FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

71.14 Modelos y Optimización I

Resumen

Índice

1. Pasos para plantear un problema en programación lineal

1. Escribir el objetivo (Qué hacer?, Cuándo? y Para qué?)
2. Plantear las hipótesis
3. Describir las variables de cantidades con sus unidades, ej: X: cantidad de x prod. [unidad/mes] (entera/continua)
4. Plantear el modelo matemático:
   - Describir cada una de las restricciones en palabras (si es de armado necesitara 1 restricción por elemento para el armado).
   - Los únicos signos válidos en las restricciones son mayor o igual, igual o menor o igual. Todas las restricciones se tienen que poder convertir en igualdades para resolver el problema.
   - Definir las variables de decisión (controlables)
   - Expresar cada restricción en función de las variables de decisión

1.1. Hipotesis y supuestos para los problemas

- No hay inflación ni varían los precios o costos
- No hay productos ni materia prima fallados
- No hay limitantes de recursos
- Todo lo que se produce se vende
- No hay desperdicio de recursos al fabricar
- Gastos de energía insignificantes
- Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas (sirve para poder plantear el modelo dentro de la optimización deterministica)
- Hipótesis de proporcionalidad: tanto el beneficio como el uso de recursos son directamente proporcionales al nivel de actividad
- Hipótesis de aditividad: no existen interacciones entre las actividades que cambien la efectividad o el uso total de algún recurso.
- Hipótesis de divisibilidad: Las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables

1.2. Variables

- Las variables slack o variables de holgura sirven para agregar un término positivo de un lado de una restricción esta se convierte en igualdad. Estás variables nos indicarán el sobrante de alguna variable.
- Continuas
- Enteras: productos enteros o recursos enteros

- Bivalentes o indicadoras (0,1): variables de decisión, señalan alternativas posibles o indicativas marcan el estado de una variable asociada
- Exceso y defecto: van juntas ya que no puede haber variables negativas

2. Tipos de problema

- Problemas de mezcla: Uso de porcentajes y cantidades no enteras. Se mezclan ciertos insumos para producir otros bienes a vender.
- Problemas de armado: Uso de cantidades enteras. A diferencia del problema de mezcla, en este caso el producto final sigue manteniendo la esencia de las partes que lo componen, no se forma algo original/diferente. En gral. en estos problemas se necesita una restricción por cada tipo de elemento que interviene en el armado de un producto.
- Problema de producción: Cuánto tengo que producir. La producción se divide en distintos lugares físicos en cada uno de los cuales se realizan distintas partes del proceso.
- Problema de multiperiodo: Tiene varios periodos, en el cual cada uno esta relacionado con el anterior y el siguiente
- Problema del viajante: Consiste en determinar el circuito más eficiente de un viajante que tiene que recorrer una serie de puntos
- Problema de distribución o transporte: Hay un conjunto de lugares que disponen de los suministros que son los orígenes y lo destinos que con los conjuntos de lugares a ser abastecidos
  - Problema del Transbordo: Los suministros no van a los destinos sino que van a un punto intermedio.
  - Problema de asignación: es como el problema de transporte pero todas las demandas y ofertas son iguales a 1. Hay que encontrar los conjuntos (a, b) (siendo a origen y b destino) tal que minimice los costos
- Problema de cobertura de conjuntos: Hay 3 tipos:
  - Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento (≥ 1).
  - Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento ($= 1$).
  - Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento (≤ 1)
- Problema de secuenciamiento de tareas (scheduling): cual es el orden más óptimo para realizar ciertas tareas

2.1. Problemas de armado

Las situaciones en las cuales se debe fabricar un producto utilizando determinada cantidad de otros productos (cantidades y no porcentajes) reciben el nombre de problemas de armado. A diferencia de los problemas de mezcla, los productos que intervienen en el armado no generan algo diferente, como en el problema de mezcla, sino que siguen manteniendo su esencia original.

La única manera de avisarle algo al modelo es con restricciones. En el ejemplo que había del armado de muñecos la siguiente ecuación estaba MAL:

$$(CABEZAFEMENINA + TORSOFEMENINO + PIERNA + BRAZO)/6 = DAMA$$

Está MAL porque si DAMA vale 1 el modelo podría, con esta única restricción, darle el siguiente valor a las variables: CABEZAFEMENINA = 6, TORSOFEMENINO = 0, PIERNA = 0, BRAZO = 0 lo cual originaría un monstruo de 6 cabezas. El mensaje que le damos al modelo es que para hacer un muñeco se necesitan 6 piezas de cualquier tipo, porque en la restricción sumamos todos los tipos de pieza y lo dividimos por 6. Una característica de los modelos de armado es que se necesita una restricción por cada tipo de elemento que interviene en el armado de un producto. En el ejemplo de los muñecos sería:

$$1(cabeza/mueco)DAMA(mueco/mes) = CABEZAFEMENINA(cabeza/mes)$$

$$1(torso/mueco)DAMA(mueco/mes) = TORSOFEMENINO(torso/mes)$$

$$2(brazo/mueco)DAMA(mueco/mes + 2(brazo/mueco)CABALLERO(mueco/mes = BRAZO(brazo/mes)$$

...

2.2. Problema del viajante

- Se llama C_{ij} a la distancia entre el punto i y j
- Viajante simétrico: no importa la dirección ($C_{ij} = C_{ji}$)
- Viajante asimétrico: importa la dirección
- Y_{ij} vale 1 si el tour va de i a j, vale 0 en caso contrario

Formulación matemática
Al menos 1 camino llega hasta cada j

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} Y_{ij} = 1, \quad \forall j = 0, 1, 2..., n$$

Al menos 1 camino sale de i

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} Y_{ij} = 1, \quad \forall i = 0, 1, 2..., n$$

Funcional:

$$Z = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i\neq j}}^{n} C_{ij} Y_{ij} \quad (MINIMO)$$

Evitar "subtours"(que sea un único camino conexo):

Ui: Número de secuencia en la cual la ciudad i es visitada, $\forall i = 1, 2, 3...., n$ (variables **enteras**)

$$U_i - U_j + nY_{ij} \leq n - 1$$

$$\forall i = 1, 2, 3...., n$$

$$\forall j = 1, 2, 3...., n$$

$$i \neq j$$

Importante: las Ui no se definen para la ciudad 0 (de origen y de partida) porque la idea de estas variables es que no se pueda ir de una ciudad que tiene un determinado número de orden (o de secuencia) a una que tenga un orden menor. A la única que se puede volver es a la ciudad cero, porque no tiene este tipo de restricciones. Sin la ciudad cero (es decir, sin una ciudad que no tenga variable Ui definida) el modelo no funciona, porque la idea de este modelo es que arme un "arco" en el cual no se puede volver para atrás, por eso necesita una ciudad cero que esté fuera del arco.

Correlación Unitaria: El significado de las variables Ui es el número de secuencia en el cual es visitada la ciudad i. O sea si $Y_{ij} = 1 \implies U_j = U_i + 1$

Ejemplos:

- "No se puede visitar al cliente de la ciudad D si antes no se visitó al de la ciudad G":

$$UD \geq UG$$

- "No se puede visitar al cliente de la ciudad F si antes no se visitó al de la ciudad E o al de la ciudad B":

$$UF \geq UE - MY, \quad UF \geq UB - M(1 - Y)$$

2.3. Problema de distribución o transporte

Si todas las ofertas son números enteros y todas las demandas son números enteros, siendo todas las restricciones IGUALDADES, el problema de distribución o transporte tendrá como resultado que todas las variables tomarán valor entero aunque no se les ponga la condición de que las variables tienen que tomar valor entero. Por eso es que el problema de distribución o transporte se resuelve como un problema con variables continuas. Es muy importante que la oferta total sea igual a la demanda total (aunque sea agregando un origen ficticio o un destino ficticio, según corresponda) para que se pueda verificar que resolviéndolo como continuo da resultado entero.

Alternativa de transbordo
Las variables serán:
$XOiTj$: cantidad de unidades que el origen i envía al transbordo j
$XTiDj$: cantidad de unidades que el transbordo i envía al destino j

2.4. Cobertura de conjuntos

Tendriamos distintos circuitos que cubren los distintos puntos. Ejemplo:

$$Punto1)YA + YB + YE \leq 1$$

Si es cobertura el menor o igual sería mayor igual, si es partición sería igual y el caso que se muestra es el de packing.

2.5. Problema de scheduling

Se necesita saber el momento de inicio y de finalización de cada tarea, para ello se definen las siguientes variables:
Iij: Minuto en que empieza la tarea i en la máquina j
Fij: Minuto en el cual finaliza la tarea i en la máquina j
Si se quiere minimizar que tarea se termina antes se hace:

$$Fij \leq FINAL \quad \forall i, j$$

$$MIN \quad FINAL$$

Para que después no todas las tareas comienzen al mismo tiempo, habrá que indicarlo al modelo de la siguiente forma (tomamos una tarea A y B y una máquina "1"):

$$FA1 \leq IB1 + MYanuloAB$$

$$FB1 \leq IA1 + M(1 - YanuloAB)$$

Entonces por cada par de tareas en cada lugar se deberá incluir un par de variables

3. Programación lineal entera

3.1. Condiciones de vínculo

Son las que relacionan las actividades entre sí o con el contexto.

- Fuertes: deben ser cumplidas siempre.
- Débiles: pueden no cumplirse a un cierto costo (se resuelven con programación de metas).
- Conflictivas o contradictorias: dos o más condiciones no pueden cumplirse simultáneamente.

3.2. Relaciones de AND y OR

Se puede plantear un **and** de n variables binarias (n es una constante y es la cantidad de variables binarias que estamos sumando)

$$nY_{AND} \leq Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + ... + Yn \leq (n-1) + Y_{AND}$$

También se puede plantear un **or** de n variables binarias:

$$Y_{OR} \leq \sum_i Yi \leq nY_{OR}$$

3.3. Relación boleana con variables binarias indicativas

Cuando se agrega la variable de producción como Xi, la variable binaria/decisión pasa a ser una variable indicativa.

A diferencia de las variables de decisión, las variables indicativas necesitan restricciones para poder tomar el valor que indica su definición.

Por ejemplo: si tenemos Xi como la cantidad de producto i que se fabrica y tenemos Yi como variable para decidir si el producto i se fabrica o no, Además de todas las restricciones deberíamos tener:

$$mYi \leq Xi \leq MYi$$

donde m es un número muy pequeño (cercano a cero) y M es un número muy grande.

Esto se conoce como rangos de una variable

IMPORTANTE: Cuando se agrega la restricción del modelo bivalente a las restricciones se convierte en dos inecuaciones, una por cada signo mayor/menor

ej:

$$2YAH < Y3 + Y4 < 1 + YAH \implies 2YAH - Y3 - Y4 \leq 0 \quad y \quad Y3 + Y4 - YAH \leq 1$$

3.4. Metas

Cuando queremos saber si una variable está por encima de otra, o bien para estar al tanto de una meta economica. Usaremos las variables EXCESO y DEFECTO.

$$X1 - X2 = EXCESO - DEFECTO$$

$$mYEXCESO \leq EXCESO \leq MYEXCESO$$

$$mYDEFECTO \leq DEFECTO \leq MYDEFECTO$$

$$YEXCESO + YDEFECTO \leq 1$$

La última ecuación impide que ambas sean igual a 1.
Si queremos saber si son iguales podriamos hacer:

$$YEXCESO + YDEFECTO + YIGUALES 1$$

3.5. Eliminación de restricciones (Decisión de alternativas)

Este puede ser un caso en que tengamos dos opciones distintas pero excluyentes una de otra, por lo que el termino M se multiplicaría por la correspondiente variable binaria de si se toma la decisión o no y luego se obligará a que las 2 variables binarias sumadas valgan 1 (así obligo al modelo a tomar una sola opción)

Si la restricción es de menor o igual el término independiente (3 + M) tiene que tener un valor muy grande para que la restricción no restrinja

$$X1 + X2 \leq 5$$
$$X1 \leq 3 + MY_{anulo}$$
$$MAXZ = X1 + X2$$

Si la restricción es de mayor o igual el término independiente (3 - M) tiene que tener un valor muy chico (cero o menor que cero) para que la restricción no restrinja

$$X1 + X2 \leq 5$$
$$X1 \geq 3 - MY_{anulo}$$
$$MAXZ = X1 + X2$$

3.6. Costo de mantenimiento diferencial (Costo diferencial por intervalo)

Si el costo varía según distintos intervalos, para evitar multiplicar una variable no binaria por una suma de varias binarias (NO LINEAL), lo que hacemos es dividir la variable no binaria en tantos intervalos como necesitemos y asi multiplicar ($mYi < Xi < MYi$) cada tramo por su variable binaria. Y no podrá haber varios de esos tramos activos al mismo tiempo $\rightarrow Y1 + Y2 + ... + Yn = 1$. Si la variable entera fuese cantidad de horas usadas en una máquina las restricciones quedarían:

$$1 * YH1 \leq H1 \leq 30 * YH1$$

$$30,01YH2 \leq H2 \leq 59,99YH2$$

$$60YH3 \leq H3 \leq M * YH3$$

Restricción para que una sola variable se active

$$YH1 + YH2 + YH3 = 1$$

Recordemos que NO se pueden poner restricciones de mayor o menor estricto
Y el costo de mantenimiento será:

$$COSTO = H1 + 0,7H2 + 0,5H3$$

Importante los números que multiplican son a modo de ejemplo.

3.7. Función cóncava seccionalmente lineal

Este caso se da por ejemplo si el precio de venta de un producto va variando por tramos según unidades vendidas. La diferencia con el caso anterior es que antes todas las variables enteras (pueden ser horas) tenían el mismo costo pero variaba según su cantidad total, acá el costo es por tramos. Entonces la variable de precio nos quedaría $Xi = Xia + Xib + ... + Xin$

Y para restringir los valores entre ellas creamos una estructura tipo represa", nos quedarían los siguientes rangos (tomamos el ejemplo de solo 3 variables) :

$$nYiB \leq XiA \leq n$$

$$kYiC \leq XiB \leq kYiB$$

$$XiC \leq MYiC$$

4. Método Simplex

Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución. Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera, el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono (o de las aristas del poliedro, si el número de variables es mayor). Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución.

El método del simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo, f, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual f aumenta.

Pasos del método Simplex

1. Convertir las restricciones del problema a inecuaciones con el término independiente aislado en uno de los lados $\rightarrow X1 + X2 + ... + Xn \leq K$

2. Convertir las inecuaciones en una igualdad, agregando las variables slack correspondientes $\rightarrow X1 + X2 + ... + Xn + SLACKCORRESPONDIENTE = K$

3. Las slacks **no** pueden ser negativas, por lo que si hay restricciones de mayor o igual se deberá agregar **variables artificiales**

4. Igualar la función objetivo a 0.

5. Con las distintas ecuaciones armar el sistema matricial $Ax = b$, siendo A la matriz con coeficientes, X el vector con todas las variables + slacks y b el vector de términos independientes.

6. Buscaremos las soluciones en los vértices (porque solo esas pueden ser las óptimas). La cantidad máxima de variables que pueden ser distintas de cero en un vértice es igual a la cantidad de restricciones que tiene el problema.

4.1. Variables artificiales

Si al momento de plantear el método tenemos una restricción que es de mayor o igual, tal que: $X1 \geq 10$, además de restar la slack correspondiente para igualar la ecuación sumaremos una variable artificial para que **la slack no valga 0 en la primera iteración**, que no representará ningún recurso como lo hacen las demás slacks de recursos, pero que servirá para plantear el modelo en la primera iteración y deberá salir siempre fuera de la base cuando se halle el óptimo, caso contrario (si se encuentra en la base) estariamos frente a una solución no factible. En el ejemplo de arriba nos quedará $X1 - Xslack + \mu = 10$

Para que no afecte en la variable objetivo se le asigna un coeficiente o muy grande o muy chico dependiendo el problema (siendo M muy grande):

- -M en problemas de maximización
- +M en problemas de minimización

Un ejemplo sería:

$$Zmax = X1 + 2X2 - M * \mu$$

Al ser un problema de maximización lo más seguro es que el modelo no contenga en la base a la variable artificial ya que le resta mucho a el funcional.

4.2. Búsqueda de vértices

El primer vértice sería cuando todas las variables valen 0, posicionándonos en el vértice del origen, por lo que las variables slacks tomarían el máximo de su valor, esto nos da la ventaja de que los vectores de las variables distintas de cero son canónicos distintos (las variables que se encuentran en la columna X además se las llamas **variables base**: Si son productos indica cuanto se produjo, y si son recursos indica cuanto sobro, y si no están en la base indican lo contrario) y, por lo tanto, linealmente independientes (necesario para esto). Lo siguiente es armar una tabla tal que:

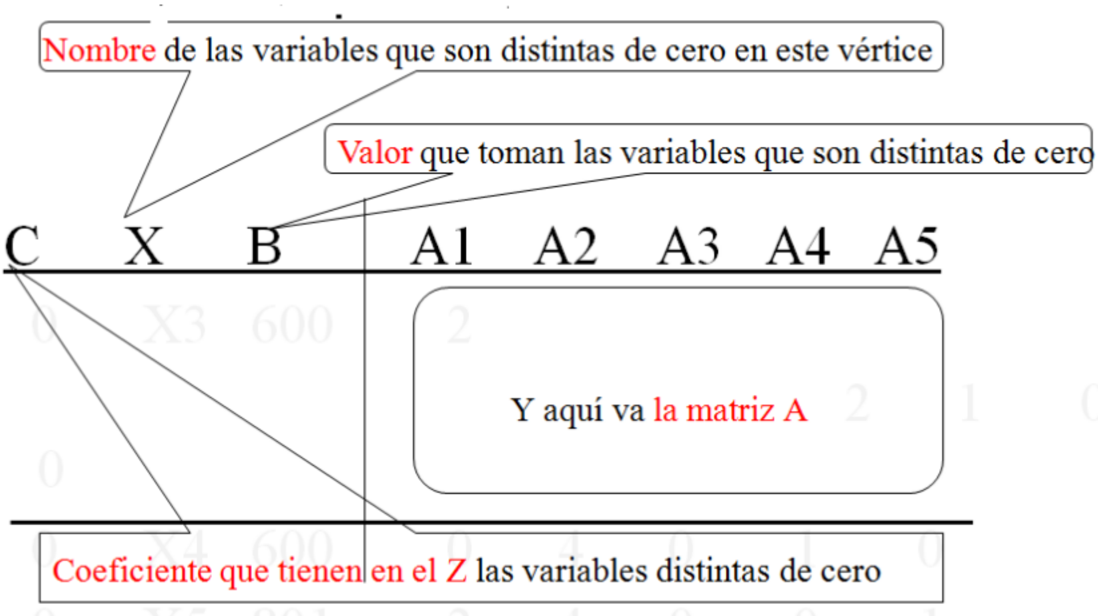


Figura 1: Tabla Método Simplex

→ Si tomamos el ejercicio de la heladería del PDF (9.1) nos quedaría la siguiente tabla

Calculamos el zj - cj para cada columna (todos los zj = 0)

			8	10			
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	801	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Figura 2: Primera Tabla Método Simplex

Como hay dos $zj - cj$ negativos (al ser el directo) aún **no hemos llegado al óptimo** (si es negativo es que no se llego al óptimo), para llegar al óptimo se debe cumplir que $zj - cj \geq 0 \quad \forall j$.

La fórmula para los Zj son:

$$Zj = CxAj$$

Siendo C **TODO** el vector de coeficientes de variables que se encuentran en la base. Ahora entonces $Zj - Cj$ nos quedará:

$$Zj - Cj = CxAj - Cj$$

En el ejemplo tenemos:

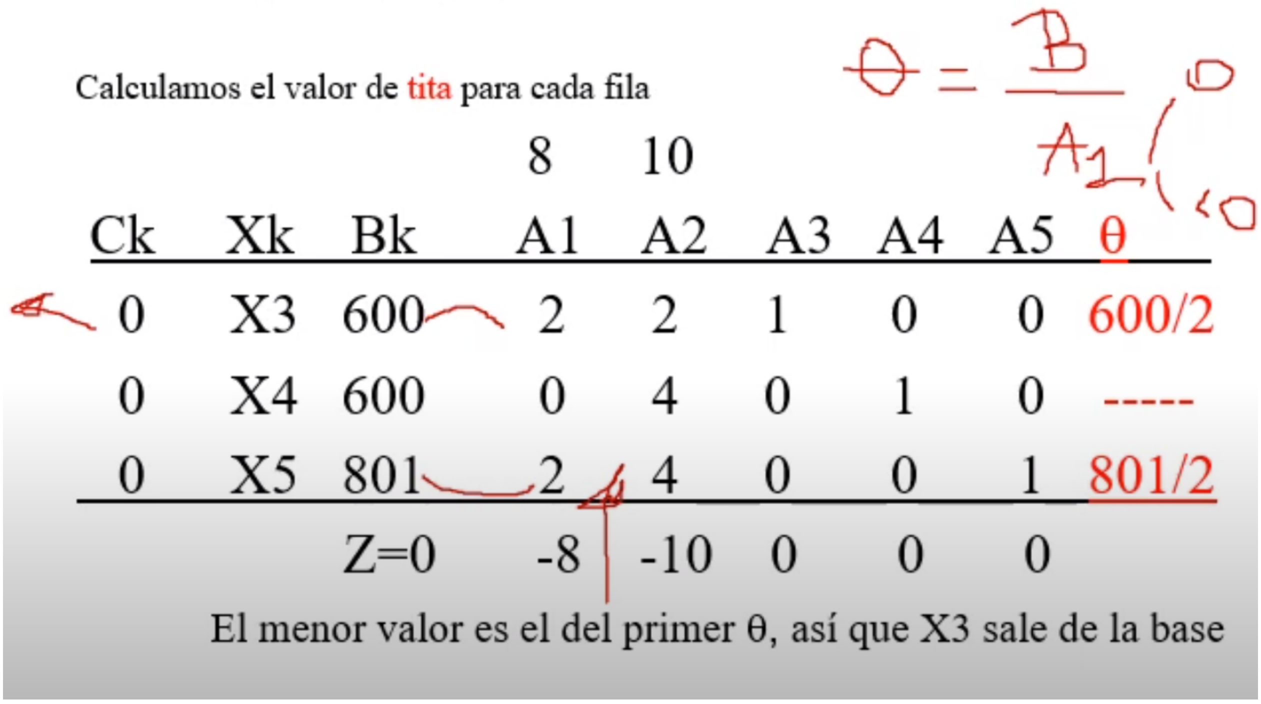
$$Z1 - C1 = 2 * 0 + 0 * 0 + 2 * 0 - 8$$

$$Z1 - C1 = 2 * 0 + 4 * 0 + 4 * 0 - 10$$

Para elegir que variable debe **ENTRAR** a la base, tenemos que elegir todas las variables cuyo $Zj - Cj$ sea menor que cero. Para decidir que variable debe **SALIR** de la base lo que conviene hacer es calcular el menor coeficiente θ, que este coeficiente se calcula:

$$\theta = \frac{Bi}{Aji}$$

Como $\theta \geq 0 \implies \theta$ cuya $Aij \leq 0$ no se calculan



			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	θ
0	X3	600	2	2	1	0	0	600/2
0	X4	600	0	4	0	1	0	-----
0	X5	801	2	4	0	0	1	801/2
		Z=0	-8	-10	0	0	0	

Figura 3: Tabla Simplex Theta

Cuando calculamos los θ nos quedamos con el mínimo, por lo que la variable que corresponde a ese θ saldrá de la base

Luego de elegir que variable entra a la base y cual sale, hay que cambiar de base. Para cambiar de base se seguirán los siguientes pasos:

1. Elegir el elemento pivote, que está en la base (X3 para el ej) con la columna de la variable que entra a la base (X1 para el ej)
2. Dividir la fila del pivote por el valor del pivote
3. Completar la columna del pivote con ceros.
4. Aplicar la regla del pivote que veremos a continuación para obtener el resto de valores (**para los Bi también va esta formula**)

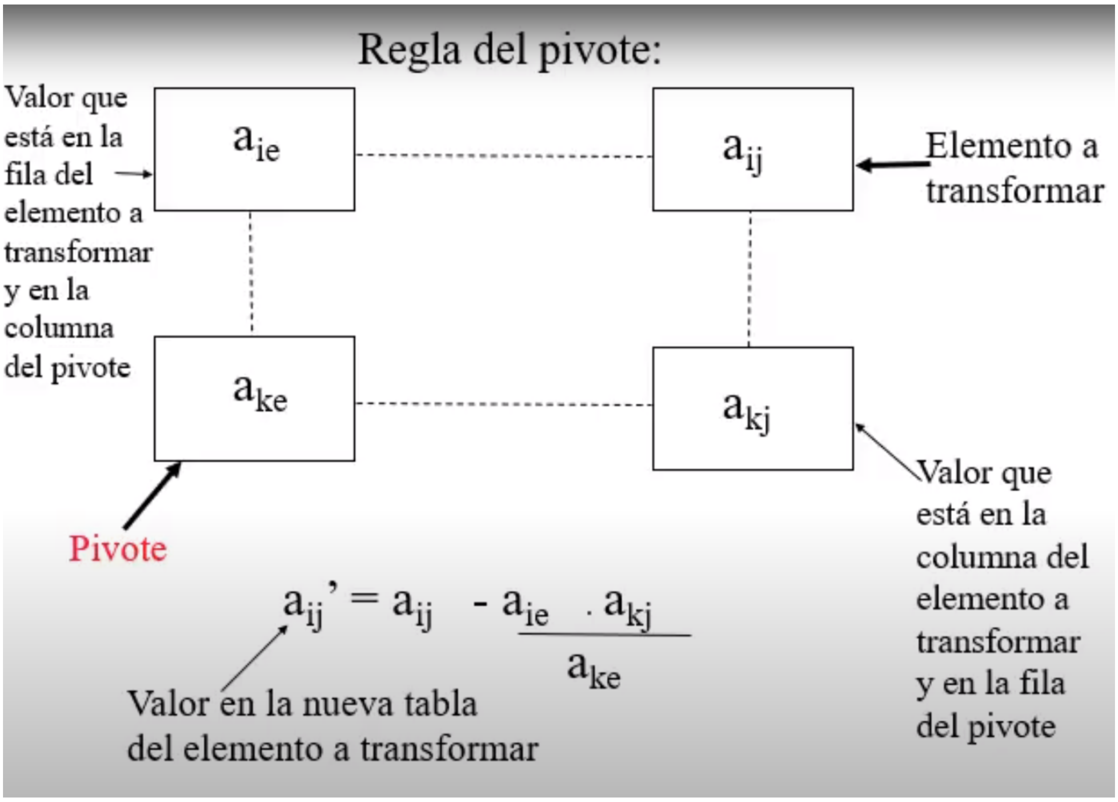


Figura 4: Regla pivote

Aca podemos ver porque $\theta \geq 0$

La **fila** que corresponde a donde esta el pivote, se divide toda por el valor del pivote (ya tiene que quedar igual a 1), y la **columna** tendrá todos ceros menos un 1 en el lugar del pivote (ya que pertenecerá a la base)

Entonces luego de esto (para el ejemplo) la segunda tabla nos quedará de la siguiente forma:

Segunda tabla del método simplex para el problema de los helados

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	201	0	2	-1	0	1
		Z=2400	0	-2	4	0	0

Como vemos, aún no llegamos al óptimo

Figura 5: Tabla simplex segunda tabla

Luego de esto repetimos el proceso hasta llegar al óptimo

IMPORTANTE: Recordar que para calcular el funcional de la tabla hay que multiplicar los vectores CxB. En este caso por ejemplo es:

$$Z = 8 * 300 + 0 * 600 + 0 * 201 = 2400$$

4.3. Valor marginal y Costo de Oportunidad

- Los recursos que están saturados son los que no se hayan en la base a la hora de hallar la tabla óptima →
  - Qué pasa si consigo más cantidad de un recurso saturado? gano más?
  - Qué pasa si me obligan a fabricar más de un producto? desmejora el funcional?
  - Qué pasa si la restricción se äfloja̋? ganó más?

4.4. Costo de oportunidad

- Si el $zj - cj$ corresponde a una variable real del problema (por lo general representa productos fabricados) se llama **costo de oportunidad** (**CO**) de ese producto (En LINDO se llaman **reduced cost**)

- El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no está en la base (porque vale 0). Por que, si nos obligan a producir alguna unidad de algo que ya no estamos produciendo (dado que no conviene) el funcional empeorará
- El costo de oportunidad de un producto indica en cuánto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto

4.5. Valor Marginal

- Si el $zj-cj$ corresponde a una variable slack del problema (por lo general representa sobrantes de recursos) se llama **valor marginal** (**VM**) de ese recurso o restricción (En LINDO se llaman **dual prices**)
- El valor marginal es distinto de cero cuando la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack de la restricción no está en la base (porque vale 0). Por lo que claramente, al no estar en la base, si conseguimos más de ese recurso limitado el funcional mejorará.
- El valor marginal indica en cuánto va a mejorar el funcional si esa restricción se afloja en una unidad. Si la restricción es menor o igual aflojar es aumentar el término indep., si la restricción es mayor o igual, aflojar es reducir el término indep.

4.6. Dual

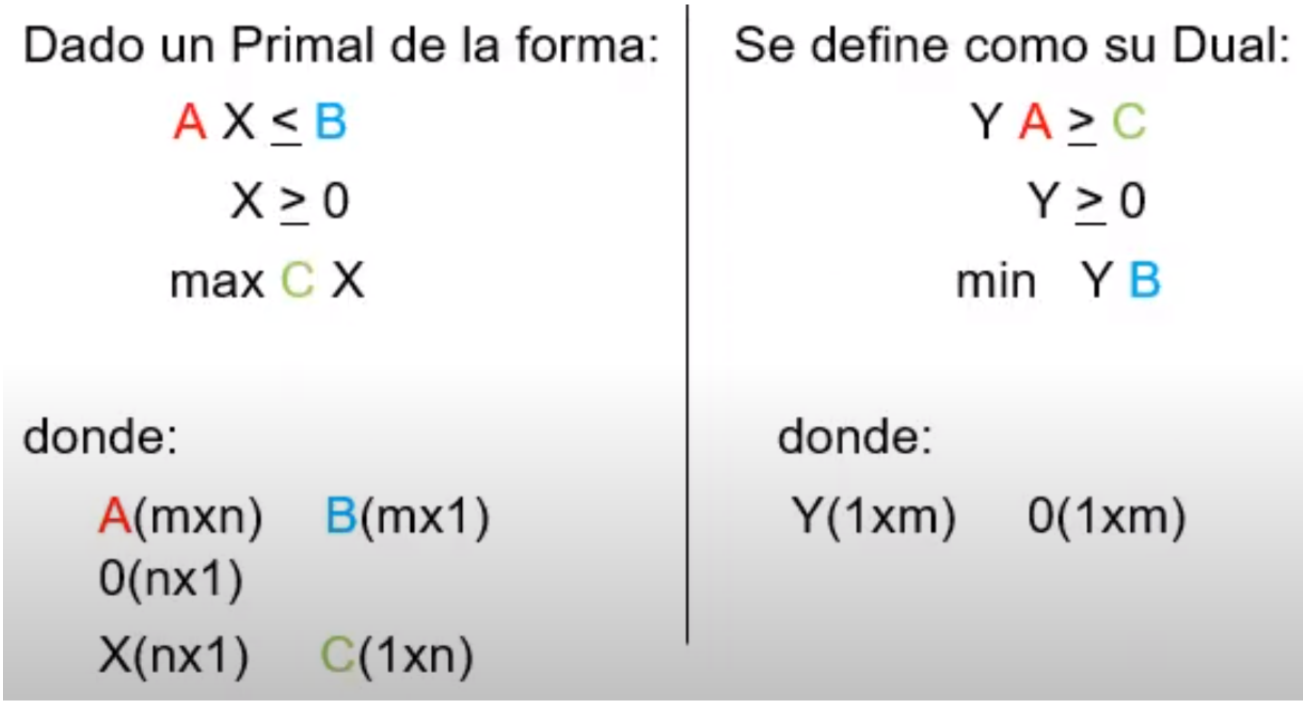


Figura 6: Planteo Dual

- El dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal

- El dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal
- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa
- Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del primal, son los términos independientes de las restricciones del dual
- Los términos independientes de las restricciones del primal son los coeficientes del funcional del dual
- Solo puedo pasar del directo al dual y viceversa, en la primera y en la tabla final (la óptima)
- **IMPORTANTE**: Si en un primer momento tenemos ecuaciones del tipo $X1 > 3$, habría que multiplicarlas por -1 y así obtener $-X1 < -3$, luego de hallar el óptimo del directo con esa forma, recién ahí se podría pasar al dual

Nuestro dual para el ejemplo anterior quedará de la siguiente forma:

Directo inicial:

$$2\,X1 + 2\,X2 \leq 600$$

$$0\,X1 + 4\,X2 \leq 600$$

$$2\,X1 + 4\,X2 \leq 800$$

$$\text{MAX } Z = 8\,X1 + 10\,X2$$

Dual inicial:

$$2\,Y1 + 0\,Y2 + 2\,Y3 \geq 8$$

$$2\,Y1 + 4\,Y2 + 4\,Y3 \geq 10$$

$$\text{MIN } Z = 600\,Y1 + 600\,Y2 + 800\,Y3$$

Figura 7: Dual ejemplo

4.7. Teorema fundamental de la dualidad

TEOREMA: Si el problema primal (o el dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita, y el valor de los dos funcionales óptimos es el mismo

- Si cualquiera de los 2 problemas tiene una solución óptima no acotada entonces el otro problema no tiene soluciones posibles
- Si cualquiera de los dos problemas tiene un punto degenerado entonces el otro problema tiene solución alternativa

→ **Solución óptima no acotada**: Se puede deber a un modelo mal construido, y se da con un problema de maximización. Tendríamos una región factible de soluciones infinitamente grande
→ **Solución no factible**: Se puede deber a un modelo mal construido, si alguna variable artificial nos queda en la base estaremos en este tipo de problema. No tenemos una región factible de soluciones
→ **Punto degenerado**: Sucede cuando más de dos rectas cortan en el mismo punto. Si quitamos alguna de las restricciones, la región de soluciones factibles sigue siendo la misma. En el método simplex sabremos que tendremos una solución degenerada si en algún paso previo a la obtención del óptimo podemos elegir entre 2 variables para que salgan a la base (ya que su θ da igual)
→ **Soluciones alternativas**: Sucede cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria no redundante. En el método simplex se dará cuando habiendo llegado a la tabla óptima, se pueda elegir para que una variable que no este en la base entre en ella, ya que su $Zj - Cj$ es igual a 0

4.8. Teorema de la holgura complementaria

Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que en la k-ésima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-ésima variable del otro problema desaparece de la base, y si la k-ésima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-ésima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero.

En el ejemplo:

PRIMAL	**DUAL**
X1 = 200	Y4 = 0
X2 = 100	Y5 = 0
X3 = 0	Y1 = 3
X4 = 200	Y2 = 0
X5 = 0	Y3 = 1

4.9. Análisis de sensibilidad: Modificación de la solución óptima

4.9.1. Rango de variación de coeficientes de eficiencia (Cj)

• Para realizar estos cambios en los coeficientes de eficiencia deben realizarse de a uno por vez
• Para realizar estas variaciones lo que conviene hacer es parametrizar los cj y recalcular los $zj - cj$

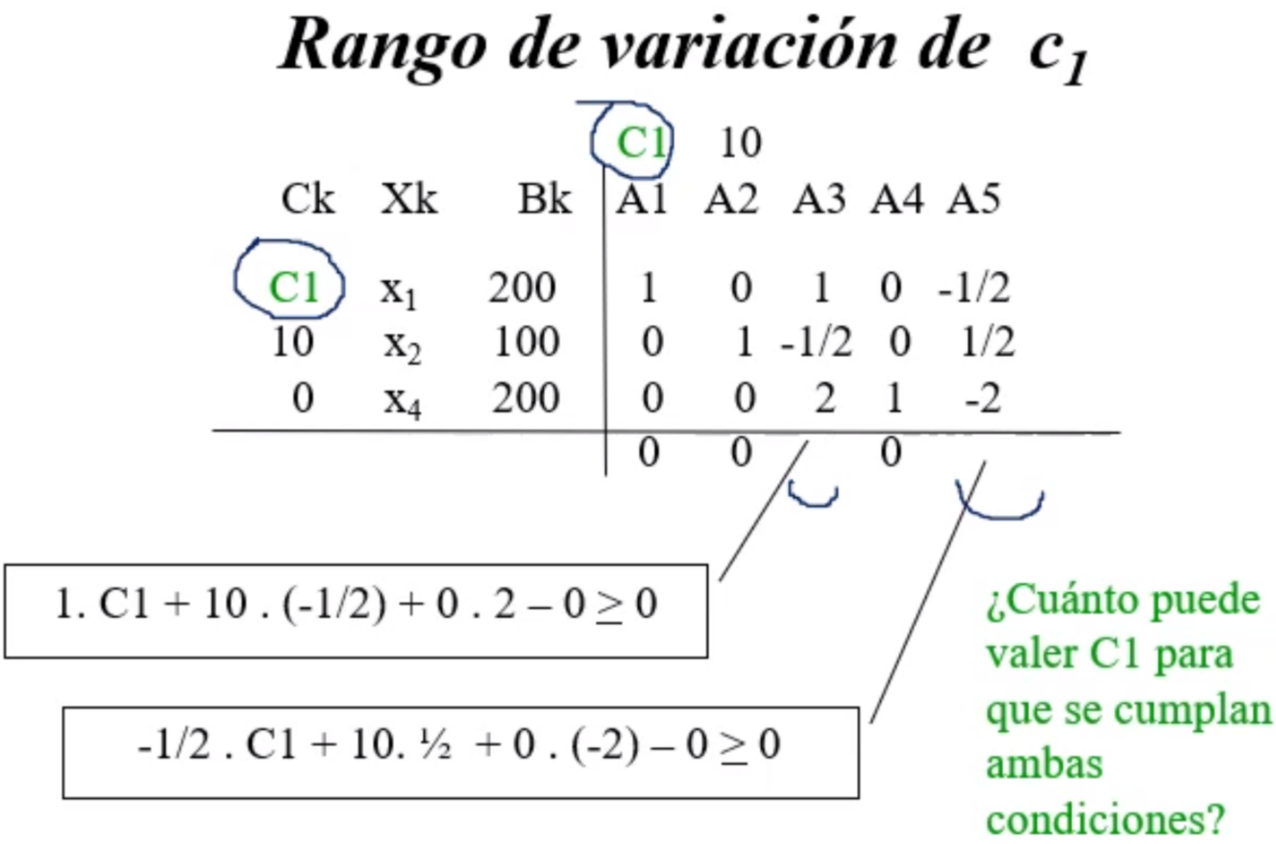


Figura 8: Parametrizacion de Cj

• Una vez parametrizamos obtenemos los nuevos $zj - cj$ con el cj parametrizado vemos en que punto dejan de valer cero, o lo que es lo mismo en que punto la tabla deja de ser óptima

• Recordar que si varío algún Cj el valor del funcional **SI va a cambiar**, lo que no cambia es la base que forma parte de la solución óptima, dicho de otra forma el valor de las variables (lo producido y lo sobrante).

4.10. Rango de variación de los términos independientes

Una vez que tenemos el dual, podemos parametrizar los términos independientes de la misma manera que lo hicimos con los coeficientes de eficiencia

A su vez también se puede hacer el gráfico de "curva de oferta" pero de los valores marginales de las slacks, cambiando los valores que nos dan en los límites cuando parametrizamos el $zj - cj$

4.10.1. Curva de oferta y gráfico del valor marginal

- La curva de oferta representa a los distintos valores que puede tomar el coeficiente cj de un producto en el Xj, qué cantidad de ese producto Xj es conveniente fabricar

- Para empezar la curva de oferta conviene empezar por la tabla óptima e ir variando los coeficientes e ir viendo los distintos intervalos (en los extremos de los rangos hay soluciones alternativas óptimas)
- Para la curva de oferta tendremos un gráfico continuo de a tramos y **creciente**, y para el gráfico de la variación del valor marginal (que se ve desde el dual) tendremos un gráfico continuo de a tramos y **descendiente**

4.11. Variación simultanea de 2 recursos

• Se presenta la posibilidad de conseguir azúcar entregando a cambio crema (para conseguir 1kg. de azúcar se deben entregar 1,5kg. de crema). Conviene?

Como son disponibilidades de recursos nos conviene trabajar en el dual, entonces nos quedaría asi la tabla:

Variación simultánea de dos recursos

			$(600+\alpha)$	$(600-1{,}5\alpha)$	800		
$(600+\alpha)$	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		$2600+3\alpha$	0	$(-200-0{,}5\alpha)$	0	$(-200-\alpha)$	$(-100+0{,}5\alpha)$

$$\left.\begin{array}{r} -200-0{,}5\alpha <= 0 \\ -200-\alpha <= 0 \\ -100+0{,}5\alpha <= 0 \end{array}\right\} \text{Implica} \quad \alpha <= 200$$

Figura 9: Variación simultanea

4.12. Introducción de un producto adicional

Qué pasa si queremos agregar un producto cuando ya tenemos la tabla óptima? Veamos las siguientes tablas:

1ra Tabla

			8	10			
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Tabla Optima

			8	10			
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Figura 10: Matriz inversa

La submatriz que se encuentra dentro de la tabla óptima y es la submatriz que se encuentra debajo de las 3 líneas rojas (de 3x3) es la matriz inversa de cambio de base. Por ende si yo quiero agregar un nuevo producto, con sus correspondientes gastos de cada recurso $\Longrightarrow$ lo que debo hacer es multiplicar a ese vector por la matriz inversa, y esa columna que nos da, será la que entrará en la tabla óptima. Luego, dependiendo de su $zj - cj$ podremos ver si aún nos encontramos en la tabla óptima, sino habrá que hallarla.

Algo importante a tener en cuenta, si una de las columnas de la matriz cambio de base corresponde a una variable artificial, entonces a esta habrá que cambiarle el signo antes de multiplicar el vector correspondiente al nuevo producto.

Por ejemplo, si queremos agregar un nuevo producto que consuma: 2kg de azúcar, 3kg de crema y 1kg de almidón por unidad, entonces la tabla nueva nos quedaría:

Introducción de un nuevo producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

			8	10				8	θ
8	x_1	200	1	0	1	0	-1/2	3/2	200 / 3/2
10	x_2	100	0	1	-1/2	0	1/2	-1/2	-----
0	x_4	200	0	0	2	1	-2	5	200/5
		2600	0	0	3	0	1	-1	

Figura 11: Nuevo producto

Como podemos ver la nueva tabla no es óptima, por lo que habría que hallarla de nuevo

Si el agregado de la nueva restricción no me obliga a cambiar el directo óptimo, entonces quiere decir que la inclusión de ese nuevo producto no me aporta nada y/o no me conviene

4.13. Introducción de inecuaciones

La respuesta es sencilla, hay que trasladarse al dual y actuar como si quisiéramos agregar una nueva variable con la diferencia que la matriz inversa es importante tener en cuenta que probablemente las columnas que se encontraban en la base inicial en este caso eran variables artificiales (generalmente pasa si el directo es de max. y el dual de min.) por lo que habrá que **cambiarle el signo** a las columnas que correspondan a variables artificiales. Recordar que el dual es el directo transpuesto

Si el agregado de la nueva restricción no me obliga a cambiar el dual óptimo, entonces quiere decir que esa inclusión de recurso no me aporta nada y/o no me conviene

4.14. Análisis de un problema de simplex

- Comprar recursos: tendremos que ver si el costo a que se compran es menor que el valor marginal del mismo por la cantidad de unidades a comprar. Si multiplicamos las X unidades a comprar por el valor marginal obtendremos las **ganancias máximas** ya que habría que hacer el rango de variación en el dual del coeficiente Cj (es útil para una primera aproximación) ya que a medida que **más** tengo de un recurso su valor marginal baja.
- Vender recursos: tendremos que ver que el valor de venta sea superior al valor marginal del recurso por la cantidad de unidades a vender. Si multiplicamos las X unidades a vender por

el valor marginal obtendremos las **perdidas mínimas** ya que habría que hacer el rango de variación en el dual del coeficiente Cj (es útil para una primera aproximación) ya que a medida que **menos** tengo de un recurso su valor marginal baja.

- Compra de recurso con demanda mínima: para ver si conviene nos tenemos que fijar el valor de venta sumado con el valor marginal de la slack de demanda mínima asociada (así podemos ver lo que ganamos con recursos liberados). Si tenemos la opción de comprar más de una unidad, nuevamente hacemos el rango de variación de la slack en el dual.

5. Heurística (de construcción)

- Es una aproximación más "barata"para resolver un problema de PLC, que como veníamos haciendo con las inecuaciones.
- Son de orden polinomial (los de antes eran de orden exponencial). Por ejemplo cuando hay 2 ciclos for anidados
- La heurística tiene que cumplir con las restricciones del modelo
- Tiene que tener una condición de corte clara y no caer en loops infinitos
- Indicar que hacer en desempates (Por ejemplo si se hace un índice/ranking de prioridades)