Teorema de Compacidad

- Sea T una teoría tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ hay un modelo $\mathbf{A}_n$ de T tal que $\mathbf{A}_n$ tiene al menos n elementos. Probar que T tiene un modelo infinito.

Teorema de Compacidad

- Sea T una teoría tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ hay un modelo $\mathbf{A}_n$ de T tal que $\mathbf{A}_n$ tiene al menos n elementos. Probar que T tiene un modelo infinito.
- Saque como corolario que si τ es un tipo cualquiera, entonces no hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es finito. Analogamente, tampoco hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es infinito.

Teorema de Compacidad

Probemos ahora que

Si T una teoría tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ hay un modelo $\mathbf{A}_n$ de T tal que $\mathbf{A}_n$ tiene al menos n elementos entonces T tiene un modelo infinito.

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Sea $\phi_n =$ "el universo del modelo tiene al menos n elementos"

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Sea $\phi_n =$ "el universo del modelo tiene al menos n elementos"
- Sea $\Sigma = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Sea $\phi_n =$ "el universo del modelo tiene al menos n elementos"
- Sea $\Sigma = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$
- Observación: Σ tiene infinitos elementos

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Sea $\phi_n =$ "el universo del modelo tiene al menos n elementos"
- Sea $\Sigma = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$
- Observación: Σ tiene infinitos elementos
- Sea τ un tipo

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Sea $\phi_n =$ "el universo del modelo tiene al menos n elementos"
- Sea $\Sigma = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$
- Observación: Σ tiene infinitos elementos
- Sea τ un tipo
- Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por hipótesis, cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por hipótesis, cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo
- Por Teorema de Compacidad sabemos que T tiene un modelo

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por hipótesis, cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo
- Por Teorema de Compacidad sabemos que T tiene un modelo
- Sea $\mathbb{A}$ dicho modelo

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por definición de Σ:

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por definición de Σ:
  - $n \leq |A|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donde A es el universo de $\mathbb{A}$

Teorema de Compacidad: T tiene un modelo infinito

- Por definición de Σ:
  - $n \leq |A|, \forall n \in \mathbb{N}$ donde A es el universo de $\mathbb{A}$
- Luego, $\mathbb{A}$ es infinito

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es finito.

Ahora probemos por el absurdo que:

Si τ es un tipo cualquiera, entonces no hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es finito. Analogamente, tampoco hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es infinito.

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es finito.

- Sea τ un tipo cualquiera

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es finito.

- Sea τ un tipo cualquiera
- Sea $\Sigma \subseteq S^\tau$ tal que $\mathbb{A} \models \Sigma$ si y sólo si $\mathbb{A}$ es finito

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es finito.

- Sea τ un tipo cualquiera
- Sea $\Sigma \subseteq S^\tau$ tal que $\mathbb{A} \vDash \Sigma$ si y sólo si $\mathbb{A}$ es finito
- Luego, por la propiedad del item anterior, la teoría (Σ, τ) tiene modelos finitos arbitrariamente grandes

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es finito.

- Así, por el lema probado anteriormente, (Σ, τ) tiene un modelo infinito

No hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ sii A es finito.

- Así, por el lema probado anteriormente, (Σ, τ) tiene un modelo infinito

ABSURDO