

# Ejercicios de Cálculo UD5

© 2025 Juan Manuel Solsona Sagrado  
© 2025 Josè Luis Salazar  
© 2025 Josè David Gòmez

## 1 Demostrar las fórmulas utilizadas para el gradiente cuando se usa la función sigmoide

**Ejercicio 1** (Demostrar las fórmulas utilizadas para el gradiente cuando se usa la función sigmoide (1 punto).).

$$\frac{\partial e}{\partial w_i} = (\hat{y} - y) \hat{y} (1 - \hat{y}) x_i$$

$$\frac{\partial e}{\partial b} = (\hat{y} - y) \hat{y} (1 - \hat{y})$$

Solución

### 1.1 Definamos primero cada elemento

#### 1.1.1 Modelo lineal

$$z = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b$$

#### 1.1.2 Función sigmoide

$$\hat{y} = \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

#### 1.1.3 Función de error

$$e(\hat{y}) = \frac{1}{2} (\hat{y} - y)^2$$

## 1.2 Primeras derivadas

### 1.2.1 Derivada del modelo de datos

$$\frac{\partial z}{\partial w_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(w_i + h) - z(w_i)}{h}$$

Cada término para calcular el límite es:

$$z(w_i + h) = \sum_{j \neq i} w_j x_j + (w_i + h)x_i + b$$
$$z(w_i) = \sum_{j \neq i} w_j x_j + w_i x_i + b$$

Con lo que la expresión completa es:

$$\frac{z(w_i + h) - z(w_i)}{h} = \frac{\left[ \sum_{j \neq i} w_j x_j + (w_i + h)x_i + b \right] - \left[ \sum_{j \neq i} w_j x_j + w_i x_i + b \right]}{h}$$

Simplificando:

$$\frac{hx_i}{h} = x_i$$

Ahora el límite es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_i = x_i$$

Por lo que:

$$\frac{\partial z}{\partial w_i} = x_i.$$

### 1.2.2 Derivada de la función sigmoide

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Definición de derivada:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}, \quad f(z + h) = \frac{1}{1 + e^{-(z+h)}}$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + e^{-(z+h)}} - \frac{1}{1 + e^{-z}}}{h}$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + e^{-z}) - (1 + e^{-(z+h)})}{h(1 + e^{-(z+h)})(1 + e^{-z})}$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-z} - e^{-(z+h)}}{h(1 + e^{-(z+h)})(1 + e^{-z})}$$

Por tanto:

$$f'(z) = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} = \hat{y}(1 - \hat{y})$$
$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial z} = \hat{y}(1 - \hat{y})$$

### 1.2.3 Derivada de la función de error

$$e(\hat{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2$$

Definición de derivada:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\hat{y} + h - y)^2 - \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2}{h}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\hat{y} - y + h)^2 - (\hat{y} - y)^2}{h}$$

Expansión del cuadrado:

$$(\hat{y} - y + h)^2 = (\hat{y} - y)^2 + 2h(\hat{y} - y) + h^2$$

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h(\hat{y} - y) + h^2}{h}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} [2(\hat{y} - y) + h]$$

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{2} \cdot 2(\hat{y} - y) = \hat{y} - y$$

Ahora podemos aplicar la regla de la cadena, y las derivadas que nos quedan son:

$$\frac{\partial z}{\partial w_i} = x_i$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial z} = \hat{y}(1 - \hat{y})$$

**y**

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y$$

Sabemos que se trata de una composición de funciones:

$$e = e(\hat{y}(z(w_i)))$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_i} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w_i}$$

Sustituyendo :

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial z} = \hat{y}(1 - \hat{y})$$

$$\frac{\partial z}{\partial w_i} = x_i$$

Entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial w_i} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) x_i$$

Para  $b$ :

$$\frac{\partial e}{\partial b} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial b}$$

Pero, hay que tener en cuenta que:

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial e}{\partial b} = (\hat{y} - y) \cdot \hat{y}(1 - \hat{y}) \cdot 1$$

O lo que es lo mismo::

$$\frac{\partial e}{\partial b} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y})$$

## 2 Modelado de los datos usando una única neurona

**Ejercicio 2** (Modelado de los datos usando una única neurona (6 puntos).).

$$\hat{y} = \frac{1}{1 + e^{-(w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b)}}$$

### 2.1 Enunciado

Este ejercicio está compuesto por los siguientes apartados:

### 2.2 Normalizar los datos

Para normalizar los datos, es fácil hacer una sencilla aplicación en Python. El código está disponible en el Anexo 1.

El algoritmo realmente no necesita mucha explicación, el código implementa una inicialización para la tabla de datos, y funciones para localizar el máximo valor de una columna, el mínimo y con esos valores y un iterador, normaliza los valores de las columnas aplicando:

$$rango = x_{max} - x_{min}$$
$$x_{norm} = \frac{x - min}{rango}$$

Lo cual nos da como resultado:

| Lote | Edad Normalizada | Ingresos Normalizados |
|------|------------------|-----------------------|
| 1    | 0.5263           | 0.8750                |
| 2    | 0.0789           | 0.1875                |
| 3    | 0.8684           | 0.3125                |
| 4    | 0.4211           | 0.8125                |
| 5    | 1.0000           | 0.0625                |
| 6    | 0.2632           | 0.5625                |
| 7    | 0.6842           | 0.6250                |
| 8    | 0.1579           | 0.3750                |
| 9    | 0.7368           | 0.4375                |
| 10   | 0.3421           | 0.6875                |
| 11   | 0.0000           | 0.0000                |
| 12   | 0.4737           | 1.0000                |
| 13   | 0.9474           | 0.1875                |
| 14   | 0.6053           | 0.7500                |

Cuadro 1: Valores normalizados de edad e ingresos.

### 2.3 Tabla detallada para cada lote $t$ de las constantes antes y después de utilizar el lote, así como los gradientes, para los 10 primeros lotes (2.5 puntos).

Los resultados están obtenidos de una tabla Excel que estará adjunta a este PDF, la tabla es:

| Lote | $x_1$  | $x_2$  | $y$ | $w_1$  | $w_2$  | $b$    | $h$    | $\hat{y}$ | $\partial e / \partial w_1$ | $\partial e / \partial w_2$ | $\partial e / \partial b$ |
|------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 1    | 0.5263 | 0.8750 | 1   | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.6332 |           | 0                           | 0                           | 0                         |
| 2    | 0.0789 | 0.1875 | 0   | 0.4988 | 0.4972 | 0.4852 | 0.6332 | 0.6532    | 0.01168                     | 0.02774                     | 0.14797                   |
| 3    | 0.8684 | 0.3125 | 0   | 0.4865 | 0.4928 | 0.4711 | 1.0738 | 0.7453    | 0.12286                     | 0.04421                     | 0.14148                   |
| 4    | 0.4211 | 0.8125 | 1   | 0.4886 | 0.4967 | 0.4759 | 1.0763 | 0.7458    | -0.02029                    | -0.03916                    | -0.04819                  |
| 5    | 1.0000 | 0.0625 | 0   | 0.4742 | 0.4958 | 0.4615 | 0.9955 | 0.7302    | 0.14386                     | 0.00899                     | 0.14386                   |
| 6    | 0.2632 | 0.5625 | 1   | 0.4758 | 0.4993 | 0.4677 | 0.8652 | 0.7037    | -0.01625                    | -0.03474                    | -0.06177                  |
| 7    | 0.6842 | 0.6250 | 1   | 0.4790 | 0.5022 | 0.4723 | 1.1053 | 0.7512    | -0.03181                    | -0.02905                    | -0.04649                  |
| 8    | 0.1579 | 0.3750 | 0   | 0.4767 | 0.4966 | 0.4575 | 0.7363 | 0.6762    | 0.02338                     | 0.05552                     | 0.14806                   |
| 9    | 0.7368 | 0.4375 | 0   | 0.4661 | 0.4904 | 0.4432 | 1.0260 | 0.7361    | 0.10536                     | 0.06256                     | 0.14299                   |
| 10   | 0.3421 | 0.6875 | 1   | 0.4681 | 0.4943 | 0.4489 | 0.9398 | 0.7191    | -0.01942                    | -0.03902                    | -0.05675                  |
| 11   | 0.0000 | 0.0000 | 0   | 0.4681 | 0.4943 | 0.4344 | 0.4489 | 0.6104    | 0                           | 0                           | 0.14516                   |
| 12   | 0.4737 | 1.0000 | 1   | 0.4701 | 0.4987 | 0.4388 | 1.1504 | 0.7596    | -0.02080                    | -0.04391                    | -0.04391                  |
| 13   | 0.9474 | 0.1875 | 0   | 0.4565 | 0.4960 | 0.4243 | 0.9777 | 0.7266    | 0.13674                     | 0.02706                     | 0.14434                   |
| 14   | 0.6053 | 0.7500 | 1   | 0.4594 | 0.4996 | 0.4292 | 1.0726 | 0.7451    | -0.02930                    | -0.03631                    | -0.04842                  |

Cuadro 2: Evolución de los parámetros y gradientes de la neurona en cada lote.

## 2.4 Predicción para los lotes 11 a 14 (1 punto).

Una vez que disponemos de la tabla completa, podemos calcular las predicciones para los elementos reales.

Tomamos los valores finales tras el entrenamiento (lote 10):

$$w_1 = 0,4681, \quad w_2 = 0,4943, \quad b = 0,4489.$$

A partir de este punto, esos valores quedan fijos, ya que no se pide continuar el entrenamiento.

### 2.4.1 Lote 11

Para el lote 11 conocemos:

$$x_1(11) = 0,0000, \quad x_2(11) = 0,0000.$$

Calculamos:

$$h(11) = w_1 x_1(11) + w_2 x_2(11) + b = 0 + 0 + 0,4489 = 0,4489.$$

Aplicamos la función sigmoide:

$$\hat{y}(11) = \sigma(h(11)) = \frac{1}{1 + e^{-0,4489}} \approx 0,6103.$$

Para obtener la predicción binaria usamos el criterio habitual:

$$\text{Predicción}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{y}(t) < 0,5, \\ 1, & \text{si } \hat{y}(t) \geq 0,5. \end{cases}$$

Dado que  $\hat{y}(11) = 0,6103 \geq 0,5$ , la predicción para el lote 11 es:

$$\text{Predicción}(11) = 1.$$

### 2.4.2 Lote 12

Para el lote 12 conocemos:

$$x_1(12) = 0,4737, \quad x_2(12) = 1,0000.$$

Con los pesos finales tras el entrenamiento (lote 10):

$$w_1 = 0,4681, \quad w_2 = 0,4943, \quad b = 0,4489.$$

Calculamos:

$$h(12) = w_1 x_1(12) + w_2 x_2(12) + b = 0,4681 \cdot 0,4737 + 0,4943 \cdot 1,0000 + 0,4489 \approx 1,1504.$$

Aplicamos la función sigmoide:

$$\hat{y}(12) = \sigma(h(12)) = \frac{1}{1 + e^{-1,1504}} \approx 0,7596.$$

Para obtener la predicción binaria usamos el criterio habitual:

$$\text{Predicción}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{y}(t) < 0,5, \\ 1, & \text{si } \hat{y}(t) \geq 0,5. \end{cases}$$

Dado que  $\hat{y}(12) = 0,7596 \geq 0,5$ , la predicción para el lote 12 es:

$$\text{Predicción}(12) = 1.$$

### 2.4.3 Lote 13

Para el lote 13 conocemos:

$$x_1(13) = 0,9474, \quad x_2(13) = 0,1875.$$

Con los pesos finales tras el entrenamiento (lote 10):

$$w_1 = 0,4681, \quad w_2 = 0,4943, \quad b = 0,4489.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} h(13) &= w_1 x_1(13) + w_2 x_2(13) + b \\ &= 0,4681 \cdot 0,9474 + 0,4943 \cdot 0,1875 + 0,4489 \\ &\approx 0,9851. \end{aligned}$$

Aplicamos la función sigmoide:

$$\hat{y}(13) = \sigma(h(13)) = \frac{1}{1 + e^{-0,9851}} \approx 0,7281.$$

Para obtener la predicción binaria usamos el criterio habitual:

$$\text{Predicción}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{y}(t) < 0,5, \\ 1, & \text{si } \hat{y}(t) \geq 0,5. \end{cases}$$

Dado que  $\hat{y}(13) = 0,7281 \geq 0,5$ , la predicción para el lote 13 es:

$$\text{Predicción}(13) = 1.$$

#### 2.4.4 Lote 14

Para el lote 14 conocemos:

$$x_1(14) = 0,6053, \quad x_2(14) = 0,7500.$$

Con los mismos pesos finales tras el entrenamiento:

$$w_1 = 0,4681, \quad w_2 = 0,4943, \quad b = 0,4489.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} h(14) &= w_1 x_1(14) + w_2 x_2(14) + b \\ &= 0,4681 \cdot 0,6053 + 0,4943 \cdot 0,7500 + 0,4489 \\ &\approx 1,1030. \end{aligned}$$

Aplicamos la función sigmoide:

$$\hat{y}(14) = \sigma(h(14)) = \frac{1}{1 + e^{-1,1030}} \approx 0,7508.$$

De nuevo, usando el mismo criterio:

$$\text{Predicción}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{y}(t) < 0,5, \\ 1, & \text{si } \hat{y}(t) \geq 0,5. \end{cases}$$

Como  $\hat{y}(14) = 0,7508 \geq 0,5$ , la predicción para el lote 14 es:

$$\text{Predicción}(14) = 1.$$

## 2.5 Hacer una propuesta de otras funciones de activación que consideréis interesantes basándoos en una búsqueda bibliográfica (1 punto)

Aunque en este ejercicio se ha utilizado la función sigmoide debido a que produce valores en el intervalo  $(0, 1)$ , existen otras funciones de activación ampliamente utilizadas en redes neuronales modernas. La mayoría de estas funciones forman parte de las implementaciones estándar de frameworks como TensorFlow, Keras o PyTorch, que las ofrecen optimizadas y listas para su uso en entornos de aprendizaje profundo. A continuación se describen algunas, junto con orientaciones sobre los casos prácticos en los que suelen emplearse.

### 2.5.1 ReLU (Rectified Linear Unit)

$$a(z) = \max(0, z)$$

Es la función de activación más utilizada en redes profundas. TensorFlow y PyTorch la emplean por defecto en capas densas y convolucionales. Su principal ventaja es que evita la saturación de gradientes cuando  $z$  es grande, acelerando el entrenamiento.

Usos recomendados:

- Redes profundas (CNN, MLP grandes).
- Problemas con datos de alta dimensión (imágenes, audio).
- Capas ocultas donde se busca rapidez de entrenamiento.



### 2.5.2 Leaky ReLU

$$a(z) = \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0,01z, & z \leq 0. \end{cases}$$

Es una variante de ReLU que evita que las neuronas queden “muertas” (cuando sólo devuelven 0). Frameworks como TensorFlow incluyen variantes como LeakyReLU y ParametricReLU.

Usos recomendados:

- Cuando se observa que con ReLU muchas neuronas dejan de actualizarse.
- En problemas de regresión o clasificación donde los datos tienen gran variabilidad.

### 2.5.3 Función tangente hiperbólica (tanh)

$$a(z) = \tanh(z)$$

Produce valores entre  $(-1, 1)$  y es centrada en cero, lo que suele mejorar la convergencia respecto a la sigmoide. TensorFlow la ofrece como `tf.nn.tanh`.

Usos recomendados:

- Redes recurrentes (RNN clásicas).
- Modelos donde la salida de las capas ocultas debe estar normalizada.
- Problemas con características negativas y positivas equilibradas.

### 2.5.4 Función Softsign

$$a(z) = \frac{z}{1 + |z|}$$

Es una alternativa suave a la tangente hiperbólica, con saturación menos brusca.

Usos recomendados:

- Redes donde tanh produce saturación excesiva.
- Problemas que requieren transiciones más suaves en la activación.

### 2.5.5 Función Softplus

$$a(z) = \ln(1 + e^z)$$

Puede considerarse una versión suavizada de ReLU. Es continuamente diferenciable, lo que la hace muy útil en arquitecturas donde se necesita estabilidad numérica. TensorFlow la implementa como `tf.nn.softplus`.

Usos recomendados:

- Modelos probabilísticos y variacionales (VAE).
- Redes donde ReLU genera puntos no diferenciables problemáticos.

En este problema concreto —donde se desea obtener una probabilidad en la salida— la función sigmoide sigue siendo la más adecuada. Sin embargo, en redes más complejas (como las descritas en el Ejercicio 3), funciones como ReLU, tanh o Softplus suelen ofrecer un entrenamiento más estable y eficiente, por lo que resultan alternativas interesantes según la arquitectura y la naturaleza de los datos.

## 2.6 Extensión del modelo con varias neuronas

En este ejercicio hemos utilizado una única neurona con dos entradas (edad e ingresos) para estimar la probabilidad de compra. Este modelo sólo puede generar una frontera de decisión lineal en el plano  $(x_1, x_2)$ , lo que limita su capacidad para separar correctamente los distintos tipos de clientes.

Una extensión natural consiste en utilizar una *capa oculta* con varias neuronas. Cada neurona oculta actúa como un *detector de patrón* en el espacio de entrada, y la neurona de salida combina estas activaciones para producir la probabilidad final de compra.

### 2.6.1 Capa oculta con tres neuronas

Si mantenemos dos entradas (edad normalizada  $x_1$  e ingresos normalizados  $x_2$ ) y añadimos una capa oculta con tres neuronas, el modelo puede escribirse como:

$$h_j = w_{1j} x_1 + w_{2j} x_2 + b_j, \quad a_j = \sigma(h_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

donde:

- $w_{1j}$  y  $w_{2j}$  son los pesos que conectan las entradas con la neurona oculta  $j$ ,
- $b_j$  es el sesgo de la neurona oculta  $j$ ,
- $a_j$  es la activación de la neurona oculta  $j$ .

La neurona de salida combina las activaciones de la capa oculta:

$$z_{\text{out}} = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(z_{\text{out}}),$$

donde  $v_1, v_2, v_3$  son los pesos de la capa de salida y  $b_{\text{out}}$  es su sesgo.

### 2.6.2 Interpretación de las neuronas ocultas

Cada neurona de la capa oculta puede interpretarse como una “región” o “perfil de cliente” en el plano edad–ingresos:

- Una neurona puede especializarse en detectar ingresos altos (peso  $w_{2j}$  grande y  $w_{1j}$  pequeño).
- Otra neurona puede detectar edad media o alta (peso  $w_{1j}$  grande y  $w_{2j}$  pequeño).
- Una tercera neurona puede activarse sólo cuando ambos valores son altos (pesos  $w_{1j}$  y  $w_{2j}$  positivos y un sesgo  $b_j$  más elevado).

La neurona de salida aprende a combinar estas activaciones: por ejemplo, asignando una mayor probabilidad de compra cuando se activa la neurona que representa el perfil de clientes con edad e ingresos altos. De este modo, la red deja de utilizar una única recta para separar las clases y pasa a aproximar fronteras de decisión más complejas, lo que mejora la capacidad de modelar diferentes tipos de clientes.

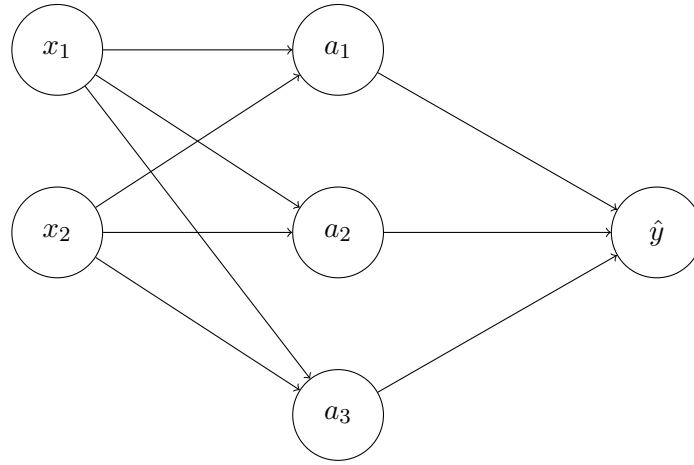


Figura 1: Ejemplo de red neuronal con una capa oculta de tres neuronas.

### 3 Modelado de datos usando varias neuronas

#### 3.1 Calcular las fórmulas que faltan del gradiente

##### 3.1.1 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{11}}$

En este apartado queremos demostrar la expresión analítica del gradiente respecto del peso  $w_{11}$ , que conecta la primera entrada  $x_1$  con la primera neurona oculta de la red.

Recordamos que esta neurona oculta tiene:

$$h_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1,$$

y su salida es:

$$z_1 = \sigma(h_1) = \frac{1}{1 + e^{-h_1}}.$$

La neurona de salida combina las salidas de las tres neuronas ocultas:

$$h_{\text{out}} = v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}).$$

El error utilizado es:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

Como  $w_{11}$  afecta primero a  $h_1$ , luego a  $z_1$ , luego a  $h_{\text{out}}$ , y finalmente al error, aplicamos la regla de la cadena a lo largo de todo este recorrido:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{11}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial h_1} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial w_{11}}.$$

Ahora derivamos cada término individualmente.

1. Derivada del error respecto a la predicción

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

2. Derivada de la sigmoide

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

3. Derivada del modelo lineal de la neurona de salida

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}}$$

solamente depende de  $z_1$  a través del término  $v_1 z_1$ , por tanto:

$$\frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_1} = v_1.$$

4. Derivada de la sigmoide de la neurona oculta

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_1} = z_1(1 - z_1).$$

5. Derivada del modelo lineal de la neurona oculta

$$h_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1$$

por lo que:

$$\frac{\partial h_1}{\partial w_{11}} = x_1.$$

Resultado final

Sustituyendo cada derivada:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{11}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_1 z_1(1 - z_1) x_1$$

Esta expresión coincide con la forma general del gradiente en redes neuronales de dos capas, y confirma la fórmula indicada en el enunciado.

### 3.1.2 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{12}}$

En este apartado queremos demostrar la expresión analítica del gradiente respecto del peso  $w_{12}$ , que conecta la segunda entrada  $x_2$  con la primera neurona oculta de la red.

Para la primera neurona oculta recordamos:

$$h_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1, \quad z_1 = \sigma(h_1) = \frac{1}{1 + e^{-h_1}}.$$

La neurona de salida combina las salidas de las neuronas ocultas:

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}),$$

y el error es:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

El peso  $w_{12}$  afecta primero a  $h_1$ , luego a  $z_1$ , luego a  $h_{\text{out}}$  y finalmente al error. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{12}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial h_1} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial w_{12}}.$$

Derivamos cada término:

- Derivada del error respecto a la predicción:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

- Derivada de la sigmoide de la neurona de salida:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona de salida respecto a  $z_1$ :

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}} \Rightarrow \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_1} = v_1.$$

- Derivada de la sigmoide de la neurona oculta:

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_1} = z_1(1 - z_1).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona oculta respecto a  $w_{12}$ :

$$h_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1 \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial w_{12}} = x_2.$$

Resultado final

Sustituyendo todas las derivadas en la expresión de la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial w_{12}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_1 z_1(1 - z_1) x_2}$$

que es completamente análoga a la derivada respecto a  $w_{11}$ , simplemente cambiando la entrada  $x_1$  por  $x_2$ .

### 3.1.3 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{21}}$

Ahora estudiamos el gradiente respecto del peso  $w_{21}$ , que conecta la primera entrada  $x_1$  con la segunda neurona oculta.

Para la segunda neurona oculta:

$$h_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + b_2, \quad z_2 = \sigma(h_2) = \frac{1}{1 + e^{-h_2}}.$$

La neurona de salida sigue siendo:

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}),$$

y el error:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

El peso  $w_{21}$  afecta primero a  $h_2$ , luego a  $z_2$ , luego a  $h_{\text{out}}$  y finalmente al error. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{21}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial h_2} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial w_{21}}.$$

Las derivadas son análogas a las de los apartados anteriores:

- Derivada del error:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

- Derivada de la sigmoide de la neurona de salida:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona de salida respecto a  $z_2$ :

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}} \Rightarrow \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_2} = v_2.$$

- Derivada de la sigmoide de la segunda neurona oculta:

$$\frac{\partial z_2}{\partial h_2} = z_2(1 - z_2).$$

- Derivada del modelo lineal de la segunda neurona oculta respecto a  $w_{21}$ :

$$h_2 = w_{21} x_1 + w_{22} x_2 + b_2 \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial w_{21}} = x_1.$$

Resultado final

Sustituyendo:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{22}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_2 z_2(1 - z_2) x_1$$

que es completamente análoga al caso de  $w_{11}$ , pero ahora la derivada se realiza a través de la segunda neurona oculta ( $z_2$ ) y del peso de salida  $v_2$ .

### 3.1.4 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{22}}$

En este apartado queremos calcular el gradiente respecto del peso  $w_{22}$ , que conecta la segunda entrada  $x_2$  con la *segunda* neurona oculta.

Recordamos que para esta neurona:

$$h_2 = w_{21} x_1 + w_{22} x_2 + b_2, \quad z_2 = \sigma(h_2) = \frac{1}{1 + e^{-h_2}}.$$

La neurona de salida combina las salidas de las neuronas ocultas:

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}),$$

y el error es:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

Dado que  $w_{22}$  afecta a  $h_2$ , luego a  $z_2$ , después a  $h_{\text{out}}$  y finalmente al error, aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{22}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial h_2} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial w_{22}}.$$

A continuación derivamos los términos:

- Error respecto de la predicción:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

- Derivada de la sigmoide en la neurona de salida:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona de salida respecto a  $z_2$ :

$$\frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_2} = v_2.$$

- Derivada de la sigmoide en la neurona oculta 2:

$$\frac{\partial z_2}{\partial h_2} = z_2(1 - z_2).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona oculta respecto a  $w_{22}$ :

$$h_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + b_2 \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial w_{22}} = x_2.$$

Resultado final

Sustituyendo cada derivada en la fórmula de la cadena obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial w_{22}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_2 z_2(1 - z_2) x_2}$$

que es completamente análoga a los casos anteriores, con la entrada  $x_2$  y la derivación a través de la segunda neurona oculta.

### 3.1.5 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{31}}$

En este apartado queremos calcular el gradiente respecto del peso  $w_{31}$ , que conecta la primera entrada  $x_1$  con la *tercera* neurona oculta.

Para esta neurona:

$$h_3 = w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + b_3, \quad z_3 = \sigma(h_3) = \frac{1}{1 + e^{-h_3}}.$$

La neurona de salida combina las salidas de las tres neuronas ocultas:

$$h_{\text{out}} = v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}),$$

y el error es:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

El peso  $w_{31}$  afecta a  $h_3$ , luego a  $z_3$ , después a  $h_{\text{out}}$  y finalmente al error. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{31}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_3} \cdot \frac{\partial z_3}{\partial h_3} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial w_{31}}.$$

Derivamos cada término:

- Derivada del error:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

- Derivada de la sigmoide en la neurona de salida:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona de salida respecto a  $z_3$ :

$$\frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_3} = v_3.$$

- Derivada de la sigmoide en la tercera neurona oculta:

$$\frac{\partial z_3}{\partial h_3} = z_3(1 - z_3).$$

- Derivada del modelo lineal de la tercera neurona oculta respecto a  $w_{31}$ :

$$h_3 = w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + b_3 \Rightarrow \frac{\partial h_3}{\partial w_{31}} = x_1.$$

Resultado final

Sustituyendo todas las derivadas:

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial w_{31}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_3 z_3(1 - z_3) x_1}$$

que es completamente análoga a las expresiones de  $w_{11}$  y  $w_{21}$ , pero a través de la tercera neurona oculta.

### 3.1.6 Comprobar $\frac{\partial e}{\partial w_{32}}$

Finalmente, calculamos el gradiente respecto del peso  $w_{32}$ , que conecta la segunda entrada  $x_2$  con la tercera neurona oculta.

Para la tercera neurona oculta:

$$h_3 = w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + b_3, \quad z_3 = \sigma(h_3) = \frac{1}{1 + e^{-h_3}}.$$

La neurona de salida es:

$$h_{\text{out}} = v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}),$$

y el error:

$$e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicación de la regla de la cadena

El peso  $w_{32}$  afecta a  $h_3$ , luego a  $z_3$ , después a  $h_{\text{out}}$  y por último al error. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{32}} = \frac{\partial e}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} \cdot \frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_3} \cdot \frac{\partial z_3}{\partial h_3} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial w_{32}}.$$

Las derivadas individuales son:



- Derivada del error:

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y.$$

- Derivada de la sigmoide en la neurona de salida:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial h_{\text{out}}} = \hat{y}(1 - \hat{y}).$$

- Derivada del modelo lineal de la neurona de salida respecto a  $z_3$ :

$$\frac{\partial h_{\text{out}}}{\partial z_3} = v_3.$$

- Derivada de la sigmoide de la tercera neurona oculta:

$$\frac{\partial z_3}{\partial h_3} = z_3(1 - z_3).$$

- Derivada del modelo lineal de la tercera neurona oculta respecto a  $w_{32}$ :

$$h_3 = w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + b_3 \Rightarrow \frac{\partial h_3}{\partial w_{32}} = x_2.$$

Resultado final

Sustituyendo todas las derivadas en la expresión de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{32}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_3 z_3(1 - z_3) x_2$$

que completa la familia de derivadas respecto a los pesos de la capa oculta en una red con tres neuronas ocultas y una neurona de salida.

### 3.1.7 Resultado general para cualquier peso $w_{ij}$ de la capa oculta

A partir de los casos particulares anteriores, podemos obtener una expresión general del gradiente respecto de cualquier peso  $w_{ij}$  de la capa oculta, donde:

- $i$  indica la entrada ( $x_1$  o  $x_2$ ),
- $j$  indica la neurona oculta ( $j = 1, 2, 3$ ).

Recordemos que la activación de cada neurona oculta es:

$$h_j = w_{1j}x_1 + w_{2j}x_2 + b_j, \quad z_j = \sigma(h_j).$$

La neurona de salida utiliza:

$$h_{\text{out}} = v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 + b_{\text{out}}, \quad \hat{y} = \sigma(h_{\text{out}}), \quad e = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2.$$

Aplicando la regla de la cadena a lo largo de la ruta:

$$w_{ij} \longrightarrow h_j \longrightarrow z_j \longrightarrow h_{\text{out}} \longrightarrow \hat{y} \longrightarrow e,$$

obtenemos la expresión general:

$$\frac{\partial e}{\partial w_{ij}} = (\hat{y} - y) \hat{y}(1 - \hat{y}) v_j z_j(1 - z_j) x_i$$

donde:

- $(\hat{y} - y)$  proviene de la derivada del error,
- $\hat{y}(1 - \hat{y})$  es la derivada de la sigmoide de salida,
- $v_j$  es el peso que conecta la neurona oculta  $j$  con la neurona de salida,
- $z_j(1 - z_j)$  es la derivada de la sigmoide de la neurona oculta,
- $x_i$  es la entrada correspondiente al peso  $w_{ij}$ .

Esta fórmula resume todos los casos particulares y constituye la regla general para el cálculo de gradientes en una red neuronal de una capa oculta con activación sigmoide.

### 3.2 Tabla detallada para cada lote $t$ de las constantes antes y después de utilizar el lote, así como los gradientes, para los 10 primeros lotes

Realizar este ejercicio en Microsoft Excel haría una tabla realmente complicada de definir, así que he optado por una solución programática, en Python, sin usar ninguna librería específica para redes neuronales. El código completo se puede revisar en el Anexo 2.

| Lote | $x_1$  | $x_2$  | $y$ | $w_{11}$ | $w_{12}$ | $b_1$  | $w_{21}$ | $w_{22}$ | $b_2$  | $w_{31}$ | $w_{32}$ | $b_3$  | $v_1$  | $v_2$  | $v_3$  | $b$    | $\hat{y}$ |
|------|--------|--------|-----|----------|----------|--------|----------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| 1    | 0.5263 | 0.8750 | 1   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6319    |
| 2    | 0.0789 | 0.1875 | 0   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6153    |
| 3    | 0.8684 | 0.3125 | 0   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6288    |
| 4    | 0.4211 | 0.8125 | 1   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6298    |
| 5    | 1.0000 | 0.0625 | 0   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6271    |
| 6    | 0.2632 | 0.5625 | 1   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6240    |
| 7    | 0.6842 | 0.6250 | 1   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6306    |
| 8    | 0.1579 | 0.3750 | 0   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6196    |
| 9    | 0.7368 | 0.4375 | 0   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6288    |
| 10   | 0.3421 | 0.6875 | 1   | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.4809   | 0.4980   | 0.4672 | 0.2053 | 0.2053 | 0.2053 | 0.0721 | 0.6270    |

Cuadro 3: Evolución de la red durante el entrenamiento.

### 3.3 Predicción para los lotes 11 a 14

Al igual que en el ejercicio anterior, la salida es parte del mismo código fuente:

| Lote | $x_1$  | $x_2$  | $\hat{y}$ | Predicción |
|------|--------|--------|-----------|------------|
| 11   | 0.0000 | 0.0000 | 0.6108    | 1          |
| 12   | 0.4737 | 1.0000 | 0.6329    | 1          |
| 13   | 0.9474 | 0.1875 | 0.6281    | 1          |
| 14   | 0.6053 | 0.7500 | 0.6313    | 1          |

Cuadro 4: Predicciones de la red para los lotes de test.

## A Anexo 1: Código de normalización de datos

En este anexo se incluye el código Python utilizado en la Sección 2.1 para normalizar los datos de edad e ingresos.

```
1  '''
2  *
3  *
4  * Copyright (C) 2025 Juan Solsona
5  *           José Luis Salazar
6  *           José David Gómez
7  *
8  '''
9
10 import sys
11 from typing import Dict
12 from dataclasses import dataclass
13
14
15 @dataclass
16 class DatosEjemplo:
17     lote: int
18     edad: int
19     ingresos: float
20     compra: bool
21     es_entrenamiento: bool
22
23     @classmethod
24     def init_con_sample(cls) -> Dict[int, 'DatosEjemplo']:
25         datos = [
26             cls(lote=1, edad=42, ingresos=2.6, compra=True, es_entrenamiento=True),
27             cls(lote=2, edad=25, ingresos=1.5, compra=False, es_entrenamiento=True),
28             cls(lote=3, edad=55, ingresos=1.7, compra=False, es_entrenamiento=True),
29             cls(lote=4, edad=38, ingresos=2.5, compra=True, es_entrenamiento=True),
30             cls(lote=5, edad=60, ingresos=1.3, compra=False, es_entrenamiento=True),
31             cls(lote=6, edad=32, ingresos=2.1, compra=True, es_entrenamiento=True),
32             cls(lote=7, edad=48, ingresos=2.2, compra=True, es_entrenamiento=True),
33             cls(lote=8, edad=28, ingresos=1.8, compra=False, es_entrenamiento=True),
34             cls(lote=9, edad=50, ingresos=1.9, compra=False, es_entrenamiento=True),
35             cls(lote=10, edad=35, ingresos=2.3, compra=True, es_entrenamiento=True),
36             cls(lote=11, edad=22, ingresos=1.2, compra=False, es_entrenamiento=False),
37             cls(lote=12, edad=40, ingresos=2.8, compra=True, es_entrenamiento=False),
38             cls(lote=13, edad=58, ingresos=1.5, compra=False, es_entrenamiento=False),
39             cls(lote=14, edad=45, ingresos=2.4, compra=True, es_entrenamiento=False),
40         ]
41         return {dato.lote: dato for dato in datos}
42
43     @staticmethod
44     def normalizar(datos: Dict[int, 'DatosEjemplo'],
45                    solo_entrenamiento: bool = False) -> Dict[int, 'DatosEjemplo']:
46         """
47         Normaliza edad e ingresos de todas las instancias en el diccionario.
48
49         Args:
50             datos: Diccionario con instancias de DatosEjemplo
51             solo_entrenamiento: Si True, usa solo datos de entrenamiento para calcular rangos
52
53         Returns:
54             Nuevo diccionario con instancias normalizadas
55         """
```

```

56     # Calcular rangos para edad
57     max_edad = calcula_max(datos, 'edad', solo_entrenamiento)
58     min_edad = calcula_min(datos, 'edad', solo_entrenamiento)
59     rango_edad = max_edad - min_edad
60
61     # Calcular rangos para ingresos
62     max_ingresos = calcula_max(datos, 'ingresos', solo_entrenamiento)
63     min_ingresos = calcula_min(datos, 'ingresos', solo_entrenamiento)
64     rango_ingresos = max_ingresos - min_ingresos
65
66     # Crear nuevo diccionario con instancias normalizadas
67     datos_normalizados = {}
68     for lote, instancia in datos.items():
69         edad_normalizada = (instancia.edad - min_edad) / rango_edad if rango_edad > 0 else 0
70         ingresos_normalizados = (instancia.ingresos - min_ingresos) / rango_ingresos if rango_ingresos >
71
72         datos_normalizados[lote] = DatosEjemplo(
73             lote=instancia.lote,
74             edad=edad_normalizada,
75             ingresos=ingresos_normalizados,
76             compra=instancia.compra,
77             es_entrenamiento=instancia.es_entrenamiento
78         )
79
80     return datos_normalizados
81
82 # Calcula el máximo de una columna
83 def calcula_max(valores: Dict[int, DatosEjemplo], columna: str,
84                 solo_entrenamiento: bool = False) -> float:
85     max_actual: float = 0
86     for dato in valores.values():
87         if not solo_entrenamiento or dato.es_entrenamiento:
88             if dato.__dict__[columna] > max_actual:
89                 max_actual = dato.__dict__[columna]
90     return max_actual
91
92 # Calcula el mínimo de una columna
93 def calcula_min(valores: Dict[int, DatosEjemplo], columna: str,
94                 solo_entrenamiento: bool = False) -> float:
95     min_actual: float = sys.float_info.max
96     for dato in valores.values():
97         if not solo_entrenamiento or dato.es_entrenamiento:
98             if dato.__dict__[columna] < min_actual:
99                 min_actual = dato.__dict__[columna]
100     return min_actual
101
102
103 # Normaliza una columna (valores entre 0 y 1)
104 def normaliza_columna(valores: Dict[int, DatosEjemplo], columna: str,
105                       solo_entrenamiento: bool = False) -> Dict[
106     int, float]:
107     maximo = calcula_max(valores, columna, solo_entrenamiento)
108     minimo = calcula_min(valores, columna, solo_entrenamiento)
109     rango = maximo - minimo
110
111     valores_normalizados = {}
112     for lote, dato in valores.items():
113         if not solo_entrenamiento or dato.es_entrenamiento:
114             valor_normalizado = (dato.__dict__[columna] - minimo) / rango \
115                 if rango > 0 else 0
116             valores_normalizados[lote] = valor_normalizado

```

```

117     return valores_normalizados
118
119
120
121 # Programa principal
122 datos_mapa = DatosEjemplo.init_con_sample()
123
124 # Normalizar edades e ingresos
125 edades_normalizadas = normaliza_columna(datos_mapa, 'edad')
126 ingresos_normalizados = normaliza_columna(datos_mapa, 'ingresos')
127
128 # Crear diccionario final con lote, edad_normalizada e ingresos_normalizados
129 diccionario_final = []
130 for lote, dato in datos_mapa.items():
131     diccionario_final.append({
132         'lote': lote,
133         'edad_normalizada': edades_normalizadas.get(lote, None),
134         'ingresos_normalizados': ingresos_normalizados.get(lote, None)
135     })
136
137 print("\n" + "=" * 70)
138 print("Diccionario con valores normalizados:")
139 print("=" * 70)
140 for registro in diccionario_final:
141     print(
142         f"Lote: {registro['lote']:<3} | Edad Normalizada: "
143         f"{registro['edad_normalizada']:.4f} | Ingresos Normalizados: "
144         f"{registro['ingresos_normalizados']:.4f}")

```

## B Anexo 2: Código de la red neuronal con capa oculta

En este anexo se muestra el código Python completo que implementa el modelo de red neuronal descrito en la Sección 3.2, incluyendo el cálculo de la tabla de evolución de los pesos y las predicciones finales.

```

1  """
2  *
3  * Copyright (C) 2025 Juan Solsona
4  *           José Luis Salazar
5  *           José David Gómez
6  *
7  """
8  import math
9  from typing import List, Dict
10
11  from python.normalizar import DatosEjemplo
12
13
14  # Clase que define una neurona
15  class Neurona:
16      def __init__(self, nombre: str, n_entradas: int):
17          self.nombre = nombre
18          self.n_entradas = n_entradas
19
20          # Pesos y sesgo iniciales
21          self.w: List[float] = [0.5 for _ in range(n_entradas)]
22          self.b: float = 0.5
23

```

```

24     # Valores intermedios
25     self.h: float | None = None
26     self.z: float | None = None # salida sigmoide
27
28     # Gradientes
29     self.grad_w: List[float] = [0.0 for _ in range(n_entradas)]
30     self.grad_b: float = 0.0
31
32     def progresar_valor(self, x: List[float]) -> float:
33         """Forward de una neurona:  $h = w \cdot x + b$ ,  $z = \sigma(h)$ ."""
34         h = 0.0
35         for i in range(len(self.w)):
36             h += self.w[i] * x[i]
37         h += self.b
38
39         self.h = h
40         self.z = 1.0 / (1.0 + math.exp(-h))
41         return self.z
42
43
44 class Capa:
45     def __init__(self, n_entradas: int, n_neuronas: int, nombre: str = ""):
46         self.nombre = nombre
47         self.neuronas: List[Neurona] = [
48             Neurona(nombre=f"{nombre}_n{i+1}", n_entradas=n_entradas)
49             for i in range(n_neuronas)
50         ]
51
52     def progresar_valor(self, x: List[float]) -> List[float]:
53         return [neurona.progresar_valor(x) for neurona in self.neuronas]
54
55 class Red:
56     def __init__(self):
57         self.oculta = Capa(2, 3, nombre="oculta")
58         self.salida = Capa(3, 1, nombre="salida")
59
60         # Historial para 3.2 y 3.3
61         self.historial_entrenamiento: list[dict] = []
62         self.predicciones_test: list[dict] = []
63
64     def progresar_valor(self, x):
65         z = self.oculta.progresar_valor(x)
66         yhat = self.salida.progresar_valor(z)[0]
67         return z, yhat
68
69     def backprop(self, x: list[float], y_real: float, eta: float):
70         # 1. Forward
71         z, yhat = self.progresar_valor(x)
72
73         # --- CAPA DE SALIDA ---
74         neurona_salida = self.salida.neuronas[0]
75
76         # 2. Delta de la salida:  $(\hat{y} - y) * \hat{y} * (1 - \hat{y})$ 
77         delta_out = (yhat - y_real) * yhat * (1.0 - yhat)
78
79         # 3. Gradientes de la neurona de salida
80         for j in range(len(neurona_salida.w)):
81             neurona_salida.grad_w[j] = delta_out * z[j]
82         neurona_salida.grad_b = delta_out
83
84         # --- CAPA OCULTA ---

```

```

85 for j, neurona_oculta in enumerate(self.oculta.neuronas):
86     v_j = neurona_salida.w[j]
87     z_j = neurona_oculta.z
88
89     delta_j = delta_out * v_j * z_j * (1.0 - z_j)
90
91     for i in range(len(neurona_oculta.w)):
92         neurona_oculta.grad_w[i] = delta_j * x[i]
93
94     neurona_oculta.grad_b = delta_j
95
96     # Actualización pesos salida
97     for j in range(len(neurona_salida.w)):
98         neurona_salida.w[j] -= eta * neurona_salida.grad_w[j]
99     neurona_salida.b -= eta * neurona_salida.grad_b
100
101     # Actualización pesos capa oculta
102     for neurona_oculta in self.oculta.neuronas:
103         for i in range(len(neurona_oculta.w)):
104             neurona_oculta.w[i] -= eta * neurona_oculta.grad_w[i]
105             neurona_oculta.b -= eta * neurona_oculta.grad_b
106
107     error = 0.5 * (yhat - y_real) ** 2
108     return error, yhat
109
110 def entrenar(self, datos_mapa: dict[int, DatosEjemplo], eta: float, n_epocas: int):
111     self.historial_entrenamiento = []
112
113     for epoca in range(n_epocas):
114         error_total = 0.0
115         print(f"\n Época {epoca + 1} ")
116
117         for lote_id in sorted(datos_mapa.keys()):
118             dato = datos_mapa[lote_id]
119             if not dato.es_entrenamiento:
120                 continue
121
122             x1 = dato.edad
123             x2 = dato.ingresos
124             x = [x1, x2]
125             y_real = 1.0 if dato.compra else 0.0
126
127             error, yhat = self.backprop(x, y_real, eta)
128             error_total += error
129
130             print(f"Lote {lote_id:2d} | x={x} | y_real={y_real:.1f} | "
131                   f"ŷ={yhat:.4f} | e={error:.6f}")
132
133             print(f"Error total en la época {epoca + 1}: {error_total:.6f}")
134
135     # Al terminar la última época, guardamos el estado de la red lote a lote
136     # (usando los datos de entrenamiento).
137     for lote_id in sorted(datos_mapa.keys()):
138         dato = datos_mapa[lote_id]
139         if not dato.es_entrenamiento:
140             continue
141
142         x1 = dato.edad
143         x2 = dato.ingresos
144         x = [x1, x2]
145         _, yhat = self.progresa_valor(x)

```

```

146     n1 = self.oculta.neuronas[0]
147     n2 = self.oculta.neuronas[1]
148     n3 = self.oculta.neuronas[2]
149     ns = self.salida.neuronas[0]
150
151
152     fila = {
153         "lote": lote_id,
154         "x1": x1,
155         "x2": x2,
156         "y": int(dato.compra),
157
158         "w11": n1.w[0],
159         "w12": n1.w[1],
160         "b1": n1.b,
161
162         "w21": n2.w[0],
163         "w22": n2.w[1],
164         "b2": n2.b,
165
166         "w31": n3.w[0],
167         "w32": n3.w[1],
168         "b3": n3.b,
169
170         "v1": ns.w[0],
171         "v2": ns.w[1],
172         "v3": ns.w[2],
173         "b_out": ns.b,
174
175         "yhat": yhat
176     }
177     self.historial_entrenamiento.append(fila)
178
179 def predecir_test(self, datos_mapa: dict[int, DatosEjemplo]):
180     """
181     Rellena self.predicciones_test con los lotes de test (no entrenamiento).
182     """
183     self.predicciones_test = []
184
185     for lote_id in sorted(datos_mapa.keys()):
186         dato = datos_mapa[lote_id]
187         if dato.es_entrenamiento:
188             continue
189
190         x1 = dato.edad
191         x2 = dato.ingresos
192         x = [x1, x2]
193         _, yhat = self.progresa_valor(x)
194         pred = 1 if yhat >= 0.5 else 0
195
196         self.predicciones_test.append({
197             "lote": lote_id,
198             "x1": x1,
199             "x2": x2,
200             "yhat": yhat,
201             "pred": pred
202         })
203
204 def generar_tabla_entrenamiento_latex(self):
205     """
206     Usa self.historial_entrenamiento y escupe una tabla LaTeX con columnas limpias.

```



```

207 """
208 print("\n=== Tabla LaTeX para el ejercicio 3.2 (entrenamiento) ===\n")
209
210 print(r"\begin{table}[H]")
211 print(r"\centering")
212 print(r"\scriptsize")
213 print(r"\setlength{\tabcolsep}{3pt}")
214 print(r"\begin{tabular}{|c|cc|c|ccc|ccc|ccc|cccc|c|}")
215 print(r"\hline")
216 print(r"Lote & $x_1$ & $x_2$ & $y$ & "
217       r"$w_{11}$ & $w_{12}$ & $b_1$ & "
218       r"$w_{21}$ & $w_{22}$ & $b_2$ & "
219       r"$w_{31}$ & $w_{32}$ & $b_3$ & "
220       r"$v_1$ & $v_2$ & $v_3$ & $b$ & $\hat{y}$ \\\")
221 print(r"\hline")
222
223 for fila in self.historial_entrenamiento:
224     print(
225         f"{fila['lote']} & "
226         f"{fila['x1']:.4f} & {fila['x2']:.4f} & {fila['y']} & "
227         f"{fila['w11']:.4f} & {fila['w12']:.4f} & {fila['b1']:.4f} & "
228         f"{fila['w21']:.4f} & {fila['w22']:.4f} & {fila['b2']:.4f} & "
229         f"{fila['w31']:.4f} & {fila['w32']:.4f} & {fila['b3']:.4f} & "
230         f"{fila['v1']:.4f} & {fila['v2']:.4f} & {fila['v3']:.4f} & "
231         f"{fila['b_out']:.4f} & {fila['yhat']:.4f} \\\\"
232     )
233
234 print(r"\hline")
235 print(r"\end{tabular}")
236 print(r"\caption{Evolución de la red durante el entrenamiento.}")
237 print(r"\end{table}")
238
239 def generar_tabla_predicciones_latex(self):
240     """
241     Usa self.predicciones_test para generar la tabla LaTeX del 3.3.
242     """
243     print("\n=== Tabla LaTeX para el ejercicio 3.3 (predicciones) ===\n")
244
245     print(r"\begin{table}[H]")
246     print(r"\centering")
247     print(r"\small")
248     print(r"\begin{tabular}{|c|cc|c|c|}")
249     print(r"\hline")
250     print(r"Lote & $x_1$ & $x_2$ & $\hat{y}$ & Predicción \\\")
251     print(r"\hline")
252
253     for fila in self.predicciones_test:
254         print(
255             f"{fila['lote']} & "
256             f"{fila['x1']:.4f} & {fila['x2']:.4f} & "
257             f"{fila['yhat']:.4f} & {fila['pred']} \\\\"
258         )
259
260     print(r"\hline")
261     print(r"\end{tabular}")
262     print(r"\caption{Predicciones de la red para los lotes de test.}")
263     print(r"\end{table}")
264
265 def dump(self):
266     print(" Capa oculta ")
267     for n in self.oculta.neuronas:

```

```

268         print(f"{n.nombre}: w={n.w}, b={n.b}, h={n.h}, z={n.z}, "
269               f"grad_w={n.grad_w}, grad_b={n.grad_b}")
270
271     print("\n Capa salida ")
272     for n in self.salida.neuronas:
273         print(f"{n.nombre}: w={n.w}, b={n.b}, h={n.h}, z={n.z}, "
274               f"grad_w={n.grad_w}, grad_b={n.grad_b}")
275
276 def main():
277     # Inicializamos y normalizamos datos
278     datos_mapa = DatosEjemplo.init_con_sample()
279     datos_mapa = DatosEjemplo.normalizar(datos_mapa) # ahora edad/ingresos están normalizados
280
281     print(" Datos cargados (normalizados) ")
282     for lote, dato in sorted(datos_mapa.items()):
283         print(f"Lote {lote:2d}: edad={dato.edad:.4f}, ingresos={dato.ingresos:.4f}, "
284               f"compra={dato.compra}, entreno={dato.es_entrenamiento}")
285
286     # Creamos la red
287     red = Red()
288
289     print("\n Pesos iniciales de la red ")
290     red.dump()
291
292     # Entrenamos sobre los lotes de entrenamiento
293     eta = 0.1
294     n_epocas = 10
295     red.entrenar(datos_mapa, eta=eta, n_epocas=n_epocas)
296
297     print("\n Pesos de la red después del entrenamiento ")
298     red.dump()
299
300     # Predicciones para los lotes de TEST (3.3)
301     red.predecir_test(datos_mapa)
302
303     # Tablas LaTeX
304     red.generar_tabla_entrenamiento_latex()
305     red.generar_tabla_predicciones_latex()
306
307
308 if __name__ == "__main__":
309     main()

```