantes $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ y $t_1 = t_0$. Definimos $H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$. Con esto, $C_2(t) = 2h(t)$ y $\int_{t_0}^{t} C_2(s)ds = 2H(t)$.

Cálculo de $x' = \psi(x,t)$

Como $C_1 = 0$ y $k_2 = 0$, el segundo término de la integral se anula.

$$\psi(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 2h(s)ds\right)\int_0^x \frac{dy}{\sigma}$$

$$\psi(x,t) = \exp(-H(t))\left[\frac{y}{\sigma}\right]_0^x$$

$$\psi(x,t) = \frac{x}{\sigma}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right)$$

Cálculo de $t' = \phi(t)$

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t}\exp\left(-\int_{t_0}^{s} 2h(\theta)d\theta\right)ds$$

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t}\exp(-2H(s))ds = \int_{t_0}^{t}\exp\left(-2\int_{t_0}^{s} h(\theta)d\theta\right)ds$$

5.3 Obtención de la densidad de transición

La transformación $x' = \psi(x,t)$ y $t' = \phi(t)$ convierte el proceso $X(t)$ en un proceso Wiener estándar $W'(t')$, cuya densidad de transición $f_{W'}(x', t'|x_0', t_0')$ es conocida. Calculamos las condiciones iniciales transformadas:

$$x_0' = \psi(x_0, t_0) = \frac{x_0}{\sigma}\exp(-H(t_0)) = \frac{x_0}{\sigma}\exp(0) = \frac{x_0}{\sigma}$$

$$t_0' = \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t_0}\exp(-2H(s))ds = 0$$

El proceso $W'(t')$ es un Wiener $N(x_0', t' - t_0') = N(x_0', t')$. Su densidad es:

$$f_{W'}(x', t'|x_0', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}}\exp\left(-\frac{(x' - x_0')^2}{2t'}\right)$$

La densidad de $X(t)$ se obtiene revirtiendo la transformación:

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = f_{W'}(\psi(x,t), \phi(t)|x_0', 0)\cdot\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|$$

Calculamos el Jacobiano de la transformación espacial:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sigma}e^{-H(t)}\right) = \frac{1}{\sigma}e^{-H(t)}$$

Sustituimos todos los elementos:

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi(t)}} \exp\left(-\frac{(\psi(x,t)-x_0')^2}{2\phi(t)}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma}e^{-H(t)}\right)$$

Sustituyendo $\psi(x,t)$, $\phi(t)$ y x_0':

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_{t_0}^t e^{-2H(s)}ds}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x}{\sigma}e^{-H(t)} - \frac{x_0}{\sigma}\right)^2}{2\int_{t_0}^t e^{-2H(s)}ds}\right) \cdot \frac{e^{-H(t)}}{\sigma}$$

Esta expresión se puede simplificar. Sea:

$$\mu(t) = x_0 e^{H(t)} = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right)$$

$$V(t) = \sigma^2 e^{2H(t)}\phi(t) = \sigma^2 \exp\left(2\int_{t_0}^t h(s)ds\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-2\int_{t_0}^s h(\theta)d\theta\right) ds$$

La densidad es la de una distribución Normal $N(\mu(t), V(t))$:

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{(x-\mu(t))^2}{2V(t)}\right)$$

6 Ejercicio 6:

Sea $\{X(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión considerado en el ejercicio 2 e $\{Y(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión lognormal con factores exógenos introducido en el ejercicio 3. Comprobar que el proceso $X(t)$ no puede ser construido mediante una transformación del proceso Wiener pero su función de densidad de transición sí puede obtenerse a partir de la de $\{Y(t)\}$ por el método de la factorización de las densidades. En caso afirmativo, obtener tal densidad de transición.

Solución:

Este ejercicio consta de tres partes: 1. Comprobar que $X(t)$ no es transformable al Wiener estándar. 2. Comprobar que $X(t)$ se puede obtener de $Y(t)$ por factorización. 3. Obtener la densidad de $X(t)$.

Recordamos los momentos infinitesimales de los procesos:

- **Proceso $X(t)$ (Ej. 2):** $A_1^X(x,t) = xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1}h(t)}{1+x^a h(t)}$ $A_2^X(x) = \sigma^2 x^2$
- **Proceso $Y(t)$ (Ej. 3):** $A_1^Y(x,t) = g(t)x$ $A_2^Y(x,t) = \sigma^2 x^2$
- **Proceso Wiener Estándar $W(t)$:** $A_1^W(x,t) = 0$ $A_2^W(x,t) = 1$

6.1 Transformación de $X(t)$ al Wiener Estándar

Para que $X(t)$ pueda ser transformado al Wiener estándar, sus momentos A_1^X y A_2^X deben satisfacer la condición del Teorema 2.6.1. La forma general que debe tener A_1 es:

$$A_1(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{[A_2]^{1/2}}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial t}}{[A_2]^{3/2}} dy\right\}$$

Sustituimos los momentos de $X(t)$, $A_2 = \sigma^2 x^2$:

- $\frac{\partial A_2}{\partial x} = 2\sigma^2 x$
- $\frac{\partial A_2}{\partial t} = 0$
- $[A_2]^{1/2} = \sigma x$
- $[A_2]^{3/2} = \sigma^3 x^3$

Sustituyendo en la fórmula (RHS):

$$\text{RHS} = \frac{1}{4}(2\sigma^2 x) + \frac{\sigma x}{2}\left\{C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)(\sigma^2 y^2) + 0}{\sigma^3 y^3} dy\right\}$$

$$\text{RHS} = \frac{\sigma^2 x}{2} + \frac{\sigma x}{2}\left\{C_1(t) + \frac{C_2(t)}{\sigma}\int_z^x \frac{1}{y} dy\right\}$$

$$\text{RHS} = \frac{\sigma^2 x}{2} + \frac{\sigma x}{2}\left\{C_1(t) + \frac{C_2(t)}{\sigma}(\ln(x) - \ln(z))\right\}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{\sigma^2 + \sigma C_1(t) - C_2(t)\ln(z)}{2}\right)x + \left(\frac{C_2(t)}{2}\right)x\ln(x)$$

La forma funcional requerida para A_1 es $K_1(t)\cdot x + K_2(t)\cdot x\ln(x)$.

El momento $A_1^X(x,t)$ dado es:

$$A_1^X(x,t) = xg(t) + \frac{a\sigma^2 x^{a+1}h(t)}{1 + x^a h(t)}$$

Esta expresión es una función racional de x^a (multiplicada por x), la cual no es de la forma $K_1(t)x + K_2(t)x\ln(x)$ (dado que $a \neq 0$). Por lo tanto, el proceso $X(t)$ no cumple la condición y no puede ser construido mediante una transformación del proceso Wiener estándar.

6.2 Factorización de $X(t)$ a partir de $Y(t)$

Comprobamos si f_X puede obtenerse de ϕ_Y mediante factorización. Las condiciones son:

1. $A_2^X(x,t) = A_2^Y(x,t)$
2. $A_1^X(x,t) = A_1^Y(x,t) + \frac{A_2^Y(x,t)}{k(x,t)}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$
3. $k(x,t)$ satisface la Ecuación Atrasada de Kolmogorov para $Y(t)$.

En el ejercicio 2 ya realizamos esta comprobación.

1. $\sigma^2 x^2 = \sigma^2 x^2$. La condición 1 se cumple.
2. Como se vio en el ejercicio 2, la condición 2 se cumple si $k(x,t) = 1 + x^a h(t)$.
3. Como se vio en el ejercicio 2, la función $k(x,t) = 1 + x^a h(t)$ con la $h(t)$ dada **es** solución de la ecuación $\frac{\partial k}{\partial t} + A_1^Y \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} A_2^Y \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = 0$.

Concluimos que sí se puede obtener f_X a partir de ϕ_Y por el método de factorización.

6.3 Obtención de la Densidad de Transición f_X

La fórmula de factorización es:

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = \frac{k(x,t)}{k(x_0,t_0)}\phi_Y(x,t|x_0,t_0)$$

Donde:

1. $k(x,t) = 1 + x^a h(t)$
2. $k(x_0,t_0) = 1 + x_0^a h(t_0)$
3. $\phi_Y(x,t|x_0,t_0)$ es la densidad de transición del proceso $Y(t)$ del ejercicio 3.

Primero, obtenemos ϕ_Y. El proceso $Y(t)$ es Lognormal, $Y(t) = e^{Z(t)}$, donde $Z(t) = \ln(Y(t))$. Del ejercicio 3, $Y(t_0) = x_0$ y

$$Y(t) = x_0 \exp\left(\sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right)$$

Tomando logaritmos, el proceso $Z(t) = \ln(Y(t))$ es Gaussiano:

$$Z(t) = \ln(x_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) + \sigma W(t-t_0)$$

La media y varianza de $Z(t)$ son:

$$\mu_Z(t) = E[Z(t)] = \ln(x_0) + \int_{t_0}^{t} g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)$$

$$\Sigma_Z^2(t) = \mathrm{Var}(Z(t)) = \mathrm{Var}(\sigma W(t-t_0)) = \sigma^2(t-t_0)$$

La densidad ϕ_Y es la de una Lognormal $LN(\mu_Z(t), \Sigma_Z^2(t))$:

$$\phi_Y(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\Sigma_Z^2(t)}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu_Z(t))^2}{2\Sigma_Z^2(t)}\right)$$

Sustituyendo $\mu_Z(t)$ y $\Sigma_Z^2(t)$:

$$\phi_Y(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln(x/x_0) - \int_{t_0}^t g(u)du + \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right)^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right)$$

Las funciones $h(t)$ y $h(t_0)$ son:

$$h(t) = \exp\left(-a\left[\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t + \int_{t_0}^t g(s)ds\right]\right)$$

$$h(t_0) = \exp\left(-a\frac{(a-1)\sigma^2}{2}t_0\right)$$

La densidad de transición buscada f_X es:

$$f_X(x,t|x_0,t_0) = \frac{1 + x^a h(t)}{1 + x_0^a h(t_0)} \cdot \phi_Y(x,t|x_0,t_0)$$

Donde ϕ_Y y $h(t), h(t_0)$ son las funciones definidas previamente.

7 Ejercicio 7:

(Proceso logarítmico-normal con factores exógenos). Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = h(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

$$X(t_0) = x_0,$$

donde h es una función continua, $\sigma > 0$, $t \geq t_0 > 0$ y x_0 es una variable lognormal $\Lambda_1[\mu_0, \sigma_0^2]$. Comprobar que se verifican las condiciones de existencia y unicidad de solución para esta ecuación y resolverla. ¿Cómo se pueden obtener las distribuciones finito dimensionales? ¿A qué familia de distribuciones pertenecen las distribuciones finito-dimensionales así como las transiciones?

Solución:

7.1 Comprobación de Existencia y Unicidad

La ecuación diferencial estocástica (SDE) es:

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t)$$

con los coeficientes $a(x, t) = h(t)x$ y $b(x, t) = \sigma x$. Para comprobar la existencia y unicidad de la solución, verificamos las condiciones de Lipschitz y de crecimiento lineal.

1. Condición de Lipschitz (Global): Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [t_0, T]$, existe una constante K tal que:

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq K|x - y|$$

Calculamos:

$$|h(t)x - h(t)y| + |\sigma x - \sigma y| = |h(t)||x - y| + \sigma|x - y| = (|h(t)| + \sigma)|x - y|$$

Dado que h es continua en el intervalo compacto $[t_0, T]$, está acotada, es decir, $\sup_{t\in[t_0,T]} |h(t)| = K_h < \infty$. Tomando $K = K_h + \sigma$, se cumple la condición de Lipschitz global.

2. Condición de Crecimiento Lineal: Existe una constante K' tal que:

$$|a(x, t)|^2 + |b(x, t)|^2 \leq K'(1 + |x|^2)$$

Calculamos:

$$|h(t)x|^2 + |\sigma x|^2 = (h(t)^2 + \sigma^2)x^2$$

Usando la misma acotación K_h para $h(t)$, tenemos $h(t)^2 \leq K_h^2$. Sea $K' = K_h^2 + \sigma^2$. Entonces:

$$(h(t)^2 + \sigma^2)x^2 \leq (K_h^2 + \sigma^2)x^2 = K'x^2 \leq K'(1 + x^2)$$

La condición de crecimiento lineal también se cumple.

Dado que ambas condiciones se satisfacen, la SDE admite una solución única y continua.

7.2 Resolución de la SDE (Indicación b)

Seguimos la indicación y consideramos la transformación $Y(t) = f(X(t))$, con $f(x) = \log(x)$. Aplicamos la fórmula de Itô para $dY(t)$:

$$dY(t) = \left(a(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b(x, t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \left(b(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} \right) dW(t)$$

Las derivadas de $f(x) = \log(x)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Sustituimos $a(x,t) = h(t)x$ y $b(x,t) = \sigma x$:

$$dY(t) = \left((h(t)x) \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(\sigma x)^2}{2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) dt + \left((\sigma x) \left(\frac{1}{x}\right) \right) dW(t)$$

$$dY(t) = \left(h(t) - \frac{\sigma^2 x^2}{2x^2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

$$dY(t) = \left(h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

Esta es una SDE con coeficientes determinísticos (del tipo estudiado en el Teorema 2.8.1). Su solución se obtiene por integración directa:

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(h(s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_{t_0}^{t} \sigma dW(s)$$

$$Y(t) = \log(x_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))$$

Deshacemos el cambio de variable $X(t) = \exp(Y(t))$:

$$X(t) = \exp\left(\log(x_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right)$$

La solución es:

$$X(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right)$$

7.3 Distribuciones (Indicación c)

1. Proceso $Y(t)$: La solución $Y(t)$ es:

$$Y(t) = \underbrace{\log(x_0)}_{Y(t_0)} + \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right)}_{\text{Determinista}} + \underbrace{\sigma(W(t) - W(t_0))}_{\text{Gaussiano}}$$

La condición inicial $x_0 \sim \Lambda_1[\mu_0, \sigma_0^2]$, por definición, $Y(t_0) = \log(x_0) \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$. El término $\sigma(W(t) - W(t_0))$ es $N(0, \sigma^2(t - t_0))$ y es independiente de $Y(t_0)$. $Y(t)$ es la suma de una variable Gaussiana $Y(t_0)$, un término determinista (que solo desplaza la media) y otra variable Gaussiana independiente. La suma de Gaussianos es Gaussiana. Por lo tanto, el proceso $\{Y(t)\}$ es Gaussiano.

2. Distribuciones Unidimensionales: La distribución de $Y(t)$ es $N(\mu_Y(t), \sigma_Y^2(t))$, donde:

$$\mu_Y(t) = E[Y(t_0)] + \int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) = \mu_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0)$$

$$\sigma_Y^2(t) = \mathrm{Var}(Y(t_0)) + \mathrm{Var}(\sigma(W(t) - W(t_0))) = \sigma_0^2 + \sigma^2(t - t_0)$$

Dado que $X(t) = \exp(Y(t))$, la distribución unidimensional de $X(t)$ es Lognormal:

$$X(t) \sim \Lambda_1[\mu_Y(t), \sigma_Y^2(t)]$$

3. Distribuciones Finito-Dimensionales (DFD): Para obtener las DFD de $X(t)$, $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$, primero consideramos el vector $(Y(t_1), \ldots, Y(t_n))$. Dado que $Y(t)$ es un proceso Gaussiano, cualquier vector $(Y(t_1), \ldots, Y(t_n))$ sigue una distribución Normal Multivariante. El vector $(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (\exp(Y(t_1)), \ldots, \exp(Y(t_n)))$ sigue, por definición, una distribución Lognormal Multivariante.

4. Distribuciones de Transición: La transición $f(x,t|y,s)$ (con $t > s$) es la distribución de $X(t)$ dado $X(s) = y$. $Y(t)|Y(s) = \log(y)$ es:

$$Y(t) = \log(y) + \int_s^t h(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(W(t) - W(s))$$

Esta es una $N\left(\log(y) + \int_s^t h(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-s), \sigma^2(t-s)\right)$. Por lo tanto, la distribución de transición $X(t)|X(s) = y$ es Lognormal.

Nota: Confrontación con el Ejercicio 3

La solución obtenida para $X(t)$ es:

$$X(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right)$$

El proceso $Y(t)$ del ejercicio 3 (con $Y(t_0) = x_{t_0}$) se definió como:

$$Y(t) = x_{t_0} \exp\left(\sigma W(t-t_0) + \int_{t_0}^t g(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right)$$

Si identificamos $h(t) = g(t)$ y $x_0 = x_{t_0}$, y usamos la propiedad de que $W(t) - W(t_0)$ es idéntico en distribución a $W(t-t_0)$, los procesos son el mismo. El ejercicio 3 definió un proceso mediante sus momentos $A_1 = g(t)x, A_2 = \sigma^2 x^2$ y demostró que coincidía con la forma explícita. Este ejercicio parte de la SDE $dX = h(t)Xdt + \sigma X dW$ (cuyos momentos son $A_1 = h(t)x, A_2 = \sigma^2 x^2$) y encuentra la solución explícita. Ambos ejercicios establecen la equivalencia entre la SDE (o sus momentos) y la solución explícita Lognormal.

8 Ejercicio 8:

Sean $m(t), h_1(t), h_2(t)$ funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, siendo $h_i(t)$, $i = 1, 2$ positivas con $h_2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso gaussiano con media $m(t)$ y función de covarianza dada por $C_X(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$, donde $s \vee t = \text{Max}(s,t)$ y $s \wedge t = \text{Min}(s,t)$. Supuesto que $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tiene trayectorias continuas, demostrar que el proceso es de difusión.

Solución:

Para demostrar que el proceso $\{X(t)\}$ es un proceso de difusión, debemos verificar las dos condiciones fundamentales:

1. Que $\{X(t)\}$ es un proceso de Markov.
2. Que $\{X(t)\}$ satisface las condiciones de Kolmogorov sobre sus momentos infinitesimales (dado que el enunciado ya nos da la continuidad de las trayectorias).

8.1 Verificación de la Propiedad de Markov

Un proceso Gaussiano es un proceso de Markov si y sólo si su función de covarianza $C(s,t)$ satisface la siguiente condición para $s < \tau < t$:

$$C(s,t)C(\tau,\tau) = C(s,\tau)C(\tau,t)$$

Vamos a verificar esta identidad para la covarianza dada: $C(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t)$.

Sea $s < \tau < t$. Evaluamos cada término de la identidad:

- $C(s,t) = h_1(s \wedge t)h_2(s \vee t) = h_1(s)h_2(t)$
- $C(\tau,\tau) = h_1(\tau \wedge \tau)h_2(\tau \vee \tau) = h_1(\tau)h_2(\tau)$
- $C(s,\tau) = h_1(s \wedge \tau)h_2(s \vee \tau) = h_1(s)h_2(\tau)$
- $C(\tau,t) = h_1(\tau \wedge t)h_2(\tau \vee t) = h_1(\tau)h_2(t)$

Ahora, comprobamos la identidad:

$$C(s,t)C(\tau,\tau) = (h_1(s)h_2(t)) \cdot (h_1(\tau)h_2(\tau)) = h_1(s)h_2(t)h_1(\tau)h_2(\tau)$$

$$C(s,\tau)C(\tau,t) = (h_1(s)h_2(\tau)) \cdot (h_1(\tau)h_2(t)) = h_1(s)h_2(\tau)h_1(\tau)h_2(t)$$

Ambos lados son idénticos. Por lo tanto, el proceso Gaussiano $\{X(t)\}$ es un proceso de Markov.

8.2 Verificación de las Condiciones de Kolmogorov

Dado que el proceso es Gaussiano y de Markov, la distribución condicional $X(t+h)|X(t) = x$ es Normal (Gaussiana) para $h > 0$. Debemos calcular su media y varianza condicionales para encontrar los momentos infinitesimales.

La media y varianza condicionales son:

$$E[X(t+h)|X(t) = x] = m(t+h) + \frac{C(t,t+h)}{C(t,t)}(x - m(t))$$

$$\text{Var}(X(t+h)|X(t) = x) = C(t+h,t+h) - \frac{C(t,t+h)^2}{C(t,t)}$$

Calculamos las covarianzas necesarias (para $h > 0$):

- $C(t,t+h) = h_1(t \wedge (t+h))h_2(t \vee (t+h)) = h_1(t)h_2(t+h)$
- $C(t,t) = h_1(t)h_2(t)$

- $C(t+h,t+h) = h_1(t+h)h_2(t+h)$

Sustituimos:

$$E[X(t+h)|X(t)=x] = m(t+h) + \frac{h_1(t)h_2(t+h)}{h_1(t)h_2(t)}(x-m(t)) = m(t+h) + \frac{h_2(t+h)}{h_2(t)}(x-m(t))$$

$$\text{Var}(X(t+h)|X(t)=x) = h_1(t+h)h_2(t+h) - \frac{(h_1(t)h_2(t+h))^2}{h_1(t)h_2(t)}$$

$$\text{Var}(X(t+h)|X(t)=x) = h_2(t+h)\left(h_1(t+h) - \frac{h_1(t)h_2(t+h)}{h_2(t)}\right) = \frac{h_2(t+h)}{h_2(t)}(h_1(t+h)h_2(t) - h_1(t)h_2(t+h))$$

Ahora, calculamos los límites de los momentos $M_k(x,h) = E[(X(t+h)-x)^k|X(t)=x]$ cuando $h \to 0^+$.

Cálculo de $A_1(x,t)$

$$M_1(x,h) = E[X(t+h)-x|X(t)=x] = E[X(t+h)|X(t)=x] - x$$

$$M_1(x,h) = m(t+h) + \frac{h_2(t+h)}{h_2(t)}(x-m(t)) - x$$

$$M_1(x,h) = (m(t+h)-m(t)) + (x-m(t))\left(\frac{h_2(t+h)}{h_2(t)} - 1\right)$$

Usamos las expansiones de Taylor (dado que m, h_2 son derivables):

$$m(t+h) = m(t) + m'(t)h + O(h^2)$$

$$h_2(t+h) = h_2(t) + h_2'(t)h + O(h^2)$$

Sustituimos:

$$M_1(x,h) = (m'(t)h + O(h^2)) + (x-m(t))\left(\frac{h_2(t) + h_2'(t)h + O(h^2)}{h_2(t)} - 1\right)$$

$$M_1(x,h) = m'(t)h + (x-m(t))\left(1 + \frac{h_2'(t)}{h_2(t)}h + O(h^2) - 1\right) + O(h^2)$$

$$M_1(x,h) = m'(t)h + (x-m(t))\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}h + O(h^2)$$

$$A_1(x,t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{M_1(x,h)}{h} = m'(t) + (x-m(t))\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}$$

El límite existe.

Cálculo de $A_2(x,t)$

$$M_2(x,h) = E[(X(t+h)-x)^2|X(t)=x]$$

$$M_2(x,h) = \text{Var}(X(t+h)|X(t)=x) + (M_1(x,h))^2$$

Analizamos la varianza $\sigma_c^2 = \text{Var}(...)$ usando Taylor para $h_1(t+h) = h_1(t) + h_1'(t)h + O(h^2)$:

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{h_2(t) + h_2'(t)h + O(h^2)}{h_2(t)}\right)\left((h_1(t) + h_1'(t)h)h_2(t) - h_1(t)(h_2(t) + h_2'(t)h) + O(h^2)\right)$$

$$\sigma_c^2 = (1+O(h))\left(h_1(t)h_2(t) + h_1'(t)h_2(t)h - h_1(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t)h + O(h^2)\right)$$

$$\sigma_c^2 = (1+O(h))\left((h_1'(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t))h + O(h^2)\right)$$

$$\sigma_c^2 = (h_1'(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t))h + O(h^2)$$

Ahora, $M_2(x,h)$:

$$M_2(x,h) = \sigma_c^2 + (M_1(x,h))^2 = \left[(h_1'(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t))h + O(h^2)\right] + (O(h))^2$$

$$M_2(x,h) = (h_1'(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t))h + O(h^2)$$

$$A_2(x,t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{M_2(x,h)}{h} = h_1'(t)h_2(t) - h_1(t)h_2'(t)$$

El límite existe (y no depende de x).

Cálculo de momentos superiores (k=4)

Verificamos la condición del Teorema 2.3.1 para $k = 4$: $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} M_4(x,h) = 0$. La variable $Z = X(t+h) - x$ sigue una distribución $N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, donde:

$$\mu_Z = M_1(x,h) = O(h)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_c^2 = O(h)$$

El cuarto momento $M_4 = E[Z^4]$ de una normal es $E[Z^4] = 3(\sigma_Z^2)^2 + 6\mu_Z^2\sigma_Z^2 + \mu_Z^4$. Sustituimos los órdenes de magnitud:

$$M_4(x,h) = 3(O(h))^2 + 6(O(h))^2(O(h)) + (O(h))^4$$

$$M_4(x,h) = O(h^2) + O(h^3) + O(h^4) = O(h^2)$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{M_4(x,h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{O(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} O(h) = 0$$

La condición de momentos superiores se satisface.

Conclusión

El proceso $\{X(t)\}$:

1. Es un proceso de Markov.
2. Tiene trayectorias continuas (por hipótesis).
3. Satisface las condiciones de Kolmogorov (existencia de A_1, A_2 y $\lim \frac{M_4}{h} = 0$).

Por lo tanto, $\{X(t)\}$ es un proceso de difusión.