Juan Leon

Sean x1, . . ., xn algunos números diferentes por pares y sean y1, . . ., yn algunos números.

Entonces existe un único polinomio P de grado ≤ n − 1 tal que:

$$P(xj) \ = \ yj \ para \ cada \ j \ en \ \{1, \ldots, n\}.$$

Demostración:

Denotemos por c0, . . ., cn−1 a los coeficientes del polinomio:

$$P(x) \ = \ c0 \ + \ c1x \ + \ c2x_0^2 + \ldots + cn - 1x \ n - 1 \ .$$

Sustituyendo x = x1, luego x = x2, etc., hasta x = xn, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas

$$c0 \ + \ x1c1 \ + \ x \ 2 \ 1 \ c2 + \ldots + x \ n - 1 \ 1 \ cn - 1 \ = \ y1$$

$$c0 \ + \ xnc1 \ + \ x \ 2 \ n \ c2 + \ldots + x \ n - 1 \ n \ cn - 1 \ = \ yn.$$

La matriz de este sistema es la matriz de Vandermonde asociada a los puntos x1, . . ., xn, y el sistema se escribe brevemente en la forma

$$V \ (x1, \ldots, xn)c \ = \ y,$$

donde c = ck−1 n k=1 es el vector de los coeficientes incognitos.

El determinante de este sistema es el determinante de Vandermonde y se calcula como el producto de todas las diferencias xj − xi con i < j:

$$det \ V(x1, \ldots, xn) \ = \prod_{\mathrm{j,k} \in \{1,\ldots,\mathrm{n}\} \ \mathrm{j<k}} (\mathrm{xk} \ - \ \mathrm{xj}).$$

Como los puntos x1, . . ., xn son diferentes por pares, todas estas diferencias xk − xj son distintas de cero, y el determinante es distinto de cero. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única, esto es, existe un único polinomio que cumple con dichas propiedades.

Tomado de:
http://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/polynomial_interpolation_theorem_with_Vandermonde_es.pdf