3. Unión: $\mu_{A\cup B}=\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B$

Intersección: $\mu_{A\cap B}=\mu_A\mu_B$

Idempotencia: $A\cup A=A\cap A=A$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{A\cup A}&=2\mu_A-\mu_A^2\\ \mu_{A\cap A}&=\mu_A^2\end{aligned}\right\}\neq\mu_A$$

Conmutatividad:

$$\mu_{A\cap B}=\mu_A\mu_B=\mu_B\mu_A=\mu_{B\cap A}$$

$$\mu_{A\cup B}=\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B=\mu_B+\mu_A-\mu_B\mu_A=\mu_{B\cup A}$$

Asociatividad:

$$\mu_{A\cap(B\cap C)}=\mu_A\mu_{B\cap C}=\mu_A(\mu_B\mu_C)=(\mu_A\mu_B)\mu_C=\mu_{(A\cap B)\cap C}$$

$$\mu_{A\cup(B\cup C)}=\mu_A+\mu_{B\cup C}-\mu_A\mu_{B\cup C}$$

$$=\mu_A+[\mu_B+\mu_C-\mu_B\mu_C]-\mu_A[\mu_B+\mu_C-\mu_B\mu_C]$$

$$=\underline{\mu_A}+\underline{\mu_B}+\underline{\mu_C}-\mu_B\mu_C-\underline{\mu_A\mu_B}-\mu_A\mu_C+\mu_A\mu_B\mu_C$$

$$=[\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B]+\mu_C-\mu_C[\mu_B+\mu_A-\mu_A\mu_B]$$

$A\cup(B\cap C)$

Distributiva: $\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}=\mu_{A\cup B}\mu_{A\cup C}$

$$=[\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B][\mu_A+\mu_C-\mu_A\mu_C]$$

$$\mu_A+\cancel{\mu_B\mu_C}-\cancel{\mu_A\mu_B}\mu_C=\mu_A^2+\mu_A\mu_C-\mu_A^2\mu_C+\mu_A\mu_B+\cancel{\mu_B\mu_C}-\underline{\cancel{\mu_A\mu_B}\mu_C}-\mu_A^2\mu_B-\underline{\mu_A\mu_B}\mu_C+\mu_A^2\mu_B\mu_C$$

No.

Absorción. $A\cup(A\cap B)$

$$\mu_A+\mu_A\mu_B-\mu_A^2\mu_B\neq\mu_A.$$

$A\cap A^c$

$$\mu_A(1-\mu_A)\neq 0$$

$A\cup A^c=X$

$$x^2-x+1$$

$$\mu_A+(1-\mu_A)-\mu_A(1-\mu_A)=\cancel{\mu_A}+1-\cancel{\mu_A}-\mu_A+\mu_A^2=1-\mu_A+\mu_A^2\neq 1$$

Involución ✓

Absorción Complemento:

$$A\cup(A^c\cap B)=A\cup B$$

$$\mu_A+\mu_{A^c\cap B}-\mu_A\mu_{A^c\cap B}=\mu_A+(1-\mu_A)\mu_B-\mu_A(1-\mu_A)\mu_B$$

$$=\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B-\mu_A\mu_B+\mu_A^2\mu_B\neq\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B.$$

De Morgan:

$$\mu_{\bar A\cap\bar B}=(1-\mu_A)(1-\mu_B)=1-\mu_A-\mu_B+\mu_A\mu_B$$

$$=1-(\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B)$$

$$=1-\mu_{A\cup B}=\mu_{\overline{A\cup B}}$$

$$\mu_{\bar A\cup\bar B}=1-\mu_A+1-\mu_B-(1-\mu_A)(1-\mu_B)$$

$$=\cancel{1}-\cancel{\mu_A}+\cancel{1}-\cancel{\mu_B}-\cancel{1}+\cancel{\mu_A}+\cancel{\mu_B}-\mu_A\mu_B$$

$$=1-\mu_A\mu_B=\mu_{\overline{A\cap B}}.$$