Parcial 1: Inteligencia Artificial — David Plazas Escudero

1. $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $C = A \cup B$ | $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $C = A \cap B$

$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$

a) Medio excluido. $A \cup A^c = X$

Sea $X \neq \phi$. Sea $A \neq \phi$ un conjunto difuso en X tal que $\exists x \in X$ tal que $\mu_A(x) \in (0,1)$.
Luego, $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \in (0,1)$. Por lo tanto, $\mu_{A \cup A^c}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} < 1$.
Con lo que se prueba que si A tiene elementos con valor de pertenencia en $(0,1)$ entonces no se cumple la ley del medio excluido.

b) Ley de Morgan 1: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Sean A, B conjuntos difusos en X. Sea $x \in X$. Supongamos que $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

$$\mu_{(A\cup B)^c}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$= 1 - \mu_B(x).$$

Claramente si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Rightarrow 1 - \mu_B(x) \leq 1 - \mu_A(x)$, luego

$$\mu_{(A\cup B)^c}(x) = 1 - \mu_B(x) = \min\{1 - \mu_B(x), 1 - \mu_A(x)\}$$
$$= \min\{\mu_{B^c}(x), \mu_{A^c}(x)\} = \mu_{A^c \cap B^c}(x)$$

La prueba para $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ es análoga. Luego $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

c) Ley de Morgan 2: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Sean A, B conjuntos difusos en X. Sea $x \in X$. Supongamos que $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

$$\mu_{(A\cap B)^c}(x) = 1 - \mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$= 1 - \mu_A(x)$$

Como $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \rightarrow 1 - \mu_A(x) \geq 1 - \mu_B(x)$, luego

$$\mu_{(A\cap B)^c}(x) = 1 - \mu_A(x) = \max\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$
$$= \max\{\mu_{A^c}(x), \mu_{B^c}(x)\} = \mu_{A^c \cup B^c}(x)$$

La prueba para $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ es análoga.

2 a) $T_{min}(a,b) = min(a,b)$

i) $T_{min}(0,0) = min(0,0) = 0$ ✓

ii) $T_{min}(a,1) = min(a,1) = a, \ a \in [0,1]$.

iii) Sean $a,b,c,d \in [0,1]$ t.q. $a \leq c$ y $b \leq d$.

•) Supongamos $a<b$ y $c<d \rightarrow T_{min}(a,b) = a \leq c = T_{min}(c,d)$ ✓

••) Supongamos $a>b$ y $c>d \rightarrow T_{min}(a,b) = b \leq d = T_{min}(c,d)$ ✓

∴) Supongamos $a<b$ y $d<c \rightarrow T_{min}(a,b) = a < b \leq d = T_{min}(c,d)$ ✓

∷) Supongamos $a>b$ y $c<d \rightarrow T_{min}(a,b) = b < a \leq c = T_{min}(c,d)$ ✓

iv) $T_{min}(a,b) = min(a,b) = min(b,a) = T_{min}(b,a)$ ✓

v) $T_{min}(T_{min}(a,b),c) = min(min(a,b),c) = \Delta$

•) Supongamos $a<b<c$: $\Delta = min(a,c) = a = min(a,b) = min(a, min(b,c))$ ✓
Análogamente se hace $b<a<c$.

••) Supongamos $a<c<b$: $\Delta = min(a,c) = min(a, min(b,c))$ ✓
Análogamente se hace $b<c<a$

∴) Supongamos $c<b<a$: $\Delta = min(b,c) = c = min(a,c) = min(a, min(b,c))$ ✓

∷) Supongamos $c<a<b$: $\Delta = min(a,c) = min(a, min(b,c))$ ✓

Luego, $T_{min}(T_{min}(a,b),c) = T_{min}(a, T_{min}(b,c))$

b) $T_{ab}(a,b) = ab$

i) $T_{ab}(0,0) = 0 \cdot 0 = 0$ ✓

ii) $T_{ab}(a,1) = 1 \cdot a = a$ ✓

iii) Si $a \leq c$ y $b \leq d \Rightarrow ac \leq bd \Rightarrow T_{ab}(a,b) \leq T_{ab}(c,d)$ ✓

iv) $T_{ab}(a,b) = ab = ba = T_{ab}(b,a)$

v) $T_{ab}(T_{ab}(a,b),c) = T_{ab}(ab,c) = abc = T_{ab}(a,bc) = T_{ab}(a, T_{ab}(b,c))$ ✓

c) $T_{bp}(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$

i) $T_{bp}(0,0) = \max\{0,-1\} = 0$ ✓

ii) $T_{bp}(a,1) = \max\{0, a+1-1\} = a$ ✓

iii) $T_{bp}(a,b) \overset{?}{\leq} T_{bp}(c,d)$, $a \leq c$ y $b \leq d$.

•) Supongamos $a+b-1 \geq 0 \Rightarrow c+d-1 \geq 0$, ya que $a+b-1 \leq c+d-1$, de donde $T_{bp}(a,b) \leq T_{bp}(c,d)$ ✓

••) Supongamos $a+b-1 < 0 \Rightarrow T_{bp}(a,b) = 0 \leq \max\{c+d-1, 0\} = T_{bp}(c,d)$ ✓

iv) $\max\{\max\{a+b-1, 0\}+c, 0\} = T_{bp}(T_{bp}(a,b), c) = \Delta$

•) Supongamos $a+b-1 \leq 0$ y $b+c-1 \leq 0$

$\Delta = \max\{c-1, 0\} = 0 = \max\{a-1+0, 0\} = \max\{a+\max\{b+c-1, 0\}-1, 0\}$ ✓

••) Supongamos $a+b-1 \leq 0$ y $b+c-1 \geq 0$

$\Delta = \max\{c-1, 0\} = \max\{(a+b-1)+c-1, 0\} = \max\{a+\max\{b+c-1, 0\}-1, 0\}$ ✓

∴) Supongamos $a+b-1 \geq 0$ y $b+c-1 \leq 0$:

$\Delta = \max\{a+b-1+c-1, 0\} = 0 = \max\{a-1+0, 0\} = \max\{a-1+\max\{b+c-1, 0\}, 0\}$ ✓

∷) Supongamos $a+b-1 \geq 0$ y $b+c-1 \geq 0$

$\Delta = \max\{a+b-1+c-1, 0\} = \max\{a+\max\{b+c-1, 0\}-1, 0\}$ ✓

v) $T_{bp}(a,b) = \max\{a+b-1, 0\} = \max\{b+a-1, 0\} = T_{bp}(b,a)$ ✓

d) i) $T_{dp}(0,0) = 0$ ✓

ii) $T_{dp}(a,1) = a$ ✓

iii) Sean $a \leq c$ y $b \leq d$,

•) Supongamos $a = 1 \Rightarrow c = 1 \rightarrow T_{dp}(a,b) = b \leq d = T_{dp}(c,d)$ ✓

••) Supongamos $b = 1 \Rightarrow d = 1 \rightarrow T_{dp}(a,b) = a \leq c = T_{dp}(c,d)$ ✓

∴) Supongamos $a, b < 0 \Rightarrow T_{dp}(a,b) = 0 \leq T_{dp}(c,d)$.

iv) •) Supongamos $a = 1 \rightarrow T_{dp}(a,b) = b = T_{dp}(b,a)$

••) Si $b = 1 \Rightarrow T_{dp}(a,b) = a = T_{dp}(b,a)$

∴) Si $a, b < 1 \Rightarrow T_{dp}(a,b) = 0 = T_{dp}(b,a)$

v) $T_{dp}(T_{dp}(a,b),c) = \begin{cases} T(a,b), & c=1 \\ c, & T(a,b)=1 \\ 0, & c, T(a,b)<1 \end{cases} = \begin{cases} a, & c=1 \wedge b=1 \\ b, & c=1 \wedge a=1 \\ c, & a=1 \wedge b=1 \\ 0, & a,b,c<1. \end{cases}$

$T(a,T(b,c)) = \begin{cases} a, & T(b,c)=1 \\ T(b,c), & a=1 \\ 0, & a, T(b,c)<1 \end{cases}$

$= \begin{cases} a, & b=c=1 \\ b, & a=1 \wedge c=1 \\ c, & a=1 \wedge b=1 \\ 0, & a,b,c<1 \end{cases}$

Luego,

$T_{dp}(T_{dp}(a,b),c) = T_{dp}(a, T_{dp}(b,c))$ ✓

Cadena desigualdades.

1. $T_{dp}(a,b) \leq T_{bp}(a,b)$

 •) Si $a=1 \Rightarrow T_{dp}(a,b) = b \leq \max\{0,b\} = \max\{0, b+1-1\} = \max\{0, a+b-1\}$ ✓

 Análogo para $b=1$.

 ••) Si $a,b<1 \rightarrow a+b-1<0 \Rightarrow T_{dp}(a,b) = 0 \leq T_{bp}(a,b)$ ✓

2. $T_{bp}(a,b) \leq T_{ap}(a,b)$

 •) Si $a+b-1 \geq 0 \rightarrow T_{bp}(a,b) = a+b-1$. Como $a,b \in [0,1] \Rightarrow 1-a, 1-b \in [0,1]$

 Luego, $(1-a)(1-b) \geq 0 \rightarrow 1-(a+b)+ab \geq 0 \Rightarrow a+b-1 \leq ab = T_{ap}(a,b)$ ✓

 ••) Si $a+b-1<0 \rightarrow T_{bp}(a,b) = 0 \leq T_{ap}(a,b)$.

3. $T_{ap}(a,b) \leq T_{min}(a,b)$

 •) Si $a<b \Rightarrow T_{ap}(a,b) = ab \leq a = T_{min}(a,b)$

 Análogo para $b<a$.

 Luego, $T_{dp}(a,b) \leq T_{bp}(a,b) \leq T_{ap}(a,b) \leq T_{min}(a,b)$

3. a) Inputs:

1. $u(t-h) \to$ Valor del control u el instante anterior.
2. $v(t-h) \to$ Valor del control v el instante anterior.
3. $x(t) \to$ Valor del estado en el instante actual

b) Output:

1. $\Delta u \to$ Valor para actualizar el controlador $u(t) = u(t-h) + \Delta u$
2. $\Delta v \to$ Valor para actualizar el controlador $v(t) = v(t-h) + \Delta v$

c) d)

Inputs

$u(t-h) \in [0, 1] \longrightarrow$ Alto, Medio, Bajo

$v(t-h) \in [0, 1] \longrightarrow$ Alto, Medio, Bajo

$x(t) \in [0, 1] \longrightarrow$ Grande, controlada, nula

Outputs

$\Delta u \in [-\omega, \omega] \longrightarrow$ Aumentar, constante, disminuir

$\Delta v \in [-\omega, \omega] \longrightarrow$ Aumentar, constante, disminuir.

$0 < \omega \ll 1$, por ejemplo $\omega = 0.05$.