CLASE 9

COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Se pueden construir nuevas funciones a partir de funciones dadas por medio de las cuatro (4) operaciones aritméticas (adición, sustracción, producto, y división) de los valores de las funciones.

DEFINICIÓN: Combinaciones aritméticas de funciones

Sean f y g dos funciones, entonces la suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f \cdot g$, y el cociente f/g se definen como sigue:

i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

ii) $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$

iii) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$

MUY IMPORTANTE:

El Dominio de las funciones $f+g$, $f-g$, y $f\cdot g$ es:

$$\left.\begin{array}{l} D(f+g) \\ D(f-g) \\ D(f\cdot g) \end{array}\right\} = D(f)\cap D(g)$$

En cambio, el Dominio de la función f/g es:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \left[D(f)\cap D(g)\right] \setminus \{x\in\mathbb{R} \mid g(x)=0\}$$

EJEMPLO: Sean $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \\ g(x) = \sqrt{x-4} \end{cases}$

Determinar: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, y f/g

SOLUCIÓN

i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$

ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

iii) $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$(f\cdot g)(x) = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}$

$(f\cdot g)(x) = \sqrt{(x+1)(x-4)}$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$$

Para determinar los Dominios de las diferentes combinaciones de funciones tenga presente que:

$$\left.\begin{array}{l} D(f+g) \\ D(f-g) \\ D(f\cdot g) \end{array}\right\} = D(f) \cap D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \left[D(f) \cap D(g)\right] \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$$

¿Qué necesitamos determinar?

R/. $D(f)$, $D(g)$, y $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$

RECUERDA QUE:

$\sqrt{u}$ sólo está definida para los $u \geq 0$

Dado que: $f(x) = \sqrt{x+1}$ entonces

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

$$D(f) = [-1, +\infty)$$

Del mismo modo, dado que:

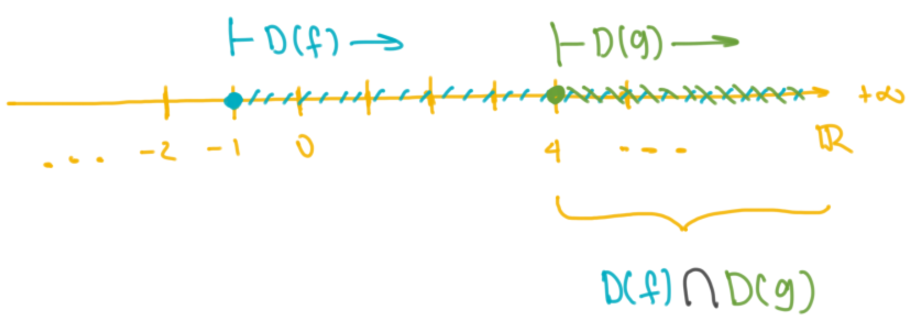
$g(x)=\sqrt{x-4}$ entonces:

$$D(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid x-4\geq 0\}$$

$$D(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 4\}$$

$$D(g)=[4,+\infty)$$

Por lo que:



Por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} D(f+g) \\ D(f-g) \\ D(f\cdot g) \end{array}\right\} = D(f)\cap D(g) = [4,+\infty)$$

sólo resta determinar el conjunto $\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)=0\}$ para encontrar el $D(f/g)$. Así:

Note que $g(x)=0 \iff \sqrt{x-4}=0$

$\iff x-4=0$

$\iff x=4$

Luego:

$$\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)=0\} = \{4\}$$

Por último:

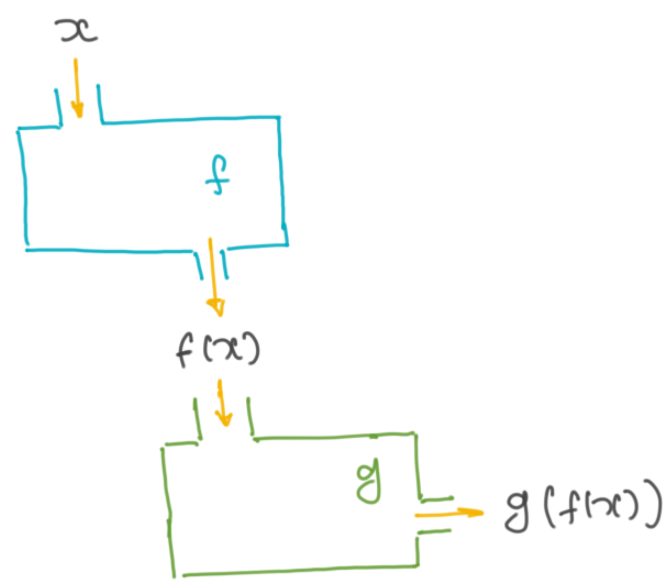
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [D(f) \cap D(g)] \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [4, +\infty) \setminus \{4\}$$

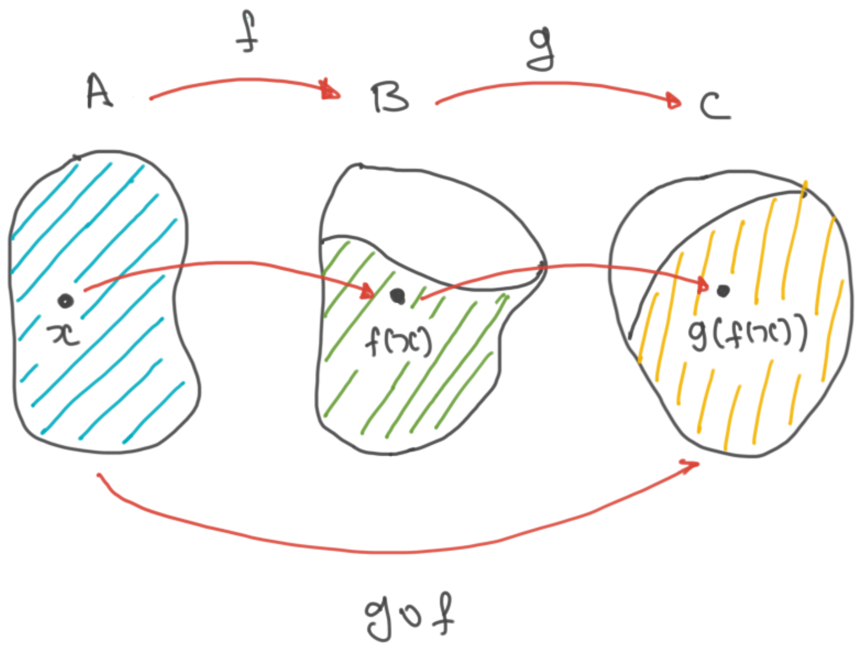
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = (4, +\infty)$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La composición de funciones es otra forma de construir nuevas funciones a partir de funciones dadas.



Otra forma de ver esto es como sigue:



DEFINICIÓN: Composición funciones

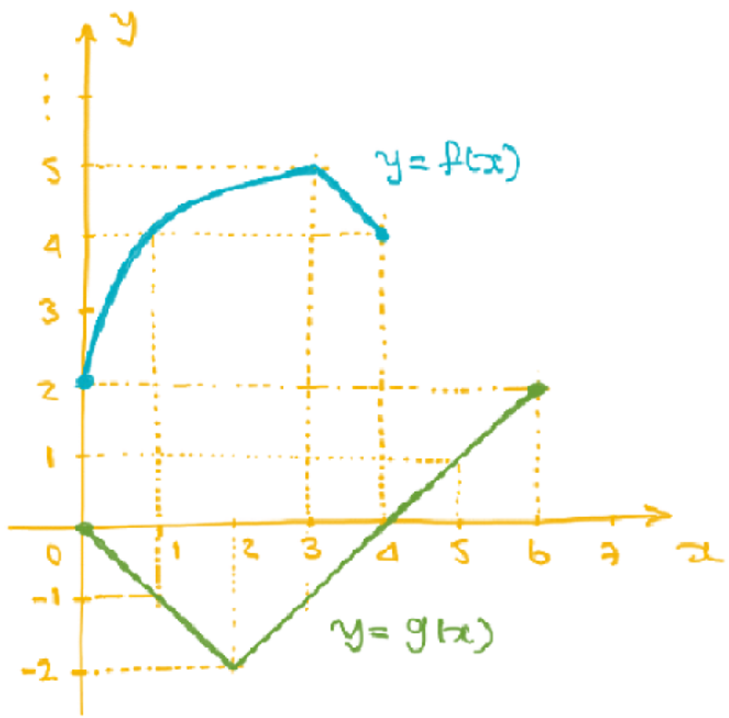
Sean f y g funciones, la composición de f y g, denotada por $g \circ f$, es la función definida por la siguiente regla de correspondencia:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

En donde:

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\}$$

EJEMPLO: con la información que se obtiene de gráficos de las funciones $y=f(x)$ y $y=g(x)$ dadas a continuación



Resuelva los siguientes ítems:

i) $(f\circ g)(0)$

ii) $(f\circ f)(1)$

iii) $(f\circ g)(4)$

iv) $(g\circ g)(6)$

v) $(g\circ f)(3)$

vi) $\mathrm{Dom}(f\circ g)$

Solución:

i) $(f\circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 2$

ii) $(f\circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 4$

iii) $(f\circ g)(4) = f(g(4)) = f(0) = 2$

iv) $(g\circ g)(6) = g(g(6)) = g(2) = -2$

v) $(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 1$

vi) $\mathrm{Dom}(f\circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$

$= \{x \in [0,6] \mid g(x) \in [0,4]\} = \{0\} \cup [4,6]$

EJEMPLO: Sean $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = 2x^2 + 1 \end{cases}$

Encontrar: i) $(f \circ g)(x)$ y ii) $(g \circ f)(x)$

SOLUCIÓN:

i) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x)$$

$$= (2x^2+1)^2 + 3(2x^2+1)$$

$$= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 6x^2 + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 10x^2 + 4$$

ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= g(x^2+3x)$$

$$= 2(x^2+3x)^2 + 1$$

$$= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1$$

Note que:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

La composición de funciones **No** es una operación **conmutativa**.

EJEMPLO: sean $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

Determinar:

i) $f \circ f$ ii) $g \circ g$ iii) $f \circ g$ y iv) $g \circ f$

Determinar asimismo en cada parte el Dominio de la función compuesta.

SOLUCIÓN:

i) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= \sqrt{f(x)}$$

$$\vdots \quad = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{4}}$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$$

$D(f \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(f)\}$

$\vdots \quad = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$

$D(f \circ f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

ii) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

$$= g(x^2 - 1)$$

$$\vdots \quad = (x^2-1)^2 - 1$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 - 1$$

$$(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$$

$D(g \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(g)\}$

$\vdots \quad = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\}$

$D(g \circ g) = \mathbb{R}$

iii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$\vdots \qquad = \sqrt{g(x)}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$

$= \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

iv) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\vdots \qquad = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1$

$(g \circ f)(x) = x - 1$

$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\}$

$\vdots \qquad = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

pois para $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ sempre será um número Real.