1. Distribución Lognormal multivariante.

Notación: Dado un vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$, la expresión $\log(\mathbf{X})$ significará el vector de componentes $\log(\mathbf{X}) = (\log(X_1), \dots, \log(X_p))'$. Con ello podemos definir la distribución lognormal multivariante al igual que se hace en el caso unidimensional:

Definición 1.1. *Sea* $\mathbf{Y} \rightsquigarrow N_p[\mu; \Sigma]$. *Consideremos* $\log(\mathbf{X}) = (\log(X_1), \dots, \log(X_p))'$ *donde* $\log(X_i) = Y_i$, $i = 1, \dots, p$. *En esta situación, a la distribución de* $\mathbf{X}$ *se le conoce como distribución logarítmico normal multivariante y se notará* $\Lambda_p[\mu; \Sigma]$. *Es decir, un vector aletorio se disribuye de forma lognormal si su logaritmo lo hace de forma normal.*

A partir de esta definición es inmediato obtener su función de densidad sin más que hacer el cambio de variable que nos proponen. En efecto, para hallar la distribución de $\mathbf{X}$ debemos partir de la de $\mathbf{Y}$, que es normal. En consecuencia, aplicando el teorema de cambio de variable se tiene

$$f_X(x) = f_Y(\log(x))|J|$$

donde J es el jacobiano de la transformación inversa, es decir de $g(y) = \log(x)$, y que es

$$|J| = \begin{vmatrix} 1/x_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1/x_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1/x_p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} x_i^{-1}$$

Por lo tanto, la densidad de $\mathbf{X}$ es

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{p} x_i} \exp\left(-\frac{1}{2}(\log(x) - \mu)'\Sigma^{-1}(\log(x) - \mu)\right) \ , \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p$$

NOTA: Los valores que toma el vector $\mathbf{X}$ son positivos puesto que $\mathbf{X} = e^{\mathbf{Y}}$, entendiendo al igual que antes esa expresión componente a componente.

A partir de esta definición, y teniendo en cuenta las propiedades conocidas de la distribución normal (ver tema 1), se pueden obtener las siguientes propiedades para la distribución lognormal:

- **Momentos:** Dado el vector $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)'$ se tiene

  $$E[X_1^{s_1} X_2^{s_2} \dots X_p^{s_p}] = E[e^{Y_1 s_1 + \dots + Y_p s_p}] = M_Y(s)$$

  donde M_Y es la función generatriz de momentos de Y. Por lo tanto,

  $$E[X_1^{s_1} X_2^{s_2} \dots X_p^{s_p}] = E[e^{Y_1 s_1 + \dots + Y_p s_p}] = M_Y(s) = e^{s'\mu + \frac{s'\Sigma s}{2}}.$$

  A partir de esta expresión se puede obtener el vector de medias y la matriz de cvarianzas, sin más que seleccionar los vectores $\mathbf{s}$ adecuados.

- **Marginales y condicionadas:** Dada la definición establecida se tiene lo siguiente:

  Sea $\mathbf{X} \rightsquigarrow \Lambda_p[\mu; \Sigma]$, con $\Sigma > 0$ y particionémoslo en la forma $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_{(1)} \mid \mathbf{X}'_{(2)})'$ donde $\mathbf{X}_{(1)}$ es q-dimensional y $\mathbf{X}_{(2)}$ es $(p-q)$-dimensional. Supongamos en μ y Σ las particiones inducidas a partir de la anterior, es decir:

  $$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

  . Entonces:

  - $\mathbf{X}_{(1)} \rightsquigarrow \Lambda_q[\mu_{(1)}; \Sigma_{11}]$
  - $\mathbf{X}_{(2)} \rightsquigarrow \Lambda_{(p-q)}[\mu_{(2)}; \Sigma_{22}]$
  - $\mathbf{X}_{(2)} \mid \mathbf{X}_{(1)} = x_{(1)} \rightsquigarrow \Lambda_{p-q}[\mu_{(2)} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\log(x_{(1)}) - \mu_{(1)}); \Sigma_{22.1}]$
  - $\mathbf{X}_{(1)} \mid \mathbf{X}_{(2)} = x_{(2)} \rightsquigarrow \Lambda_q[\mu_{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\log(x_{(2)}) - \mu_{(2)}); \Sigma_{11.2}]$

  donde $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ y $\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$.