Enunciado

Sea $U = \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\mathbb{N}\}$.

$(U, \subseteq)$ no es un reticulado.

Demostración

Basta con encontrar dos elementos de U tales que no tengan supremo en $(U, \subseteq)$.

Demostración

Basta con encontrar dos elementos de U tales que no tengan supremo en $(U, \subseteq)$.

- Sean $C_1, C_2 \in U$ tales que $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$

Demostración

Basta con encontrar dos elementos de U tales que no tengan supremo en $(U, \subseteq)$.

- Sean $C_1, C_2 \in U$ tales que $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$
- Probemos por el absurdo que no existe $sup(\{C_1, C_2\})$

Suposición para llegar al absurdo

Supongamos $X \in U$ es el supremo de $\{C_1, C_2\}$.

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.
- Por otro lado sea $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $S_2 = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.
- Por otro lado sea $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $S_2 = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
- Como $C_1, C_2 \subseteq S_1$, entonces S_1 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.
- Por otro lado sea $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $S_2 = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
- Como $C_1, C_2 \subseteq S_1$, entonces S_1 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$
- Por el mismo motivo, S_2 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$.

$X \subseteq \mathrm{IN} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.
- Por otro lado sea $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $S_2 = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
- Como $C_1, C_2 \subseteq S_1$, entonces S_1 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$
- Por el mismo motivo, S_2 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$.
- Luego, $X \subseteq S_1$ y $X \subseteq S_2$.

$X \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$

- Entonces $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq X$.
- Como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ debe ser que $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{X}$.
- Por otro lado sea $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $S_2 = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
- Como $C_1, C_2 \subseteq S_1$, entonces S_1 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$
- Por el mismo motivo, S_2 es cota superior de $\{C_1, C_2\}$.
- Luego, $X \subseteq S_1$ y $X \subseteq S_2$.
- Pero entonces: $X \subseteq (S_1 \cap S_2) = \mathbb{N}$

Absurdo

- Vimos que $\mathbb{N} \subseteq X$ y que $X \subseteq \mathbb{N}$.

Absurdo

- Vimos que $\mathbb{N} \subseteq X$ y que $X \subseteq \mathbb{N}$.
- Por antisimetría de $\subseteq$, $\mathbb{N} = \mathrm{X}$.

Absurdo

- Vimos que $\mathbb{N} \subseteq X$ y que $X \subseteq \mathbb{N}$.
- Por antisimetría de $\subseteq$, $\mathbb{N} = \mathrm{X}$.
- Pero $\mathbb{N} \notin \mathrm{U}$. Absurdo pues $X \in U$.

Absurdo

- Vimos que $\mathbb{N} \subseteq X$ y que $X \subseteq \mathbb{N}$.
- Por antisimetría de $\subseteq$, $\mathbb{N} = \mathrm{X}$.
- Pero $\mathbb{N} \notin \mathrm{U}$. Absurdo pues $X \in U$.
- Como consecuencia no existe el supremo de $\{C_1, C_2\}$.

$(\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\mathbb{N}\}, \subseteq)$ **no es un reticulado**