Índice general

Capítulo 1

Distribución Normal Multivariante

1.1. Distribución normal multivariante. Aspectos probabilísticos

1.1.1. Definición. Media y matriz de covarianzas

Hay varias formas de introducir la ley Normal Multivariante. Nosotros lo haremos a partir de la función de densidad. Comenzaremos con el caso definido positivo.

Definición 1.1.1. *Un vector aleatorio* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$ *que toma valores en* $\mathbb{R}^p$ *se distribuye según una ley normal normal p-variante si su densidad es de la forma*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \right) \ , \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \tag{1.1}$$

donde $\Sigma_{p\times p}$ *es una matriz simétrica definida positiva y* $\mu \in \mathbb{R}^p$ *.*

Ahora verificaremos que la función (1.1) es realmente una densidad. Necesitamos antes un resultado técnico.

Lema 1.1.1. *Sea* $\mathbf{X}$ *un vector aleatorio p-dimensional con función de densidad* f *definida en* $\mathbb{R}^p$ *. Si* $\mathbf{C}_{p\times p}$ *es una matriz no singular entonces la densidad del vector aleatorio* $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ *viene dada por* $h(y) = f(\mathbf{C}^{-1}y) \mid \mathbf{C} \mid^{-1}$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$ *.*

Demostración. Consideremos $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $y = g(x) = \mathbf{C}x$. Como $\mathbf{C}$ es no singular, entonces existe $\mathbf{C}^{-1}$ y se verifica $g^{-1}(y) = \mathbf{C}^{-1}y$. Si llamamos c'_{ij} a los elementos de $\mathbf{C}^{-1}$ y notamos $g^{-1}(y) = \left(g_1^{-1}(y_1, \dots, y_p), \dots, g_p^{-1}(y_1, \dots, y_p)\right)$, entonces $g_i^{-1}(y_1, \dots, y_p) = \sum_{j=1}^{p} c'_{ij} y_j$ de donde $\dfrac{\partial g_i^{-1}(y_1, \dots, y_p)}{\partial y_l} = c'_{il}$, $i, l = 1, \dots, p$, por lo que $\mathbf{J} =\mid \mathbf{C}^{-1} \mid=\mid \mathbf{C} \mid^{-1}$. Aplicando el teorema de cambio de variable, y teniendo en cuenta que la función g transforma $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^p$ se con

cluye el resultado ■

Teorema 1.1.1. *La función (1.1) es una densidad. Además* $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mu$ *y* $\mathrm{Cov}[\mathbf{X}] = \Sigma$*.*

Demostración. En primer lugar, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$ pues $\mid \Sigma \mid > 0$. Por otro lado, como $\Sigma > 0$ entonces $\exists \mathbf{C}_{p\times p}$ no singular tal que $\Sigma = \mathbf{C}\mathbf{C}'$. Sea el cambio de variable $\mathbf{Y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}$. A partir del lema anterior el jacobiano de la transformación inversa es $\mathbf{J} = \mid \mathbf{C} \mid$. Además $\mid \Sigma \mid = \mid \mathbf{C} \mid^2$, por lo que $\mid \mathbf{C} \mid = \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}$. Con todo ello

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}y-\mu)'\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}y-\mu)\right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mathbf{C}^{-1}\mu)'\mathbf{C}'\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}(y-\mathbf{C}^{-1}\mu)\right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\eta)'(y-\eta)\right) dy \\
&= \prod_{i=1}^{p} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_i-\eta_i)^2\right) dy_i = 1 \qquad \text{donde} \qquad \eta = \mathbf{C}^{-1}\mu
\end{aligned}$$

A partir del cálculo anterior se deduce que el vector $\mathbf{Y}$ tiene por densidad

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\eta)'(y-\eta)\right)$$

y de la última integral se deduce, integrando en $\mathbb{R}^{p-1}$, que las marginales son normales unidimensionales $\mathrm{N}_1[\eta_i; 1]$ y además son independientes. Con ello, $\mathrm{E}[y_i] = \eta_i$, $i = 1, \ldots, p$, de donde $\mathrm{E}[\mathbf{Y}] = \eta$ y así

$$\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathrm{E}[\mathbf{CY}] = \mathbf{C}\eta = \mathbf{CC}^{-1}\mu = \mu\ .$$

Además, $\mathrm{Cov}[y_i, y_j] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, p$, por lo que $\mathrm{Cov}[\mathbf{Y}] = \mathbf{I}_p$. Así

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{X}] = \mathrm{Cov}[\mathbf{CY}] = \mathbf{C}\,\mathrm{Cov}[\mathbf{Y}]\mathbf{C}' = \mathbf{CC}' = \Sigma \qquad \blacksquare$$

1.1.2. Algunas propiedades. Tipificación. Función característica

El primer resultado que mostramos presenta dos partes: en la primera se generaliza la propiedad de independencia de las componentes del vector normal (ya implícita en una versión más simple en la verificación de la densidad normal), mientras que en la segunda se observa cómo se comporta esta distribución frente a cambios lineales no singulares.

Teorema 1.1.2. *Sea* $\mathbf{X} \rightsquigarrow N_p[\mu; \Sigma]$ *con* $\Sigma > 0$.

1. *Si* $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2)$ *entonces* $X_i \rightsquigarrow N_1[\mu_i; \sigma_i^2]$, $i = 1, \ldots, p$ *y además dichas variables son independientes.*

2. *Sea* $\mathbf{B}_{p\times p}$ *no singular y sea* $\mathbf{Y} = \mathbf{BX}$. *Entonces* $\mathbf{Y} \rightsquigarrow N_p[\mathbf{B}\mu; \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}']$.

Demostración.

1. A partir de la expresión genérica de la densidad normal tendremos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \prod_{i=1}^{p} \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)
\end{aligned}$$

De esta expresión se deduce, integrando en $\mathbb{R}^{p-1}$, que las marginales se distribuyen según normales unidimensionales $\mathrm{N}_1[\mu_i;\sigma_i^2]$ y son independientes.

2. Dado el cambio $\mathbf{Y} = \mathbf{BX}$, el jacobiano de la transformación inversa es $\mid \mathbf{B} \mid^{-1}$. Por tanto

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\mid \mathbf{B} \mid^{-1}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1}y-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{B}^{-1}y-\mu)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}} \mid \mathbf{B} \mid} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mathbf{B}\mu)'\mathbf{B}'^{-1}\Sigma^{-1}\mathbf{B}^{-1}(y-\mathbf{B}\mu)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}' \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mathbf{B}\mu)'(\mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}')^{-1}(y-\mathbf{B}\mu)\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Comentario 1.1.1. *Como Σ es definida positiva, entonces $\Sigma = \mathbf{CC}'$. Consideremos el cambio de variable $\mathbf{Y} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)$. Entonces, aplicando el resultado anterior, se tiene que $\mathbf{Y} \rightsquigarrow N_p[\mathbf{0};\mathbf{I}_p]$.*

Finalmente se calcula la función característica de la ley normal.

Teorema 1.1.3. *Sea $\mathbf{X} \rightsquigarrow N_p[\mu;\Sigma]$ con $\Sigma > 0$. Entonces su función característica viene dada por*

$$\Phi_X(\alpha) = \exp\left(i\alpha'\mu - \frac{1}{2}\alpha'\Sigma\alpha\right) \quad , \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^p$$

<u>Demostración.</u> Empezaremos tratando el caso $\Sigma = \mathbf{I}_p$.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{Y}}(t) = \mathrm{E}[e^{it'\mathbf{Y}}] &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(it'y - \frac{1}{2}y'y\right) dy = \prod_{j=1}^{p} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(it_jy_j - \frac{1}{2}y_j^2\right) dy_j \\ &= \prod_{j=1}^{p} \Phi_{\mathbf{Y}_j}(t_j) = \prod_{j=1}^{p} \exp\left(-\frac{1}{2}t_j^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t't\right) \end{aligned}$$

donde se ha usado la forma de la función característica para la normal unidimensional. A partir de ello se tendrá, retomando el cambio de la tipificación $\Sigma = \mathbf{CC}'$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{X}}(\alpha) &= \mathrm{E}[e^{i\alpha'\mathbf{X}}] = \mathrm{E}[e^{i\alpha'(\mathbf{CY}+\mu)}] = e^{i\alpha'\mu}\,\mathrm{E}[e^{i\alpha'\mathbf{CY}}] = e^{i\alpha'\mu}\Phi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{C}'\alpha) \\ &= e^{i\alpha'\mu}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha'\mathbf{CC}'\alpha\right) = \exp\left(i\alpha'\mu - \frac{1}{2}\alpha'\Sigma\alpha\right) \ , \ \forall\alpha \in \mathbb{R}^p \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.1.3. Caracterización de la ley normal

El siguiente resultado conduce a una interesante caracterización de la ley normal multivariante.

Teorema 1.1.4. *Sea $\mathbf{X} \rightsquigarrow N_p[\mu;\Sigma]$ con $\Sigma > 0$.*

1. *Sea $\mathbf{A}_{q\times p}$ una matriz de constantes con $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = q \le p$. Entonces*
   $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} \rightsquigarrow N_q[\mathbf{A}\mu;\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}']$

2. *Toda combinación lineal de las componentes de un vector aleatorio normal es una variable normal unidimensional.*

3. *La condición necesaria y suficiente para que un vector aleatorio $\mathbf{X}$ se distribuya de forma normal multivariante es que cualquier combinación lineal de sus componentes sea una variable aleatoria unidimensional que se distribuya de forma normal.*

Demostración.

1. Basándonos en la función característica se tiene:

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(t) = \mathrm{E}[e^{it'\mathbf{Y}}] = \mathrm{E}[e^{it'\mathbf{AX}}] = \Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}'t) = \exp\left(it'\mathbf{A}\mu - \frac{1}{2}t'\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}'t\right)$$

   de donde se obtiene el resultado.

2. Es inmediato, tomando en el apartado anterior $\mathbf{A}$ como un vector $p \times 1$. Notemos que, en particular, cada componente es normal unidimensional.

3. Falta por verificar la condición suficiente. Así pues partimos de que $\forall l \in \mathbb{R}^p$ se tiene que $l'\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathrm{N}_1[l'\mu; l'\Sigma l]$. Con ello

$$\Phi_{l'\mathbf{X}}(t,l) = \mathrm{E}[e^{itl'\mathbf{X}}] = \exp\left(itl'\mu - \frac{1}{2}t^2 l'\Sigma l\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall l \in \mathbb{R}^p$$

   En particular

$$\Phi_{l'\mathbf{X}}(1,l) = \mathrm{E}[e^{il'\mathbf{X}}] = \exp\left(il'\mu - \frac{1}{2}l'\Sigma l\right) = \Phi_{\mathbf{X}}(l)\ ,\ \forall l \in \mathbb{R}^p \quad \blacksquare$$

Comentario 1.1.2. *Notemos que tenemos ya cuatro formas de definir la densidad normal, con $\Sigma > 0$.*

1. *A partir de su función de densidad.*

2. *A partir de su función característica.*

3. *$\mathbf{X}_{p\times 1}$ se distribuye de forma normal p-dimensional sí y sólo sí toda combinación lineal de sus componentes se distribuye como una normal unidimensional.*

4. *$\mathbf{X} \rightsquigarrow N_p[\mu;\Sigma]$, con $\Sigma > 0$, sí y sólo sí $\mathbf{X}$ se distribuye como $\mu + \mathbf{AU}$, donde $\Sigma = \mathbf{AA}'$ ($\mathbf{A}$ no singular) y donde $\mathbf{U} \rightsquigarrow N_p[0;\mathbf{I}_p]$. Esto es inmediato a partir de los cambios de variable ya estudiados y precisa, obviamente, introducir previamente la normal esférica.*

1.1.4. Distribuciones marginales y condicionadas

Sea $\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathrm{N}_p[\mu;\Sigma]$, con $\Sigma > 0$ y particionémoslo en la forma $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_{(1)} \mid \mathbf{X}'_{(2)})'$ donde $\mathbf{X}_{(1)}$ es q-dimensional y $\mathbf{X}_{(2)}$ es $(p-q)$-dimensional. Supongamos en μ y Σ las particiones inducidas a partir de la anterior, o sea

$$\mu = \left(\begin{array}{c} \mu_{(1)} \\ \hline \mu_{(2)} \end{array}\right) \quad ; \quad \Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right)$$

Teorema 1.1.5. *En las condiciones anteriores,*

1. *$\mathbf{X}_{(1)} \rightsquigarrow N_q[\mu_{(1)};\Sigma_{11}]$ y $\mathbf{X}_{(2)} \rightsquigarrow N_{(p-q)}[\mu_{(2)};\Sigma_{22}]$*

2. *Si $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$ entonces $\mathbf{X}_{(1)}$ y $\mathbf{X}_{(2)}$ son independientes.*

Demostración.

1. Para calcular la distribución de $\mathbf{X}_{(1)}$ basta tomar la matriz $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_q \mid \mathbf{0}_{q\times(p-q)}]$ y el cambio de variable $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$. Con ello tenemos que $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_{(1)}$ y además $\mathbf{Y} \rightsquigarrow \mathrm{N}_q[\mathbf{C}\mu; \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}']$. Realizando las operaciones se concluye que $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_{(1)} \rightsquigarrow \mathrm{N}_q[\mu_{(1)}; \Sigma_{11}]$.

   Para calcular la densidad de $\mathbf{X}_{(2)}$ basta considerar $\mathbf{C} = [\mathbf{0}_{(p-q)\times q} \mid \mathbf{I}_{p-q}]$.

2. La demostración es inmediata sin más que tener en cuenta que en este caso la densidad conjunta factoriza. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \mid \Sigma_{11} \mid^{\frac{1}{2}} \mid \Sigma_{22} \mid^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}((x_{(1)}-\mu_{(1)}) \mid (x_{(2)}-\mu_{(2)}))' \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(1)}-\mu_{(1)} \\ x_{(2)}-\mu_{(2)} \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} \mid \Sigma_{11} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{(1)}-\mu_{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)}-\mu_{(1)})\right) \\
&\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \mid \Sigma_{22} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{(2)}-\mu_{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}(x_{(2)}-\mu_{(2)})\right) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 1.1.6. *En las condiciones del teorema anterior se tiene*

1. $\mathbf{X}_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mathbf{X}_{(1)} \rightsquigarrow N_{p-q}[\mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_{(1)}; \Sigma_{22.1}]$

2. $\mathbf{X}_{(1)}$ *y* $\mathbf{X}_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mathbf{X}_{(1)}$ *son independientes.*

3. $\mathbf{X}_{(2)} \mid \mathbf{X}_{(1)} = x_{(1)} \rightsquigarrow N_{p-q}[\mu_{(2)} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)}); \Sigma_{22.1}]$

donde $\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$

Demostración. Consideremos la matriz

$$
\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & \mathbf{0}_{q\times(p-q)} \\ \hline -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right)
$$

y realicemos el cambio de variable $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$. Con ello es inmediato que $\mathbf{Y} \rightsquigarrow \mathrm{N}_p[\mathbf{C}\mu; \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}']$. Pero

$$
\mathbf{Y} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{Y}_{(1)} \\ \hline \mathbf{Y}_{(2)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{X}_{(1)} \\ \hline \mathbf{X}_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mathbf{X}_{(1)} \end{array}\right) \quad , \quad \mathbf{C}\mu = \left(\begin{array}{c} \mu_{(1)} \\ \hline \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_{(1)} \end{array}\right)
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}' &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & \mathbf{0}_{q\times(p-q)} \\ \hline -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ \hline \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & \Sigma_{22.1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ \hline \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \mathbf{0}_{q\times(p-q)} \\ \hline \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & \Sigma_{22.1} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

de donde se deducen los dos primeros apartados. Para calcular la distribución condicionada tengamos en cuenta que la densidad conjunta de $\mathbf{Y}$, al ser independientes $\mathbf{Y}_{(1)}$ e $\mathbf{Y}_{(2)}$, viene dada por

$$
\begin{aligned}
f(y_{(1)}, y_{(2)}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \mid \Sigma_{11} \mid^{\frac{1}{2}} \mid \Sigma_{22.1} \mid^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(y_{(1)}-\mu_{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(y_{(1)}-\mu_{(1)})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(y_{(2)}-\eta)'\Sigma_{22.1}^{-1}(y_{(2)}-\eta)\right)
\end{aligned}
$$

donde $\eta = \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_{(1)}$. Si realizamos el cambio de variable inverso al anterior

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\mathbf{X}_{(1)}}{\mathbf{X}_{(2)}}\right) = \left(\frac{\mathbf{Y}_{(1)}}{\mathbf{Y}_{(2)} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mathbf{Y}_{(1)}}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & \mathbf{0}_{q\times(p-q)} \\ \hline \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right)\left(\frac{\mathbf{Y}_{(1)}}{\mathbf{Y}_{(2)}}\right)$$

la matriz jacobiana de la transformación es $\mathbf{I}_p$ y con ello la densidad de $\mathbf{X}$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \mid \Sigma_{11} \mid^{\frac{1}{2}} \mid \Sigma_{22.1} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{(1)} - \mu_{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}x_{(1)} - \eta)'\Sigma_{22.1}^{-1}(x_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}x_{(1)} - \eta)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \mid \Sigma_{11} \mid^{\frac{1}{2}} \mid \Sigma_{22.1} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{(1)} - \mu_{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{(2)} - \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right)' \Sigma_{22.1}^{-1}\left(x_{(2)} - \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right)\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f(x_{(2)} \mid \mathbf{X}_{(1)} = x_{(1)}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \mid \Sigma_{22.1} \mid^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{(2)} - \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right)' \Sigma_{22.1}^{-1}\left(x_{(2)} - \mu_{(2)} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)})\right)\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.1.7. *En las condiciones del teorema anterior se tiene*

1. $\mathbf{X}_{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{X}_{(2)} \rightsquigarrow N_q[\mu_{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_{(2)}; \Sigma_{11.2}]$
2. $\mathbf{X}_{(2)}$ *y* $\mathbf{X}_{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{X}_{(2)}$ *son independientes.*
3. $\mathbf{X}_{(1)} \mid \mathbf{X}_{(2)} = x_{(2)} \rightsquigarrow N_q[\mu_{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_{(2)} - \mu_{(2)}); \Sigma_{11.2}]$

donde $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$

Demostración. La demostración es similar a la anterior pero considerando la matriz

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_q & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right) \quad \blacksquare$$