

Segundo Reto Análisis Numérico (13 Noviembre 2020)

María Paula Covelli Reyes, David Mateo Henao Prieto, Juan Sebastián Pulecio Romero

Resumen—Aplicación de la interpolación en un ejercicio con el objetivo de reconstruir un jarrón realizado en la herramienta Blender junto con sus curvas de nivel. Utilizando métodos de superficies de Bezier y BSpline se busca obtener los puntos respectivos de cada eje en el objeto graficado en Blender, para posteriormente usarlos en el cálculo de la interpolación y así lograr reconstruir el jarrón.

Palabras clave—BSpline, Superficie de Bezier, Graficacion, Interpolacion,

Abstract— *Application of interpolation in an exercise with the objective of reconstructing a vase made in the Blender tool along with its contour lines. Using Bezier and BSpline surface methods, we seek to obtain the respective points of each axis in the graphing made in Blender, to later use them in the interpolation calculation and thus achieve the reconstruction of the vase.*

Key Words—BSpline, Superficie de Bezier, Graficacion, Interpolacion,

I. INTRODUCCIÓN

El proceso de interpolación espacial estima los valores que podría alcanzar cualquier variable que se encuentra en un conjunto de puntos ubicados en coordenadas específicas dentro de un área de estudio.[1]

La interpolación en áreas de estudio conocidas como nubes de puntos, permiten el modelamiento tridimensional de objetos, de este modo se pueden realizar gran variedad de formas geométricas.[2] Se tiene en cuenta que la mayor parte de objetos del mundo real no tienen formas poligonales ni superficies rectas, pues por lo general son rugosas, irregulares o curvas. Muchas aplicaciones de modelamiento intentan representar lo mejor posible los objetos del mundo real y es explícitamente necesario para estas, que logren generar trazados curvos e irregulares, de forma que reproduzcan lo más fielmente posible a los objetos que se busca

modelar sin utilizar trazados rectos. Estos métodos no solo permiten mejorar las impresiones que se podrían dar usando líneas rectas, sino que también tiene la capacidad de corregir las posibles discontinuidades que se puedan llegar a producir en la nube de puntos estudiada. [3]

La representación digital de objetos o superficies del mundo real permite representar figuras de la naturaleza, en las cuales encontrar superficies rectas o simétricas es casi imposible y por tanto, se vuelve complicado realizar descripciones matemáticas de las mismas. Se debe tener en cuenta también, que la modelación digital de objetos da paso a la innovación, formando elementos que aun no existen en el medio físico y así permite crear prototipos de herramientas, medios u otros elementos útiles para algún fin explícito.[3]

El modelamiento y reconstrucción de objetos se puede dar actualmente en muchas áreas de estudio o aplicación, tal es el caso de la modelación de piezas para áreas industriales, de la restauración de piezas arqueológicas o incluso en el área médica generando órganos de todo tipo y prótesis para personas con algún tipo de discapacidad.[4]

II. METODOS Y CONJUNTO DE DATOS

-Conjunto de datos:

Para realizar el reto, se comenzó con la realización del jarrón de referencia. Para esto se usó la aplicación Blender, dado que esta permitía, al finalizar el modelamiento 3D, obtener los puntos respectivos a cada eje. Estos puntos son de gran importancia, dado que posteriormente fueron implementados en R para calcular una interpolación y realizar la construcción del jarrón. Exactamente se obtuvo un total de 4.614

puntos, de los cuales fueron escogidos 128 de referencia para realizar la interpolación correctamente en el software libre para análisis estadístico R.

Como se puede ver en la imagen a continuación, el jarrón de referencia es bastante similar al presentado en la guía del reto.

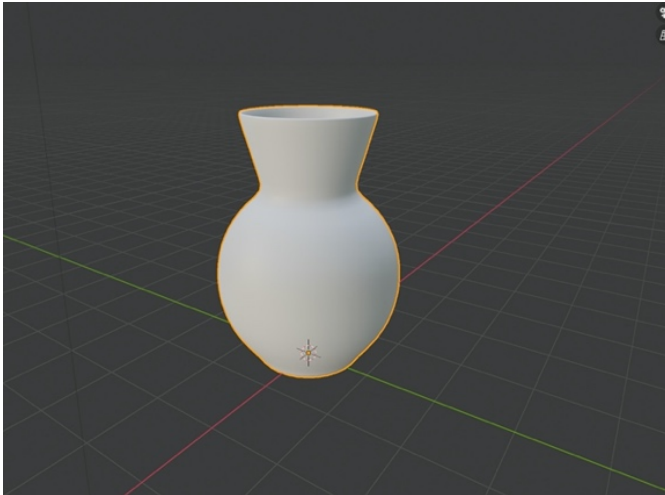


Figura No. 1, Jarrón de referencia

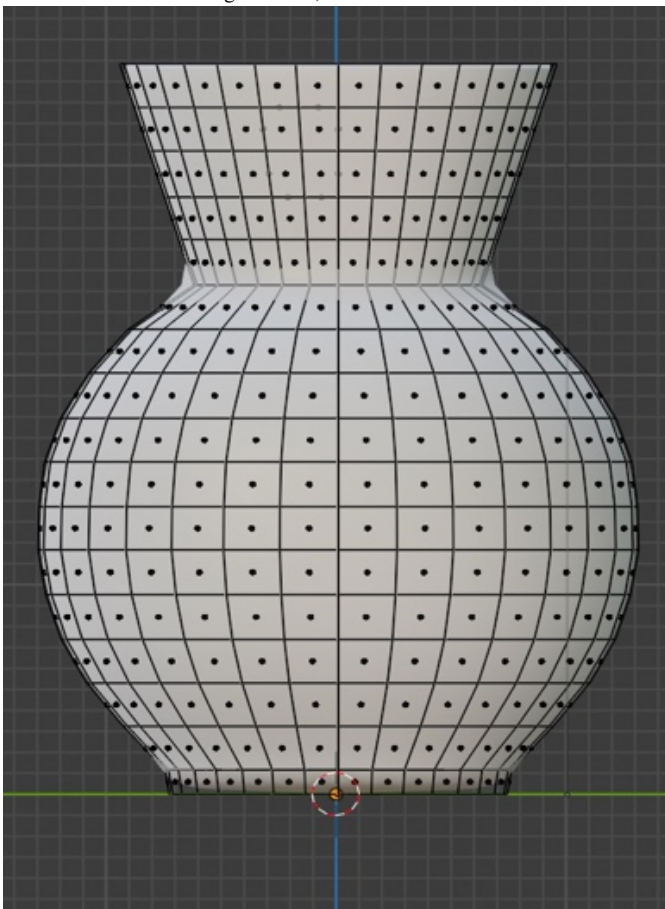


Figura No. 2, Jarrón de referencia con puntos

Una vez se obtuvieron los puntos relacionados al jarrón, se utilizó la aplicación web de Geogebra y así obtener una mejor perspectiva de cuáles eran los puntos que se debían tener en cuenta para la interpolación que se realizaría en R, dado que como se explicó anteriormente se contaba con un total de 4614 puntos. Como se puede ver en la Figura No. 3, se tomó la decisión de utilizar siete grupos de puntos a una diferente altura del jarrón.

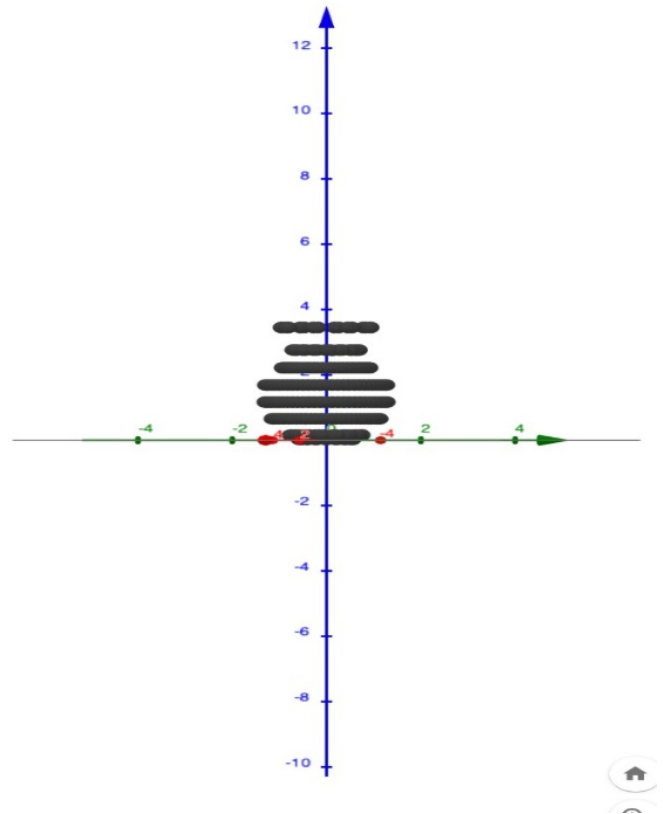


Figura No. 3, Vasija de referencia en Geogebra

-Métodos utilizados:

Para la realización del reto y la respectiva interpolación, de la vasija se utilizaron los métodos de Bézier, Spline de Bézier (BSpline), En el caso del método de Bézier, para realizar el código se debe tener en cuenta que una curva de Bézier es una curva paramétrica basada en cuatro puntos de control. La curva comienza en el primer punto de control con su pendiente que es tangente a la línea entre los dos primeros puntos y termina en el cuarto punto. Matemáticamente se puede definir una curva de Bézier de grado n , se especifica por una secuencia de $n + 1$ puntos $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ que se conocen como puntos de control.

Las curvas de Bézier son curvas paramétricas cuyas formas están controladas por un parámetro t y algunos puntos de curva de inicio y de final. En esta parte, la forma de las curvas cuadráticas de Bézier está determinada por dos puntos en curva y un punto fuera de curva. El punto fuera de curva se usa para controlar la forma de la misma. Suponiendo que se tienen tres puntos:

1. (A_x, A_y)
2. (B_x, B_y)
3. (C_x, C_y)

$$P_x = (1 - t)^2 A_x + 2t(1 - t)B_x + t^2 C_x$$

$$P_y = (1 - t)^2 A_y + 2t(1 - t)B_y + t^2 C_y$$

Para determinar los puntos de control, se usan los puntos extraídos del programa Blender, en la tabla No 1, se observa algunos de los puntos utilizados para la primera opción de código:

Curva1	X_1	-0.05	0.42	0.48	0.05
	Y_1	-0.55	-0.35	0.25	0.53
Curva2	X_2	0.05	-0.42	-0.52	-0.05
	Y_2	0.53	0.33	-0.17	-0.55

Tabla No. 1, Ejemplo de puntos utilizando inicialmente

Inicialmente, al realizar este método se encontró un problema, ya que lo que se pretendía era interpolar con cuatro puntos un círculo completo, lo que no es posible ya que el método de Bézier no era capaz de realizar dicha interpolación teniendo solo cuatro puntos disponibles. Dado que no fue posible realizar la circunferencia completa con el método, lo que se hizo fue dividir el jarrón en dos diferentes cuadrantes que permitieran realizar la interpolación correctamente entre los cuatro puntos de control para posteriormente unirlos al momento de graficar. En eso se utilizaron las funciones de R: *Bezierpoints()*, *Beziergrob()*, las cuales necesitan de la utilización de las librerías *gridBezier* y *grid*.

Como se puede ver en la Figura No 4, se encuentra una de las interpolaciones iniciales de una de las circunferencias que componen el jarrón.

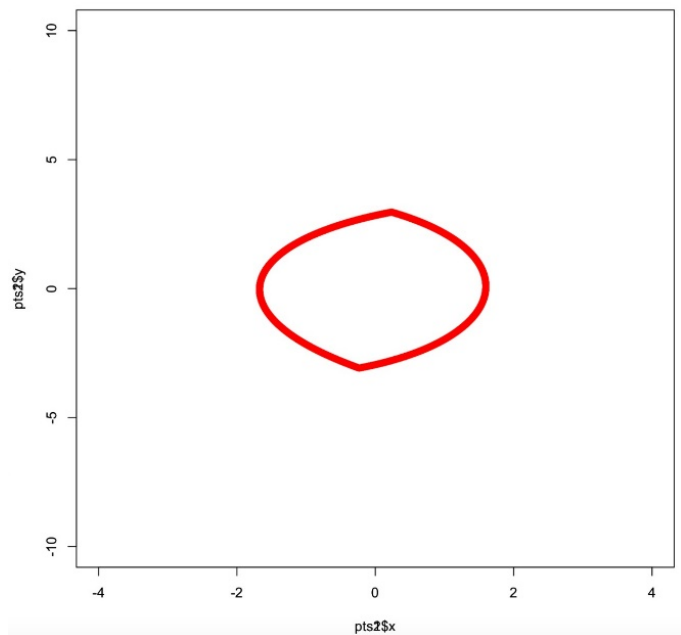


Figura No. 4, Interpolación inicial

Sin embargo, como se pudo ver en la imagen anterior, al realizar la interpolación con solo dos particiones de la circunferencia, en los extremos quedan dos puntas, por lo cual entre más particiones se generen de una misma circunferencia la interpolación de la misma quedaría con menor error. Por lo cual, se decidió dividir la circunferencia en 4 diferentes cuadrantes, teniendo en cuenta que era posible dividirla en muchos más, pero por motivos de dificultad, se decidió dejarla en 4 particiones. Algunos de los puntos utilizados para esta interpolación fueron:

Curva 1	X_1	-0.05	0.25	0.48	0.54
	Y_1	-0.55	-0.49	-0.27	-0.06
Curva 2	X_2	0.54	0.48	0.26	-0.05
	Y_2	-0.06	0.25	0.47	0.53
Curva 3	X_3	-0.05	-0.34	-0.52	0.54
	Y_3	0.53	0.41	0.15	-0.06
Curva 4	X_4	-0.54	-0.48	-0.26	-0.05
	Y_4	-0.06	-0.26	-0.49	-0.55

Tabla No. 2, Ejemplo de puntos utilizando

En la Figura No.5, se puede ver como se asemeja un poco más a una circunferencia.

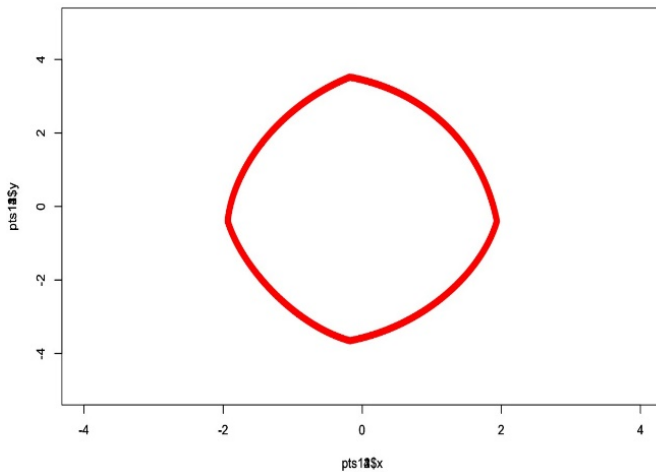


Figura No. 5, Segunda Interpolación

Dado que se debía realizar la construcción del jarrón, una opción que ayudó a realizar esto fue el Spline de Bezier (Bspline), dado que es una curva que consta de varias curvas de Bezier unidas entre sí. Una vez se tuvo claro la teoría, en el código se utilizaron las funciones asociadas a estos métodos.

V. INDICACIONES ÚTILES

Es importante reconocer que la interpolación y su función de poder realizar la transición suave de un punto a otro, no solo ayuda a generar curvas en el modelamiento y reproducción de objetos digitalmente, sino que también es utilizado con sistemas de información geográfica (SIG). En el momento en que se trabaja con un sistema como este, se suele utilizar lo que se llama interpolación espacial, la cual permite obtener valores desconocidos de algún punto en el área de estudio a partir de otros valores conocidos. Usando este método, se pueden calcular variables como las de temperatura, en la que se utilizan los valores que emiten las estaciones de medición y con base en ellos, se estima la temperatura para el resto del área de estudio donde no existan estaciones de medición, [5] teniendo en cuenta que entre más cercanos estén dos puntos sobre la superficie de estudio, los valores de cualquier variable que se mida entre ellos serán más parecidos, esto significa que existe lo que se llama una autocorrelación espacial.[1]

VI. ERRORES COMUNES

Es probable presentarse con algunos inconvenientes al reproducir una nube de puntos, esto debido a una cantidad de razones considerable, pero que muchas de estas tienen que ver con el que la nube de puntos generada por un programa modelador o por un escáner 3D, puede no estar completa o tener discontinuidades. Esto debido a que por una parte, los escáneres 3D no son capaces de modelar digitalmente a detalle volúmenes complejos en una superficie y por otro lado, la naturaleza y complejidad de ciertos objetos hace difícil que se logre graficar de forma exacta y por consiguiente hace imposible que la reproducción del objeto por medio de interpolación, represente fielmente la herramienta que se busca graficar.[4]

Existe otro modo de error que es muy probable presentar, este es el plantamiento erróneo de la ecuación de la interpolación, que aplica a la nube de puntos que se toman como parámetro para reproducir la figura.[4]

VII. RESULTADOS

Con el fin de poder comparar los datos obtenidos en el programa Blender con una aproximación obtenida por un proceso de interpolación se debía aplicar correctamente un código que fuera capaz de recibir unos puntos “guía” y usar estos para poder realizar de una forma adecuada el proceso de interpolación ya sea por medio del método de las Curvas de Bezier o por medio del uso de BSpline.

En este fragmento del artículo se dará a conocer cuáles fueron esos pasos que se tuvieron que llevar a cabo para poder obtener la interpolación y así encontrar una aproximación del jarrón propuesta en clase por medio de la reconstrucción de superficies.

Inicialmente al obtener los puntos de referencia de la figura propuesta lo que se hizo fue con ayuda de una hoja de cálculo (Excel) ordenarlos de menor a mayor con respecto a la altura de estos puntos. Es decir, dependiendo del eje Z. Ya teniendo los puntos ordenados de menor a mayor se escogieron unos niveles que estuvieran medianamente a una misma distancia (altura) con el fin de no interpolar cada uno

de los niveles ya que eso generaría un proceso menos eficiente debido al uso de una mayor cantidad de puntos. Sin embargo, cada uno de estos niveles fue cuidadosamente escogido para que nos generara una figura bien hecha o similar a la figura guía que era la realizada en el programa Blender.

Contando ya con los niveles a los que les vamos a aplicar el proceso de interpolación lo que se hizo posteriormente fue usar otra aplicación llamada Geogebra con el fin de identificar la circunferencia de cada nivel y del mismo modo escoger los 4 mejores puntos de cada cuadrante para realizar el método de Bezier del modo en que se muestra en la Figura No. 6.

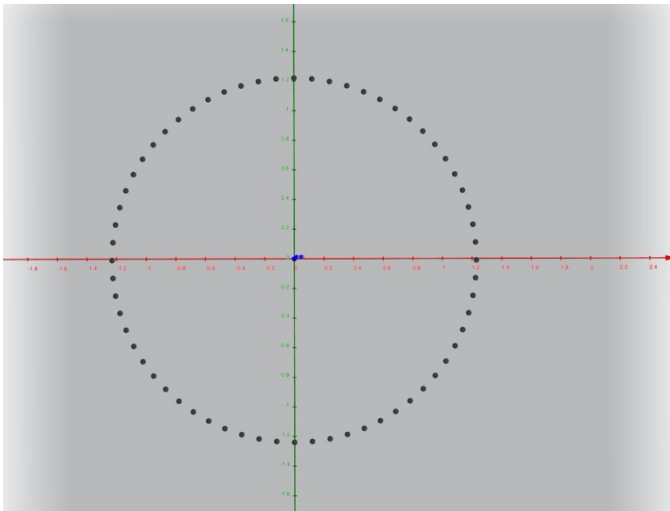


Figura No. 6, Segunda Interpolación

En la Figura No. 6 se logra entender que entre más puntos se usen se va a tener una mejor interpolación y así un error más pequeño. Sin embargo, escoger una mayor cantidad de puntos o generar una mayor cantidad de divisiones de cada circunferencia disminuiría la eficiencia de nuestro código por ende solo se seleccionaron 4 cuadrantes por circunferencia y por cada cuadrante como lo dice el método de Bezier se seleccionaban 4 puntos para usar de referencia o llamados de otra manera como puntos de control. Un aspecto importante es que los puntos que se definan deben tener una distancia similar entre ellos y del mismo modo los puntos inicial y final se recomiendan que se ubiquen en los ejes de referencia y así la gráfica obtenida por la interpolación será mucho mas parecida y exacta a la guía.

El código implementado se basa en la aplicación de algunas funciones de las librerías gridBezier y grid las cuales son las que nos permiten usar esos 4 puntos para cada cuadrante con el fin de interpolarlos por medio de Bezier (BezierGrob) y posteriormente obtener los puntos de la misma interpolación (BezierPoints). Lo que se hacía después era graficar esos mismos puntos tanto en su componente X como en su componente Y.

Este mismo procedimiento como se menciono anteriormente se hizo para cada uno de los cuadrantes de la circunferencia y así mismo se hizo para cada uno de los niveles o alturas escogidas.

Para obtener un primer resultado se imprimieron todos estos niveles en un plano XY (2D) cada uno con un color diferente con el fin de observar que evidentemente cada uno de los niveles demuestra las curvas de la jarra de la siguiente manera; Los colores eran los siguientes:

1. Nivel 1: Rojo
2. Nivel 2: Azul
3. Nivel 3: Morado
4. Nivel 4: Negro
5. Nivel 5: Verde
6. Nivel 6: Amarillo
7. Nivel 7: Naranja
8. Nivel 8: Cian

Y así Se obtuvo la Figura No. 7 en el plano XY:

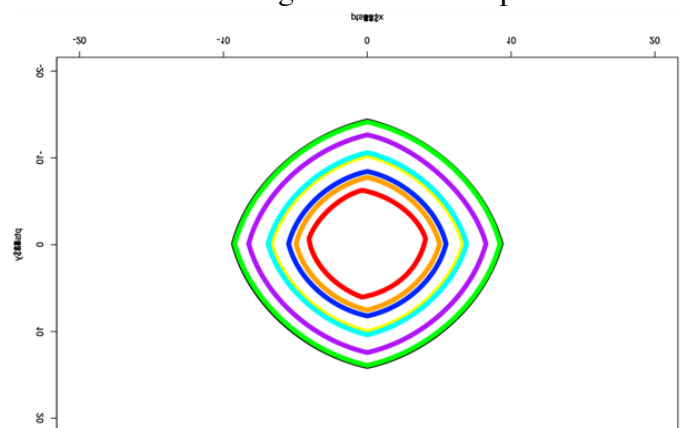


Figura No. 6, Segunda Interpolación

Lo que se puede observar con esta imagen y la lista mencionada anteriormente es que se ve que en el fondo o en la parte más baja de la jarra es en donde se encuentra la circunferencia de radio más pequeño como se ve con el color rojo. Luego los círculos se

van haciendo más grandes pasando por los colores azul, morado y negro el cual es el círculo más grande. Ya los siguientes colores demuestran que el círculo vuelve a reducir su tamaño (colores amarillo y naranja) y finalmente el círculo vuelve a aumentar su radio en el color cian el cual es una circunferencia ubicada en la parte final o más alta de la jarra.

VIII. CONCLUSIONES

Con el trabajo realizado se ha logrado comprender la aplicación y uso de las curvas de Bezier, así como el de los BSplines en la modelación de figuras usando interpolación, se tiene en cuenta que gracias a esto, se logra reconstruir digitalmente elementos del mundo real que no precisamente cuentan con superficies simétricas y rectas.

En la implementación del reto buscando reconstruir el jarrón por medio de interpolación, usando los ya mencionados Bsplines y curvas de Bezier, se establece que, a mayor cantidad de puntos utilizados en la nube de estudio para realizar la interpolación, mas cercano va a estar la reconstrucción a la figura original, obteniendo de paso un margen de error mas pequeño a mayor cantidad de puntos. Así mismo se logra denotar que en caso de escoger una mayor cantidad de subdivisiones por cada nivel y a esas subdivisiones se le realiza la interpolación escogiendo 4 puntos, cumpliendo el mismo proceso que se realizo para llegar a los resultados obtenidos; Se lograría encontrar una mejor aproximación, sin embargo, se reduciría el nivel de eficiencia.

REFERENCIAS

- [1] N. W. Group, "Interpolacion a partir de puntos e isolneas," accessed: 2020-11-03. [Online]. Available: https://www.um.es/geograf/sigmur/sigpdf/temario_6.pdf
- [2] L. Q. Muelas, "¿qué es la interpolación espacial de datos?" accessed: 2020-11-03. [Online]. Available: <https://geoinnova.org/blog-territorio/que-es-la-interpolacion-espacial-de-datos/#:~:text=La>
- [3] S. P. K. Gabriela, "Interpolacion y aproximacion optima de superficies," accessed: 2020-11-03. [Online]. Available: <http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/18003/1/T-UCE-0011-ICF-108.pdf>
- [4] M. D. L. M. SÁNCHEZ, "Modelaci3n de sistemas complejos usando b-spline," accessed: 2020-11-03. [Online]. Available: <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/ma/MariaDeLourdesMoralesSanchez.pdf>
- [5] R. Combe, "Métodos de interpolación basados en funciones de base radial con aplicaciones a la reconstrucción de imágenes," accessed: 2020-11-03. [Online]. Available: <https://knepublishing.com/index.php/KnE-Engineering/article/view/1460/3524>