

Determinación y optimización del coeficiente de restitución en función de la cantidad de bandas elásticas que componen una pelota

Jose Nicolas Rojas, Juan Sebastian Sanchez*

*Universidad Industrial de Santander
Cl. 9 carrera 27, Bucaramanga, Santander*

11/08/2024

Índice

1. Pregunta de investigación	2
2. Introducción	2
3. Estado del arte	3
3.1. Determinación del Coeficiente de Restitución (e) de una pelota de ping-pong	3
3.2. Methods for measuring the coefficient of restitution and the spin of a ball	4
3.3. Obteniendo los coeficientes de restitución y arrastre en un solo experimento	4
3.4. Ajuste no lineal	4
4. Objetivos	4
4.1. Objetivo específico	4
4.2. Objetivos específicos	4
5. Metodología	5
5.1. Caída libre con rebote	5
5.2. Colisión péndulo bola	6
5.3. Análisis de datos	7
5.4. Figuras	7

Resumen

* e-mail: jose2221457@correo.uis.edu.co

Con el fin de determinar cuando tiene mayor coeficiente de restitución (e_r) una pelota compuesta puramente por bandas elásticas, se plantean dos experimentos, uno de ellos consiste en un rebote de la pelota contra el suelo, posterior a una caída libre desde una altura de un metro, y el otro, en una colisión con un péndulo en movimiento, y la pelota inicialmente estática, de los cuales se miden las velocidades previas y posteriores a la colisión, con lo cual se calcula el coeficiente de restitución conforme a su definición, y se repiten los experimentos para pelotas de diferente cantidad de ligas, con lo cual se ajustan los datos a un modelo no lineal, desde el cual se obtiene una expresión que se puede optimizar, y saber a que numero de ligas corresponde el mayor valor de e_r .

1. Pregunta de investigación

¿Como se puede modelar el coeficiente de restitución de una pelota de bandas elásticas en función de cuantas la compongan?

2. Introducción

La primera vez que se estudiamos la mecánica de algún fenómeno, es común hacer aproximaciones a modelos ideales con el fin de comprender los fundamentos que lo describen, estos modelos ideales por lo general asumen una forma de conservación de la energía muy estricta, donde solo ocurren intercambios de energía cinética y potencial, pero al comparar estos modelos con los resultados experimentales, notamos que no son del todo coherentes a lo largo del tiempo. Existen diversas formas de mejorar estos modelos, por supuesto en función del fenómeno a describir, considerando estos factores que provocan cambios en la interpretación de la conservación de la energía. En esta investigación nos vamos a centrar en un fenómeno en específico, conocido como rebote o colisión analítica de una pelota.

Como es de conocimiento común, al dejar caer una pelota de cierta altura, esta no vuelve a su posición inicial después de rebotar, esto debido a diversos factores; uno de ellos es la fricción con el aire que experimenta el objeto durante todo su recorrido, otro que sera el principal motivo de estudio en este articulo, es debido a que un objeto al rebotar pierde energía en mayor o menor cantidad dependiendo de las cualidades elásticas del material que componen del mismo. La forma de describir esto es mediante una cantidad adimensional conocida como coeficiente de restitución (e_r), sus valores se restringen a $0 \leq e_r < 1$ e indica la cantidad de energía que se conserva cuando este objeto colisiona, por tanto, a mayores valores de e la colisión sera menos inelástica y viceversa [1].

Para definir el coeficiente de restitución, se hace a partir de las velocidades relativas que se miden previa y después de una colisión de dos partículas, como se expresa en Ecuación 1. conforme avance la explicación de los experimentos a realizar, veremos como esta misa definición se puede aplicar a los dos experimentos que vamos a realizar, y como extrudirle mayor precisión.

$$e_r = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (1)$$

Los métodos para el calculo de e_r por lo general son indirectos, lo que sera de provecho para nuestro caso, ya que nuestra pelota que rebotara estará compuesta por bandas elásticas, lo que complica aplicarle un modelo teórico donde se asume una pelota maciza de un solo material [2], que no es el caso, ya que siempre quedaran espacios entre las ligas al formarlas en esferas, lo que complica el calculo de densidades y viscosidad que se requiere para estos modelos teóricos. Es así que para medir e_r en nuestra pelota de ligas, sera necesario plantear experimentos en los cuales se puedan medir cantidades que den evidencia de cuanta energía se pierde después de someterla a colisiones. Los experimentos a trabajar son una caída libre rectilínea, donde se busca a su vez, tener en cuenta la fricción con el aire, para tener mayor precisión [3]. y por otra parte, se plantea una colisión entre una masa suspendida de un péndulo, y la pelota de ligas inicialmente en reposo, la cual posteriormente describirá un movimiento parabólico, donde igualmente se tendrán en cuenta las fricciones en ambos movimientos [4, 5].

Los experimentos a desarrollar no son ninguna novedad, pues ya se han estudiado para diversos objetos como en [6], donde se calcula para diversos materiales y tamaños de esferas, siguiendo métodos experimentales similares a otros artículos con el mismo objetivo, el enfoque que se le va a dar a este experimento sera un poco diferente, ya que no solo nos centraremos en la obtención de e_r para una única pelota, si no que, se aprovechara la composición de esta, para sumarle ligas, e incrementar su tamaño, y a, de modo que se pueda estudiar como cambia el valor de e_r según se aumenta el numero de ligas, y a su vez, determinar cuando se obtiene un valor máximo. Para este ultimo fin, una vez estimado el coeficiente de restitución para diferentes tamaños de la pelota, con directa relación a al cantidad de ligas, se implementara una serie de ajuste a diferentes funciones, con el fin de revisar en cual se ajusta mejor, esto mediante un algoritmo que implemente mínimos cuadrados no lineales [7]. Esto le da a este estudio un enfoque diferente al de tantos artículos que se limitan a calcular el valor del coeficiente de restitución, acá esta cantidad sera estudiada a través de como se componga la pelota, sin la necesidad de adentrarnos en desarrollos teóricos de mayor complicación.

Pendiente que se hace en cada sección precedente.

3. Estado del arte

Cuando buscamos investigaciones afines con la de este articulo, entintáramos referentes desde hace suficiente tiempo atrás, para notar que es un problema ampliamente tratado, con diferentes experimentos, y a diferentes grados de precisión, podemos ver esto al contrastar los siguientes artículos:

3.1. Determinación del Coeficiente de Restitución (e) de una pelota de ping-pong

Donde se tiene de objeto de estudio una sola pelota, y se utilizan ecuaciones ideales sin tener en cuenta la fricción [8], no obstante, es un esquema que se busca seguir en esta investigación, ya que expresa de forma sencilla las relaciones que hay entre la teoría y la practica, además de ilustrar gráficamente las implicaciones que tiene el coeficiente de restitución.

3.2. Methods for measuring the coefficient of restitution and the spin of a ball

Acá en comparación al artículo anterior se hace un análisis teórico mas detallado, considerando fricciones, además de mostrar diversos métodos experimentales acompañados de su descripción teórica [3], de donde se adopto el método para el primer experimento de caída libre, que se realizara en nuestra investigación.

A su vez, como se busca trabajar un poco mas de precisión, se integra la interacción de la fricción con el aire, para lo cual fue sugestivo el siguiente artículo.

3.3. Obteniendo los coeficientes de restitución y arrastre en un solo experimento

Donde además de calcular el coeficiente de restitución, se estudia las consecuencias de tomar un sistema con fricciones, como se deben tratar estas fuerzas mediante el coeficiente de arrastre y como calcularlo experimentalmente [6]. Y dado que los rozamientos serán tenidos en cuenta en los dos experimentos a realizar, se busco un artículo con relación a este tratamiento.

Pese a estar publicados muchos mas artículos que tratan este tema, los que mas influyeron en el desarrollo de esta investigación fueron los tres antes vistos, ya que son afines a los objetivos que se plantean en esta investigación y la metrología a desarrollar.

Por ultimo, como se menciona, el nuevo enfoque de esta investigación recae en la búsqueda del mayor coeficiente de restitución en función de la cantidad de ligas, para lo cual, se buscara una expresión teórica mediante un ajuste no lineal a una función que mejor encaje con los datos que se recolecten, para lo cual se utilizo el método explicado en el siguiente repositorio.

3.4. Ajuste no lineal

En este repositorio se explica como aplicar un ajuste no lineal a cualquier función requerida, mediante un algoritmo que aplica mínimos cuadrado, con la ayuda de librerías en Phyton [9]

4. Objetivos

4.1. Objetivo específico

Determinar cuando el coeficiente de restitución e_r de una pelota de bandas elásticas es máximo.

4.2. Objetivos específicos

- Calcular las velocidades previas y posteriores a una colisión, mediante cantidades fáciles de medir, en dos experimentos donde esta implicada la pelota de bandas elásticas, que se ira variando de volumen al agregarle mas ligas en las repeticiones de los experimentos.
- A partir de las velocidades recolectadas, calcular el coeficiente de restitución según su definición.

- Ajustar a un modelo no lineal el gráfico de dispersión entre e_r y el numero de ligas, para encontrar una expresión que mejor se ajuste a los datos, el cual ayude a predecir donde se maximiza e_r .

5. Metodología

El objetivo de realizar dos experimentos diferentes es con el fin de tener diferentes fuentes de datos experimentales que analizar y contrastar, así que vamos a explicar el funcionamiento de cada uno de ellos teórica y experimentalmente, después se hará una explicación de el tratamiento que se le harán a ambos conjuntos de datos.

5.1. Caída libre con rebote

El primer experimento es de los mas sencillos, y el que comúnmente es utilizado para este tipo de medidas indirectas, ya que las variables que intervienen en la dinámica del sistema son pocas, pero como mencionamos, queremos hacer un acercamiento teórico mas preciso de este modelo, para lo cual, consideraremos la fricción que genera el aire, que es un factor inevitable en todas los experimentos que realicemos. Para esto comencemos con modelar el sistema antes del rebote, como se muestra en Figura 1a se deja caer desde una altura de $1m$ sin velocidad inicial, puramente por acción de la gravedad. Donde la sumatoria de fuerzas en el eje de la caída quedaría como Ecuación 2

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (2)$$

Para nuestros objetivos, no sera necesario resolver para la posición, con saber la velocidad nos sirve, por lo cual, al realizar la primera integración (Anexo 1) de Ecuación 2 podemos conseguir la velocidad en función de la altura [3], Ecuación 3, con lo que tendremos la velocidad un instante antes de la colisión, es decir, después de haber recorrido el metro de altura inicial.

$$v = \sqrt{\frac{gk}{m} (1 - e^{-2kH/m})} \quad (3)$$

La segunda velocidad la conseguiremos del análisis contrario, un instante después de la colisión, tendremos que sale con una velocidad desconocida, pero con medir la altura a la que llega sera suficiente para conocerla, así pues, del diagrama Figura 1b notamos que las fuerzas son las mismas, pero ahora la gravedad con signo contrario, por lo que al resolver Ecuación 2 con esta condición (Anexo 1) se obtiene Ecuación 4.

$$v' = \sqrt{\frac{gk}{m} (e^{-2kh/m} - 1)} \quad (4)$$

Con las velocidades un instante previo y posterior a al colisión, podemos aplicar Ecuación 1, donde por tratarse de una colisión con el suelo, las velocidades relativas antes y después del choque son nulas, entonces al remplazar Ecuación 3 y 4 obtenemos la expresión para el coeficiente de restitución

que es Ecuación

$$e_r = \sqrt{\frac{e^{-2kh/m} - 1}{1 - e^{-2kH/m}}} \quad (5)$$

En cuanto a la parte experimental, se desarrollo según los esquemas de Figura 1, y los datos de las alturas se tomaran con la ayuda de la Herramienta de análisis y modelado Tracker.

5.2. Colisión péndulo bola

El segundo experimento es una variación del ejemplo clásico de colisión entre dos masas en un plano, donde se escoge que la pelota de ligas este en reposo, y la masa a impactarla es la de un péndulo, con lo cual, se consigue mayor conocimiento teórico de la velocidad que maneje esta masa en función de como se inicie la dinámica de este, pues se barajó la alternativa de que sea una masa impulsada manualmente, pero esto haría muy poco reproducible una repetición a otra del experimento, por tanto el esquema de este segundo experimento se muestra en Figura 2.

En la primera parte del segundo experimento, correspondiente a Figura 2a realizaremos el calculo de la velocidad en función de la posición angular como lo muestra Lubarda y Lubarda en [5], donde la ecuación de movimiento para el péndulo con fricción es Ecuación 6.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) + kl\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \quad (6)$$

Al realizar la primera integración de esta ecuación diferencial obtenemos la expresión para la velocidad en función de la posición angular, Ecuación 7, donde, se deja expresada con la constante arbitraria, ya que esta tendrá valores diferentes antes y después de la colisión.

$$v_1^2 = Ce^{-2kl\theta} + \frac{2gl}{1 + 4k^2l^2} (\cos(\theta) - 2klsin(\theta)) \quad (7)$$

Posterior al impacto, volveremos a aplicar Ecuación 7 para saber con que velocidad parte el péndulo, a partir de medir hasta que altura llega. Además de esto se tendrá que saber también la velocidad con la que parte la pelota de ligas, para lo cual evaluaremos las ecuaciones dinámicas con fricción, según lo propuesto por Waburton [4], con una versión diferente de la inclusión a las ecuaciones dinámicas de la fricción, como se muestra en Ecuación 8, donde se puede observar que se toma ahora la fricción como proporcional a la velocidad lineal, una alternativa igual de valida, y viable para este movimiento que requiere una descomposición vectorial.

$$\begin{cases} x : & m\frac{dv_x}{dt} = -mbv_x \\ y : & m\frac{dv_y}{dt} = -mg - mbv_y \end{cases} \quad (8)$$

No es difícil resolver las primeras integrales de estas ecuaciones (Anexo 1), pero como nos interesa solo saber la magnitud de la velocidad de la pelota después de la colisión, podemos asumir que esta es solo en la dirección x , y encargarnos solo de esta, para encontrar la velocidad posterior al impacto en función de cantidades medibles. Es así que al resolver la posición de la pelota en x y despejar la velocidad inicial se obtiene Ecuación 9, donde X es una distancia recorrida en x para

determinado tiempo. Con esto evidenciamos que para este segundo experimento se requiere a su vez tomar datos de tiempo para el recorrido, pero esto igualmente se hará con la herramienta de análisis y modelado Tracker. Y para el calculo de e_r se repite el proceso que para el primer experimento, con las velocidades antes y después de la colisión, se remplazan en Ecuación 1

$$v_{0x} = \frac{bx}{1 - e^{-bt}} \quad (9)$$

5.3. Análisis de datos

Dado que lo que se quiere es determinar con cuantas ligas se obtiene el máximo valor de e_r se van a repetir los dos experimentos anteriores con diferentes pelotas, del mismo material pero de diferentes dimensiones, lo cual se graficará en un diagrama de dispersión, al cual se le hará un ajuste no lineal, como se muestra en [9], y obtener la expresión que mejor se ajuste a los datos recolectados, con el fin de verificar que la optimización según el calculo de esta, coincide, lo cual nos deja con una expresión para el coeficiente de fricción en función de la cantidad de bandas elásticas que compongan la pelota.

5.4. Figuras

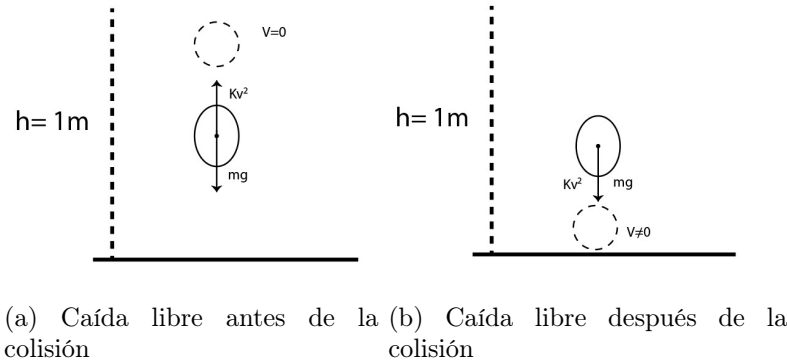


Figura 1: Momentos a análisis para el tratamiento teórico del primer experimento

Referencias

- [1] MF Ferreira da Silva. Choque inelástico entre dos partículas: análisis basado en el coeficiente de restitución. *Revista mexicana de física E*, 54(1):65–74, 2008.
- [2] colaboradores de Wikipedia. Coeficiente de restitución, 5 2024.
- [3] Lyman James Briggs. *Methods for measuring the coefficient of restitution and the spin of a ball*. US Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1945.

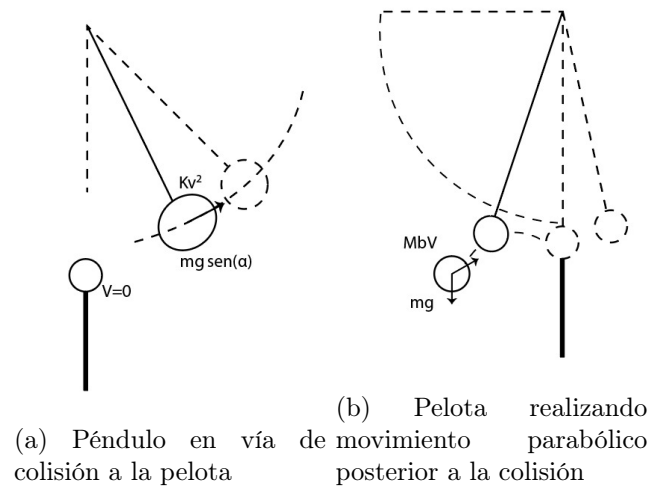


Figura 2: Momentos a análisis para el tratamiento teórico del segundo experimento

- [4] Roger DH Warburton and Jay Wang. Analysis of asymptotic projectile motion with air resistance using the lambert w function. *American Journal of Physics*, 72(11):1404–1407, 2004.
- [5] Marko V Lubarda and Vlado A Lubarda. An analysis of pendulum motion in the presence of quadratic and linear drag. *European Journal of Physics*, 42(5):055014, 2021.
- [6] OD Pavioni and FM Ortega. Obteniendo los coeficientes de restitución y arrastre en un solo experimento. *Revista mexicana de física E*, 61(1):11–16, 2015.
- [7] Peter Teunissen. Nonlinear least squares. *manuscripta geodaetica*, 1990.
- [8] Víctor Garrido. Determinación del coeficiente de restitución (e) de una pelota de ping-pong. *Universidad de Viña del Mar*, 2015.
- [9] Marcelo Luda. Ajuste no lineal, 2018.