1. Sea $\tau_{Ret} = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \{\leq^2\}, a)$. Y sea $Ret = (\Sigma_{Ret}, \tau_{Ret})$, donde Σ_{Ret} es el siguiente conjunto de sentencias:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{A}_{\leq R} & = & \forall x\, x \leq x \\
\mathrm{A}_{\leq A} & = & \forall x \forall y\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x \equiv y) \\
\mathrm{A}_{\leq T} & = & \forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z) \\
\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC} & = & \forall x \forall y\ (x \leq x\, \mathsf{s}\, y \wedge y \leq x\, \mathsf{s}\, y) \\
\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C} & = & \forall x \forall y \forall z\ ((x \leq z \wedge y \leq z) \rightarrow x\, \mathsf{s}\, y \leq z) \\
\mathrm{A}_{\mathsf{i}esC} & = & \forall x \forall y\ (x\, \mathsf{i}\, y \leq x \wedge x\, \mathsf{i}\, y \leq y) \\
\mathrm{A}_{\mathsf{i}\geq C} & = & \forall x \forall y \forall z\ ((z \leq x \wedge z \leq y) \rightarrow z \leq x\, \mathsf{i}\, y)
\end{array}$$

(a) Note que dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ_{Ret}, se tiene que $\mathbf{A}$ satisface los axiomas $\mathrm{A}_{\leq R}$, $\mathrm{A}_{\leq A}$ y $\mathrm{A}_{\leq T}$ sii $(A, \leq^{\mathbf{A}})$ es un poset.

(b) Describa las estructuras que satisfacen las sentencias $\mathrm{A}_{\leq R}$, $\mathrm{A}_{\leq A}$, $\mathrm{A}_{\leq T}$ y $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$

(c) Describa las estructuras que satisfacen las sentencias $\mathrm{A}_{\leq R}$, $\mathrm{A}_{\leq A}$, $\mathrm{A}_{\leq T}$ y $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$

(d) Describa las estructuras que son modelos de Ret

(e) De una prueba en Ret de la sentencia $\forall x \forall y \forall z\ (x\, \mathsf{s}\, y)\, \mathsf{s}\, z \leq x\, \mathsf{s}\, (y\, \mathsf{s}\, z)$

(f) De una prueba en Ret de la sentencia $(\forall xyz\ (x\, \mathsf{i}\, y)\, \mathsf{s}\, (x\, \mathsf{i}\, z) \equiv x\, \mathsf{i}\, (y\, \mathsf{s}\, z) \rightarrow \forall xy\, (\exists z(x\, \mathsf{i}\, z \equiv y\, \mathsf{i}\, z \wedge x\, \mathsf{s}\, z \equiv y\, \mathsf{s}\, z) \rightarrow$

2. Sea T una teoría tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ hay un modelo $\mathbf{A}_n$ de T tal que $\mathbf{A}_n$ tiene al menos n elementos (o sea una teoría que tiene modelos finitos tan grandes se quiera). Probar que T tiene un modelo infinito. Saque como corolario que si τ es un tipo cualquiera, entonces no hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es finito. Analogamente, tampoco hay una sentencia $\varphi \in S^\tau$ tal que para cada modelo de tipo τ, se de que $\mathbf{A} \models \varphi$ sii A es infinito.