Pontificia Universidad Javeriana

Taller No.1

Método posición falsa

Integrantes

María Paula Covelli Reyes

David Mateo Henao

Juan Sebastián Pulecio

PRESENTADO A:

Eddy Herrera

INGENIERIA DE SISTEMAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Septiembre 2, 2020

Bogotá D.C.

1. Método posición falsa o regula false:

El nombre regula falsa, o posición falsa literalmente se refiere a que esta técnica utiliza resultados que desde el inicio se saben que son falsos, pero las utiliza para que de una manera especifica estos resultados nos lleven a obtener una convergencia a un resultado verdadero. Este método, hace parte de los métodos acotados es decir que la raíz que se esta buscando esta dentro de un intervalo. Es importante tener en cuenta que sea un método cerrado ya que esto nos da información importante sobre el método de la posición falsa.

- Los métodos cerrados siempre convergen, aunque sea lentamente.
- En la mayoría de los problemas el método de la posición falsa converge más rápido que el de la bisección.

Este método es bastante parecido al método de la secante, la diferencia entre una y otra es que mientras el método de la regla falsa trabaja sobre intervalos cerrados, el método de la secante es un proceso iterativo y por lo mismo, encuentra la aproximación casi con la misma rapidez que el método de Newton-Raphson. Claro, corre el mismo riesgo de este último de no converger a la raíz, mientras que el método de la regla falsa siempre converge. Debido a que, no se aplica la fórmula en x_{n-1} y x_n, como el método de la secante, pero en x_n, y en la última iteración x_k, tal que f(x_k) y f(x_n) tiene un signo diferente. Esto significa que el método de regla falsa siempre converge.

En resumen, el método consiste en considerar un intervalo (x_a ,x_b) en el que se garantice que la función tiene raíz. Luego de esto, se traza una recta que une los puntos $\left(x_a, f(x_a)\right)$ y $\left(x_b, f(x_b)\right)$, y escribimos la recta como

$$y = mx + p$$

Despejando para los valores tenemos:

$$f(x_a) = mx_a + p$$

$$f(x_b) = mx_b + p$$

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

$$p = \frac{f(x_b)x_b - f(x_a)x_a}{x_b - x_a}$$

y a partir de esto obtiene el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas: $(x, 0)$, se toma x como aproximación de la raíz buscada. El proceso se repite n veces, hasta que el punto de intersección x r coincide prácticamente con el valor exacto de la raíz.

También, es importante tener en cuenta que este método tiene algunas desventajas como los son:

- No puede estimarse a priori el número de iteraciones necesarias. Sin embargo, es posible utilizar la magnitud de la pendiente como un indicador para saber qué tan alejada se encuentra la raíz de la aproximación actual.

- En algunos casos se pueden presentar problemas de convergencia. Dependiendo de las características de la ecuación que se desea resolver y también del intervalo seleccionado. Esto generalmente sucede en funciones con una curvatura pronunciad.

- También puede ocurrir que $f(x)$ sea muy cercana a cero, pero que el error en la solución sea grande. Por lo tanto, en estos casos es importante verificar que la solución obtenida con el algoritmo sea correcta.

2. ¿Cuáles son las condiciones para aplicar este método?

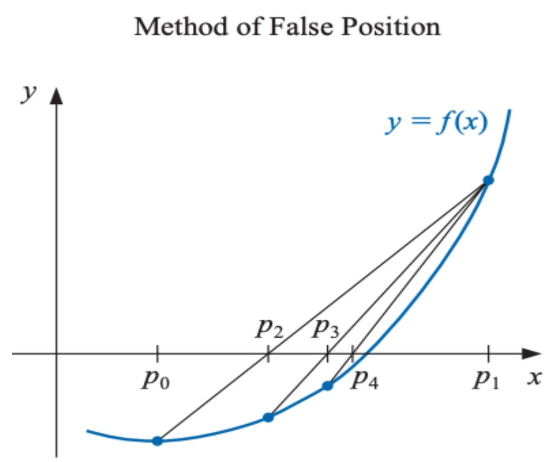
Las condiciones para aplicar o utilizar el método de la posición falsa son los siguientes:

a. En primer lugar, la función $f(x)$ debe ser continua.
b. En segundo lugar, se deben encontrar los valores iniciales x_a y x_b tales que dentro de su intervalo (x_a, x_b) se garantice que la función tiene una raíz.
c. $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tengan signos opuestos. Es decir que:

$$f(x_a) * f(x_b) < 0$$

De este modo es posible determinar que el punto x_2 será el punto de corte con el eje X de la línea que une los puntos. $\left(x_a, f(x_a)\right)$ y $\left(x_b, f(x_b)\right)$

3. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo:



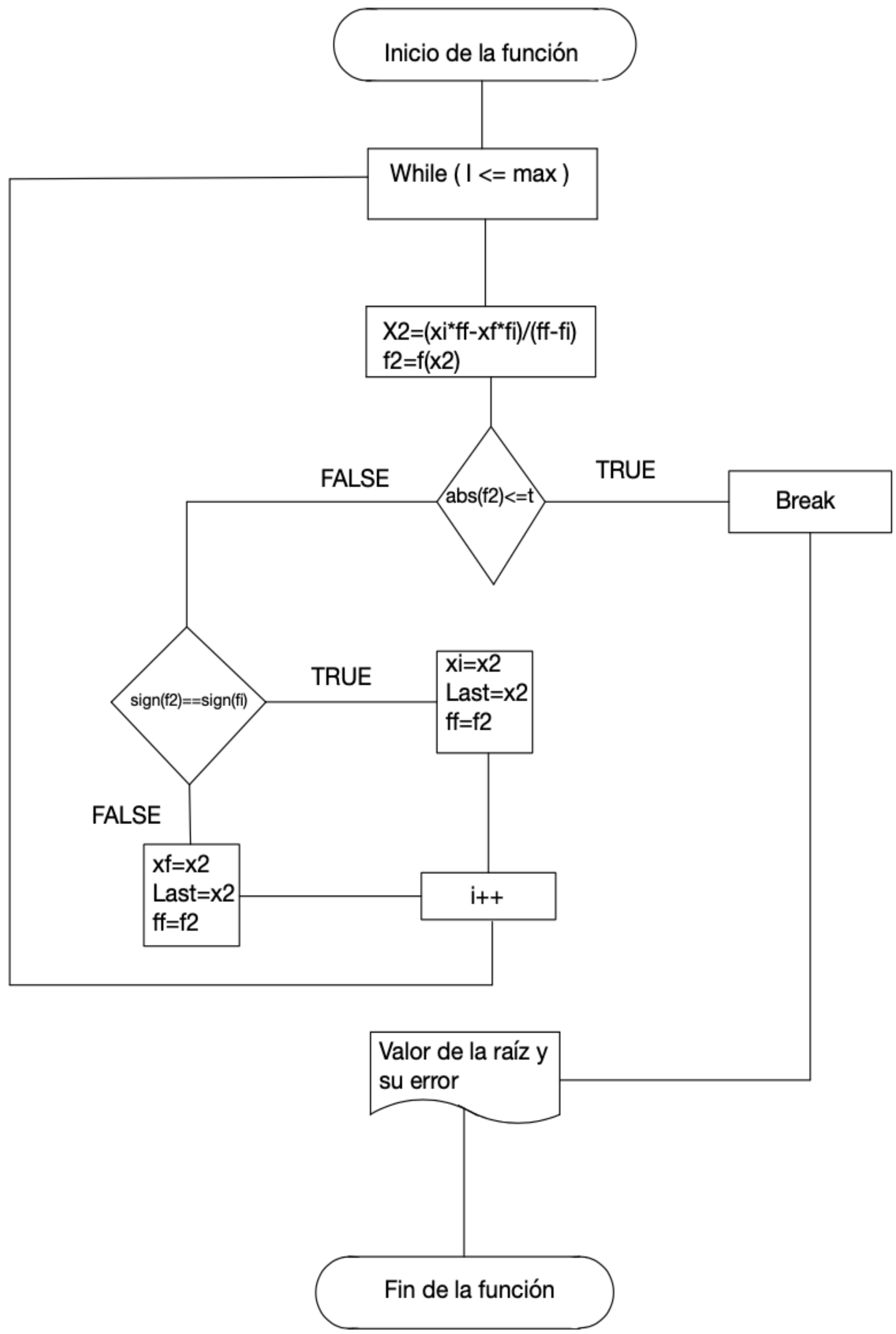
Grafica No. 1

Gráficamente lo que busca el método es encontrar a partir de un número de iteraciones es encontrar el valor del punto en el cual la función $f(x)$ corta el eje x, esto lo hace a partir de la toma de dos puntos x_a y x_b que se encuentran sobre la función y estos se unen a través de una línea recta

$$y = mx + p$$

Esta a su vez corta el eje x y crea un valor inicial aproximado de la raíz que se esta buscando, este proceso se realiza n veces hasta que el método o la capacidad del computador lo permita. Una vez se cree que se ha llegado a el valor más cercano el ciclo termina y se obtiene el valor de la raíz.

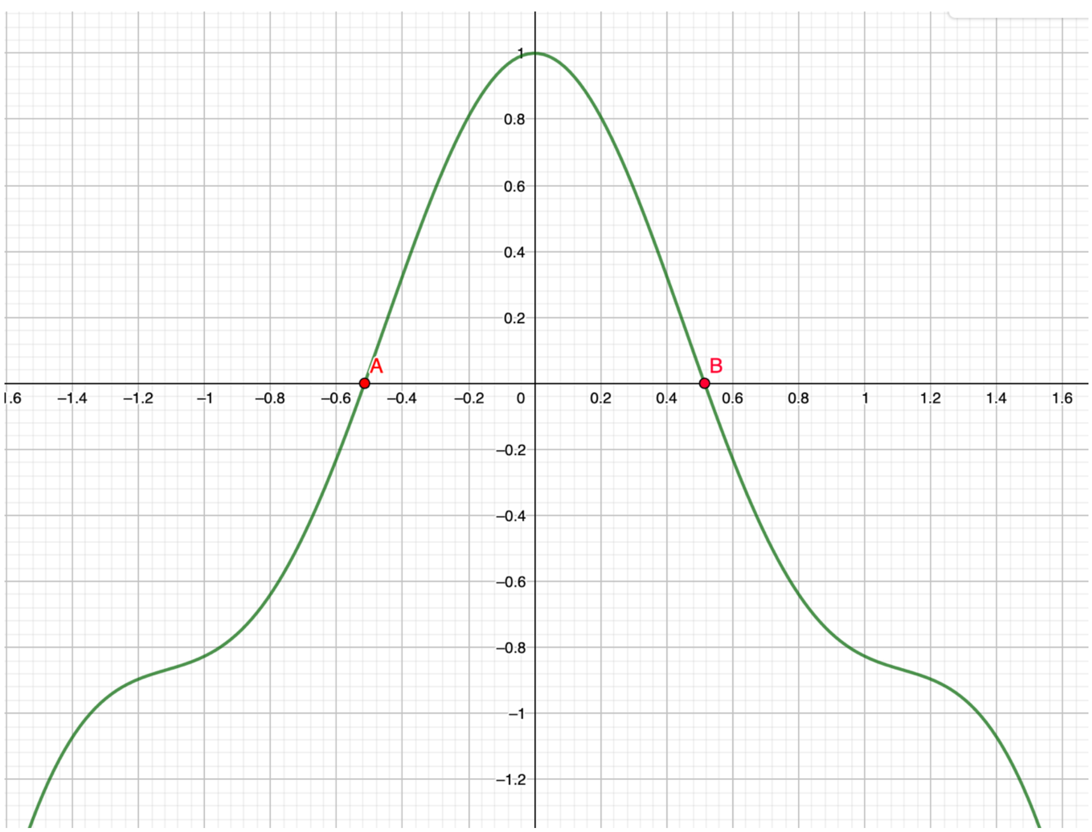
4. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo



5. ¿cuál o cuales son las raíces? Valide su resultado.

Con las funciones:
$f(x) = cos^2(2x) - x^2$,
$f(x) = xsin(x) - 1$ $[-1,2]$,
$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$.
Inicialmente, se grafico con la aplicación GeoGebra para tener una visión más clara de cuales eran las raíces que nosotros y nuestro programa debía buscar. Después de esto, lo que hicimos fue buscar unas raíces iniciales en el programa del WolframAlpha, estos valores presentados en las imágenes No. ## nos permitieron saber en términos aproximados y no muy precisos cuales eran los valores de las raíces. Una vez tuvimos la información del numero de raíces en la ecuación y el valor aproximado de estas, utilizamos nuestro algoritmo para determinarlas a través del método de la bisección. En cada caso será posible observar el proceso ya explicado y una pequeña explicación de cada caso. En cada caso, mostraremos una pequeña explicación de la diferencia obtenida con el programa y la obtenida con WolframAlpha, haremos este análisis solo para una de las 3 diferentes precisiones que tuvimos en cuenta cuando estuvimos haciendo el análisis.

Para el caso de la ecuación: $f(x) = cos^2(2x) - x^2$, podemos identifica dos puntos en los cuales la función atraviesa el eje x, esto nos permite identificar que la función ya mencionada tiene 2 raíces.



Grafica No. 2

Roots:

$x \approx 0.514933$

$x \approx -0.514933$

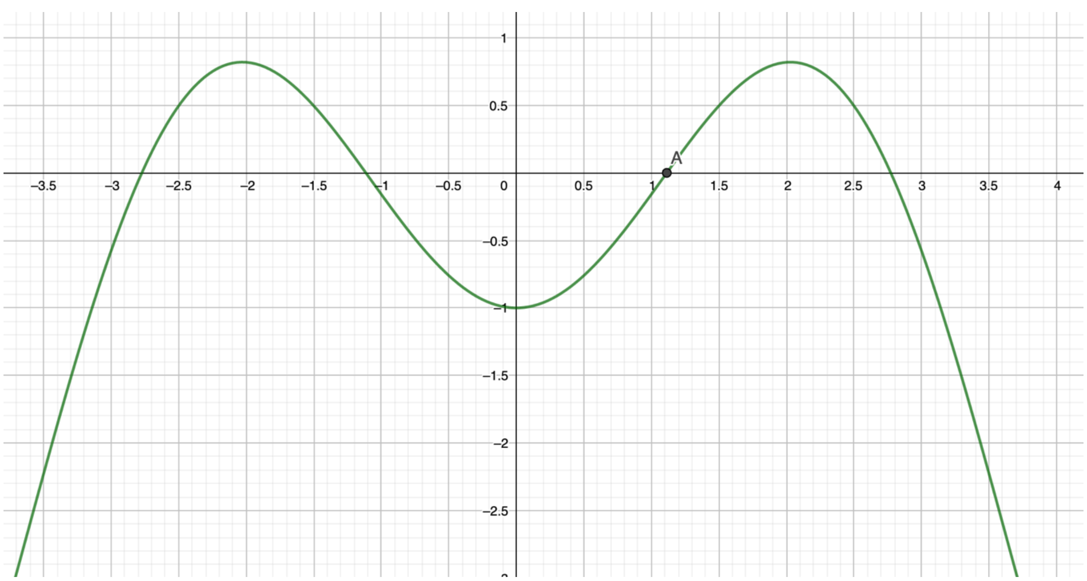
Imagen No. 1

Para el caso de una precisión de $1 * 10^{-8}$ obtuvimos un valor aproximado de la raiz de: 0.5149333

```
i                x_i               f(x)              Error est.
 1.000000000000000  0.547398763409569 -0.089673931780461  1.000000000000000
 2.000000000000000  0.502350976236673  0.035303868385986  0.547398763409569
 3.000000000000000  0.515076125401675 -0.000399353830848  0.045047787172895
 4.000000000000000  0.514933789871389 -0.000001468241871  0.012725149165002
Raíz de funcion:  0.5149333  con error <= 5.232811e-07 Iteraciones:  5
>
```

Imagen No. 2

Para el caso de la ecuación: $f(x) = xsin(x) - 1\ \ [-1,2]$
Debido a la que esta función se encuentra acotada dentro del intervalo $[-1,2]$, nos permite identificar una unica raiz, dado que si esta se tomara la funcion sin estar acotada o limitada tendriamos más raices.



Grafica No. 3

Numerical roots:

$x \approx \pm 9.31724294141481\ldots$

$x \approx \pm 6.43911723841725\ldots$

$x \approx \pm 2.77260470826599\ldots$

$x \approx \pm 1.11415714087193\ldots$

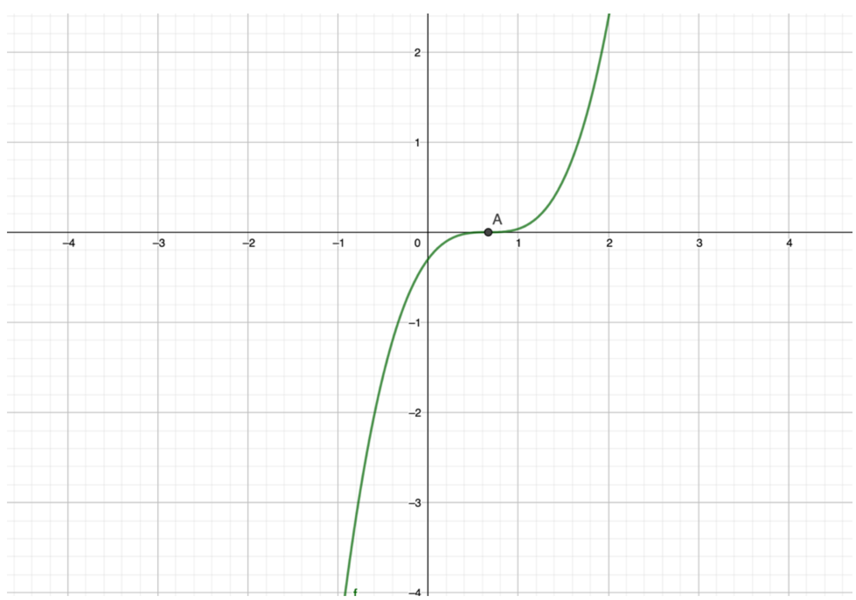
Imagen No. 3

Para el caso de una precisión de $1 * 10^{-8}$ obtuvimos un valor aproximado de la raiz de: 01.114157

```
i               x_i             f(x)            Error est.
 1.000000000000 -0.513278653054 -0.747961680551  3.000000000000
 2.000000000000  0.686701101260 -0.564638739150  2.513278653054
 3.000000000000  1.222792357408  0.149492406568  1.313298898740
 4.000000000000  1.110569872081 -0.004982768149  0.536091256148
 5.000000000000  1.114189732855  0.000045263989  0.112222485327
Raíz de funcion:  1.114157  con error <= 3.258717e-05 Iteraciones:  6
>
```

Imagen No. 4

Para el caso de la ecuación: $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$, es posible observar que la función solo intersecta con el eje x una vez por lo cual tendremos una única raíz en este caso.



Grafica No. 4

Root:

$$x = \frac{2}{3}$$

Imagen No. 5

Para el caso de una precisión de $1 * 10^{-8}$ obtuvimos un valor aproximado de la raiz de: 0.6593853

```
 995.000000000000  0.659367512132 -0.000000388882  0.340636069712
 996.000000000000  0.659371088671 -0.000000388310  0.340632487868
 997.000000000000  0.659374659918 -0.000000387741  0.340628911329
 998.000000000000  0.659378225885 -0.000000387172  0.340625340082
 999.000000000000  0.659381786586 -0.000000386605  0.340621774115
 1000.000000000000  0.659385342034 -0.000000386039  0.340618213414
Raíz de funcion:  0.6593853  con error <= 0 Iteraciones:  1001
> 
```

Imagen No. 6

6. Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

El método en términos de perdida de significancia se comporta de diferentes maneras. Sin embargo, en importante entender que es la significación estadística es un concepto muy importante debido a que este nos refleja de cierto modo una exactitud o precisión con respeto a un valor o a unas operaciones realizadas previamente. Con lo anterior se quiere decir que para poder tener un dato "confiable" se debe aprovechar la mayor cantidad de datos(decimales) posibles porque evidentemente no es lo mismo tener un valor como $2/3$ y operarlo usando solo uno o dos decimales lo que perjudicará su significancia.

En los ejercicios propuestos por la profesora se trabaja el error al momento de estar restando los valores de los límites superior en inferior del método el cual resulta bastante bueno; principalmente cuando se aplica para errores o precisiones requeridas de $1 * 10^{-8}$ aproximadamente. Sin embargo, se conoce que entre más cercano sea el error requerido o planteado como condición a cero. El error final se va a poder apreciar de una mejor manera sin embargo el resultado final de la raíz va a ser menos preciso.

Por ende, si se trabajan con errores como $1 * 10^{-16}$ la raíz final va a tener una gran precisión debido a que está teniendo en cuenta más valores decimales.

Finalmente se concibe que entre mas decimales utilicemos se va a contar con una raíz mucho más acertada y el error mucho más cercano a cero; es decir, va a haber una pérdida de significancia menor. No obstante, debe tenerse en cuenta que esto le va a costar mucho más trabajo a una máquina para procesarlo y en esos casos toca aplicar otras funciones o aplicaciones como la utilización de bibliotecas o formatos de doble precisión que se conoce que utilizan un espacio en la RAM mucho mayor.
El número de iteraciones es un dato sumamente importante ya que este nos permite saber la cantidad necesaria de ciclos que se deben realizar para poder obtener un valor de la raíz aceptado en la condición planteada con respecto al error.
La condición principal que iba a definir el número de iteraciones durante el proceso de obtención de una raíz era si el error resultante tenía una precisión de $1 * 10^{-8}$. Es decir, cuando el valor absoluto de la resta entre los dos valores extremos sea así de pequeño se podrá terminar el ciclo y por ende obtendremos el respectivo valor de la raíz de la ecuación en un intervalo inicial (x_a ,x_b).
Por lo mencionado anteriormente se puede inferir que si se plantea como condición una precisión mayor. El número de iteraciones aumentará drásticamente.
Por otro lado, debemos entender que entre más preciso (con más iteraciones) queramos que sea un resultado se va a tener que utilizar una mayor cantidad de cifras significativas lo que lleva a que la máquina que está compilando el código requiera de un mayor esfuerzo en términos de procesador y memoria lo cual también puede generar un grado de imprecisión.
Para la solución de lo mencionado anteriormente se debe saber que existen diferentes métodos aplicables a las plataformas que estamos utilizando (Rstudio) que nos permiten mejorar dicha precisión o aumentar el número de cifras significativas por medio de procesos ya pre-diseñados.
La convergencia del método de la falsa posición se da debido a que este método plantea una sucesión de intervalos [a,b] en donde cada uno de los cuales siempre contiene un cero. En cada paso la aproximación viene dada por:

$$x = \frac{b-\left(f(b)*(b-a)\right)}{f(b)-f(a)}$$

con lo cual puede demostrarse que la sucesión Cn tiende a un cero de la función (Raíz).
Aunque la amplitud del intervalo se va volviendo cada vez más pequeña, puede que este método no tienda a cero. Si la curva es convexa cerca de la raíz r entonces uno de los extremos se hace estacionario y el otro tiende a la solución; por lo cual el criterio de parada del error (|b-a|<e) no es el más recomendado; sino que se recomienda que el criterio de parada sea el valor de f(xn) el cual es el valor de la raíz y la proximidad entre las dos últimas aproximaciones

7. ¿cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable? O esta destinado al fracaso.

Hay que tener en cuenta, que en R generalmente no se trabaja con precisiones altas, por esta razón para que sea posible trabajar con este tipo de precisiones es necesario descargar y utilizar un paquete o biblioteca especial. En nuestro caso, para solucionar los problemas de precisión que iniciamos a presentar una vez queríamos aumentar la precisión a $1 * 10^{-16}$ o $1 * 10^{-32}$, lo solucionamos utilizando e instalando el paquete “Rmpfr”, dado que este nos permitia aumentar la presición según el número de bits que se le otorgaran al número. Esto nos permitió arreglar el problema de inexactitud y acercarnos cada vez más a un valor más exacto.

8. **¿qué pasa con el método cuando existen más de una raíz? Explique su respuesta.**

En el caso de la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$, nos dimos cuenta que al tener 2 puntos en los cuales esta función intersecta el eje x se genera un problema debido a que cuando se utiliza un intervalo que comprende las dos raíces el algoritmo por si solo no puede calcularlas y arroja el error que se muestra en la figura No. 7.

Para esto, inicialmente planteamos una solución que en su momento nos pareció factible y adecuada, dado que contábamos con el número de raíces que la función tiene y la posición en el eje x donde más o menos se encuentra cada una de estas raíces. Para esta solución inicial lo que se planteo, fue la utilización de dos intervalos separados, donde cada uno de ellos contuviera una sola raíz de la función. Por ejemplo, el intervalo [-1,0] y [0,1]. Esta solución se plantea debido a que después de analizar la función $f(x) = xsin(x) - 1$, notamos que el hecho de acotarla en ese intervalo hacia que solo contuviera una de las raíces de la función.

```
i              x_i              f(x)             Error est.
Error in if (abs(f2) <= t) { : missing value where TRUE/FALSE needed
In addition: Warning message:
In cos(2 * x) : NaNs produced
> 
```

Imagen No. 7

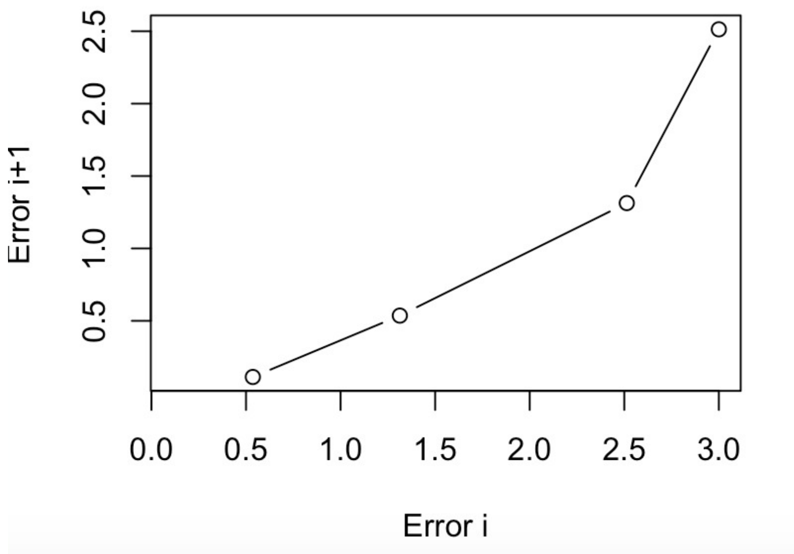
9. **¿qué pasa con el método cuando la función es periódica, paro o impar, estas características influyen?**

Dado que tenemos el método de la posición falsa y este hace parte de los métodos cerrados, el hecho de que sean pares, impares o periódicas no tiende a influir mucho en el resultado. Dado que si utilizamos un intervalo pequeño en el cual se encuentre la raíz, esto hace que si la función inicial es periódica no influya ya que en el intervalo escogido no es una característica por la cual el método deba estar preocupado. Es por esta razón, que a la hora de determinar el intervalo inicial es necesario tener en cuenta la función grafica en la que sea posible aproximar un poco el valor en el cual se encuentra la raíz en el eje x para escoger adecuadamente el intervalo que se debe utilizar. Por esta razón, podemos concluir que en el caso del método de la falsa posición las características propias de la función como si es par, impar o periódica no afectaran el resultado solo si el intervalo escogido es lo suficientemente pequeño como para que estas características no se interpongan en la resolución eficaz del problema.

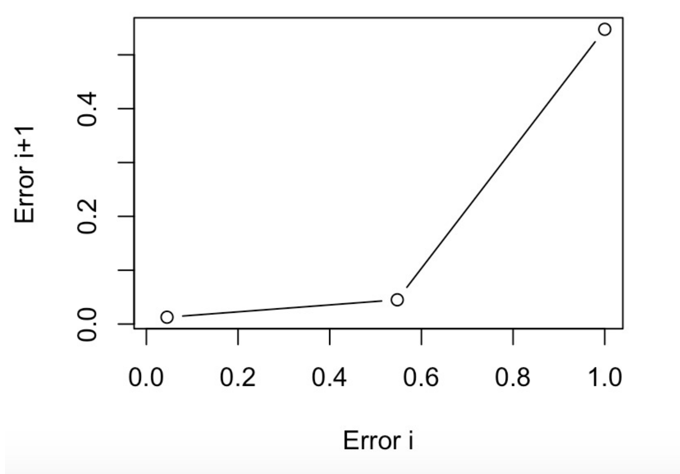
10. Realice una gráfica que muestre la relación entre $\in_{i+1}$ y $\in_i$, ¿qué representa esa gráfica? y encuentre una relación de la forma $\in_{i+1} = f(\in_i)$.

$$f(x) = cos^2(2x) - x^2$$

Grafica No. 5

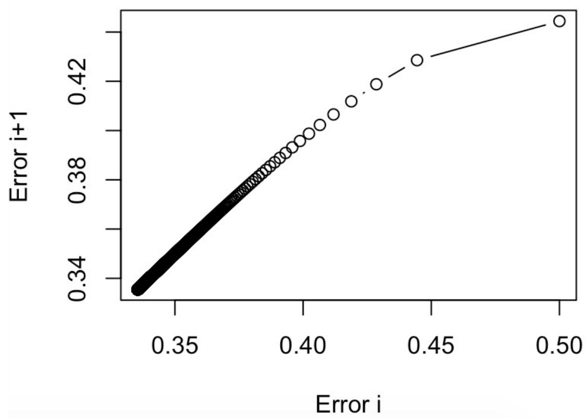


$$f(x) = xsin(x) - 1 \;\; [-1,2]$$



Grafica No. 6

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$

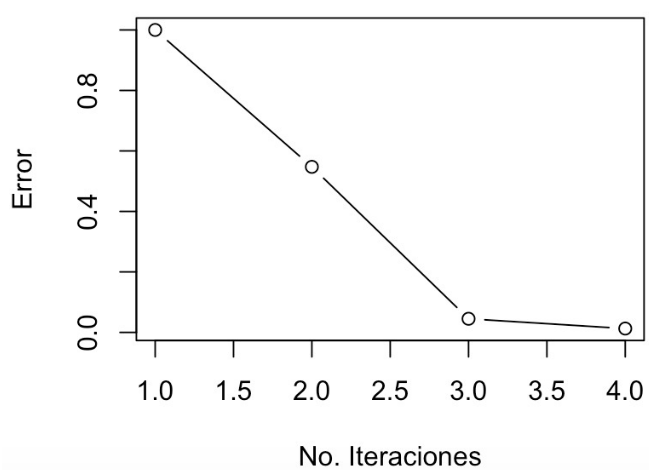


Grafica No. 7

11. **Realice un grafica que muestre como se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al numero de iteraciones.**

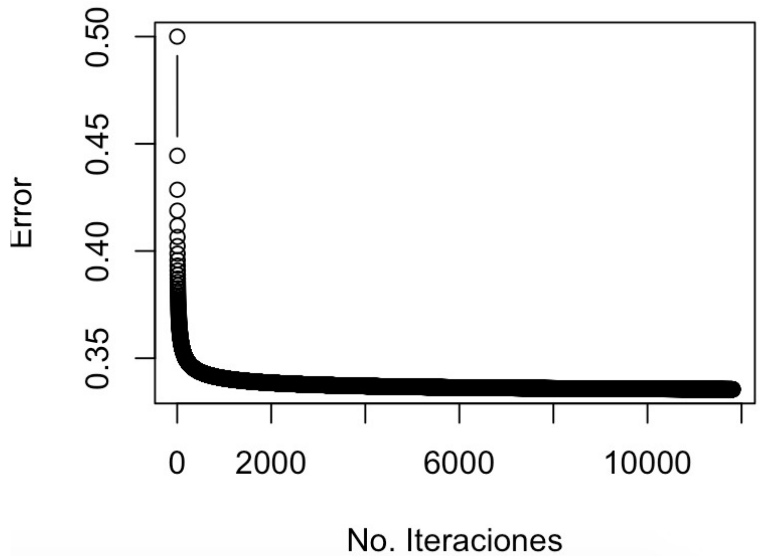
Como Se puede apreciar en las graficas No. 8, 9 y 10, podemos ver que el error disminuye con base se va aumentando el numero de iteraciones. Esto nos permite analizar que entre más aumentábamos el número de iteraciones y adicionalmente su tolerancia, el método tendía a resolver el problema de una manera más precisa. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, al aumentar el número de iteraciones, esto genera que el método se vuelva más lento ya que se demora mucho más encontrando el valor de la raíz.

$$f(x) = cos^2(2x) - x^2$$



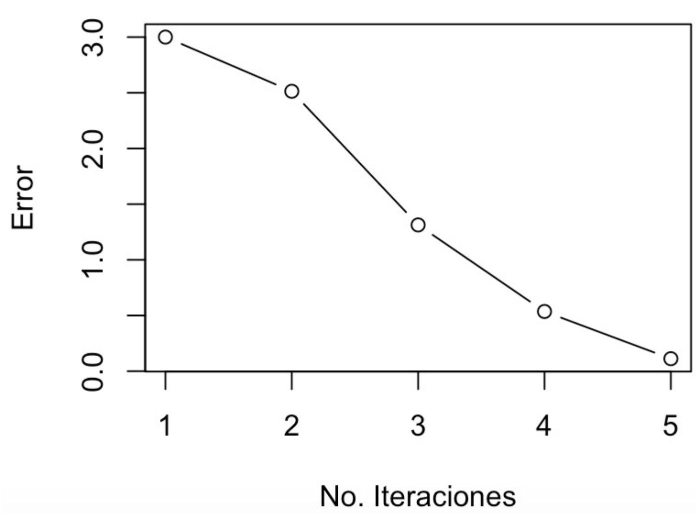
Grafica No. 8

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



Grafica No. 9

$$f(x) = xsin(x) - 1 \ \ [-1{,}2]$$



Grafica No. 10

12. ¿cómo se comporta el método de la posición falsa con respecto al de la bisección?

	Valores iniciales	convergencia	Velocidad de convergencia	Exactitud	Aplicación	Ventajas	Desventajas
Bisección	Se dan dos valores	Siempre	Lenta	Buena	Raices Reales	Es muy calara a la hora de analizar el error. También, permite el calculo del las iteracion es necesarias desde el inicio.	Es bastante lento
Falsa posición	Se dan dos valores	Siempre	Lenta/Media	Buena	Raices Reales	Es mejor que el de la Bisección, debido a que converge de una manera más rapida. Hace una aproximación más acertada.	En funciones que tienen una curvatura muy pronunciada puede hacer que la onvergencia no sea muy buena.

Tabla No. 1

En general, este método suele ser mejor que el de la bisección en cuanto al número de iteraciones requeridas para lograr una misma precisión en la solución y en su velocidad de convergencia como se puede ver en la Figura 1.8.

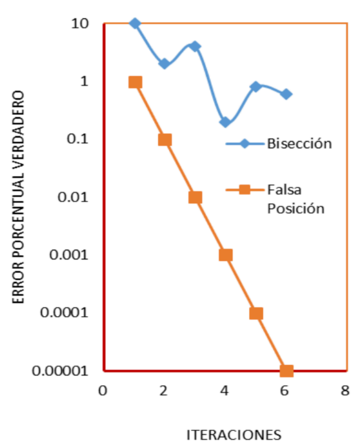


FIGURA 1.8 COMPARACIÓN DEL ERROR ENTRE EL MÉTODO DE BISECCIÓN Y FALSA POSICIÓN

(México, 2016)

```r
f <- function(x) cos(2*x)^2-x^2;


PosicionFalsa= function(f, xi, xf, max, t)
{
  fi = f(xi)
  ff = f(xf)

  Ei = c()
  Ej = c()
  issues = c()
  ite = c()

  x<-seq(xi,xf,0.01)
  plot(x,f(x),type="l",col="red")
  abline(h=0,col="blue")

  i = 1
  last = xf
  cat(formatC(c("i","x_i","f(x)","Error est."), width = -15, format = "f", flag = " "),"\n")

  while (f(xi) != 0 )
  {
    x2 <-(xi*ff-xf*fi)/(ff-fi)
    f2 <- f(x2)
    if(abs(f2)<= t){
      break
    }
    ite <- c(ite, i)
    Error <- abs(xf - xi)
```

obtención del error

```r
    issues <- c(issues, Error)
    if(sign(f2) == sign(fi)){
      xi <- x2
      last <- x2
      fi <- f2
    }
```

cambia los límites y las funciones de un extremo

```r
    else{
      xf <- x2
      last <- x2
      ff <- f2
    }
    cat(formatC( c(i,x2,f(x2),Error), digits = 12,width=-15, format = "f", flag = " "), "\n")
    i <- i+1
  }
```

obtención de la raíz

```r
  cat("Raíz de funcion: ",x2, " con error <=", round(abs(x2 - last),16), "Iteraciones: ", i)
  plot(ite,issues, type = "b", xlab = "No. Iteraciones",ylab="Error")
  #Errores Ei vs Ei+1
  for(b in 1:i){
    if(b!=i){
      Ei[b]<-issues[b]
      Ej[b]<-issues[b+1]
    }
  }
  plot(Ei,Ej, type = "b", xlab = "Error i",ylab="Error i+1")
}

PosicionFalsa(f,0,1,1000,1e-8)
```

Imagen No. 8

```r

rm(list=ls())
Fx <- function(x) x*sin(x)-1

biseccion <- function(a,b)
{

  x<-seq(a,b,0.01)
  plot(x,Fx(x),type="l",col="red")
  abline(h=0,col="blue")

  x <- (a+b)/2
  i <- 0

  while (Fx(x) != 0 )
  {

    error<-abs(a-b)/2

    if(error >= 1.e-8)
      if (Fx(x)*Fx(a) < 0) b <- x
      else {a <- x}
      else {break}

      x<-(a+b)/2

      text(x,0,i,cex=0.8,col="blue")


      i<-i+1

      cat("I=",i,"\tX=",x,"\tE=",error,"\n")

  }

}
biseccion(-3,1)


```

obtención del error

solo cambia los valores límites

Forma de obtener la raíz

Imagen No. 9