PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

CINEMATICA DE ROBOTS

Autor: Juan Pablo Salguero Hernández

2019

Apuntes de clase

09-Ene-2019

Juan Pablo Salguero

¿Qué es un robot?

Un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlad automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales

¿Cuáles son los tipos de robot?

Mapa Mental

- Robots manipuladores
- Robots móviles
  - Robots Terrestres
    - Robots con ruedas
    - Robots con patas
  - Robots Acuáticos
    - Robots Marinos
    - Robots Subterraneo
  - Robots aéreos

Mencione algunas aplicaciones típicas de un robot industrial

Son empleados en tareas de precisión y repetitivas.

- Soldaduras • Cortes • Paletizado • Pulido
- Forja, Prensa, Fundición

¿Cuáles son las diferencias entre un robot industrial y una maquina-herramienta CNC?

Las maquinas-herramientas CNC son utilizadas para la producción de una gran variedad de productos en cambio los robots industriales cumplen normalmente una función de acarreo, desplazamiento o movimiento de ciertos materiales

¿Como debe decidirse el tipo de robot para determinado trabajo?

Se debe hacer un analisis de lo que se necesita realizar, dependiendo de las variables a mejorar y las variables que se tengan en el entorno de trabajo.

¿Qué es R.U.R?

Rossum's Universal Robots obra teatral de ciencia ficción

Diferencias entre Robots seriales y paralelos

Los paralelos cuentan con articulaciones prismaticas y rotativas a la vez.

Los paralelos tiene los eslabones dispuestos en paralelo en lugar serie.

¿Cuáles son los problemas de seguridad con el uso de robots?

- Problemas de autentificación: algunos robots no tienen nombre de usuario y/o contraseña, permitiendo a cualquiera acceder de manera remota a sus servicios.
- Riesgo de colisión entre el operativo y el robot
- Riesgo de atrapamiento y aplastamiento
- Riesgo de alcance al operario por piezas que el robot deje caer o proyecte.

¿Cuál es la población de robots en el mundo?

1.63 Millones de Robots IFR (Federación Internacional de Robotica) 17 Marzo 2017

¿Que industria es considerada el usuario mas grande de robots industriales de tipo serial?

La industria Automotriz

¿Cuales son las areas nuevas de aplicación de robots?

Electronica, Metalurgia, quimica, plastico, goma, comercio, almacenes, logistica y servicios.

09/Ene/2019 - 14/Ene/2019

Fecha?

Juan Pablo Salguero Hernández

Capitulo 3 Herramientas matematicas para la localización espacial

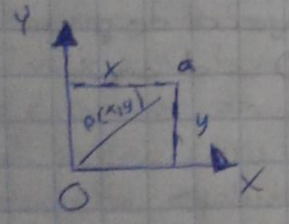
Para que el robot pueda recoger una pieza, es necesario conocer la posición y orientacion de esta con respecto a la base del robot.

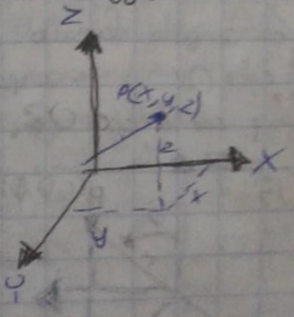
3.1. Representación de la posición

La forma mas intuitiva y utilizada de especificar la posición de un punto son cordenadas cartesianas.

3.1.1

Normalmente los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares en sí con un origen definido. Denominados sistemas cartesiana





3.1.2 Coordenadas cartesianas

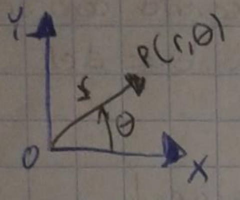
En un sistema coordenado OXY, un punto a vendrá expresado por las componentes (x,y). Este punto tiene asociado un vector p(x,y) que va desde el origen al punto a.

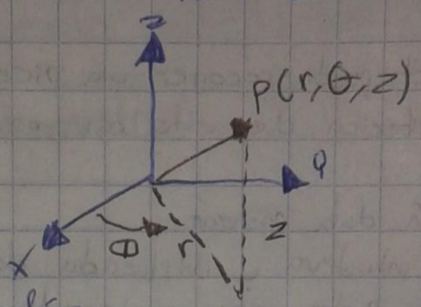
En el caso de un sistema OXYZ, el vector cartesiano estará representado y definido por las componentes cartesianas (x,y,z).

3.1.3 Coordenadas polares y cilíndricas

Es posible la localización de un punto o vector p respecto a un sistema OXY utilizando coordenadas polares p(r, θ). donde r representa la distancia desde el O hasta el extremo del vector p y θ es el ángulo que forma el vector p con el eje OX.

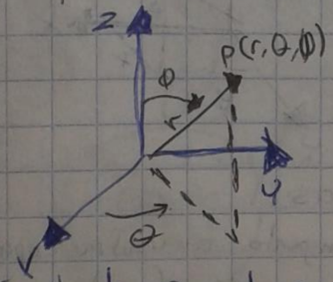
En el caso de trabajar con un sistema OXYZ, r y θ tienen el mismo significado, mientras que z expresa la proyección sobre el eje OZ del vector p. A este sistema se le llama coordenadas cilíndricas $P(r, \theta, z)$.





3.1.4 Coordenadas esféricas.

En este sistema se usan el sistema de referencia OXYZ, el vector p tendrá como coordenadas (r, θ, ϕ), donde r es la distancia desde el origen al extremo del vector p, la componente θ es el ángulo formado por la proyección de p sobre el plano OXY con el eje OX, y la componente Φ es el ángulo formado por el vector p con el eje OZ.

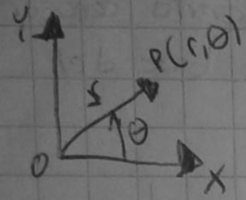


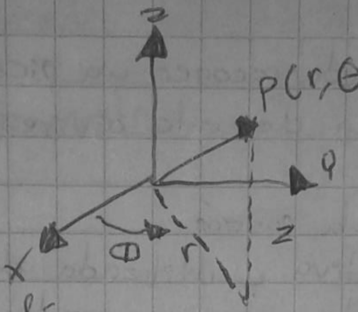
3.2 Representación de la Orientación.

Una orientación en el espacio viene definida por 3 grados de libertad. Para poder describir de forma fácil la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, normalmente se le asigna un nuevo sistema al objeto y se estudia la relación entre los 2 sistemas. Normalmente se supone que ambos sistemas coinciden en el origen.

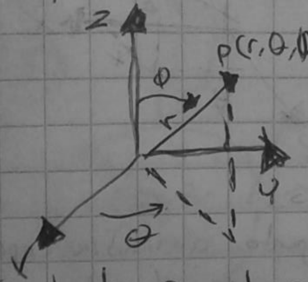
3.2.1 Matrices de Rotación

Se tienen 2 sistemas de referencia OXY y OUV con un mismo origen O, siendo OXY de referencia fijo y OUV móvil solidario al objeto vector p. A este sistema se le llama coordenadas cilíndricas $P(r, \theta, z)$.



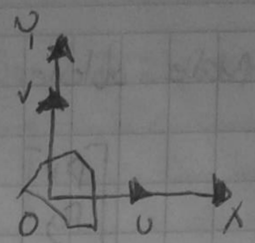


3.1.4 Coordenadas esféricas.
En este sistema se usan el sistema de referencia OXYZ, el vector p tendrá como coordenadas (r, θ, ϕ), donde r es la distancia desde el origen al extremo del vector p, la componente θ es el ángulo formado por la proyección de p sobre el plano OXY con el eje OX, y la componente ϕ es el ángulo formado por el vector p con el eje OZ.



3.2 Representación de la Orientación.
Una orientación en el espacio viene definida por 3 grados de libertad. Para poder describir de forma fácil la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, normalmente se le asigna un nuevo sistema al objeto y se estudia la relación entre los 2 sistemas. Normalmente se supone que ambos sistemas coinciden en el origen.
3.2.1 Matrices de Rotación
Se tienen 2 sistemas de referencia OXY y OUV con un mismo origen O, siendo OXY de referencia fijo y OUV móvil solidario al objeto

Los vectores unitarios del sistema OXY son i_x, j_y, mientras que OUV son i_u, j_v



Un vector p del plano se puede representar en ambos sistemas como

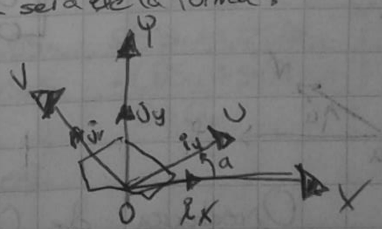
$$P_{xy} = [P_x, P_y]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y$$
$$P_{uv} = [P_u, P_v]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v$$

Realizando una serie de transformaciones se llega a:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \end{bmatrix}$$

donde:

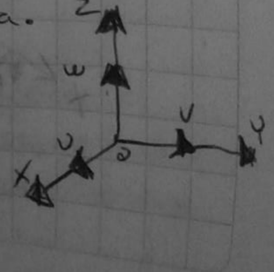
$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v \\ j_y i_u & j_y j_v \end{bmatrix}$$ es la llamada matriz de rotación que define la orientación del sistema OUV con respecto al OXY y sirve para transformar las coordenadas de un sistema a otro. En el caso de dos dimensiones, si se considera la posición relativa del sistema OUV girando un angulo a sobre OXY tras realizar los productos escalares, la matriz R será de la forma:



$$R = \begin{bmatrix} \cos a & -\text{sen}\, a \\ \text{sen}\, a & \cos a \end{bmatrix}$$

En caso a=0 la matriz R corresponderá a la matriz unitaria.

En un espacio tridimensional OXYZ y OUVW coincidentes en el origen, siendo OXYZ fijo y OUVW el solidario cuya orientación se desea definir. Los vectores de OXYZ serán $i_x j_y k_z$ mientras OUVW serán i_u, j_v, k_w. Un vector p podrá ser referido a cualquiera de los sistemas de la siguiente manera.



$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v + P_w \cdot k_w$$
$$P_{xyz} = [P_x, P_y, P_z]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y + P_z \cdot k_z$$

se puede obtener la equivalencia:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

donde R:

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix}$$

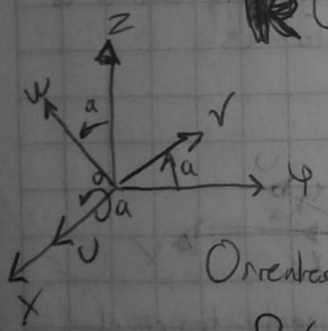
es la matriz de orientación que define al sistema OUVW con respecto al sistema OXYZ. También recibe el nombre de matriz de cosenos directores y se trata de una matriz ortonormal

$R^{-1} = R^T$.

La principal utilidad de esta matriz de rotación es la orientación de sistemas girados sobre uno de los ejes principales del sistema de referencia.

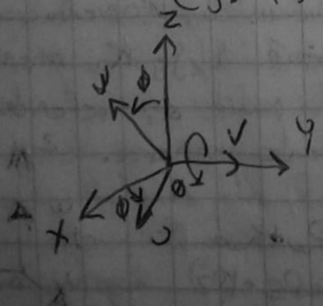
Orientación de OUVW, con el eje OU coincidente a OX

$$R(x,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\operatorname{sen} a \\ 0 & \operatorname{sen} a & \cos a \end{bmatrix}$$



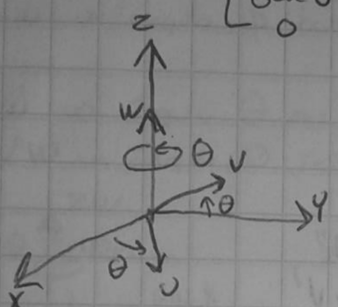
Orientación de OUVW, con el eje coincidente en OY

$$R(y,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$



Orientación de OUVW con el eje OW coincidente en OZ representado por:

$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Las tres últimas orientaciones son las matrices básicas de orientación.

Se pueden realizar rotaciones varias, si el sistema OUVW se le aplica una rotación a sobre OX, otra rotación ϕ sobre OY y una rotación θ sobre OZ se expresa como:

$$T = R(z,\theta)\, R(y\theta)\, R(x,a) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\phi Ca + C\theta S\phi Sa & S\theta Sa + C\theta S\phi Ca \\ S\theta C\phi & C\phi Ca + S\theta S\phi Sa & -C\theta Sa + S\theta S\phi Ca \\ -S\phi & C\phi Sa & C\phi Ca \end{bmatrix}$$

es importante respetar el orden.

3.2.2 Ángulos de Euler

Para la representación de orientación en un espacio tridimensional en una matriz de rotación es necesario definir 9 elementos.

Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere ~~definir~~ describir mediante ϕ, θ, ψ respecto a OXYZ girando sucesivamente al sistema OXYZ.

Ángulo de Euler ZXZ

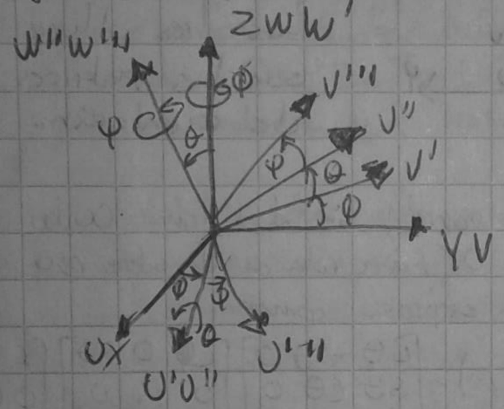
Partiendo de OXZY y OUVW coincidentes. se puede colocar el sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos:

1.- Girar OUVW un ángulo ϕ con respecto a OZ convirtiéndose así en OU'V'W'

2 Girar OU'V'W' un ángulo θ con respecto al eje OU', convirtiendose así en OU''V''W''.

3 Girar OU''V''W'' un ángulo ψ con respecto a OW'' convirtiendose finalmente a OU'''V'''W'''

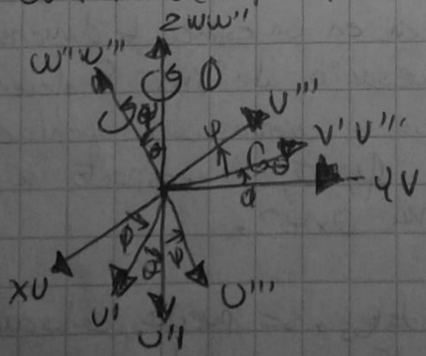
Importante seguir secuencia



Ángulos de Euler ZYZ

Diferencia con el primero en la elección del eje del segundo giro, se siguen los siguientes pasos:

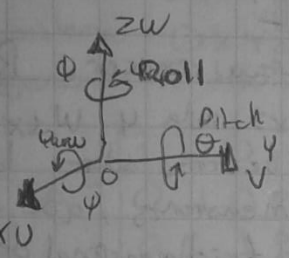
1. Girar OUVW un ángulo φ con respecto OZ, → OU'V'W'
2. Girar OU'V'W' un ángulo θ con respecto OU' → OU''V''W''
3. Girar OU''V''W'' un ángulo ψ con respecto a OW'' → OU'''V'''W'''



Roll, pitch and yaw (alabeo, cabeceo, guiñada)

Partiendo de OXYZ y OUVW coincidentes se puede colocar OUVW en cualquier orientación siguiendo los pasos:

1. Girar OUVW un ángulo ψ con respecto a OX. Es el denominado Yaw
2. Girar OUVW un ángulo θ respecto a OY. Es el cabeceo
3. Girar OUVW un ángulo ϕ respecto a OZ. Es el alabeo



* Se debe seguir secuencias.

3.3 Matrices de transformación Homogénea.

Permite la representación conjunta de la posición y orientación.

3.3.1 Coordenadas y matrices homogeneas

La representación mediante coordenadas homogeneas de la localización de sólidos en un espacio n-dimensional, se realiza a través de coordenadas de un espacio (n+1)-dimensional.

de tal forma un vector $p(x,y,z)$ vendrá representado por $p(wx, wy, wz, w)$, donde w tiene un valor arbitrario y representa un valor a escala.

De forma general un vector $p = ai + bj + ck$, donde i, j, k son los vectores unitarios de los ejes OX, OY, OZ, del sistema de referencia OXYZ, se representa en coordenadas homogéneas de la siguiente manera en vector columna:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo el vector $2i + 3j + 4k$ se puede representar en coordenadas homogeneas como $[2,3,4,1]^T$, $[4,6,8,2]^T$. Los vectores $[a,b,c,0]$ representan direcciones representan vectores de longitud infinita.

Se define como matriz de transformación homogénea T a una matriz de dimensión 4X4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogeneas de un sistema de coordenadas a otro

$$T = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ f_{1\times3} & w_{1\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

En robótica generalmente solo interesa conocer $R_{3\times3}$ y $P_{3\times1}$ considerando las submatriz $f_{1\times3}$ nula y $w_{1\times1}$ la unidad. Al tratarse de una matriz 4X4, los vectores sobre los que se aplique deberán contar con 4 dimensiones, que serán coordenadas homogeneas del vector tridimensional de que se trate.

3.3.2 Aplicación de las matrices homogeneas

$$T = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa la rotación y traslación de un sistema O'UVW rotado y trasladado con respecto OXYZ. Esta matriz sirve para conocer las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector r en el sistema OXYZ a partir de sus coordenadas en (r_u, r_v, r_w) en el sistema O'XYZ.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

También sirve para expresar rotación y traslación de un vector respecto a un sistema fijo OXYZ, de tal manera que un vector r_{xyz} rotado según $R_{3\times3}$ y trasladado según $P_{3\times1}$ se convierte en el vector r'_{xyz} dado por

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

En general se usa el factor escalado $w = 1$.

Traslación

Supongase que el sistema O'UVW únicamente se encuentra trasladado un vector $p = p_x i + p_y j + p_z k$ con respecto al sistema OXYZ. La matriz T corresponderá a una matriz homogenea de traslación:

$$T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la denominada matriz basica de traslación.

Un vector cualquier r, representado en el sistema O'UVW por r_{uvw}, tendrá como componentes del vector con respecto al sistema OXYZ.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y a su vez, un vector r_{xyz} desplazado según T tendrá como componentes r'_{xyz}:

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x + p_x \\ r_y + p_y \\ r_z + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación

El sistema O'UVW se encuentra rotado respecto a XYZ. La submatriz de R_{3x3} definirá la rotación. Existen 3 matrices homogeneas básicas de rotación según el eje de la rotación ya sea OX, OY, OZ.

$$T(x,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un vector cualquiera r, representado en el sistema girado O'UVW por ruvw tendra como componentes (rx, ry, rz) en el sistema OXYZ los siguientes

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y a su vez el vector rxyz rotado según T vendrá expresado por r'xyz según

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Seguir el orden en rotaciones y traslaciones

Rotación seguida de traslación

Las matrices homogenes serán a continuación:

Rotacion en angulo a sobre el eje OX seguido de traslación del vector p(x,y z)

$$T((x,a),p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & \cos a & -\operatorname{Sen} a & P_y \\ 0 & \operatorname{Sen} a & \cos a & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en ángulo ϕ sobre eje OY seguido de traslacion $P(x,y,z)$

$$T((y,\phi),p) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en angulo θ sobre OZ seguido de traslación $(P(x,y,z))$

$$T((z,\theta),p) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & P_x \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación seguida de rotación

Las matrices homogeneas son las siguientes:

Traslacion de vector pxyz seguida de rotacion angula a sobre OX

$$T(p,(x,a)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & \cos a & -\operatorname{Sen} a & P_y\cos a - P_z\operatorname{sen} a \\ 0 & \operatorname{sen} a & \cos a & P_y\operatorname{Sen} a + P_z\cos a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación de vector pxyz seguida de rotación de un ángulo ϕ OY

$$T(p,(y,\phi)) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & p_x\cos\phi + p_z\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & p_z\cos\phi - p_x\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación de vector pxyz seguida rotación ángulo θ sobre OZ

$$T(p,(z,\theta)) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & p_x\cos\theta - p_y\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & p_x\operatorname{sen}\theta + p_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspectiva y Escalado

Las matrices homogeneas tambien se pueden aplicar para la realización de un escalado de las componentes de un vector. Bastará utilizar una matriz T del tipo:

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier vector $r(x,y,z)$ puede ser transformado al vector $r(ax,by,cz)$. Tambien se puede hacer un escalado global de las 3 componentes mediante la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

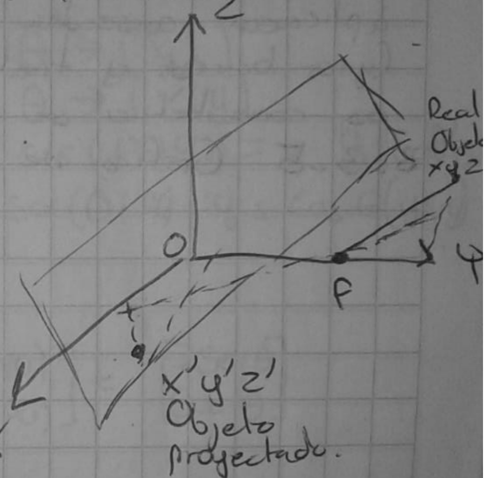
cualquier vector $r(x,y,z)$ puede ser transformado a $r(x/s, y/s, z/s)$.

También se puede transformar la perspectiva, suponiendo una lente situada en el plano OXZ con distancia focal f situada sobre el eje OY, se dan las cordenadas del punto $r(x,y,z)$ como un punto $r'(x', y', z')$ y vienen dadas por la siguiente expresiones

$$x' = \frac{x}{1-\frac{y}{f}} \qquad y' = 0 \qquad z' = \frac{z}{1-\frac{y}{f}}$$

O tambien puede realizarse a traves de la matriz homogenea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



3.3.3 Significado geométrico de las raices

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n, o, a es una terna ortonormal que representa la orientacion y p es un vector que representa la posición.

Si se considera un vector $r_{uvw} = [0,0,0,1]^T$, es decir el origen del sistema $O'UVW$ la aplicación de la matriz T se obtiene r_{xyz}

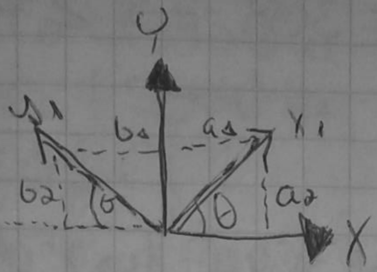
$$r_{xyz} \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

que coincide con el vector columna p de T. Por lo tanto este vector representa el origen de O'UVW con respecto a OXYZ.

3.3.4 Composición de matrices homogéneas

Una transformación compleja podrá descomponerse en la aplicación consecutiva de transformaciones simples (giros básicos y traslaciones). El producto de matrices no es conmutativo se debe seguir un orden

3.3.5 Gráficos de transformación



X_1 relación con x, $\quad a_1 = |X_1| \cos\theta \Rightarrow (X_1, X)$

X_1 relación con y $\quad a_2 = |X_1| \operatorname{sen}\theta \rightarrow (X, y)$

y_1 relación con x $\quad -b_1 = |y_1| \cos(\theta+90) = -|y_1| \operatorname{sen}\theta (y_1, x)$

y_1 relación con x $\quad b_2 = |y_2| \operatorname{sen}(\theta+90) = y_1 \cos\theta (y_1, y)$

$\therefore$

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \qquad y_1^0 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\theta+90) \\ \cos(\theta+90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = [x_1^0 \; y_1^0] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1, x) & (y_1, x) \\ (x_1, y) & (y_1, y) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (x_1, x) & (y_1, x) & (z_1, x) \\ (x_1, y) & (y_1, y) & (z_1, y) \\ (x_1, z) & (y_1, z) & (z_1, z) \end{bmatrix}$$

Obtenes la rotación de un objeto que realiza:

- $x = 90° \Rightarrow y = 30° \rightarrow z = 70°$
- $y = 75° \rightarrow x = 60° \rightarrow y = 70°$
- $z = 45° \rightarrow x = 35° \rightarrow z = 15°$
- $z = 15° \rightarrow x = 35° \rightarrow z = 45°$

16 Ene 2019 - 21 Ene 2019

Salguero Hernández Juan Pablo

$x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ \rightarrow z = 70^\circ$

$$T = R(z\theta)R(y\phi)R(x a) = \begin{bmatrix} C\theta & -Sen\theta & 0 \\ Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & sen\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sena \\ 0 & Sena & Ca \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta C\phi + 0 + 0 & 0 - S\theta + 0 & C\theta S\phi + 0 + 0 \\ S\theta C\phi + 0 + 0 & 0 + C\theta + 0 & S\theta S\phi + 0 + 0 \\ 0 + 0 - S\phi & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + C\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ S\theta C\phi & C\theta & S\theta S\phi \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta C\phi + 0 + 0 & C\theta - S\theta Ca + C\theta S\phi Sa & 0 + S\theta Sa + C\theta S\phi Ca \\ S\theta C\phi + 0 + 0 & 0 + C\theta Ca + S\theta S\phi Sa & 0 - C\theta Sa + S\theta S\phi Ca \\ -S\phi + 0 + 0 & 0 + 0 + C\phi Sa & 0 + 0 + C\phi Ca \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta Ca + C\theta S\phi Sa & S\theta Sa + C\theta S\phi Ca \\ S\theta C\phi & C\theta Ca + S\theta S\phi Sa & -C\theta Sa + S\theta S\phi Ca \\ -S\phi & C\phi Sa & C\phi Ca \end{bmatrix}$$

$\theta = 70°$ ϕ $30°$ $a = 90°$

$$T=\begin{bmatrix} 0.2961 & -0 + .1710 & 0.9396 + 0 \\ 0.8137 & 0 + 0.4698 & -0.342 + 0 \\ -0.5 & 0.8660 & 0 \end{bmatrix}$$

$y = 75^\circ \rightarrow x = 60^\circ$ y $y = 7^\circ$

$$T = R(y\phi)R(x,a)R(y\phi) = \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi_1 & 0 & S\phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi_1 & 0 & C\phi_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C\phi+0+0 & 0+0+S\phi Sa & 0+0+S\phi Ca \\ 0+0+0 & 0+Ca+0 & 0-Sa+0 \\ -S\phi+0+0 & 0+0+C\phi Sa & 0+0+C\phi Ca \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C\phi & S\phi Sa & S\phi Ca \\ 0 & Ca & -Sa \\ -S\phi & C\phi Sa & C\phi Ca \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi_1 & 0 & S\phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi_1 & 0 & C\phi_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C\phi C\phi_1+0-S\phi Ca S\phi_1 & 0+S\phi Sa+0 & C\phi S\phi_1+0+S\phi Ca C\phi_1 \\ 0+0+Sa S\phi_1 & 0+Ca+0 & 0+0-Sa C\phi_1 \\ -S\phi C\phi_1+0-C\phi Ca S\phi_1 & 0+C\phi Sa+0 & -S\phi S\phi_1+0+C\phi Ca C\phi_1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} C\phi C\phi_1 - S\phi Ca S\phi_1 & S\phi Sa & C\phi S\phi_1 + S\phi Ca C\phi_1 \\ Sa S\phi_1 & Ca & -Sa C\phi_1 \\ -S\phi C\phi_1 - C\phi Ca S\phi_1 & C\phi Sa & -S\phi S\phi_1 + C\phi Ca C\phi_1 \end{bmatrix}$$

$\phi\ 75^\circ \quad \alpha = 60^\circ \quad \phi_1 = 7^\circ$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1980315 & 0.1055419 & 0.974497 \\ 0.8365163 & 0.5 & -0.2241439 \\ -0.5109051 & 0.8595702 & 0.0107282 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.1480315 & 0.8365163 & 0.5109051 \\ 0.1055419 & 0.5 & -0.8595702 \\ -0.974497 & 0.2241439 & 0.0107282 \end{bmatrix}$$

Este No!

$z = 45° \rightarrow x = 35° \rightarrow z = 15°$

$$T = R(z,\theta)R(x,a)R(z,\theta_1) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ca & -Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta+0+0 & 0-S\theta Ca+0 & 0+S\theta Sa+0 \\ S\theta+0+0 & 0+C\theta Ca+0 & 0-C\theta Sa+0 \\ 0+0+0 & 0+0+Sa & 0+0+Ca \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta Ca & S\theta Sa \\ S\theta & C\theta Ca & -C\theta Sa \\ 0 & Sa & Ca \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta C\theta_1 - S\theta Ca S\theta_1 + 0 & -C\theta S\theta_1 - S\theta Ca C\theta_1 + 0 & 0+0+S\theta Sa \\ S\theta C\theta_1 + C\theta Ca S\theta_1 + 0 & -S\theta S\theta_1 + C\theta Ca C\theta_1 + 0 & 0+0-C\theta Sa \\ 0 + Sa S\theta_1 + 0 & 0 + Sa C\theta_1 + 0 & 0+0+Ca \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} C\theta C\theta_1 - S\theta Ca S\theta_1 & -C\theta S\theta_1 - S\theta Ca C\theta_1 & S\theta Sa \\ S\theta C\theta_1 + C\theta Ca S\theta_1 & -S\theta S\theta_1 + C\theta Ca C\theta_1 & -C\theta Sa \\ Sa S\theta_1 & Sa C\theta_1 & Ca \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5330975 & -6.8329279 & 0.1484 \\ 0.742504 & 0.37964785 & -0.5846 \\ 0.4056798 & 0.4055798 & 0.8194 \end{bmatrix}$$

t y r

$z = 15° \rightarrow x = 35° \rightarrow z = 45°$

$T = \Big[$

$T = R(z,\theta)\, R(x,a)\, R(z,\theta_1)$

$$T = \begin{bmatrix} C\theta C\theta_1 - S\theta Ca S\theta_1 & -C\theta S\theta_1 - S\theta Ca C\theta_1 & S\theta Sa \\ S\theta C\theta_1 + C\theta Ca S\theta_1 & -S\theta S\theta_1 + C\theta Ca C\theta_1 & -C\theta Sa \\ Sa S\theta_1 & Sa C\theta_1 & Ca \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5330975 & -0.740509 & 0.4055798 \\ 0.832927 & 0.3764785 & -0.4055798 \\ 0.1484525 & 0.554033 & 0.81915 \end{bmatrix}$$

Juan Pablo Salguero

Fecha: 23/Ene/2014

DH1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena), y acabando con n (último eslabón móvil). Se enumerará eslabón 0 a la base fija del robot.

DH2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

DH3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

DH4. Para i de 0 a n-1 situar el eje z_i sobre el eje de la articulación i+1.

DH5. Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.

DH6. Para i 1 a n-1 situar el origen del sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación i+1.

DH7. Situar x_i, en la línea normal común a z_{i-1} y z_i.

DH8. Situar y_i de modo en que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.

DH9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n

DH10 Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

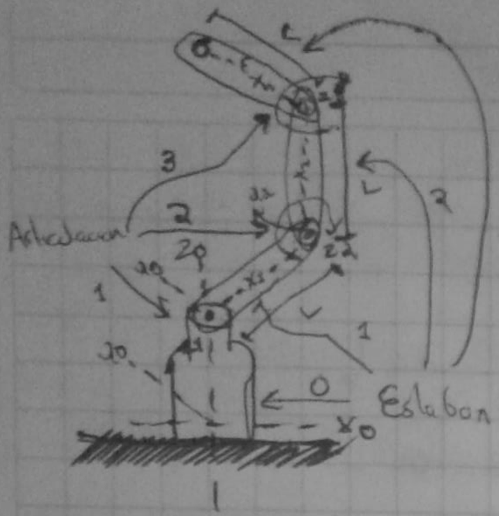
DH11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados

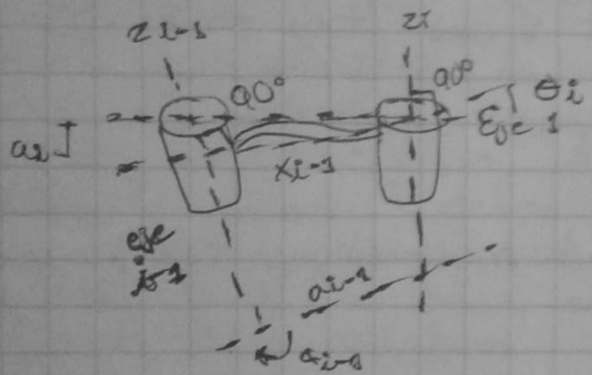
DH12. Obtener a_i como el ángulo que habría que girar entorno a x_i, para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$

DH14. Obtener las matrices de transformación $^{i-1}A_i$, definidas en

DH15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^{n-1}A_n$.

DH16. La matriz T define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base, en función de las n coordenadas articulares.



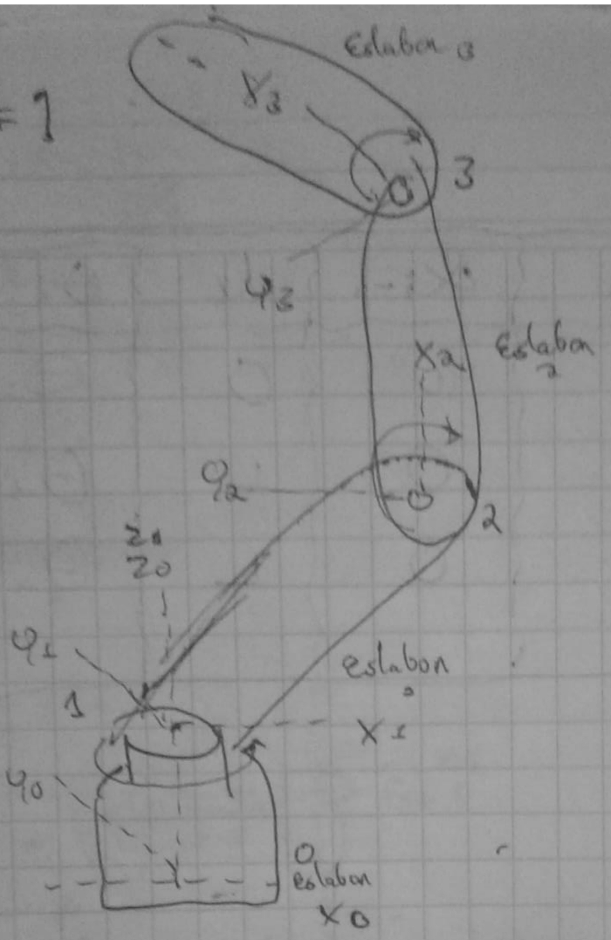


Parametro DH	Interpretación	Medido
a_{i-1}	distancia de Z_{i-1} a Z_i	largo de X_{i-1}
α_{i-1}	angulo Z_{i-1} y Z_i	respeto X_{i-1}
d_i	distancia de X_{i-1} a X_i	largo de Z_i
θ_i	ángulo X_{i-1} y X_i	respecto Z_i

Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	90°	0	θ_1
2	0	0	L	θ_2
3	0	0	L	θ_3

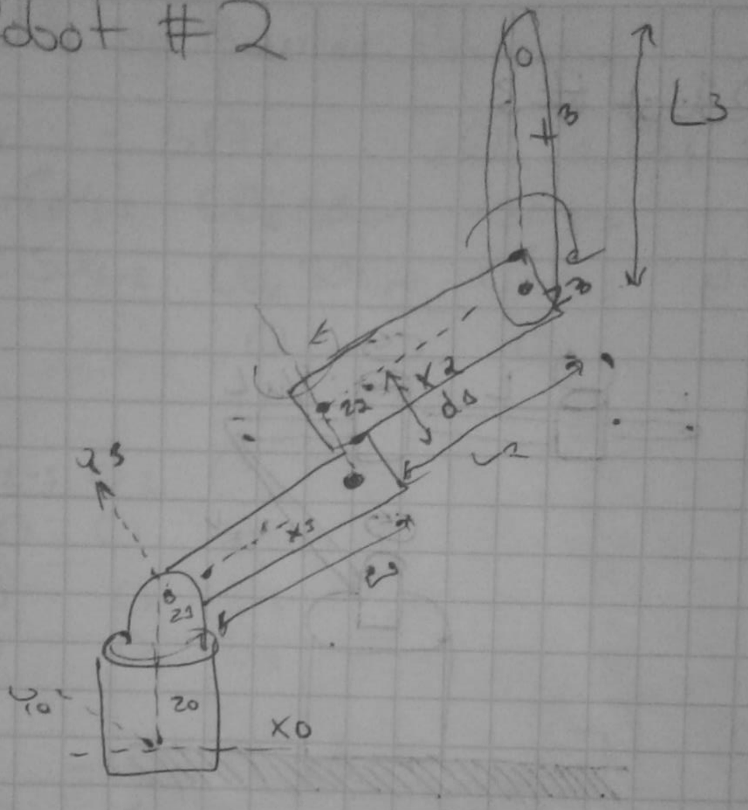
Robot # 1

*Cinematica y Dinamica de robots manipuladores



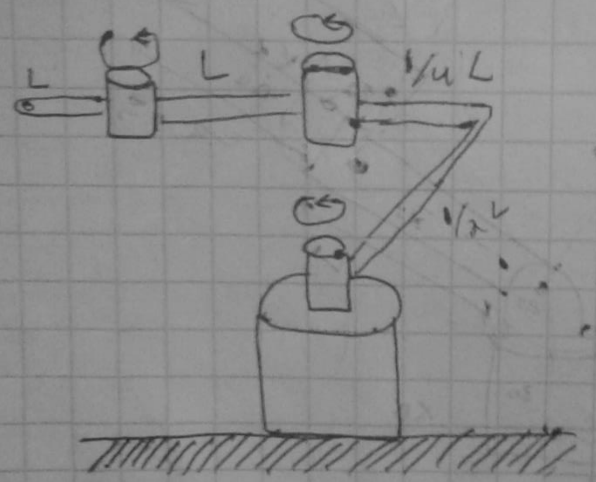
Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	90	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

Robot #2



Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	90	0	θ_1
2	L_1	90	d_1	θ_2
3	L_2	90	0	θ_3

Robot #3



Eslabon	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	3/4L	0	d_1	θ_2
3	L	0	θ_2	θ_3

Cálculo de Matrices Homogeneas

$$T_i^{i-1} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

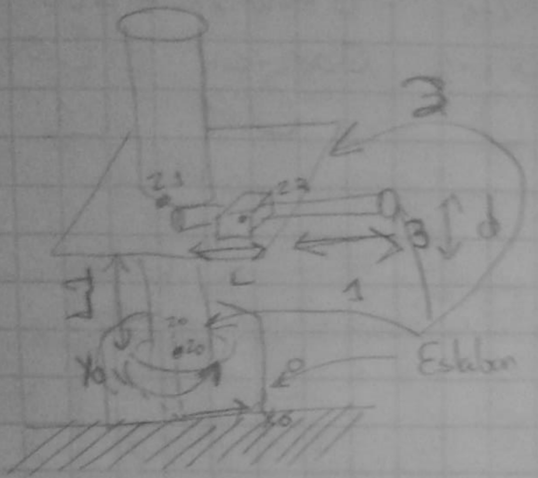
	i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
0-	1	0	90	0	θ_1
1-	2	L_1	0	0	θ_2
2-	3	L_2	0	0	θ_3

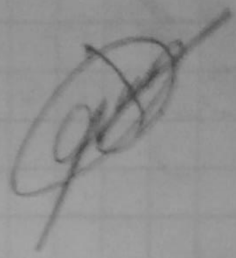
$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

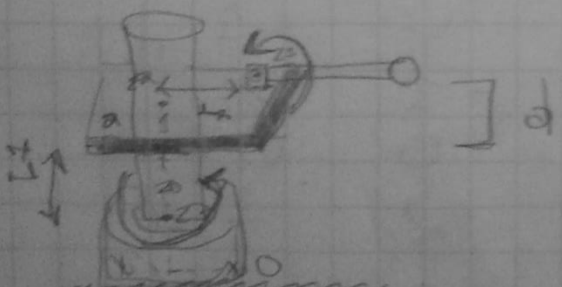
$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tarea 13/02/2019 Juan Salguero





Articulación	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ
1	0	0	0	θ_1
2	Q_1	0	0	Q
3	L_1	90	d	θ_3



Articulación	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	Ø	Ø	Ø	θ_1
2	Q_1	Ø	Ø	Ø
3	L_2	Ø	d	Q_2

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla #1 [illegible]

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	90	0	θ_2
3	L_2	0	d	θ_3

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ 0 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot #2

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	90	0	θ_2
3	L_2	90	0	θ_3

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

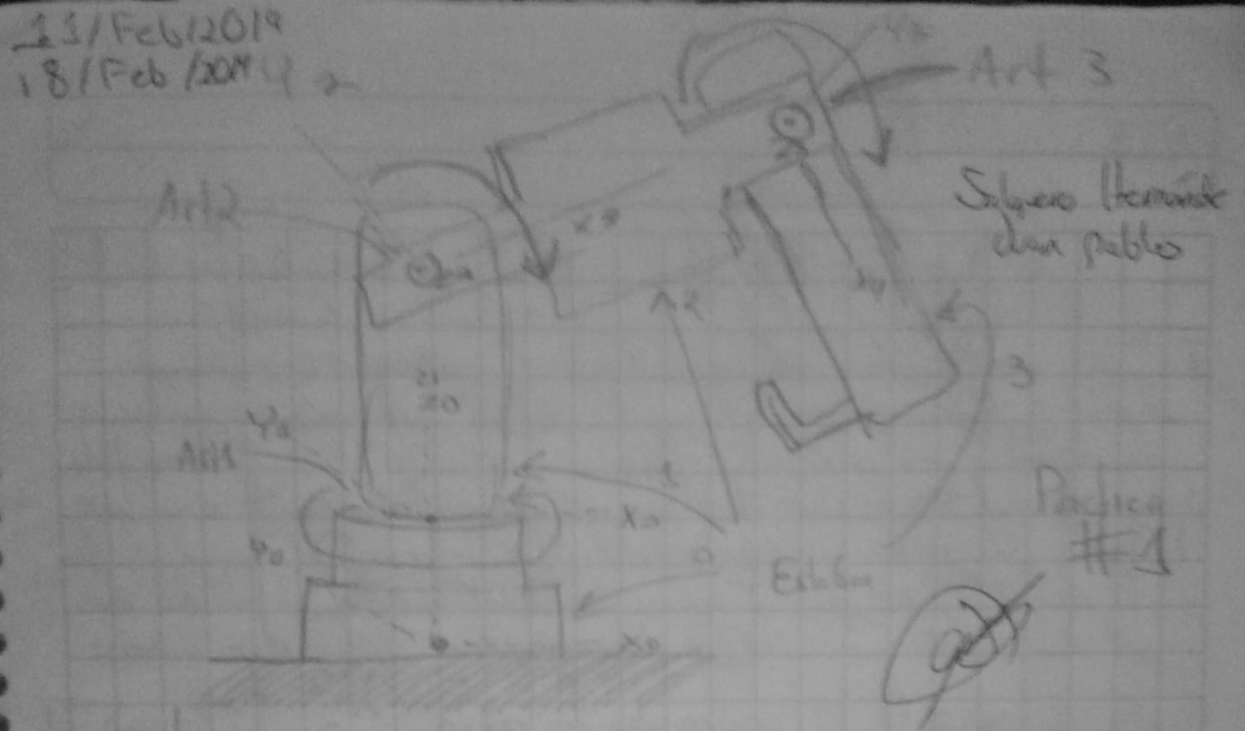
$$T_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_1 \\ S\theta_2 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_2 \\ S\theta_3 & 0 & -1 & -d_i \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot Tarea 1

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C\theta_1(C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3) & -S\theta_1(C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3) - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_3 & L_2 + L_3 C\theta_2 \\ C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_3 & 0 \\ C\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11/Feb/2019
18/Feb/2019



N^x	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	90	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

Cálculo de matriz homogenea

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_1 & L_1 + C\theta_1 L_2 \\ C\theta_3 C\theta_2 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 & L_2 S\theta_1 \\ C\theta_3 S\theta_2 + C\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18/Feb/2019

Juan Pablo Salguero Hernández

4.2 Cinemática Inversa

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $q=[q_1, q_2, \ldots q_n]^T$ para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial. A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar la solución cerrada. Esto es, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_K = f_K(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$k = 1 \ldots n \text{ (GDL)}$$

Entre sus ventajas son que este tipo de solución ha de resolverse en tiempo real y permite incluir reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada.

4.2.1 Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos.

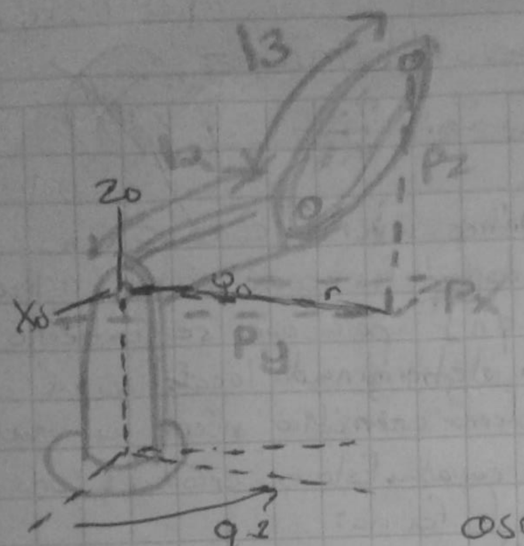
Este proceso es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de considerar los primeros grados de libertad. dedicados a posicionar el extremo.

El procedimiento se basa en encontrar suficientes relaciones matemáticas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y dimensiones físicas de sus elementos.

Para el siguiente brazo de 3 GDL. El dato de partida son las coordenadas (p_x, p_y, p_z) referidas a $\{S_0\}$ en las que quiere posicionar su extremo,

Este robot posee una estructura planar quedando definido por el ángulo de la primera variable articular q_1

$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad *$$



Considerando únicamente los elementos 2 y 3 que están situados en un plano y usando el teorema de coseno

$$r^2 = p_x^2 + p_y^2$$

$$r^2 + p_z^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

Esta expresión permite obtener q_3, en función del vector de posición del extremo p. (es más conveniente utilizar el arcotangente)

$$\operatorname{sen} q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

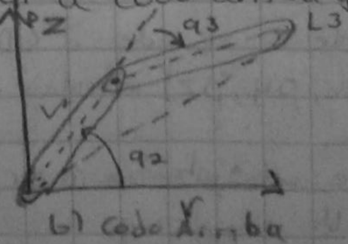
se tendrá que:

$$q_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right) \quad *$$

con $\cos q_3 = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$

Al existir 2 soluciones para q_3 por el $(\pm)$ de la fórmula esta configuraciones corresponden a codo arriba y abajo.

a) Codo Bajo



b) Codo Arriba

El cálculo de q_2 se hace a partir de la diferencia entre β y α

$$q_2 = \beta - \alpha$$

Siendo: $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{P_z}{r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{P_z}{\pm\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\right)$

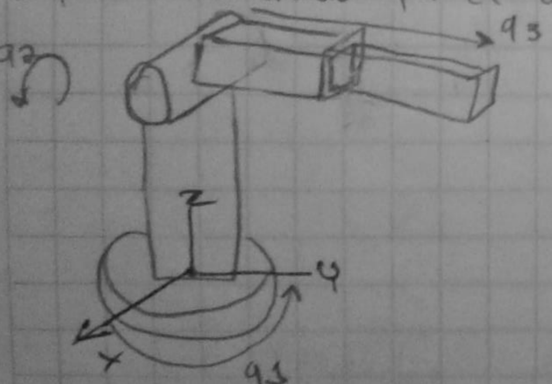
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

Luego finalmente:

$$q_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{P_z}{\pm\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right) \quad *$$

4.2.2 Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea.

Es necesario conocer el valor de la posición y orientación del robot en función de sus coordenadas articulares. Se va aplicar este procedimiento a un robot de 3 GDL configuración esférica (2 giros y un desplazamiento) El robot queda siempre contenido en un plano determinado por el ángulo q_1.



El primer paso es obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia {S0} asociado a la base con el sistema {S3} asociado al extremo con el robot situado en su posición de partida.

$$^0A_1 \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

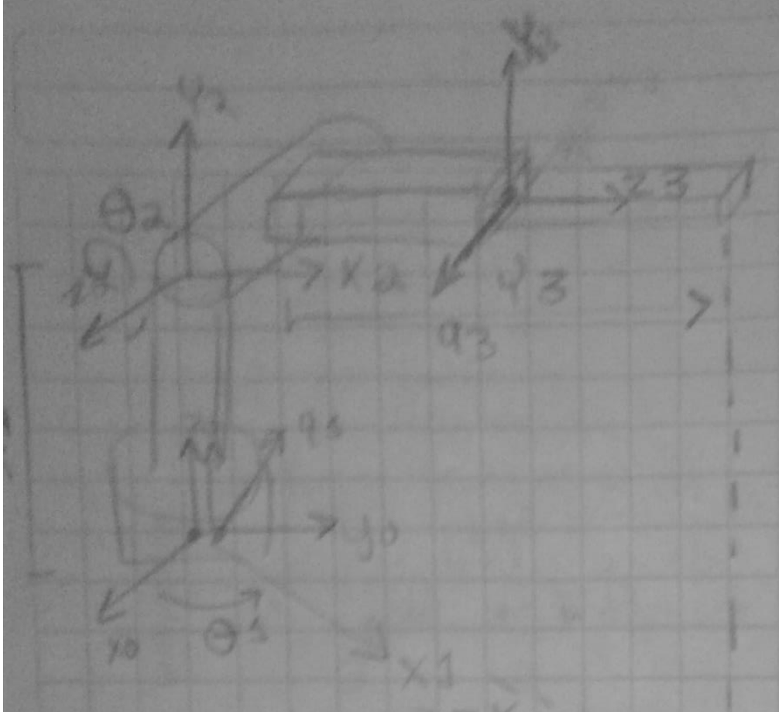
$$^0A_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = {}^0A_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenida la expresión T en función de las coordenadas articulares (q_1, q_2, q_3) y supuesta una localización del destino del extremo del robot definida por los vectores n, o, a, p se podría intentar manipular directamente las 12 ec resultantes de T a fin de despejar q_1, q_2 y q_3 en función de n, o, a y P.

Art	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

4.3.2 Jacobiana inversa

Con ella se obtiene las velocidades articulares partiendo de las del extremo.



* Instalar ROS en raspberry

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
	$z \to x$		$x \to z$	
1	0	0	0	θ_1
2	0	-90	l_1	θ_2
3	0	90	q_3	90

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +l_1 \\ -c\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ -C\theta_1 S\theta_2 + C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 - C\theta_1 C\theta_2 & 0 & -Q_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - C\theta_2 S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = T_0^1 \, T_1^2 \, T_2^3$$

$$\frac{T_0^3}{T_2^3} = T_0^1 \, T_1^2$$

$$\frac{T_0^3}{T_2^3 \, T_1^2} = T_0^1 \Rightarrow \left(T_2^3\right)^{-1} \left(T_1^2\right)^{-1} T_0^3 = T_0^1$$

$$T_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta_1 & S\theta_1 & C\theta_1 Q_3 \, Q_1 \\ 0 & -S\theta_1 & C\theta_1 & -Q_3 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & Q_1 - L_1 \\ -C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & -Q_3 \\ S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -Q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Metodo de propagación de velocidades

Rotacional

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\,\omega_i^{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,Z_{i+1}^{i+1}$$

$$V_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\,V_i^{i+1} + R_i^{i+1}\left[\omega_i^{i} \times r_{i+1}^{i}\right]$$

Prismatica

$$V_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\,V_i^{i+1} + R_i^{i+1}\left[\omega_i^{i} \times r_{i+1}^{i}\right] + \dot{d}_{i+1}\,Z_{i+1}^{i+1}$$

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\,\omega_i^{i}$$

$$T = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_p & -n^T p \\ o_x & o_y & o_p & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix}$$

Aplicar el método de propagación de velocidades para determinar la velocidad angular y lineal del manipulador mostrado en la figura para el sistema de referencia $\{3\}$. Además, expresar los resultados en el sistema de referencia $\{0\}$

En el análisis realizado en la unidad de cinemática directa, se obtuvieron los parametros de DH.

Parametros DH para robot 3-GDL

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90	L1	0	θ_2
3	0	L2	0	θ_3

Empleando los valores DH del manipulador, se obtienen las siguientes matrices de transformación homogénea

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & L_1C_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & L_1S_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_0^3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & L_1C_1 + L_2C_1C_2 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & L_1C_1 + L_2S_1C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con toda la información necesaria para aplicar el método de propagación de velocidades.

Para ello, comenzando con $i=0$, se obtiene

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 Z_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$V_1^1 = R_0^1 V_0^0 + R_0^1 \left[\omega_0^0 \times r_1^0\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se prosigue con $i=1$

$$\omega_2^2 = R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 Z_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$V_2^2 = R_1^2 V_1^1 + R_1^2 \left[\omega_1^1 \times r_2^1\right]$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Nótese que en el cálculo anterior se hizo uso de la matriz antisimétrica para obtener el producto cruz, es decir, se empleo $S(\omega_1^1)\, r_2^1 = \omega_1^1 \times r_2$. Finalmente para $i=2$:

$$\omega_3^3 = R_2^3 \omega_2^2 + \dot{\theta}_3 Z_3^3$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2\dot{\theta}_1 \\ C_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 [S_2C_3 + C_2S_3] \\ \dot{\theta}_1 [C_2C_3 - S_2S_3] \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 S_{23} \\ \dot{\theta}_1 C_{23} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$v_3^3 = R_2^3 v_2^2 + R_2^3 [\omega_2^2 \times r_3^2]$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} S_2\dot{\theta}_1 \\ C_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & C_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & -S_2\dot{\theta}_1 \\ -C_2\dot{\theta}_1 & S_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2\dot{\theta}_2 \\ -L_2\dot{\theta}_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2\dot{\theta}_2 C_3 \\ -L_2\dot{\theta}_1 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2\dot{\theta}_2 C_3 \\ -\dot{\theta}_1[L_1+L_2C_2] \end{bmatrix}$$

Para expresar las velocidades anteriores en el sistema de referencia $\{0\}$ se utiliza la matriz de rotación R_3^0 con lo que se obtiene:

$$V_3^0 = R_3^0 V_3^3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2\dot{\theta}_2 C_3 \\ -\dot{\theta}_1(L_1+L_2C_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2C_1[S_3C_{23}-C_3S_{23}]-\theta_1[L_1S_1+L_2S_1C_2] \\ L_2\dot{\theta}_2S_1[S_3C_{23}-C_3S_{23}]+\dot{\theta}_1[L_1C_1+L_2C_1C_2] \\ L_2\dot{\theta}_2S_3S_{23}+L_2\dot{\theta}_2C_3C_{23} \end{bmatrix}$$

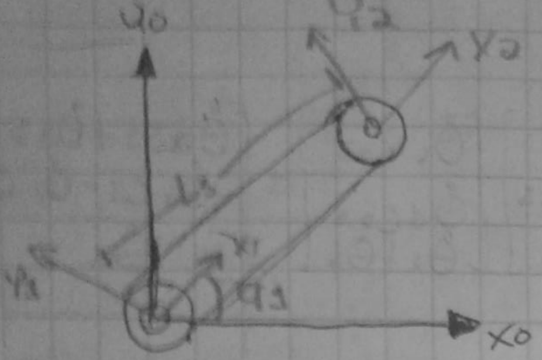
$$= \begin{bmatrix} -L_2\dot{\theta}_2C_1S_2-\dot{\theta}_1[L_1S_1+L_2S_1C_2] \\ -L_2\dot{\theta}_2S_1S_2+\dot{\theta}_1[L_1C_1+L_2C_1C_2] \\ L_2\dot{\theta}_2S_3S_{23}+L_2\dot{\theta}_2C_3C_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -L_2\dot{\theta}_2C_1S_2-\dot{\theta}_1[L_1S_1+L_2S_1C_2] \\ -L_2\dot{\theta}_2S_1S_2+\dot{\theta}_1[L_1C_1+L_2C_1C_2] \\ L_2\dot{\theta}_2C_2 \end{bmatrix}$$

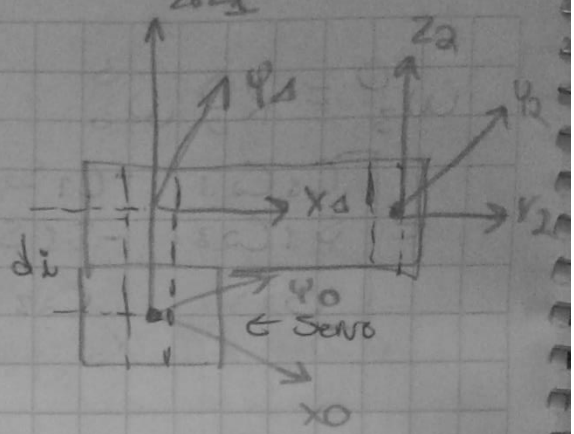
$$\omega_3^0 = R_3^0 \omega_3^3$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 S_{23} \\ \dot{\theta}_1 C_{23} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 S_1 + \dot{\theta}_3 S_1 \\ -\dot{\theta}_2 C_1 - \dot{\theta}_3 C_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Cuadrante I $\quad q_1 = 0 = \text{home}$



g↓



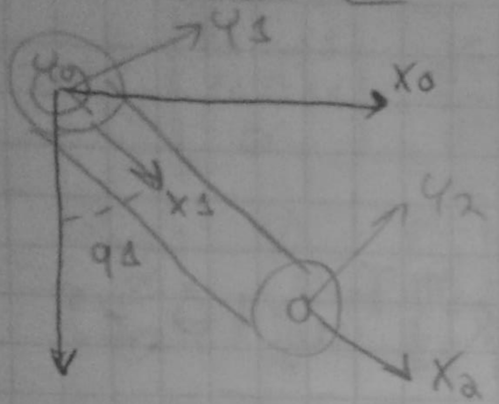
i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	∅	∅	d_1	q_1
2	l_1	∅	∅	∅

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset & l_1 \\ 0 & 1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C(q_1) & -S(q_1) & 0 & l_1 \\ S(q_1) & C(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuadrante IV



$$T_1^0\left(3\pi/2\right) = \begin{bmatrix} \overset{0}{C(270)} & \overset{1}{-S(270)} & 0 & 0 \\ \underset{}{S(270)}^{-1} & C(270)^{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & 0 \\ Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ -Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & L1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -Cq_1 & Sq_1 & 0 & L_1 \\ -Sq_1 & -Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 Z_1^1 = \left[R_0^1\right]^T \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 Z_1^1$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$V_1^1 = R_0^1 V_0^0 + R_0^1 \left[\omega_0^0 \times P_1^0\right] = \left[R_1^0\right]^T V_0^0 + \left[R_1^0\right]^T \left[\omega_0^0 \times P_1^0\right]$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

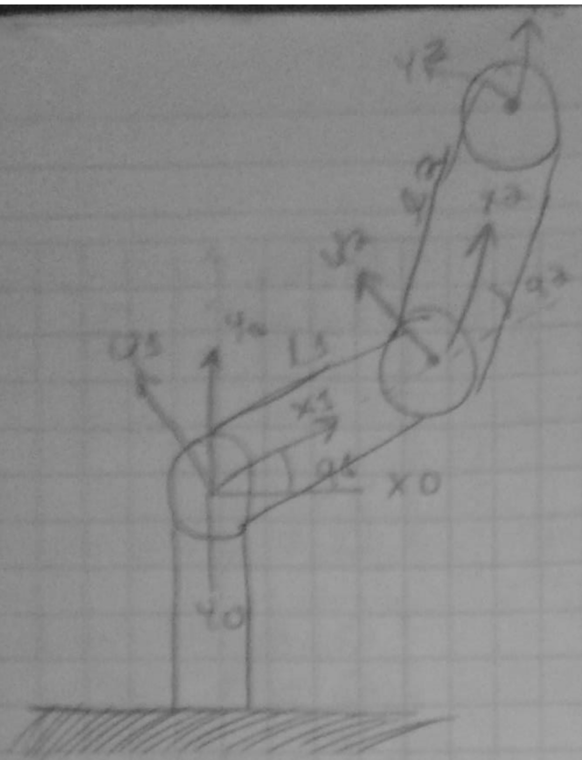
$$\omega_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$V_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} l_1 Sq_1 \\ l_1 Cq_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_0^2 = V_1^2 = \begin{bmatrix} l_1 S_{q1} \\ l_1 C_{q1} \\ \emptyset \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_1} q_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} l_1 C_{q1} \\ -l_1 C_{q1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} =$$

$$q_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} l C_{q1} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -l S_{q1} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}}_{\text{Jacobiano}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \tan^{-1}\left[\frac{x}{y}\right] = IK \rightarrow \text{Cinematica Inversa}$$



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q1
2	l1	0	0	q2
3	l2	0	0	0

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\operatorname{sen} q_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\operatorname{sen} q_2 & 0 & l_1 \cos q_2 \\ \operatorname{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & l_1 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ssh
VNC

Det Pg
sg esktic

ROS

$$T^{0}_{1} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\text{Sen}(q_1+q_2) & 0 & l_1 cq_1 + l_2 C(q_1+q_2) \\ \text{Sen}(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1 sq_1 + 2\, S(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Juan Pablo Salguero Hernández

1 abril 2019

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - M^2}}{M}\right)$$

donde $M = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \operatorname{sen}(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

Para $(2, -7)$

$$M = \frac{(2)^2 + (-7)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} = \frac{-1247}{1200}$$

$M = -1.039166667$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - (1.039166667)^2}}{-1.039166667}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - 1.079867362}}{-1.039166667}\right)$$

Raíz negativa, por lo cual no se puede colocar el robot sus puntos en esas cordenadas.

Para $(8, -7)$

$$M = \frac{8^2 + (-7)^2 - 30^2 - 20^2}{2(30)(2)} = \frac{-1187}{1200}$$

$M = -0.9891666667$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-(-0.9891666667)^2}}{-0.9891666667}\right)$$

codo abajo ←

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-0.9784506944}}{-0.9891666667}\right)$$

$$q_2 = \arctan(-0.1984045307)$$

$$\boxed{q_2 = -8.441342643}$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{-7}{8}\right) - \arctan\left(\frac{20\ \mathrm{Sen}(-8.441342643)}{30+20\cos(8.441342643)}\right)$$

$$q_1 = -41.18592517 - (-3.375068245)$$

$$\boxed{q_1 = -37.81085693}$$

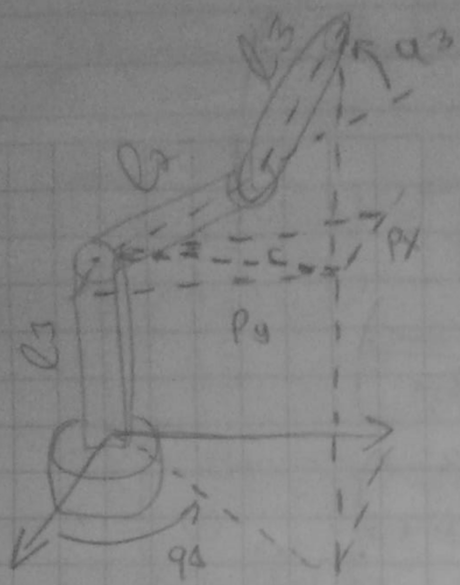
Para $(-4,7)$

$$M = \frac{(-4)^2+(7)^2-30^2-20^2}{2(30)(20)} = \frac{-1235}{1200} = -1.029166667$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-(-1.029166667)^2}}{-1.029166667}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-1.059184028}}{-1.029166667}\right)$$ ← Raíz Negativa

No es posible colocar las puntas en esa posición.



Datos P_x, P_y, P_z, donde queremos situar el extremo der robot

$$q_1 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

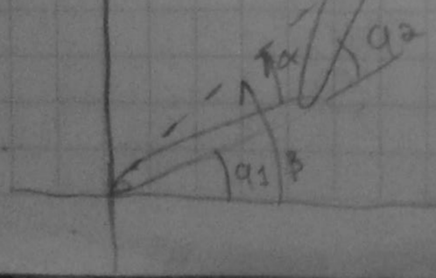
$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2\, l_1 l_3}$$

$$\text{Sen } q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_1}$$

$\therefore$

$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_1}}{\cos q_1}\right)$$

Para la articulación q2



$$q_2 = \beta - \alpha$$

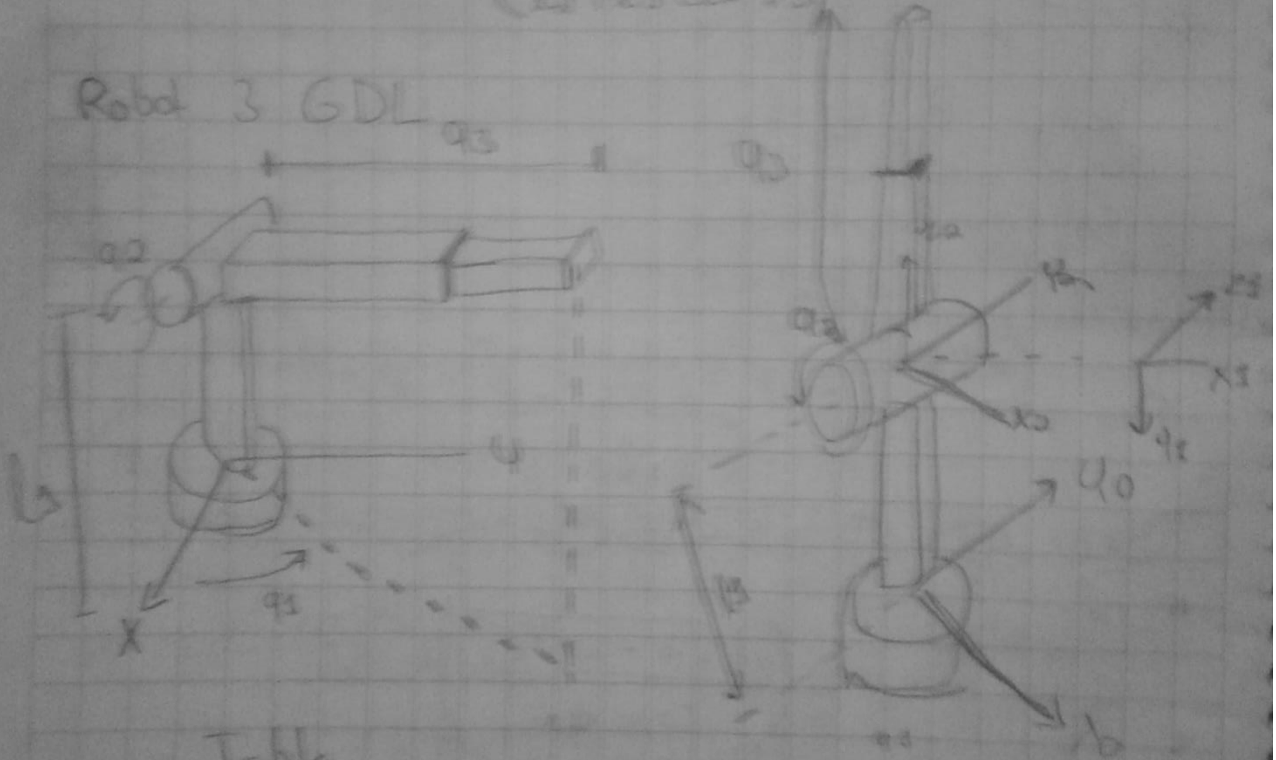
$$\beta = \arctan\left(\frac{P_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{P_z}{\pm\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$\therefore \quad q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

Robot 3 GDL



Tabla

i	θ	di	ai	αi
1	q_1	L_1	0	-90°
2	q_2	0	0	90°
3	0	q_3	0	0

Salguero Hernández Juan Pablo 1 Abril 2019

Obtener T_3^0, A_1^0, A_2^1, A_3^2

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ -s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La tarea se realiza en Casa

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2, & -C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 & [illegible] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MTH

$$A_1^0 \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ q_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} Cq_2 & 0 & -Sq_2 & 0 \\ Sq_2 & 0 & Cq_2 & \varnothing \\ 0 & -1 & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1^0 \, A_2^1 \, A_3^2 \quad \therefore \quad (A_1^0)^{-1} \, {}_nT = {}^1_2A \, {}^2_0A$$ despejamos q3

$$({}^0_1A)^{-1} T_n = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & -Sq_1 & \varnothing \\ Sq_1 & 0 & Cq_1 & \varnothing \\ \varnothing & -1 & 0 & L1 \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Cq_2 & 0 & Sq_2 & 0 \\ Sq_2 & 0 & -Cq_2 & \varnothing \\ \varnothing & 1 & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinematica Inversa Metodo por Matrices Homogeneas

$$\begin{bmatrix} Cq_1 & Sq_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -1 & L_1 \\ -Sq_1 & Cq_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Cq_2 & 0 & Sq_2 & Sq_2q_3 \\ Sq_2 & 0 & -Cq_2 & -Cq_2Cq_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-P_x Sq_1 + P_y Cq_1 = \emptyset \Rightarrow \frac{Sq_1}{Cq_1} = \frac{P_y}{P_x} \Rightarrow q_1 \arctan\left(\frac{P_x}{P_y}\right)$$

$$(A^1_2)(A^0_1)\,{}^0_nT = {}^2_3A \rightarrow \text{despejamos } q_3 \text{ y } q_2$$

$$(A^1_2)^{-1}({}^0_1A)^{-1}T^0_n = \begin{bmatrix} Cq & Sq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sq_2 & Cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq_1 & Sq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ -Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{q2}C_{q1} & C_{q2}S_{q2} & S_{q1} & -L_1S_{q2} \\ -S_{q1} & C_{q1} & 1 & 0 \\ -S_{q2}C_{q1} & -S_{q2}S_{q1} & C_{q2} & -L_1C_{q2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_xC_{q2}C_{q1}+P_yS_{q1}C_{q2}+P_zS_{q2}-L_1S_{q2}=0$$

$$\frac{-S_{q2}}{C_{q2}}=\frac{P_xC_{q1}+P_yS_{q1}}{P_z-L_1}$$

$$q_2=\arctan\left(-\frac{P_xC_{q1}+P_yS_{q1}}{P_z-L1}\right)$$

$$-S_{q2}C_{q1}P_z-S_{q2}S_{q1}P_y+P_zC_{q2}-L_1C_{q2}=q_3$$

$$q_3=C_{q2}(P_z-L_1)-S_{q2}(C_{q1}P_z+S_{q1}P_y)$$

ADC 8004

08/Abril/2019

Juan Pablo Salguero

Librerias ROS

• Libreria KDL

Esta libreria se trabaja para convertir y realizar transformaciones de cuadros y vectores en 3D. Tiene funciones que permiten ayudar para trabajar con vectores, puntos, transformaciones de cuadros, etc. Estas librerias nos permiten realizar calculos de un producto vectorial

• Rospy

Biblioteca de cliente de Python para para la ros. La API del cliente Rospy permite a los programadores de Python interactuar rápidamente con los temas, servicios y parámetros de ROS. El diseño de rospy favorece la necesidad de la velocidad de implementación (es decir, el tiempo del desarrollador) sobre el rendimiento en tiempo de ejecución.