Programación para ingenieros

Docente: Oscar Stiven Morales Zapata – Sebastián Durango Idarraga

Correo electrónico: oscars.morales@autónoma.edu.co

sebastiandi@autonoma.edu.co

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES UAM® VIGILADA MINEDUCACIÓN

Acreditación Institucional DE ALTA CALIDAD Resolución 009527 Mineducación Sep. 6 de 2019

Unidad 2

¿Es posible estimar un valor desconocido en algún punto de una función?

¿En que consiste la interpolación?

- Es un método numérico, cuyo propósito es el de estimar un valor desconocido entre dos valores conocidos de una tabulación (función).

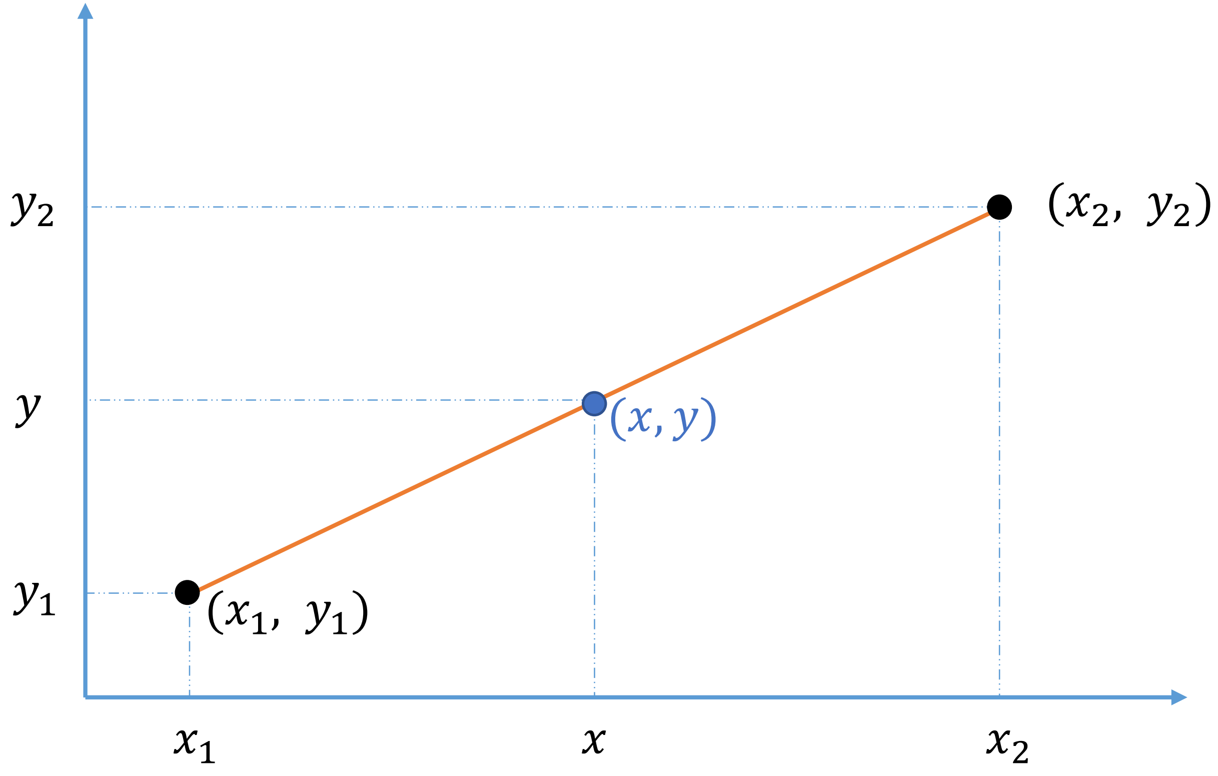
- Se puede usar:

  Para encontrar el valor de una función logarítmica o trigonométrica.

  En el campo de la química/termodinámica, para hallar la presión de un gas o un volumen que corresponda a una temperatura dada.

  Para obtener estimaciones precisas de tasas de intereses o de crecimiento.

Interpolación linear



$$m_{conocida} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{desconocida} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Por interpolar se entenderá estimar un valor desconocido en algún punto de una función, mediante el cálculo de un factor de proporcionalidad con base en los valores conocidos de la función.

Ejemplo interpolación linear

- La viscosidad dinámica del agua se relaciona con la temperatura (T) de la siguiente manera

T °C	0	5	10	20	30	40
μ_0	1.787	1.519	1.307	1.002	0.796	0.653

- Utilice la interpolación linear para estimar la viscosidad a una temperatura de 7.5°

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{1.307 - 1.519}{10 - 5} = \frac{y - 1.519}{7.5 - 5}$$

$$y(7.5) = 1.413$$

En que situaciones se emplea la interpolación

- Mapeo de una fotografía

  Cuando se toma una fotografía con una cámara digital, el producto es una malla n*m con valores de color por cada píxel.

  En una fotografía del espacio, los colores representan elementos químicos, y si en dado caso, se desconoce el valor de un color, la interpolación ubica la posición con respecto al color.

En que situaciones se emplea la interpolación

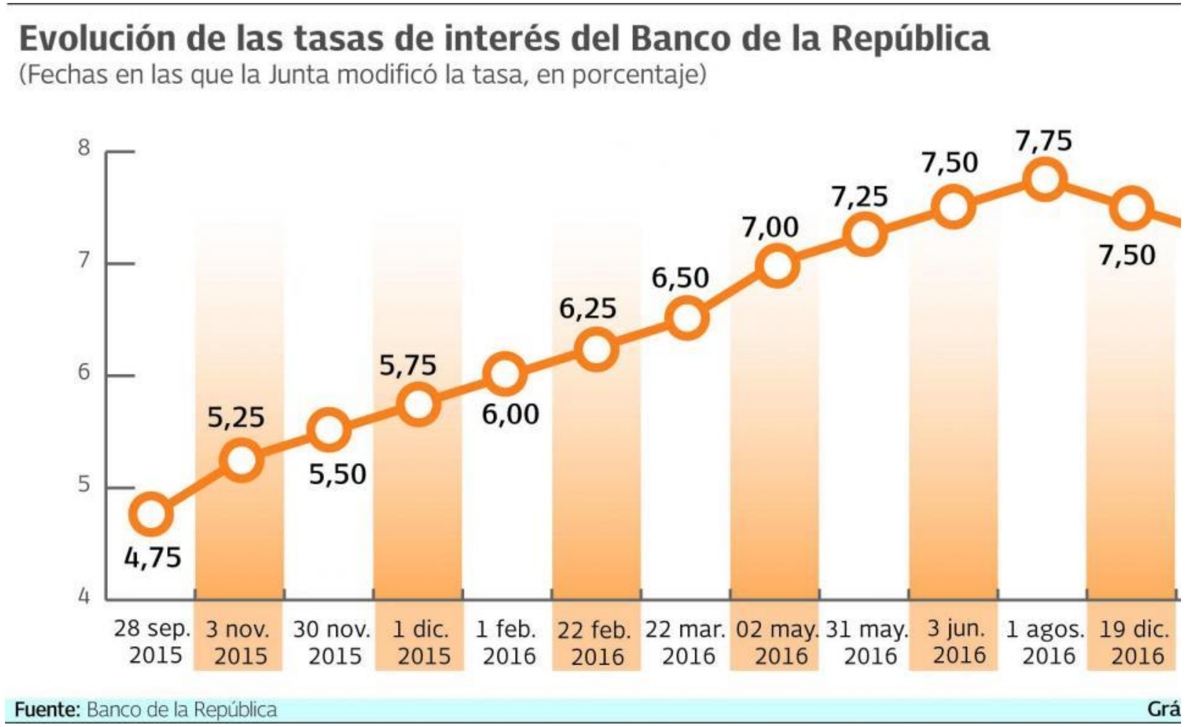
- Estimación de dosis de medicina

  Se puede monitorear la respuesta de un paciente a diferentes dosis de un medicamento.

  Sin embargo, solo se puede predecir lo que sucederá en forma casi inmediata, con una dosis que no se ha probado explícitamente.

En que situaciones se emplea la interpolación

- Pagos de tasas de intereses



Se puede utilizar para determinar cálculos de los pagos de tasas de interés a medio mes.

Debido a que muchas tasas de interés se determinan en uno o dos meses, estos valores son conocidos.

Mediante la interpolación, un analista financiero puede estimar la tasa para un período que se encuentra dentro de ese rango.

En que situaciones se emplea la interpolación

- Pruebas de ensayo mecánico

Una prueba de laboratorio consiste en aplicar sobre una probeta normalizada un esfuerzo axial de tracción (alargamiento) hasta producir una ruptura.

Un objetivo de la prueba, es medir la resistencia del material. Para ello, se obtienen datos de la tensión que provoca una deformación en periodos de tiempo.

Interpolación polinómica de Lagrange

- Es una reformulación del polinomio de interpolación de Newton, el método evita el calculo de las diferencias divididas. En este caso es indiferente a las distancias que existen entre puntos para el eje de las x.

- El polinomio se crea a partir de las fórmulas:

  Corresponde a la aproximación de la función mediante un polinomio

  $$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

  Determina los términos que deben acompañar al polinomio

  $$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolación polinómica de Lagrange

$$p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3$$

xi	0	0.2	0.3	0.4
F(x_i)	1	1.6	1.7	2.0

Termino 1

$$L_0(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.3)(0-0.4)}$$

Termino 2

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-0.3)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.3)(0.2-0.4)}$$

Termino 3

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.4)}{(0.3-0)(0.3-0.2)(0.3-0.4)}$$

xi	0	0.2	0.3	0.4
$f(x_i)$	1	1.6	1.7	2.0

Interpolación polinómica de Lagrange

- Para crear el polinomio se usa la fórmula fn(x) para cada valor de $f(x_i)$

$$p_3(x) = 1L_0(x) + 1.6L_z(x) + 1.7L_2(x) + 2L_3(x)$$

$$p_3(x) = 1 * \frac{(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.3)(0-0.4)} + 1.6 * \frac{(x-0)(x-0.3)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.3)(0.2-0.4)} + 1.7 * \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.4)}{(0.3-0)(0.3-0.2)(0.3-0.4)} + 2 * \frac{(x-0)(x-0.2)(x-0.3)}{(0.4-0)(0.4-0.2)(0.4-0.3)}$$

- De requerir evaluar el polinomio se debe remplazar el valor en donde están las x

Interpolación polinómica de Lagrange

Ej. 1

```python
# importamos la interpolación de Langrange del módulo de interpolación de Scipy
# from scipy.interpolate import lagrange
# importamos la librería Numpy con un alias, para hacer los cálculos
import numpy as np
# importamos la librería Sympy para desarrollar la forma algebraica del polinomio
import sympy as sym
# importamos la librería Matplotlib con un alias
import matplotlib.pyplot as plt

# Ingresamos los datos de prueba
xi = np.array([0, 0.2, 0.3, 0.4])
fi = np.array([1, 1.6, 1.7, 2.0])
```

Interpolación polinómica de Lagrange

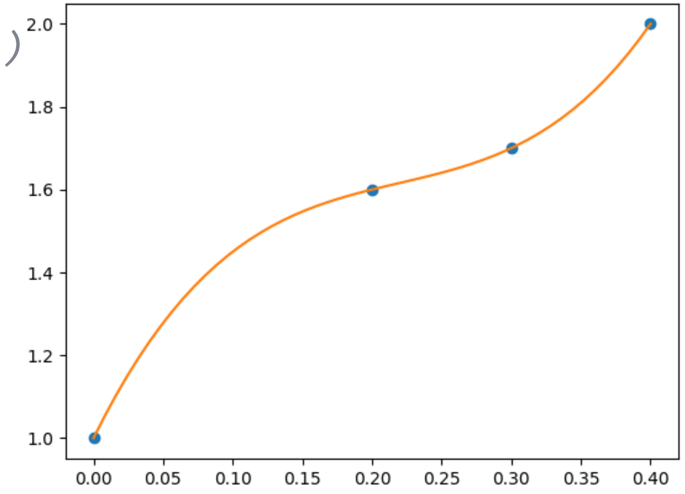
Ej. 1

```
# Procedimiento
# Conocer cuantos elementos tiene xi
n = len(xi)
# Asignamos un carácter
x = sym.Symbol('x')
# Inicializamos el polinomio
polinomio = 0
# Desplazamos i
for i in range(0,n,1):
    # Para calcular el primer termino de la Langrage, es necesario calcular un numerador que se obtiene por multiplicaciones
    numerador = 1
    denominador = 1
    # El numerador debe recorrer todos los puntos del vector xi
    for j in range(0,n,1):
        if (i != j):
            numerador = numerador*(x-xi[j])
            denominador = denominador*(xi[i]-xi[j])
        termino = (numerador/denominador)*fi[i]
    polinomio = polinomio + termino
```

Interpolación polinómica de Lagrange

Ej. 1

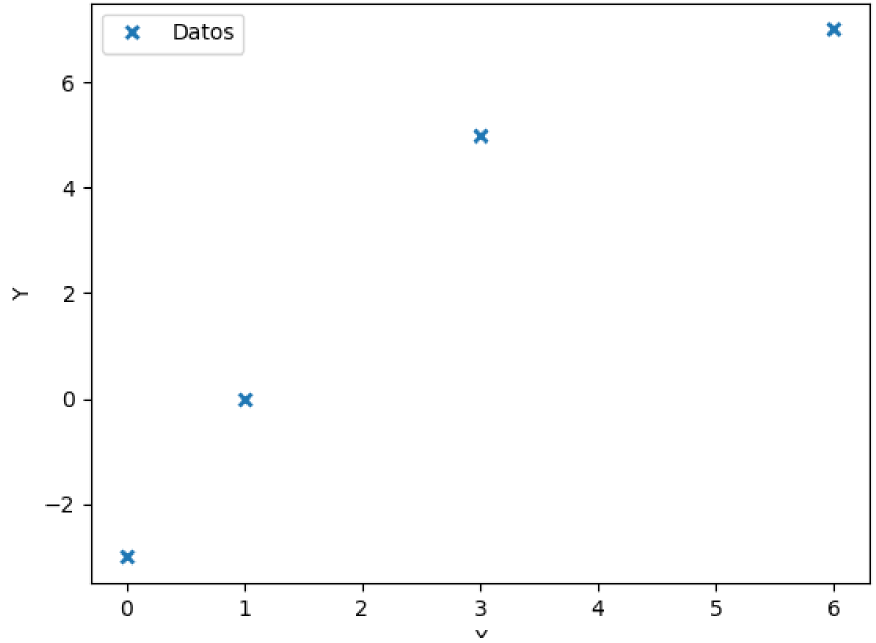
```
# Simplificamos la ecuación
polisimple = sym.expand(polinomio)

# Forma lamda del polinomio px,
referencia x y el polinomio que
 se desea convertir
px = sym.lambdify(x, polinomio)

# Vectores para graficas
muestras = 51 # Numero cualquiera
a = np.min(xi)
b = np.max(xi)
p_xi = np.linspace(a,b,muestras)
pfi = px(p_xi)

# Salida
print('polinomio')
print(polinomio)
print('polisimple')
print(polisimple)

# Ejemplo con la librería lagrange
# p = lagrange(xi,fi)
# print('polinomio con lagrange')
# print(p)

# Grafica
plt.plot(xi,fi, 'o')
plt.plot(p_xi,pfi)
plt.show()
```



Interpolación polinómica de Lagrange

Ej. 2

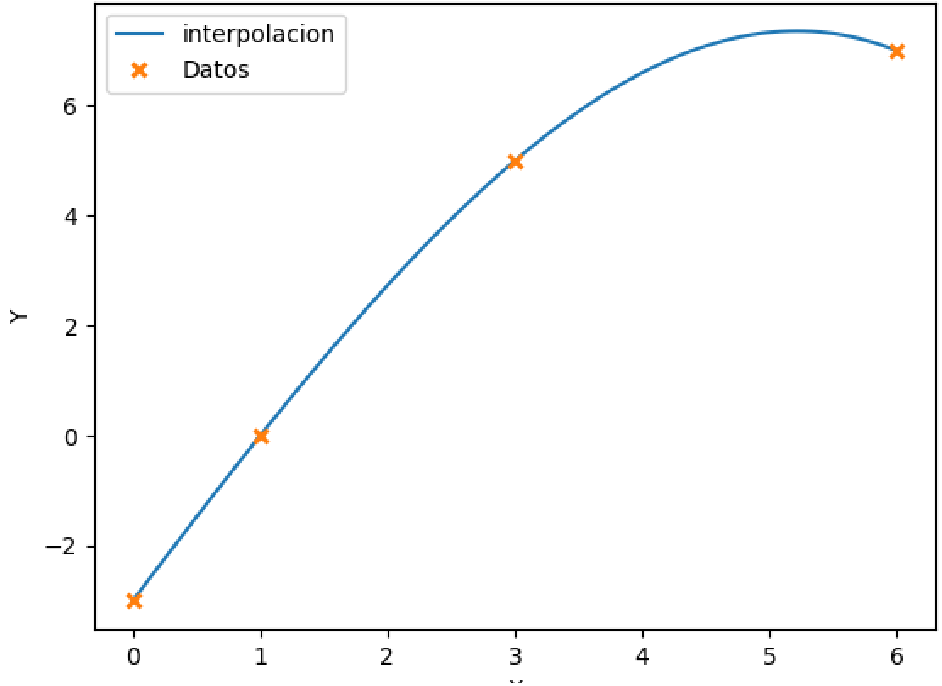
```
# importamos la interpolación de Langrange del módulo de interpolación de Scipy
# importamos la librería Matplotlib con un alias
# importamos la librería Numpy con un alias
from scipy.interpolate import lagrange
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Guardamos los valores de x y f(x) a usar, en vectores.
x = [0,1,3,6]
y = [-3,0,5,7]

# Graficamos los valores a interpolar
plt.figure('1')
plt.plot(x,y,'x', mew=2, label='Datos')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.legend()
```



Interpolación polinómica de Lagrange

Ej. 2

```python
# Obtendremos el polinomio de Lagrange para los puntos dados
p = lagrange(x,y)

# Evaluaremos el polinomio obtenido, en un intervalo de [0,6]
x1 = np.linspace(0,6,100)
y1 = p(x1)

# Graficamos el polinomio obtenido, así como los puntos usados
plt.figure('2')
plt.plot(x1, y1, label='interpolacion')
plt.plot(x, y, 'x', mew=2, label='Datos')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.legend()
plt.show()
```



¿p(1.8)?

Fenómeno de Runge

- Es un problema de oscilación en los bordes de un intervalo que ocurre cuando se usa la interpolación polinomial con polinomios de alto grado sobre un conjunto de puntos de interpolación equiespaciados.

- Fue descubierto por Carl David Tolmé Runge (1901) al explorar el comportamiento de los errores, al utilizar la interpolación de polinomios para aproximar ciertas funciones.

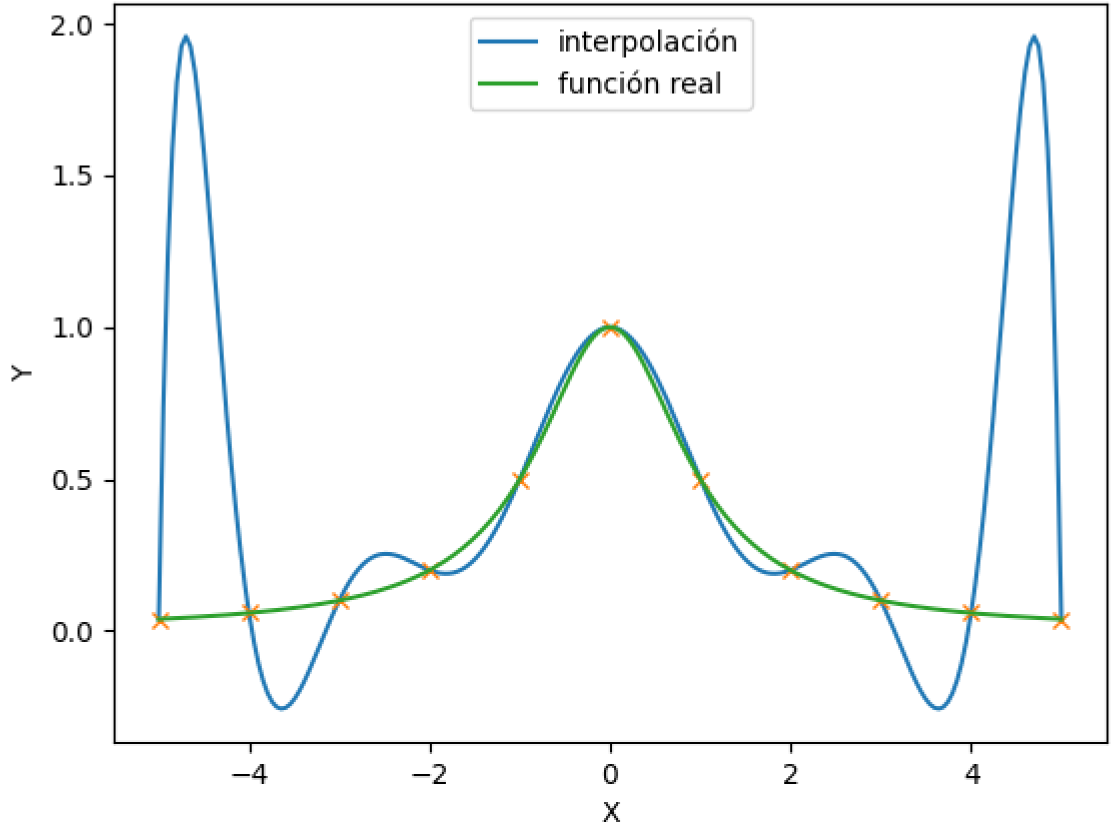
- El descubrimiento fue importante porque muestra que ir a grados más altos no siempre mejora la precisión.

Fenómeno de Runge

```
# importamos la interpolación bericéntrica del módulo de interpolación de Scipy
# importamos la librería Matplotlib con un alias
# importamos la librería Numpy con un alias
from scipy.interpolate import barycentric_interpolate
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Aplicaremos la interpolación baricéntrica para a la función dada
def runge(x):
    """Funcion de Runge"""
    return 1 / (1 + x ** 2)
```

Fenómeno de Runge

```python
# Nodos de interpolación
N = 11
# linspace devuelve espacios numéricos uniformemente
xp = np.linspace(-5,5,N)
fp = runge(xp)
x = np.linspace(-5,5,200)
y = barycentric_interpolate(xp, fp, x)

# Graficamos los polinomios obtenidos
plt.figure('1')
plt.plot(x,y, label='interpolación')
plt.plot(xp, fp, 'x')
plt.plot(x, runge(x), label='función real')
plt.legend(loc='upper center')
plt.show()
```



Interpolación con Splines

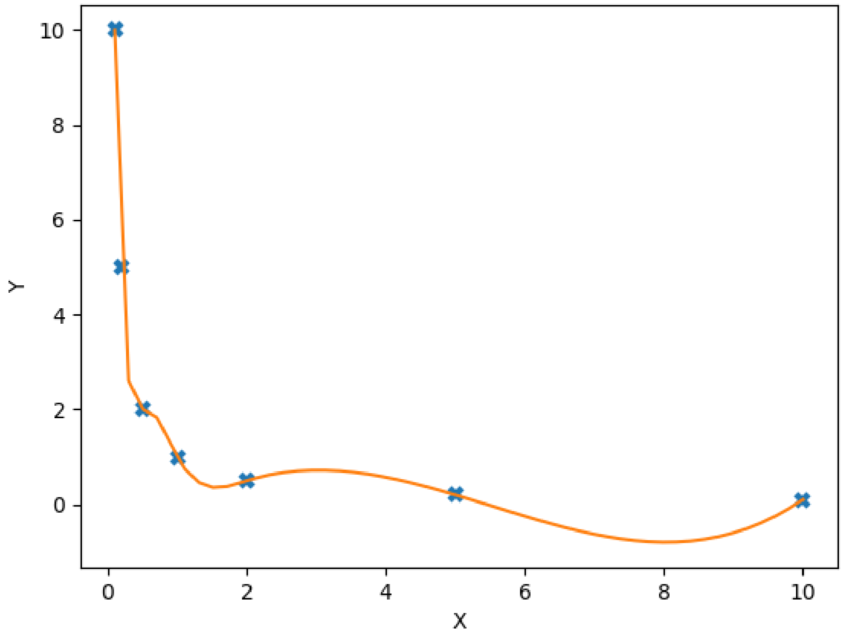
- Los splines son curvas polinómicas definidas a trozos, el trazador más común es el cúbico (de grado 3).

- Así obtendremos polinomios que pasan por los puntos dados, y evitamos tener un polinomio de grado alto.

```
# importamos la interpolación
InterpolatedUnivariateSpline del módulo de
interpolación de Scipy
# importamos la librería Matplotlib con un
alias
# importamos la librería Numpy con un alias
from scipy.interpolate import
InterpolatedUnivariateSpline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Guardamos en arreglos los puntos (x,y) a
interpolar
x = [0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0]
y = [10.0, 5.0, 2.0, 1.0, 0.5, 0.2, 0.1]
```

Interpolación con Splines

```python
# Hacemos la interpolación correspondiente
# El valor de k es el grado del polinomio deseado, en este caso usaremos k=3
f_interp = InterpolatedUnivariateSpline(x, y, k=3)

# Graficamos el polinomio obtenido
x1 = np.linspace(0.1, 10)
y_interp = f_interp(x1)
plt.plot(x, y, 'x', mew=3)
plt.plot(x1, y_interp)
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.show()
```



Ejemplo de aplicación

- El valor en pesos por Megavatio-hora después de “x” horas es representado en la siguiente tabla:

Relación de valor en pesos - MWh						
MWh	1	2	3	4	5.5	6
$	275000	530000	810000	1155000	?	1650000

- Determinar el valor en pesos para 5.5 horas.

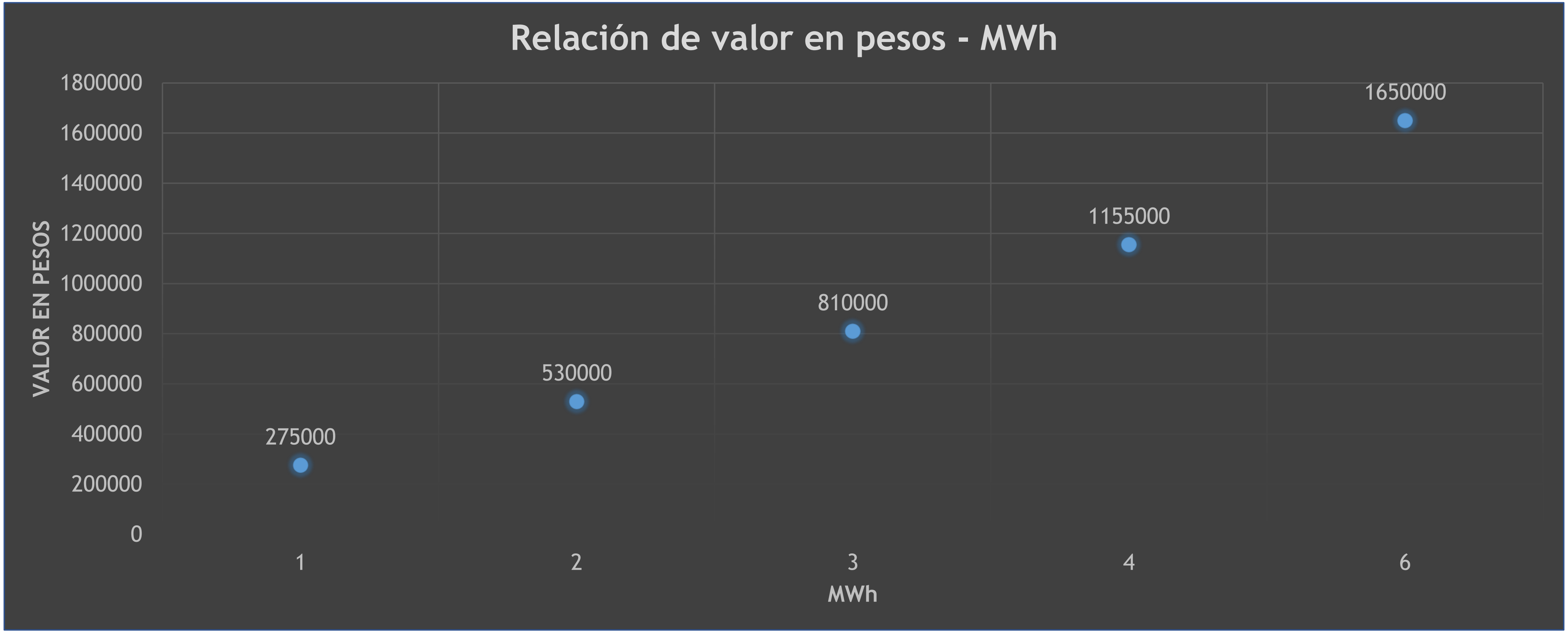
Ejemplo de aplicación

- Un modelo matemático es una representación de un fenómeno o una situación.

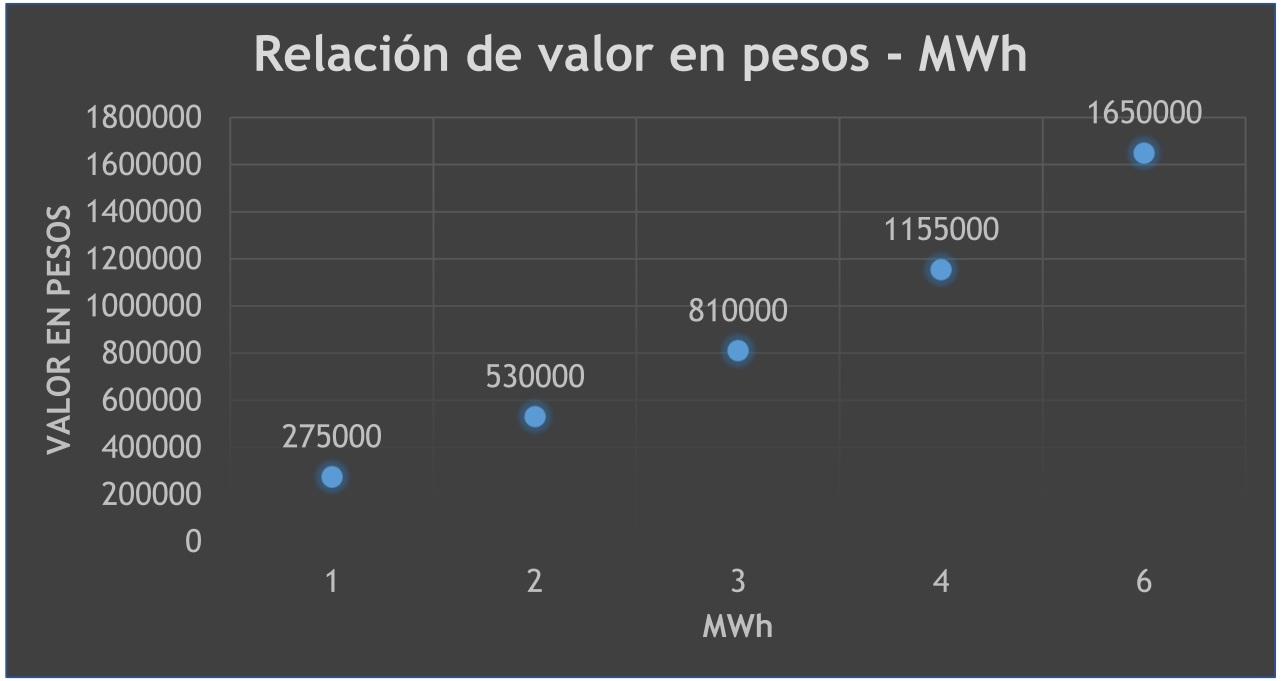
- Se llama modelo matemático, cuando se expresa en lenguaje formal, que puede ser manipulable algebraicamente.

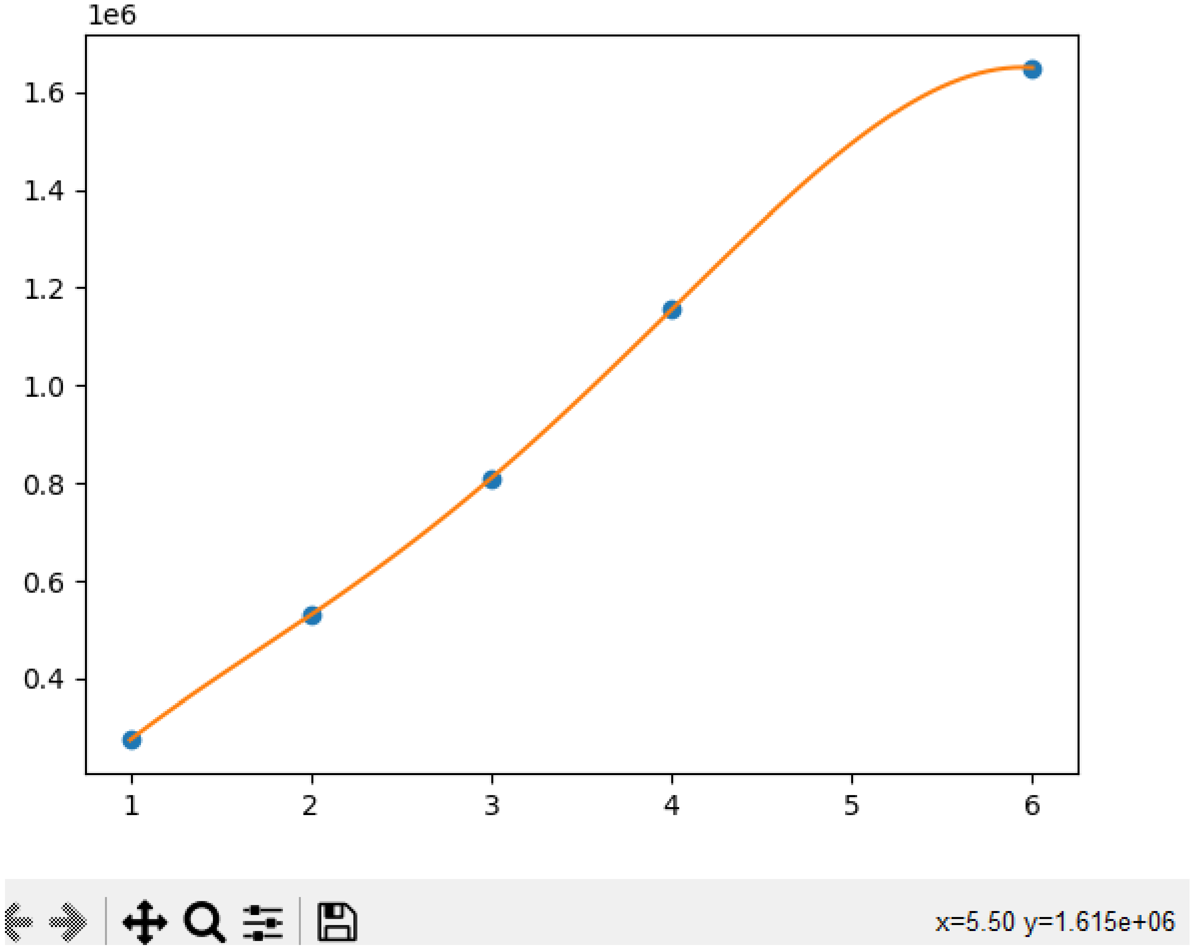
- Estos se utilizan para expresar cantidades, variables, proporciones, tablas, etc.

Ejemplo de aplicación



Ejemplo de aplicación





Ejemplo de aplicación

- Interpolación linear:

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y = 1155000 + \frac{(1650000 - 1155000)(5.5 - 4)}{6 - 4}$$

$$y = 1526250$$

Ejemplo de aplicación

- Interpolación método Lagrange:


```
D:\Documents\UAM\2022\Curso Programación - Maestría en Ingeniería\Aulas\Aula-02> py .\Interpolacion_Lagrange_1.py
polinomio
27500*(x - 6)*(x - 4)*(x - 3)*(x - 2)/3 - 66250*(x - 6)*(x - 4)*(x - 3)*(x - 1) + 135000*(x - 6)*(x - 4)*(x - 2)*(x - 1) - 96250*(x - 6)*(x - 3)*(x - 2)*(x - 1) + 13750*(x - 4)*(x - 3)*(x - 2)*(x - 1)

polinomio simplificado
-13750*x**4/3 + 52500*x**3 - 563750*x**2/3 + 520000*x - 105000

Evaluación del polinomio
1611171.875
D:\Documents\UAM\2022\Curso Programación - Maestría en Ingeniería\Aulas\Aula-02>
```

Ayudas

- Instala scipy

    $pip install scipy

- Site con información de la librería matplotlib

    https://matplotlib.org/stable/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.plot.html

- …

Programación para ingenieros

Docente: Oscar Stiven Morales Zapata – Sebastian Durango Idarraga

Correo electrónico: oscars.morales@autónoma.edu.co

sebastiandi@autonoma.edu.co

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES UAM®
VIGILADA MINEDUCACIÓN

Acreditación Institucional DE ALTA CALIDAD
Resolución 009527 Mineducación Sep. 6 de 2019