

Diseño y Simulación del Control de Estabilidad y Balanceo de un Péndulo Invertido con Rueda de Reacción

Juan Pablo Sibecas
juan.sibecas@gmail.com
Control y Sistemas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo,
Mendoza, Argentina

Octubre de 2023

Resumen

El objetivo de este trabajo es lograr la estabilización de un péndulo en su posición de equilibrio inestable (invertido) mediante el accionamiento de una rueda de reacción. Se propone la utilización de un sistema de control por realimentación de estados, con un regulador cuadrático lineal (LQR), y el uso de observadores de estado para estimar el vector de estados a partir de mediciones parciales de una unidad de medición inercial (IMU) de 6GDL. El desarrollo del trabajo incluye la descripción del subsistema mecánico y eléctrico, la representación del modelo en espacio de estados, el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad, así como el acondicionamiento de las señales obtenidas de los sensores y la estimación de estados mediante un filtro de Kalman. Se implementó también un control de balanceo para elevar el péndulo desde posiciones que exceden el espacio geométrico de estabilidad del sistema. También se desarrolló un control híbrido que combina ambos controladores.

Tabla 1: Descripción de Variables.

Símbolo	Descripción
θ	Posición angular del péndulo medida en sentido horario desde la posición de equilibrio inestable.
φ	Posición angular de la rueda de reacción medida en sentido horario.
ω_p	Velocidad angular del péndulo.
ω_m	Velocidad angular de la rueda de reacción.
J_p	Momento de inercia del péndulo respecto a su centro de gravedad.
J_p^O	Momento de inercia del péndulo respecto a la articulación pasiva.
J_w	Momento de inercia de la rueda de reacción respecto a su centro de gravedad.
m_p	Masa del brazo del péndulo.
m_w	Masa de la rueda de reacción.
L_1	Distancia del eje pasivo al centro de gravedad del péndulo.
L_2	Longitud del péndulo.
b_p	Coefficiente de fricción en el eje pasivo.
τ_m	Torque motor aplicado a la rueda de reacción.
V_{nom}	Tensión nominal del motor.
I_{nom}	Corriente nominal del motor.
i_a	Corriente de armadura del motor.
V_{in}	Tensión de armadura del motor.
L_a	Inductancia del motor.
R_a	Resistencia del motor.
m_m	Masa del motor.
K_e	Constante de FCEM del motor.
K_t	Constante de torque del motor.
b_m	Coefficiente de fricción del motor.

1. Introducción

El péndulo invertido clásico (cart-pole) ha sido estudiado extensivamente por muchos autores en la bibliografía de sistemas de control. Una variación del mismo, es el péndulo invertido con rueda de reacción. Este es un sistema mecánico subactuado en cuya base se encuentra una articulación pasiva inmóvil, y en la parte superior del péndulo se acciona una rueda de reacción para inducir un torque estabilizador en el péndulo, por conservación de la cantidad de movimiento angular. El fenómeno de rueda de reacción es utilizado en muchas aplicaciones de ingeniería, por ejemplo en ingeniería espacial, para la reorientación de satélites en órbita.

El objetivo de este trabajo es lograr la estabilización de un péndulo simulado en su posición de equilibrio inestable (invertido) mediante el accionamiento de una rueda de reacción por un motor de corriente continua de imanes permanentes. Para ello, se propone la utilización de un sistema de control por realimentación completa de estados, utilizando un regulador cuadrático lineal (LQR). Como novedad, se propone el uso de un observador de estado para estimar el estado completo del sistema a partir de mediciones parciales de una unidad de medición inercial (IMU) de 6GDL. También se implementó un controlador de balanceo a partir del análisis de energía del sistema para extender el espacio de operación completo. Por último, se desarrolló un controlador híbrido conmutado, que combina los 2 controladores anteriores. Durante el desarrollo de todo el trabajo se tuvo en cuenta la robustez del mismo, para poder ser aplicado en un modelo real. En este caso, se realizó la simulación de un péndulo destinado a fines educativos, para estudiantes de sistemas de control. Por eso, se seleccionaron sensores y actuadores acordes al contexto.

2. Desarrollo

2.1. Subsistema Mecánico

El subsistema mecánico está compuesto por un brazo articulado en un extremo a una base fija y por una rueda acoplada en el extremo opuesto. Ambas articulaciones son cilíndricas, ya que permiten la rotación de un cuerpo respecto a otro. En esta configuración el principio de conservación de movimiento angular es de gran importancia, ya que permite la transferencia del mismo de la rueda (accionada por un motor) al péndulo.

La figura (1) muestra el esquema básico de funcionamiento de este fenómeno, donde la variación de velocidad de la rueda de reacción induce el movimiento del brazo. El coeficiente de transferencia de velocidades está dado por [1]:

$$C = \frac{J_w}{J_p^O + J_w}, \quad (1)$$

donde $J_p^O = J_p + m_p L_1^2 + (m_m + m_w) L_2^2$.

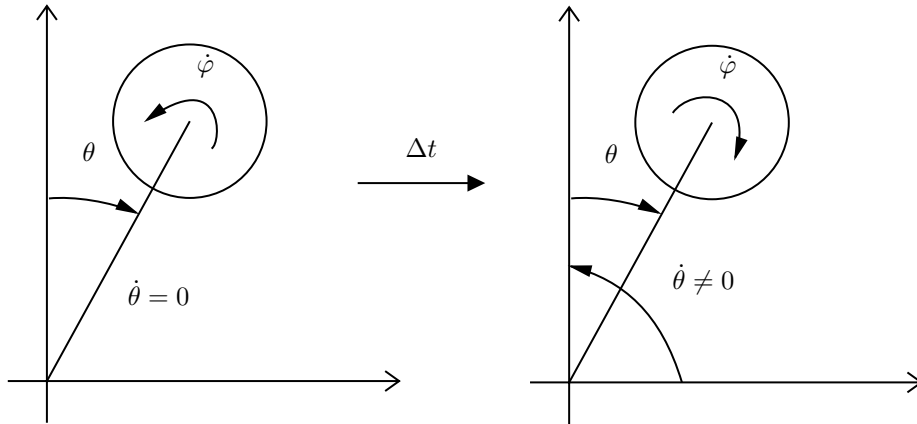


Figura 1: Transferencia de cantidad de movimiento angular.

En la tabla (2) se presentan los parámetros de diseño de la estructura mecánica descrita:

Tabla 2: Parámetros del subsistema mecánico diseñado.

Parámetro	Valor
J_p	$2 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
J_p^O	$1,36 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$
J_w	$4,2 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
m_a	$6 \times 10^{-2} \text{ kg}$
m_w	$0,25 \text{ kg}$
L_1	$0,1538 \text{ m}$
L_2	$0,2 \text{ m}$
b_p	$0,03 \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}}$

Las ecuaciones que describen el comportamiento mecánico de este sistema se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} = Q_i, \quad (2)$$

donde $L = T - V$, $q_1 = \theta$ y $q_2 = \varphi$. La energía cinética T y potencial V del sistema se modelan mediante las siguientes ecuaciones:

$$T = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_w (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 \quad (3)$$

$$V = (m_p L_1 + m_w L_2) g \cos(\theta) \quad (4)$$

Reemplazando L en (2) y resolviendo para q_1 y q_2 , se obtienen las ecuaciones que describen el movimiento del sistema:

$$\ddot{\theta}(J_p^O + J_w) + \ddot{\varphi} J_w - (m_p L_1 + m_w L_2) g \sin(\theta) = -b_p \dot{\theta} \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} J_w + \ddot{\varphi} J_w = \tau_m \quad (6)$$

2.2. Subsistema Eléctrico

El subsistema eléctrico está compuesto por un motor de corriente continua de imanes permanentes acoplado a la rueda de reacción, y se ubica en el extremo opuesto al eje de rotación del péndulo. En la tabla (3) se presentan los parámetros provistos por la hoja de datos del motor [2], acoplado a un reductor de 1 : 22 para aumentar su capacidad de torque, necesaria para esta aplicación.

Tabla 3: Parámetros del motor de corriente continua.

Parámetro	Valor
V_{nom}	24 V
I_{nom}	$1,06 \text{ A}$
J_w	$2,23 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$
L_a	$1,56 \text{ mH}$
R_a	$22,7 \Omega$
m_m	$0,07 \text{ kg}$
K_{e0}	$34,7 \times 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{rad/s}}$
K_{t0}	$34,7 \times 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$
b_m	$8,95 \times 10^{-6} \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}}$

Se modela el motor de corriente continua de imanes permanentes con caja reductora como el mismo motor de imanes permanentes, con una amplificación de su excitación dada por la relación de transmisión de la caja:

$$K_t = \frac{1}{r} K_{t0} \quad (7)$$

$$K_e = \frac{1}{r} K_{e0} \quad (8)$$

$$(9)$$

El modelo del motor de corriente continua de imanes permanentes está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$V_{in} = L_a \frac{di_a}{dt} + i_a R_a + \dot{\varphi} K_e \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi} J_w = K_t i_a - b_m \dot{\varphi} \quad (11)$$

En las secciones siguientes del trabajo, se presentará al momento de inercia del motor y de la rueda como equivalentes.

2.3. Representación del Modelo en Espacio de Estados

El vector de estados se define como:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega_p \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} \quad (12)$$

La acción de control es $u = V_{in}$ y la salida es $y = \theta$.

2.3.1. Sistema NL

Reemplazando (11) en (5), $\omega_p = \dot{\theta}$, $\omega_m = \dot{\varphi}$, y despejando las primeras derivadas de las variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega}_p \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta g}{J_1} \sin \theta - \frac{b_p}{J_1} \omega_p + \frac{b_m}{J_1} \omega_m - \frac{K_t}{J_1} i_a \\ -\frac{b_m}{J_w} \omega_m + \frac{K_t}{J_w} i_a \\ -\frac{K_e}{L_a} \omega_m - \frac{R_a}{L_a} i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_{in}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega_p \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} = \theta,$$

donde $\beta = m_p L_1 + m_w L_2$ y $J_1 = J_p^O + J_w$.

2.3.2. Sistema LTI

Linealizando $\sin(\theta) = \theta$ en $\theta = 0$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega}_p \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta g}{J_1} & -\frac{b_p}{J_1} & \frac{b_m}{J_1} & -\frac{K_t}{J_1} \\ 0 & 0 & -\frac{b_m}{J_w} & \frac{K_t}{J_w} \\ 0 & 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega_p \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_{in}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega_p \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} = \theta,$$

donde $\beta = m_p L_1 + m_w L_2$ y $J_1 = J_p^O + J_w$.

2.4. Diagrama de Bloques de la Planta NL

Las ecuaciones representadas por el modelo de Espacio de Estados (2.3.1) se modelaron en Simulink como se muestra en la figura (2).

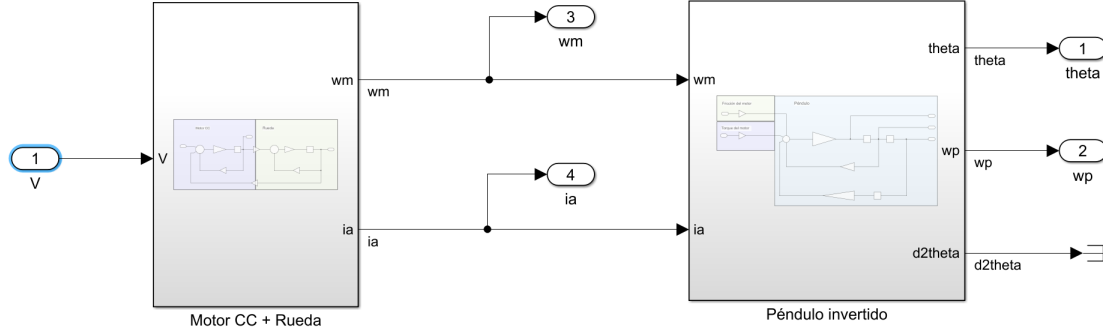


Figura 2: Diagrama de bloques de la planta NL.

A la izquierda se observa el subsistema electromecánico (motor de corriente continua y rueda de reacción, figura (3)), que influye en el segundo subsistema mecánico (péndulo, figura (4)).

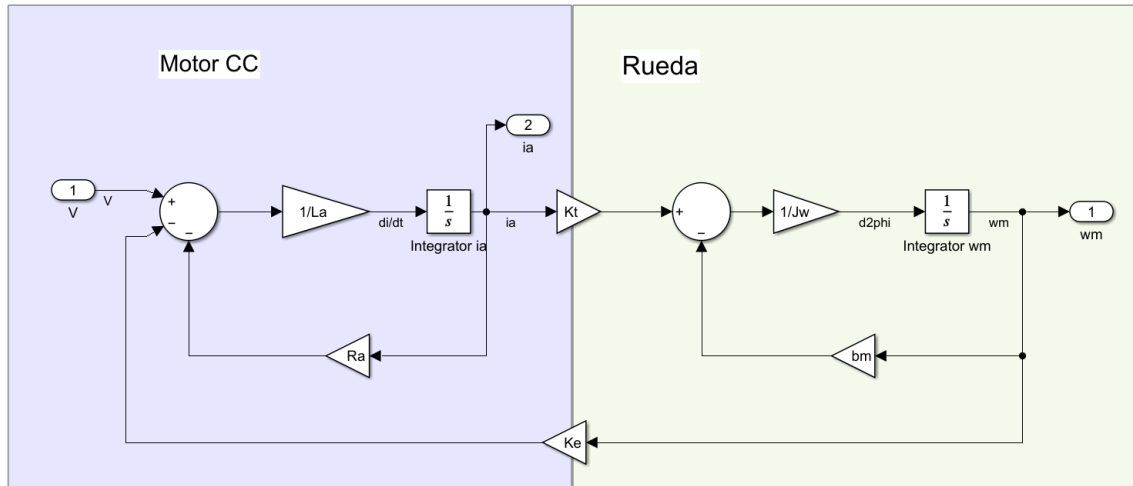


Figura 3: Diagrama de bloques del subsistema electromecánico motor y rueda de reacción.

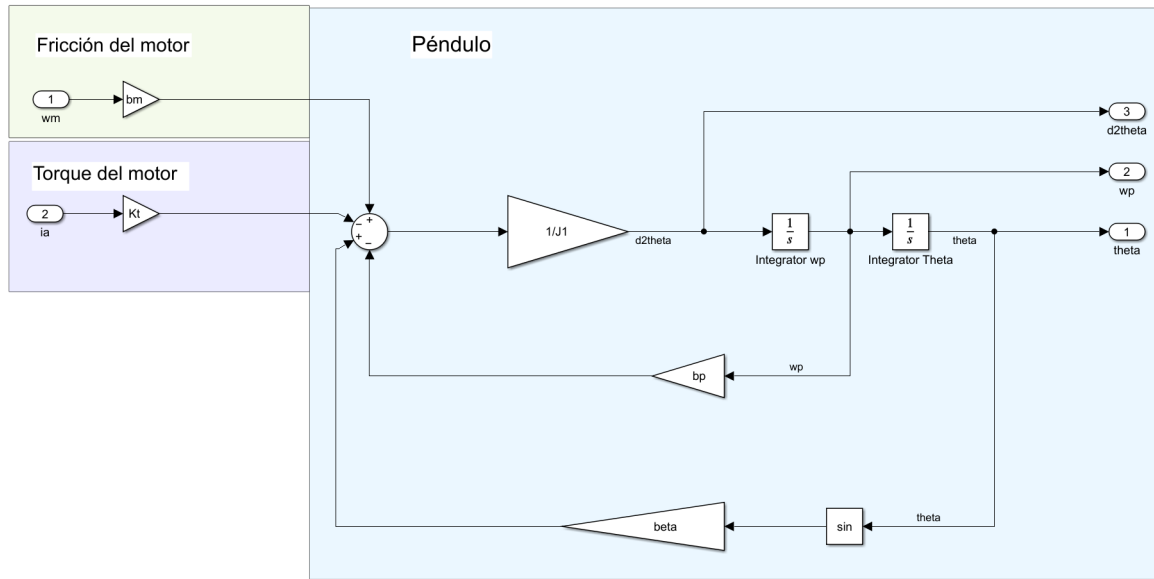


Figura 4: Diagrama de bloques del subsistema mecánico péndulo.

2.5. Estabilidad

La estabilidad del modelo linealizado de la planta se analizó a partir de sus matrices del modelo de espacio de estados (2.3.2) utilizando la función *pzmap()* de MATLAB. El resultado se muestra en la figura (5), donde se observa la inestabilidad del sistema por la existencia de polos con componente real positiva.

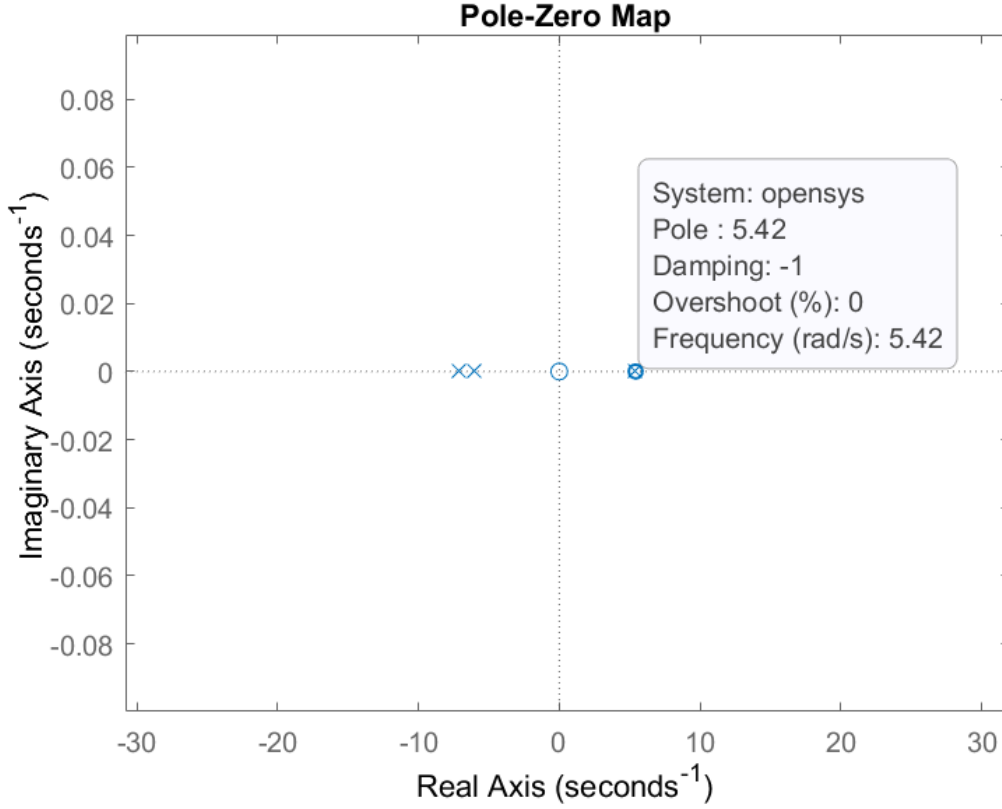


Figura 5: Ubicación de polos del sistema LTI a lazo abierto.

2.6. Controlabilidad

Se determinó por el criterio de Kalman que la planta es controlable, ya que la matriz de controlabilidad tiene rango igual a $n = 4$. Esto significa que existe una matriz de realimentación K tal que el sistema de lazo cerrado $A - BK$ sea estable.

La matriz de controlabilidad, obtenida en MATLAB con $\text{ctrb}(A, B)$ posee rango igual a 4:

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (13)$$

2.7. Observabilidad

De manera similar a la anterior, se determinó que el estado de la planta es totalmente observable a partir de la medición del ángulo θ . La matriz de observabilidad, obtenida en MATLAB con $\text{obsv}(A, C)$ posee rango igual a 4, suponiendo que la salida del sistema (2.3.2) es $y = \theta$.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.8. Sensores

Como se planteó anteriormente, la variable de estado medida es el ángulo de inclinación θ , que se obtuvo mediante una unidad de medición inercial (IMU), más específicamente, el módulo MPU6050, que contiene un acelerómetro y un giroscopio de 3 ejes cada uno. El módulo se instaló sobre el brazo del péndulo, y se utilizaron lecturas de ambos sensores para generar una mejor señal de salida del sistema. A partir del acelerómetro se obtuvo el ángulo de inclinación utilizando las proyecciones de la gravedad en sus ejes x, y. El giroscopio permite medir la velocidad angular del péndulo o, integrandola,

determinar también la posición angular. Este método no es ampliamente utilizado en este tipo de sensores por el fenómeno de deriva, que se produce por la integración de ruido blanco.

En la tabla (4) se presentan los parámetros necesarios del sensor para realizar una simulación fiable en Simulink.

Tabla 4: Parámetros del módulo MPU6050 [3].

Parámetro	Valor
Frecuencia de Muestreo	1 kHz
Frecuencia Natural	33 kHz
Densidad Espectral de Potencia (Acelerómetro)	$0,005^2 \frac{(\text{deg/s})^2}{\text{Hz}}$
Densidad Espectral de Potencia (Giroscopio)	$400^2 \frac{(\mu\text{g})^2}{\text{Hz}}$
Frecuencia de corte filtro de salida	44 Hz

Además, según la hoja de datos del fabricante, este módulo posee un filtro pasabajos configurable a la salida. En la figura (6) se muestra el modelo equivalente de estos sensores utilizado, donde la potencia de ruido blanco gaussiano se obtuvo a partir de la densidad espectral de ruido:

$$N = \text{PSD BW}, \quad (15)$$

donde PSD es la amplitud de densidad espectral del ruido y BW es el ancho de banda del filtro pasabajos a la salida.

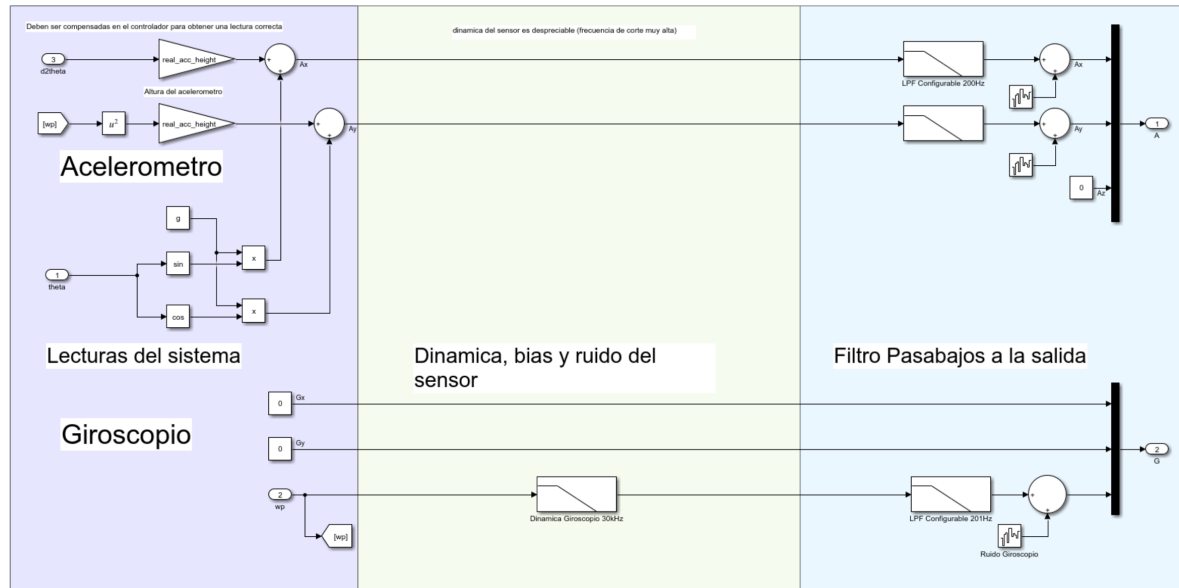


Figura 6: Diagrama de Bloques del módulo MPU6050 en Simulink.

Se observa en la figura (6) que la medición del acelerómetro se ve perturbada por el movimiento del péndulo (aceleraciones tangencial y normal), por lo cual las mismas se compensaron posteriormente en el controlador. Se destaca también que la amplitud de estas perturbaciones es directamente proporcional a la distancia del eje a la que se instala el sensor. Por esto, se debe ubicar el sensor lo más cercano posible al eje de rotación del péndulo.

2.8.1. Acondicionamiento de señal

Además del filtro pasa bajos integrado en el módulo MPU6050, se realizaron pasos posteriores de acondicionamiento de señal para obtener una mejor medición del ángulo θ . Es posible compensar las aceleraciones tangencial y normal en los ejes x e y respectivamente. La aceleración normal $a_n = \omega_p^2 h$ del péndulo se puede obtener a partir de la medición de la velocidad angular del péndulo, por el eje z

del giroscopio. La aceleración tangencial del péndulo se puede obtener derivando la velocidad angular medida y, multiplicándola por la distancia del sensor al eje de rotación del péndulo $a_t = \alpha h$. En la sección (3.3) se discutirán las ventajas y desventajas de estas compensaciones. En la figura (7) se observa el diagrama de cuerpo libre del acelerómetro y como se ve perturbada la medición del ángulo θ mientras el péndulo está en movimiento.

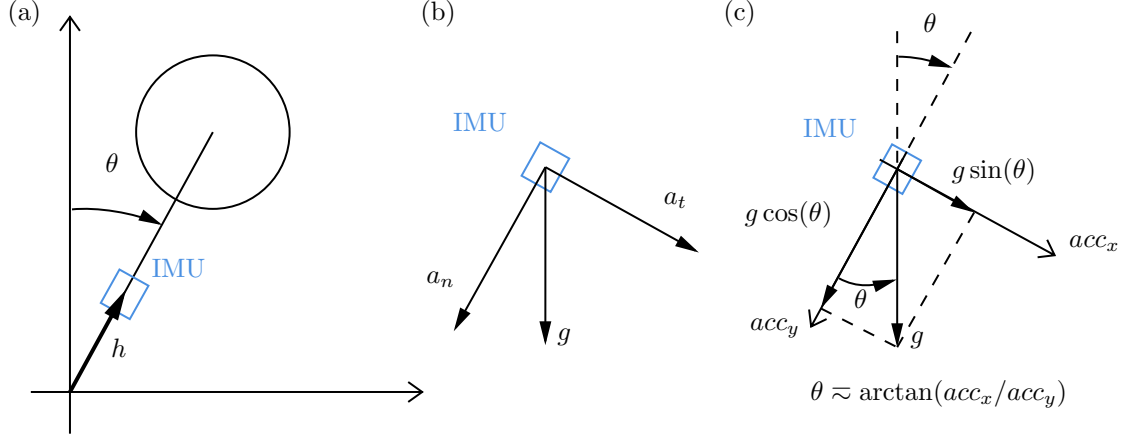


Figura 7: (a) Ubicación del módulo MPU6050. (b) Aceleraciones actuantes sobre el acelerómetro. (c) Cálculo de θ

Para suavizar las lecturas del acelerómetro, que están sujetas a errores numéricos, se implementó un filtro complementario, fusionando el ángulo θ obtenido anteriormente con la medición de velocidad angular del eje Z del giroscopio. Este es un filtro digital que realiza la siguiente operación:

$$\theta_f(t_{n+1}) = \alpha(\theta_f(t_n) + G_z \Delta t) + (1 - \alpha)\theta_{acc}, \quad (16)$$

donde α es un coeficiente entre 0 y 1 que se debe seleccionar según especificaciones de rendimiento. Este coeficiente determina la dependencia del filtro de la medición anterior o de la nueva adquirida por el acelerómetro. Mayor dependencia de la medida anterior disminuye el ruido de la señal, pero genera *delay* en la actualización de la medición. El coeficiente se determinó por prueba y error obteniendo un compromiso aceptable entre ruido y *delay*.

En la figura (8) se muestra la implementación en Simulink de esta parte del controlador.

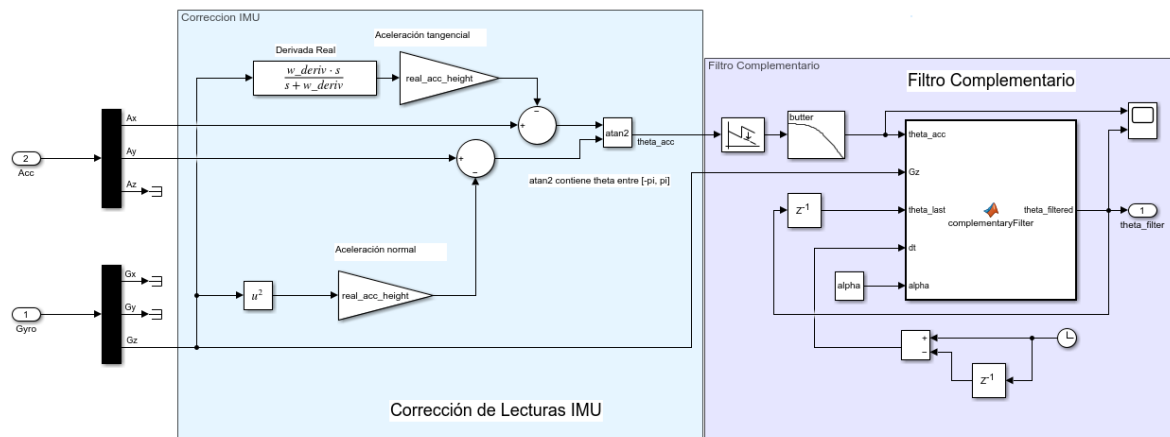


Figura 8: Diagrama de Bloques del acondicionamiento de señal.

En la misma se observa un bloque de derivación *real* que simula un comportamiento más cercano al que se podría programar en un microcontrolador. La frecuencia angular w_{deriv} corresponde a un valor menor a la mitad de la frecuencia de muestreo del controlador.

2.9. Estimación de Estados

Es necesario conocer en cada instante el vector de estado completo de la planta para poder implementar un control LQR. Para esto, se utilizó un filtro de Kalman como observador de estados, ya que únicamente se obtuvieron mediciones directas de θ . Las características de este tipo de observador dependen de la incertidumbre en el modelo de la planta desarrollado, y de la fiabilidad de las mediciones realizadas.

2.9.1. Filtro de Kalman para planta linealizada

Para implementar el control de estabilidad, se utilizó un filtro de Kalman cuyo espacio de operación se ubica alrededor del punto de linealización de la planta, especificado en (2.3.2). La ganancia L de Luenberger del observador se obtuvo resolviendo el problema del estimador cuadrático lineal (LQE):

$$L' = lqr(A', C', Q, R), \quad (17)$$

donde Q y R son matrices que dependen de la incertidumbre de los sensores y de la planta. En la figura (9) se presenta el diagrama de bloques de este observador:

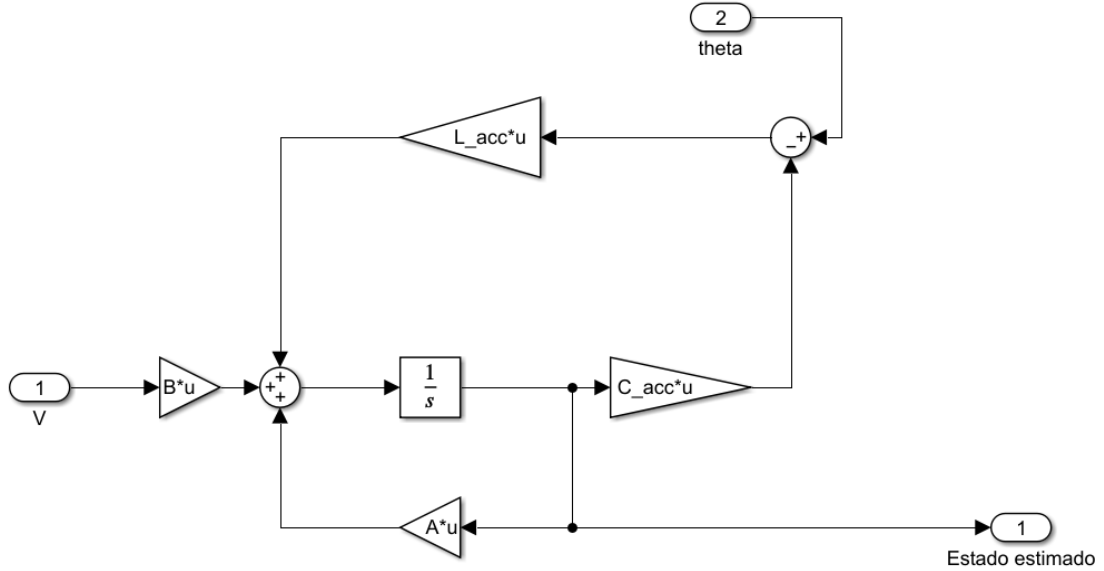


Figura 9: Diagrama de Bloques del observador de Kalman.

2.9.2. Filtro de Kalman extendido para planta no lineal

El filtro de Kalman fue diseñado en base a la linealización de la planta, que deteriora su comportamiento respecto a la planta NL a medida que se aleja del punto de linealización. Por eso, para implementar el control de balanceo, es necesario reemplazar este tipo de observador por un filtro de Kalman extendido (NL). En este caso, la matriz de ganancias L se calculó por el mismo procedimiento, y se reemplazó la matriz A (jacobiano) del sistema LTI por un bloque de función que resuelve el campo vectorial F , dado por (2.3.1).

instantánea del sistema a un nivel de energía de referencia $E_{ref} = 2$, que corresponde a la posición de equilibrio inestable del péndulo, con $\omega_p = 0$. La ganancia K_w se determinó por prueba y error. En la figura (11) se presenta el diagrama de bloques implementado en Simulink:

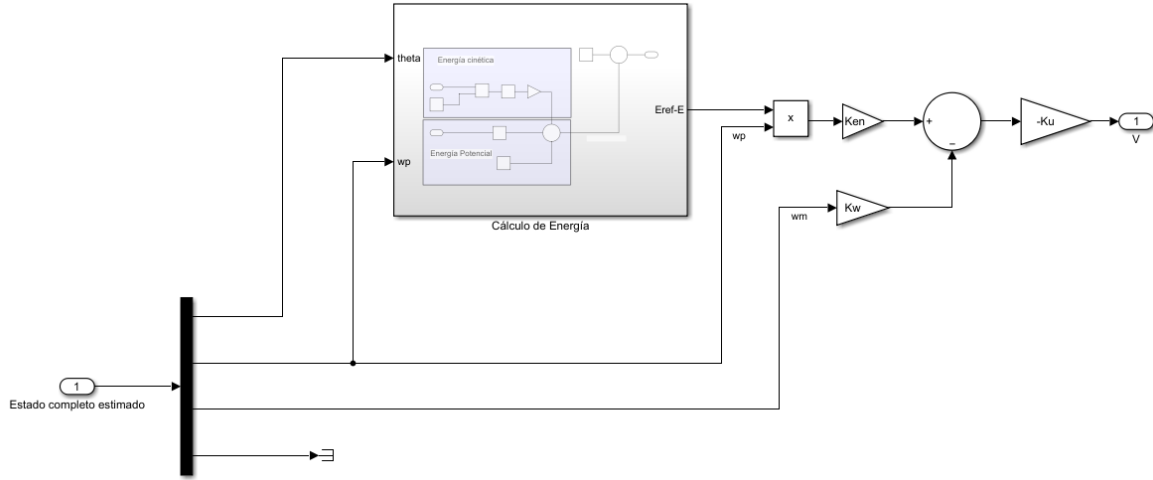


Figura 11: Diagrama de Bloques del Controlador de Balanceo.

2.12. Control Híbrido

El control híbrido consiste en la conmutación del control de balanceo y el control de estabilidad propuestos anteriormente. La lógica a partir de la cual se determinó el régimen de conmutación de estos controladores responde al análisis del espacio geométrico de estabilidad del controlador LQR.

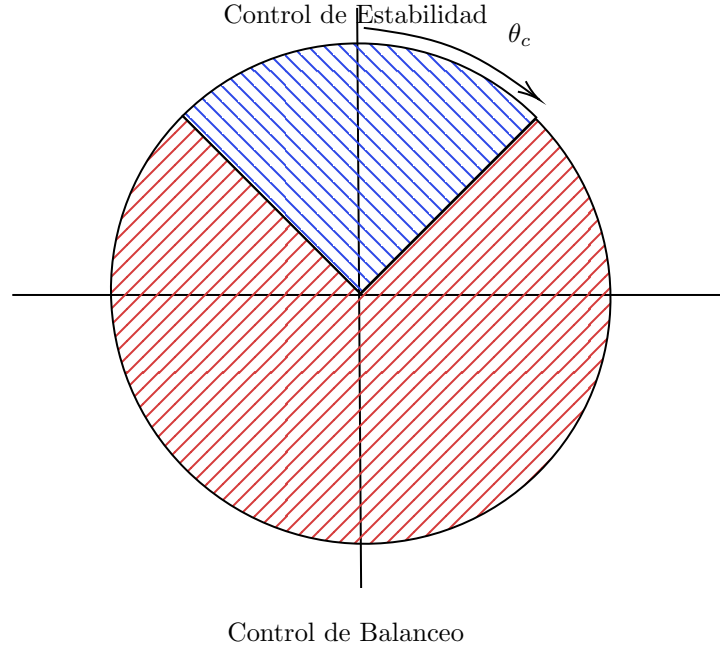


Figura 12: Espacio de operación de cada controlador.

3. Resultados

En esta sección se presentarán las pruebas realizadas y los resultados obtenidos en cada caso. Se verificaron distintos parámetros de diseño del sistema e incertidumbre de los mismos.

3.1. Control de Estabilidad

Inicialmente se determinaron las matrices de costos del sistema, con el fin de resolver el problema LQR (18):

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\rho_\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5/\rho_{\omega_p}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1/\rho_{\omega_m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1/\rho_{i_a}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$R = 0,1/\rho_V^2, \quad (22)$$

donde Q es la matriz de costos de las variables de estado y R representa al costo de la entrada. Se determinaron de esta manera para minimizar los movimientos del péndulo, sin necesidad de controlar la corriente i_a ni la velocidad angular de la rueda, que se consideran irrelevantes para este estudio. Esto significa que el controlador va a tender a exigir al actuador para lograr rápidamente la estabilización del péndulo.

Además, los parámetros $\rho_\theta = 0,2rad$, $\rho_{\omega_p} = 2rad/s$, $\rho_{\omega_m} = 20rad/s$, $\rho_{i_a} = I_{nom}$, $\rho_V = V_{nom}$ corresponden a valores máximos que el sistema no debería superar. La selección de estos parámetros es el ajuste principal que se puede realizar para determinar la respuesta dinámica del sistema.

La solución al problema LQR para estas matrices de costos es:

$$K = [-185,8897 \quad -19,5718 \quad -1,6164 \quad 1,1382] \quad (23)$$

3.1.1. Características del Controlador

Se analizó la respuesta dinámica del sistema con el controlador diseñado utilizando las técnicas usuales para sistemas lineales, lo cual es aceptable en el espacio de operación del mismo (alrededor del punto de linealización).

3.1.1.1 Estabilidad

Se verificó que el sistema realimentado es estable mediante el mapa de polos del mismo, donde se observa que todos los polos están en el semiplano negativo del eje real, garantizando la estabilidad (en valores nominales):

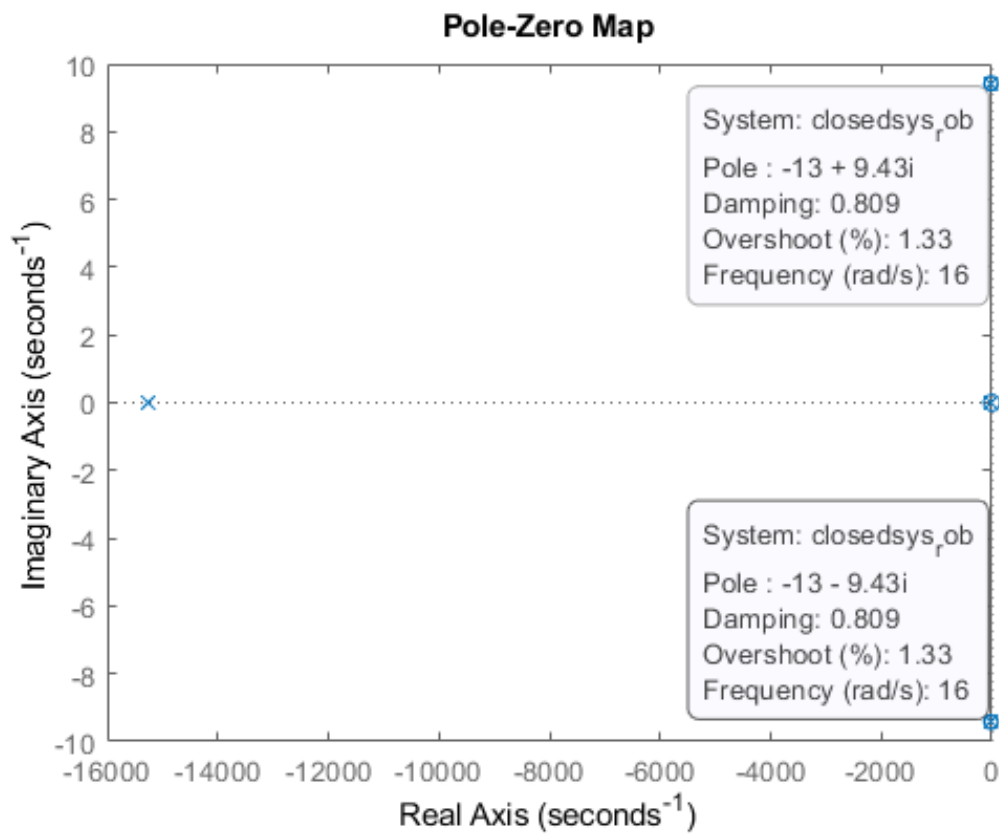


Figura 13: Mapa de Polos y Ceros del sistema realimentado.

En la figura (14) se observa que el ancho de banda del sistema se encuentra principalmente alrededor de 10rad/s :

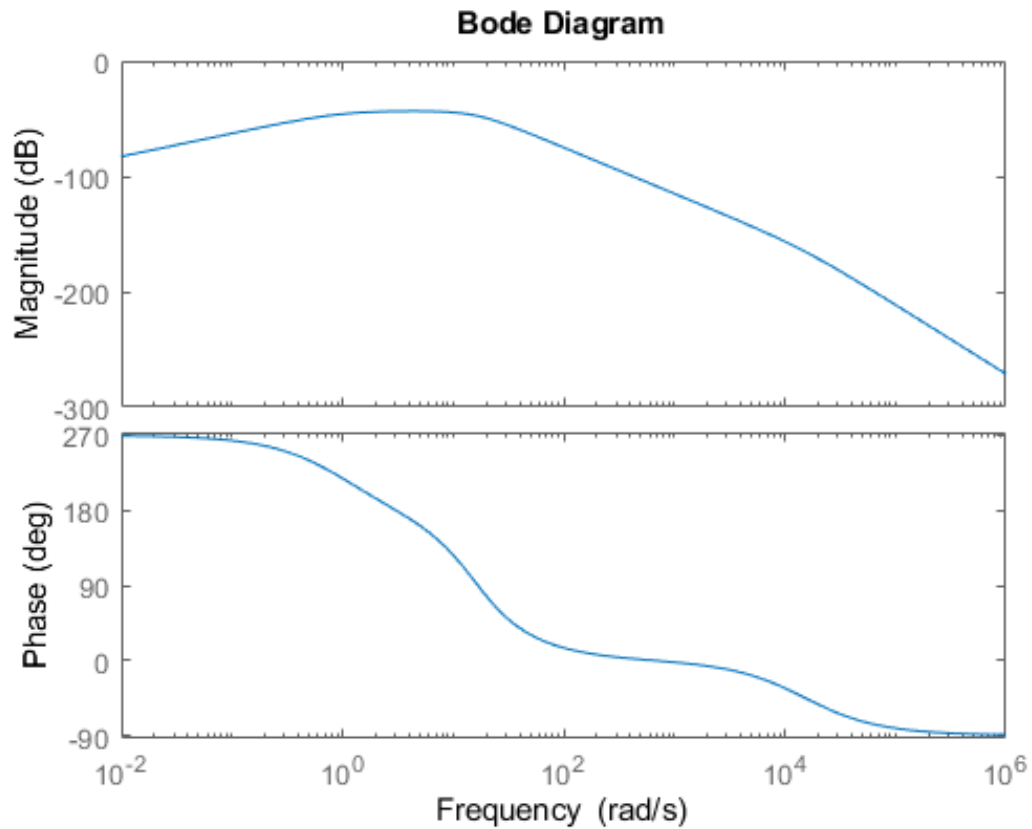


Figura 14: Respuesta en magnitud y frecuencia del sistema linealizado.

Vale aclarar que si bien estas son técnicas utilizadas para sistema lineales, son válidas en este caso únicamente alrededor del punto de linealización.

3.1.1.2 Robustez

Se estudió la robustez del sistema, tanto en términos de margen de ganancia y de fase, como en términos de incertidumbre de parámetros.

En la siguiente figura se presentan los márgenes de disco del sistema para distintos σ (ubicación del disco en el eje real):

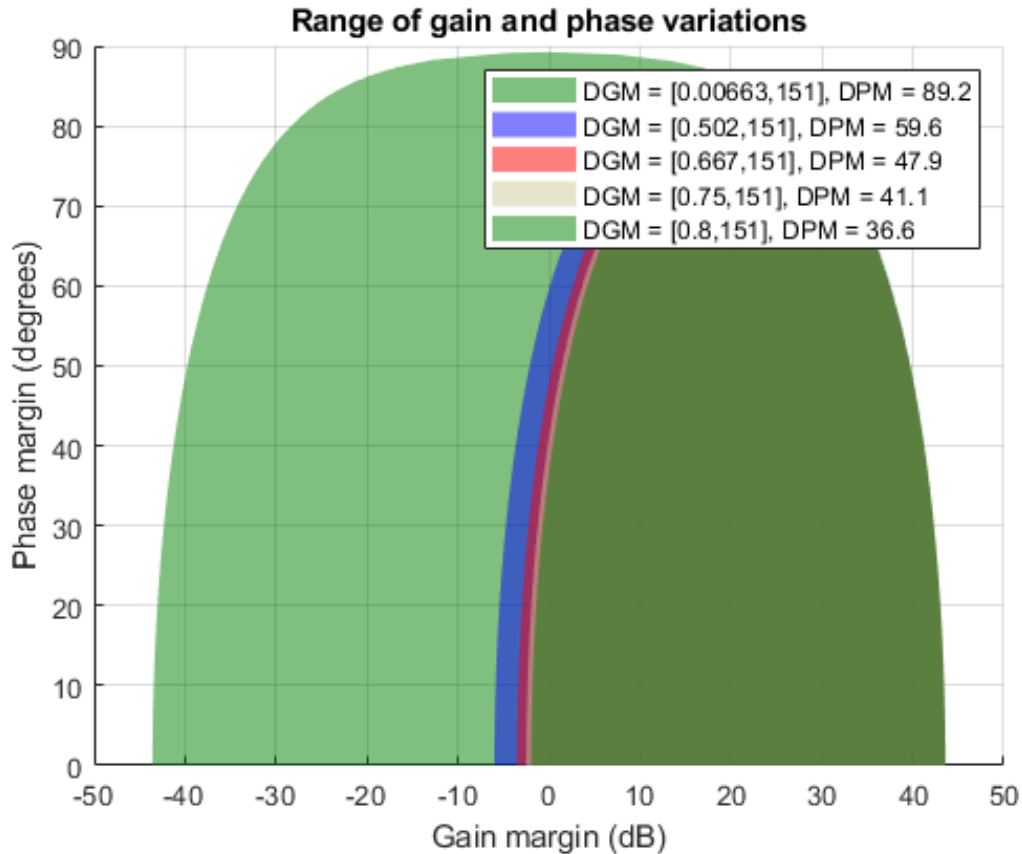


Figura 15: Márgenes de disco del sistema.

Se observa que el sistema es robusto simultáneamente en cuanto a márgenes de ganancia y de fase.

Por último, se implementó un modelo de espacio de estados con incertidumbre en MATLAB, asumiendo un 25 % de variación en los parámetros mecánicos del sistema, y un 10 % en los parámetros de la hoja de datos del motor. Mediante la función de MATLAB *robstab()* se obtuvieron los siguientes resultados:

```
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 134% of the modeled uncertainty.
-- There is a destabilizing perturbation amounting to 158% of
the modeled uncertainty.
-- This perturbation causes an instability at the frequency 7.96
rad/seconds.
-- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
  3% for Ke. Increasing Ke by 25% decreases the margin by 0.75%.
  9% for Kt. Increasing Kt by 25% decreases the margin by 2.25%.
  7% for La. Increasing La by 25% decreases the margin by 1.75%.
  5% for Ra. Increasing Ra by 25% decreases the margin by 1.25%.
  0% for bm. Increasing bm by 25% decreases the margin by 0%.
  7% for bp. Increasing bp by 25% decreases the margin by 1.75%.
  0% for ma. Increasing ma by 25% decreases the margin by 0%.
  4% for mm. Increasing mm by 25% decreases the margin by 1%.
  63% for mw. Increasing mw by 25% decreases the margin by 15.8%.
  0% for r2. Increasing r2 by 25% decreases the margin by 0%.
```

Se observa que el sistema es suficientemente robusto frente a incertidumbre en la fabricación de los elementos mecánicos del sistema y en los parámetros de la hoja de datos del fabricante del actuador. En

la figura (16) se presenta la respuesta de 1000 sistemas aleatorios dentro del rango de incertidumbre, donde únicamente alrededor del 5 % de estos no logran la estabilización.

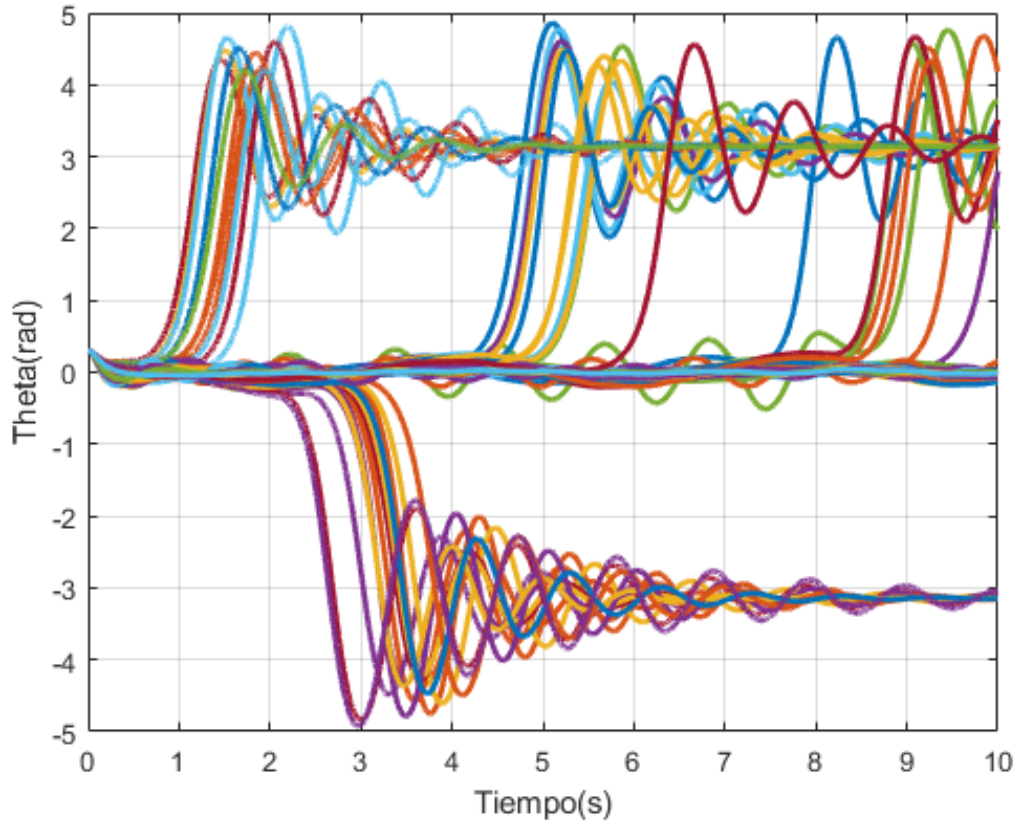


Figura 16: Respuesta del sistema con variaciones de parámetros aleatorias.

Se observa una variación importante en el comportamiento del sistema (amortiguamiento y sobreimpulso), pero la mayoría de los sistemas alcanzan igualmente la estabilidad.

3.1.1.3 Rechazo de Perturbaciones

Para completar el estudio de robustez del sistema de control desarrollado, se le aplicaron impulsos pulsantes durante la estabilización y se simuló el comportamiento. Estas perturbaciones se introdujeron como entradas de torque en el brazo del péndulo, simulando una fuerza ejercida por una persona. Se simularon fuerzas pulsantes de $0,1 - 1N$ en el extremo superior del péndulo:

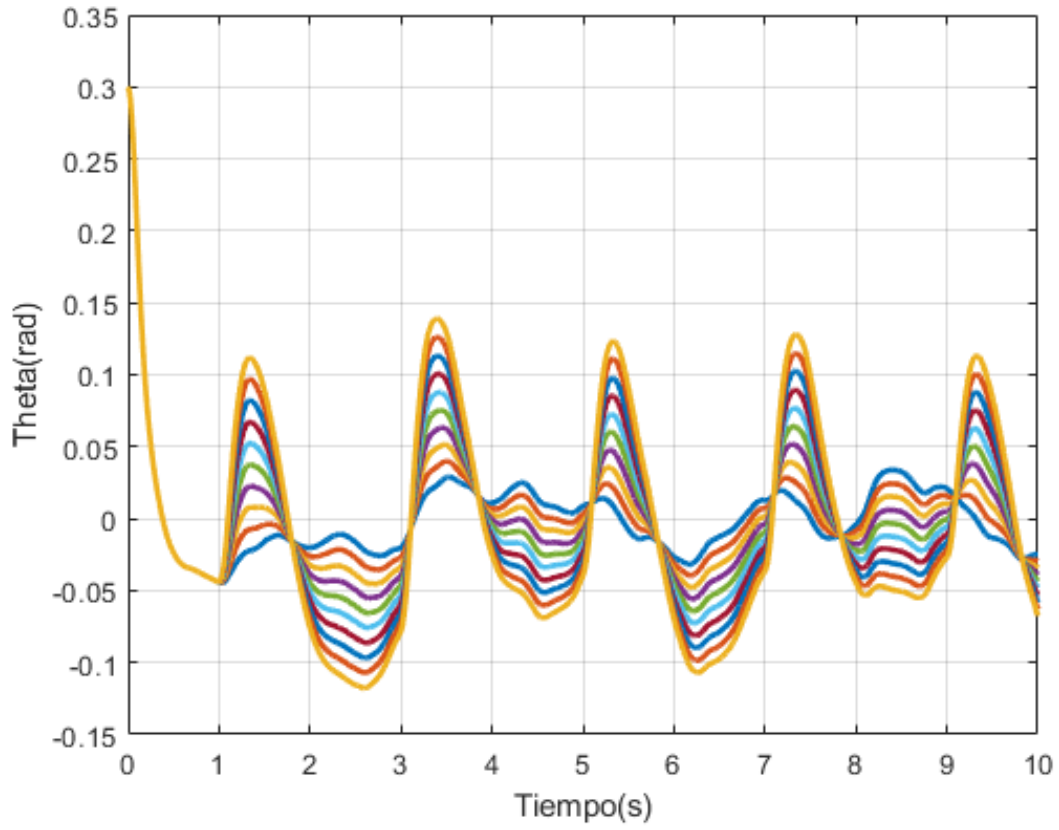


Figura 17: Respuesta del sistema a impulsos de $0,1 - 1N$ durante $100ms$ cada $2s$.

El péndulo es capaz de rechazar perturbaciones de hasta $1N$ en el extremo del péndulo.

3.1.2. Configuración del Filtro complementario

El parámetro α determina el comportamiento del filtro complementario. Mientras mayor es, más peso se otorga al giroscopio, lo cual implica un retraso mayor en la lectura y un menor ruido de señal. Se analizó el valor eficaz de θ durante $10s$ de simulación para distintos valores de α :

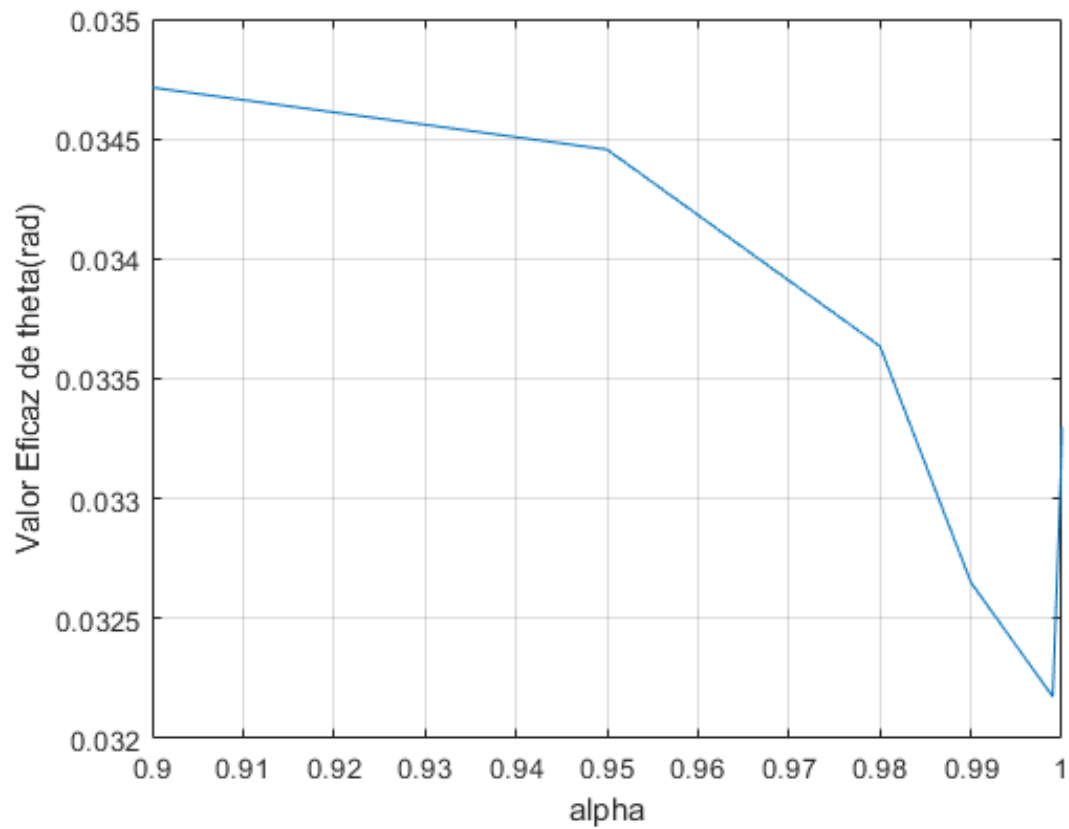


Figura 18: Valor Eficaz de θ con distintos valores de α .

Este parámetro no solo define el valor eficaz del ángulo alrededor del punto de estabilidad, también influye en el amortiguamiento y el sobreimpulso inicial del péndulo. Es necesario encontrar un valor de compromiso entre estas características para que el funcionamiento sea ideal.

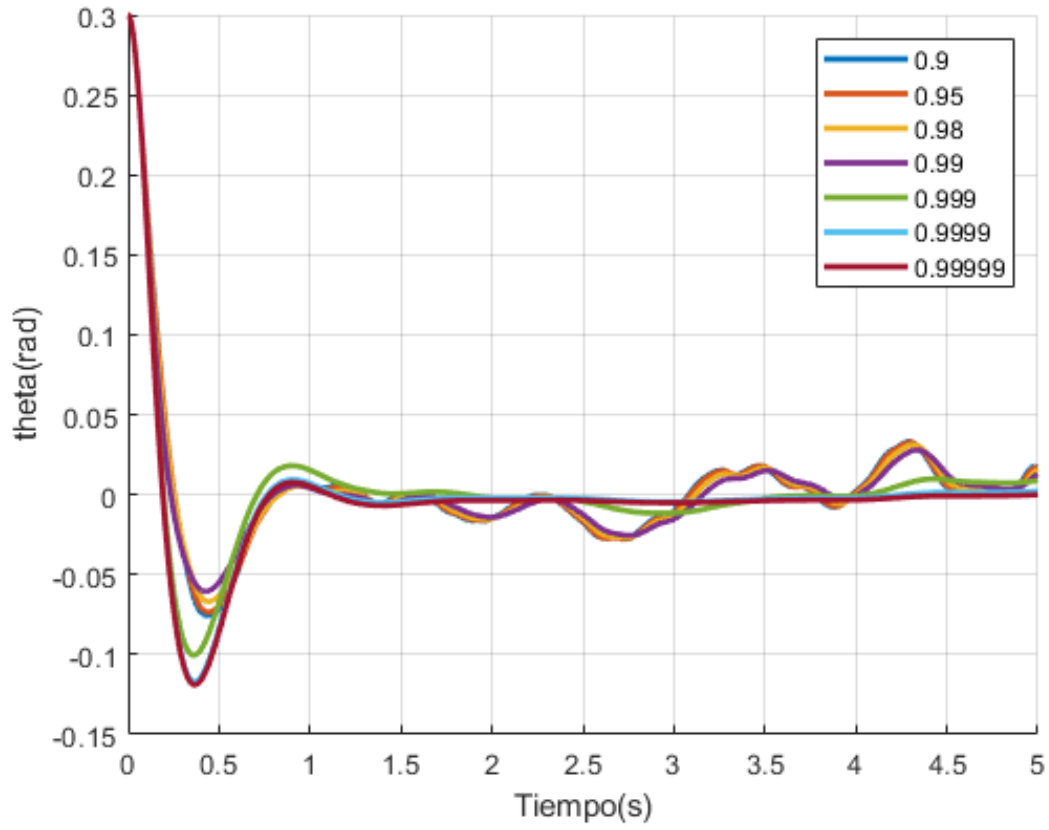


Figura 19: Respuesta del sistema con distintos valores de α .

En base a este experimento se seleccionó $\alpha = 0,99$, que se considero un balance aceptable entre sobreimpulso y vibraciones alrededor del punto de equilibrio.

3.1.3. Respuesta de estabilización

En la figura 20 se observa la respuesta completa del control de estabilidad.

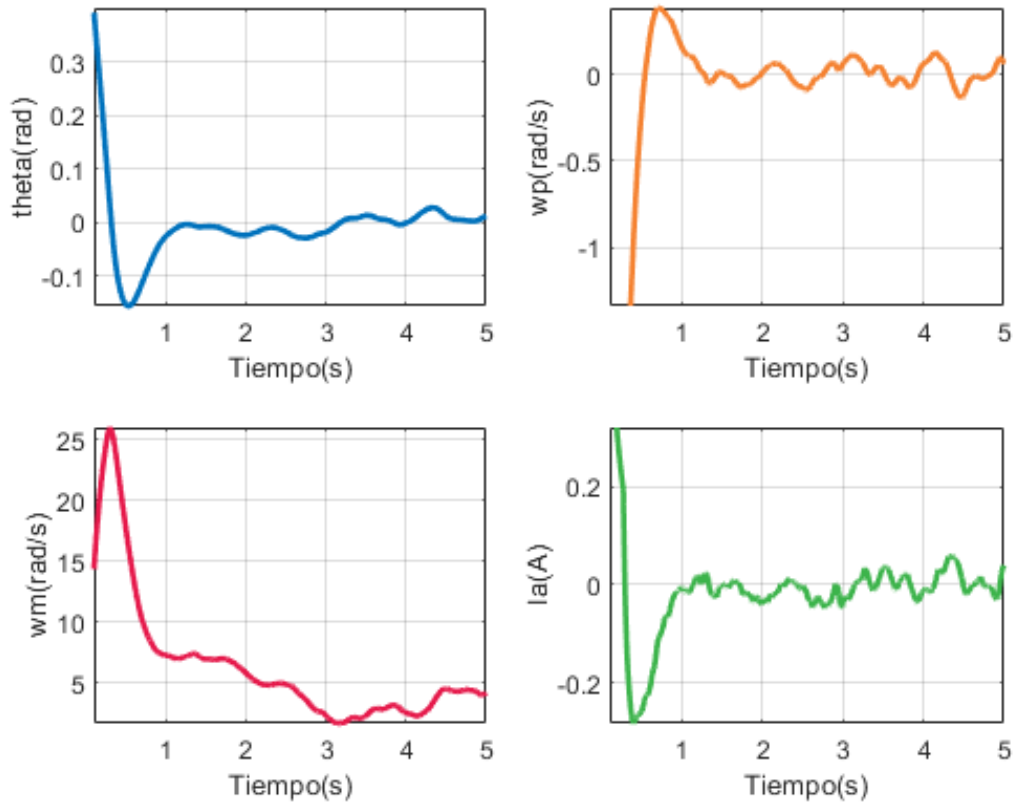


Figura 20: Respuesta completa del Control de Estabilización.

3.2. Control de Balanceo

3.2.1. Determinación de ganancias del controlador

El control de balanceo propuesto emplea una ley de control compleja que contiene 3 ganancias que se deben configurar. Se establecieron $K_{en} = 750$ y $K_u = 0,4$. Posteriormente, se realizó un estudio para determinar un valor óptimo de la ganancia K_w .

Se analizó el valor absoluto mínimo de θ durante 10s de simulación para distintos valores de K_w :

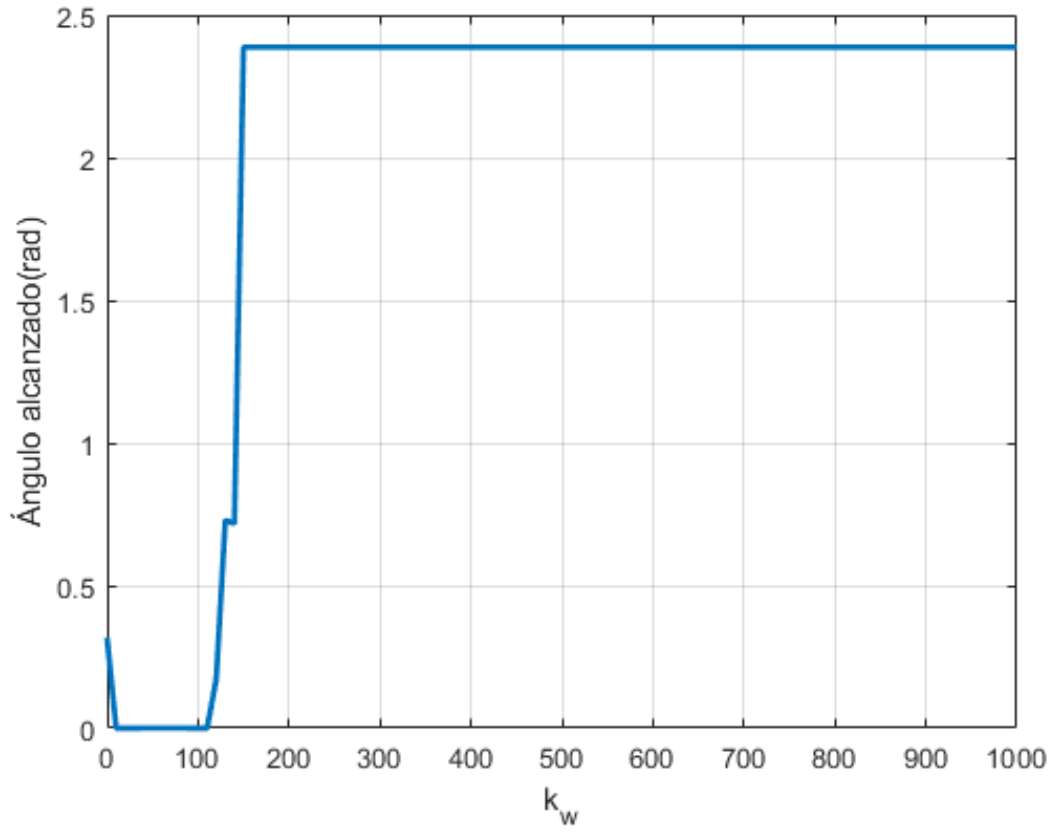


Figura 21: Distancia mínima a la posición de equilibrio inestable para distintos valores de K_w .

Se observa en este experimento que el valor a seleccionar de K_{sw} se encuentra en el intervalo $[0, 100]$. Para seleccionar un valor en este intervalo se realizó otro experimento para encontrar la ganancia de controlador que genera una elevación más rápida, del cual se observan los resultados en la figura.

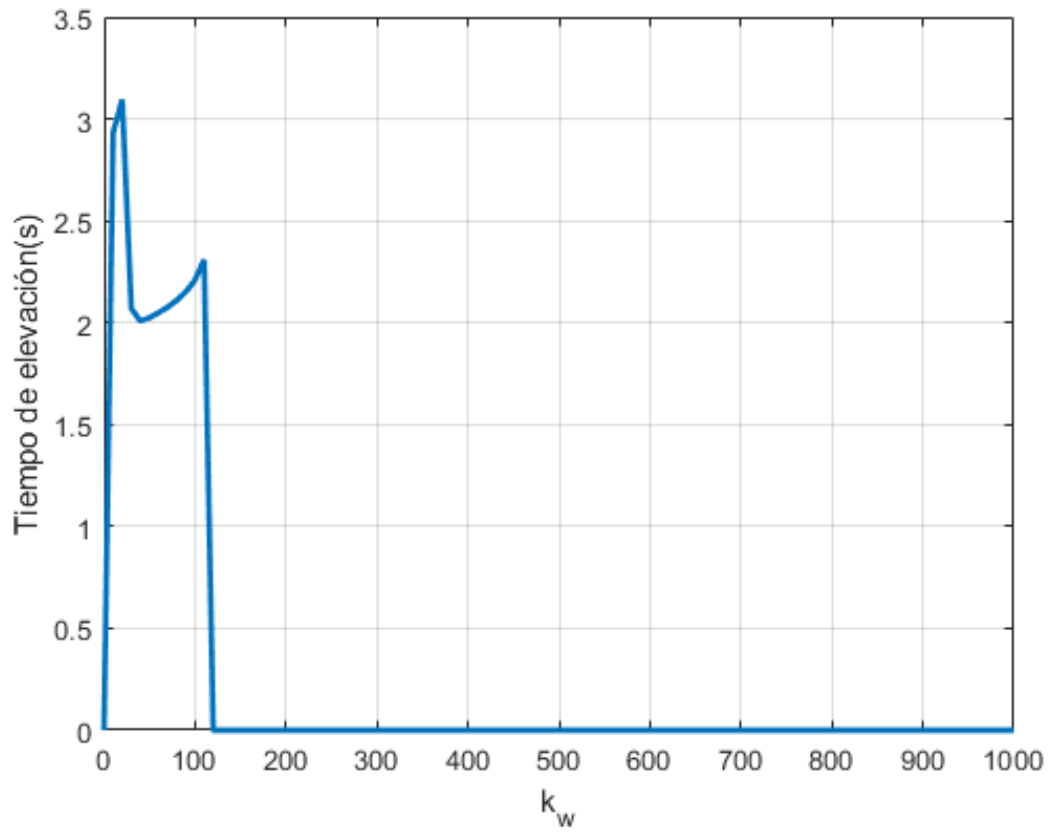


Figura 22: Tiempo de elevación para distintos valores de K_w .

Se seleccionó $K_w = 100$, ganancia que implica el tiempo de elevación mínimo de 2,2s, sin sobreimpulso.

3.2.2. Respuesta de balanceo

En la figura (23) se observa el comportamiento del sistema con el controlador diseñado. Se observa la inyección de energía en cada ciclo, que produce la elevación del péndulo al punto de equilibrio inestable.

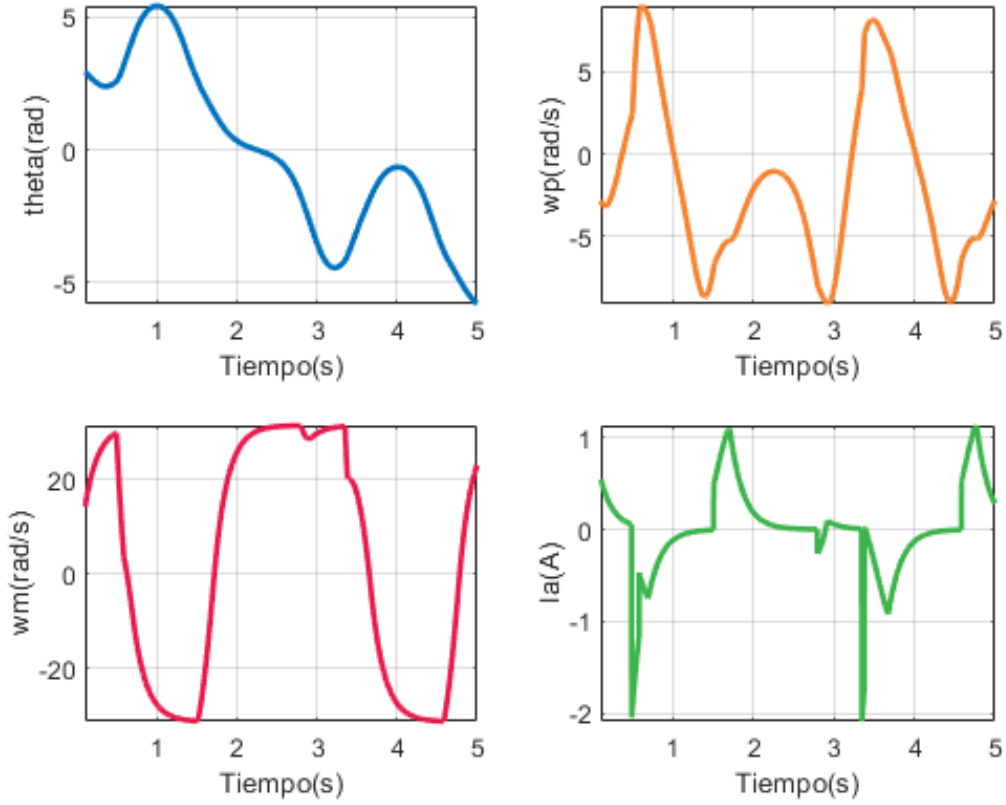


Figura 23: Respuesta completa del Control de Balanceo.

3.3. Control Híbrido

Como se explicó en la sección (2.11), se implementó un controlador conmutado o híbrido, que combina el control de estabilidad y el control de balanceo para expandir el espacio de operación del sistema. Esto implica que se debe buscar un equilibrio entre características de los sensores, acondicionamiento de señal y estimación de estados que fueron configurados de distintas formas para lograr el mejor funcionamiento de cada controlador.

La compensación de aceleraciones supone, idealmente, una corrección neta en la medición de θ . En la realidad, como las mismas se realizan a partir de la medición del giroscopio, introducen una mayor cantidad de ruido al sistema, que empeora el funcionamiento del controlador de estabilidad. En el espacio de operación de este controlador, las perturbaciones causadas por estas aceleraciones no son mayores, y el sistema funciona correctamente sin necesidad de compensarlas. Para el control de balanceo, en cambio, el efecto de estas aceleraciones en el resultado de la medición es mayor, y puede causar un retardo apreciable en esta.

Por eso, como compromiso entre el funcionamiento de ambos controladores, se decidió compensar únicamente la aceleración normal que sufre el acelerómetro a causa de la rotación del péndulo. La aceleración tangencial se debe obtener a partir de una derivación que generaría una gran cantidad de ruido.

Además de modificar parámetros que mejoren la respuesta conjunta de ambos controladores, se debió implementar uno nuevo, que define el régimen de conmutación del controlador híbrido. En este trabajo simplemente se determinó un valor del ángulo θ_c que delimita los espacios de operación de cada controlador. La conmutación no tiene una región de histéresis. El ángulo θ_c se determinó a partir de simulaciones con distintos valores. Se adoptó $\theta_c = 0,3rad$.

La respuesta completa del controlador híbrido se muestra en la figura (24):

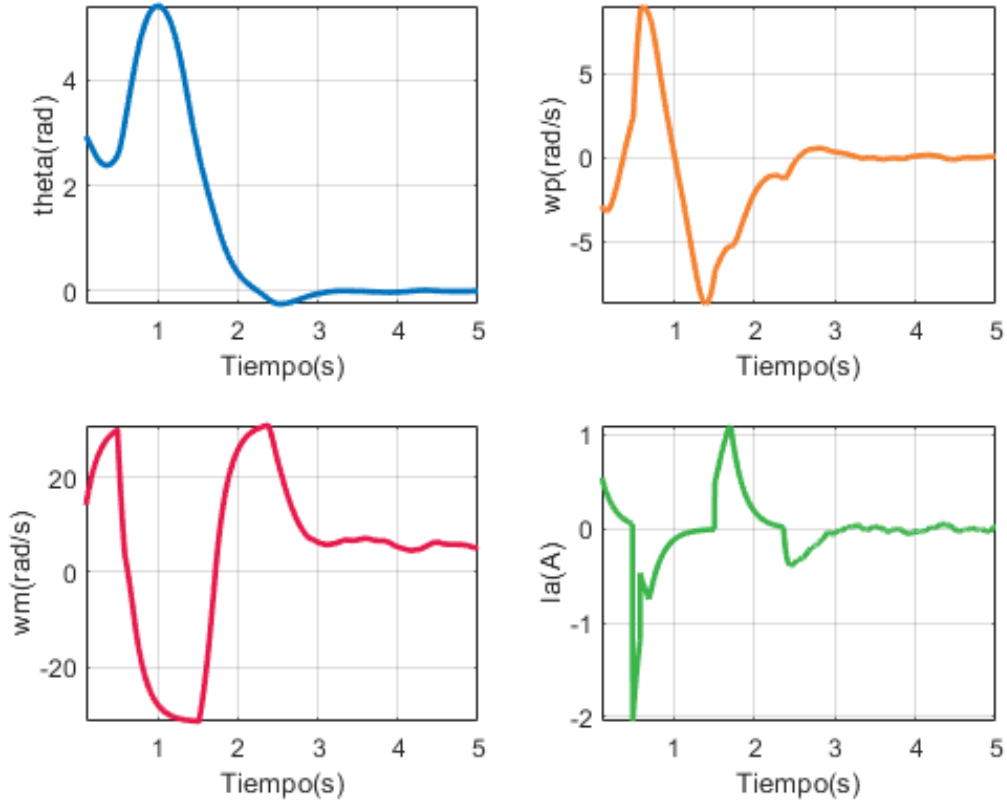


Figura 24: Respuesta completa del controlador híbrido.

4. Conclusiones

Se implementó un controlador completo para un sistema no lineal, utilizando leyes de control lineales (LQR) y no lineales, que se comportan en conjunto mediante una lógica de conmutación. Esto permitió expandir el espacio de operación del controlador, y poder elevar el péndulo a la posición de equilibrio inestable desde cualquier posición inicial.

Se aplicaron técnicas relevantes en el control moderno de sistemas lineales y no lineales enseñadas en la cátedra como procesamiento de señales, selección de componentes reales, modelado y simulación realista. También fue abarcada gran parte del programa de la cátedra, utilizando un control por realimentación completa de estados a partir de un observador de estado (Filtro de Kalman), y mediciones limitadas de las variables de estado (ya sea por calidad o cantidad de sensores).

A futuro se propone la implementación real del péndulo, utilizando los componentes seleccionados. Se podrían realizar avances en la lógica de conmutación del controlador híbrido, basándose esta en los diagramas de fase de cada controlador para evitar transitorios al momento de la conmutación. Por último, se implementaría un sistema de protección completo (corriente, tensión y potencia) para el motor de corriente continua de imanes permanentes.

Referencias

- [1] Nilay Kant and Ranjan Mukherjee. Impulsive dynamics and control of the inertia-wheel pendulum. *IEEE Robotics and Automation*, 3(4), 10 2018.
- [2] Maxon Group. Maxon dcx 16 l 24v datasheet. maxongroup.es/medias/sys_master/root/8992244629534/EN-22-103.pdf, 2022.

- [3] InvenSense, Inc. Mpu6050 datasheet. <https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Datasheet1.pdf>, 2013.
- [4] Daniel J. Block, Karl J. Astrom, , and Mark W. Spong. *The Reaction Wheel Pendulum*, volume 1 of *Synthesis Lectures on Control and Mechatronics*. Morgan and Claypool, 1 edition, 2007.