CLASE 14

LÍMITES Y CONTINUIDAD

LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES (RESUMEN)

i) $\lim_{x \to a} c = c$, c: constante

ii) $\lim_{x \to a} x = a$

iii) $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

iv) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

v) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

vi) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

En los numerales iv, v, vi se cumplen siempre que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ Existan. Además, en el numeral vi $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

vii) $\lim_{x \to a} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right] = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to a} f_i(x)$

viii) $\lim_{x \to a} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to a} f_i(x)$

En los literales vii y viii se cumplen siempre que $\lim_{x \to a} f_i(x)$ Existan, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

ix) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$

siempre que $\lim_{x \to a} f(x)$ Exista

x) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

xi) Si $f(x)$ es una función polinomial, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

xii) Un Límite que No Existe

si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ No Existe

xiii) Límite de una raíz

si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Ojo!: si n es par $\Rightarrow L \geq 0$

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x}{x-5}$

Note que: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} x = 5 \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 5} (x-5) = 0 \end{cases}$

Entonces $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x}{x-5}$ No Existe!

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x}$

Es claro que $\lim\limits_{x\to a} x = a$ entonces:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} x} = \sqrt[n]{a}$$

Ojo: a debe ser ≥ 0 si n es par.

No hay restricciones para a cuando n impar

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

Sea $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Note que: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Donde: $\begin{cases} f(x) = x-1 \\ g(x) = x^2+x-2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}$$

Note que: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x-1) = f(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+x-2) = g(1) = 0 \end{cases}$

Entonces: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \dfrac{0}{0}$

Este límite tiene la Forma Indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ...

Observe que:

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

Luego:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} (x+2)}$$

$$= \frac{1}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Así que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}$$

LÍMITES INDETERMINADOS

Son aquellos cuyo resultado es de la forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Una Indeterminación se remueve al Factorizar ó racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificar y obtener el límite.

CASOS DE FACTORIZACIÓN

i) Factor común:

$$ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$$

ii) Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

iii) Trinomio cuadrado perfecto:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

iv) Trinomio de la forma:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

v) Suma o diferencia de cubos

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[2]{x^2+4}-2}{x^2}$

Note que: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[2]{x^2+4}-2}{x^2} = \dfrac{0}{0}$

pero:

$$\frac{\sqrt[2]{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt[2]{x^2+4}+2}{\sqrt[2]{x^2+4}+2} = \frac{(x^2+4)-4}{x^2\left(\sqrt[2]{x^2+4}+2\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt[2]{x^2+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt[2]{x^2+4}+2}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[2]{x^2+4}-4}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[2]{x^2+4}+2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0}\left[\sqrt[2]{x^2+4}+2\right]} = \frac{1}{4}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[2]{x^2+4}-2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio: Evaluar $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}$

Note que éste límite tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ pues:

$$\lim_{v\to 0}\left(\sqrt{25+v}-5\right)=0 \text{ y } \lim_{v\to 0}\left(\sqrt{1+v}-1\right)=0$$

Procedemos a su racionalización utilizando la doble conjugada, así:

$$\frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}=\frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}\cdot\frac{\sqrt{25+v}+5}{\sqrt{25+v}+5}\cdot\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{1+v}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25+v}\right)^2-5^2}{\left(\sqrt{1+v}\right)^2-1^2}\cdot\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

$$=\frac{\cancel{25}+v-\cancel{25}}{\cancel{1}+v-\cancel{1}}\cdot\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

$$=\frac{\cancel{v}}{\cancel{v}}\cdot\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

$$=\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

Así que:

$$\frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}=\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

Luego:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}=\lim_{v\to 0}\frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

Recuerde que:

$$\lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}$$ es una Indeterminación

de la forma $\frac{0}{0}$, pero:

$$\lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$ ya No presenta la

Indeterminacion, pues:

$$\lim_{v\to 0}\left[\sqrt{1+v}+1\right] = 2$$ y

$$\lim_{v\to 0}\left[\sqrt{25+v}+5\right] = 10$$

luego:

$$\lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1} = \lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{1+v}+1}{\sqrt{25+v}+5}$$

$$= \frac{\lim_{v\to 0}\left[\sqrt{1+v}+1\right]}{\lim_{v\to 0}\left[\sqrt{25+v}+5\right]}$$

$$= \frac{2}{10}$$

$$= \frac{1}{5}$$

Así que:

$$\lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2}$

Note que: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} \left[\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2} \left[x-2\right] = 0 \end{cases}$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2}$ Exhibe la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

Pero, recuerda que:

$$a-b = (a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3} b^{1/3} + b^{2/3})$$

por lo que: $a^{1/3} - b^{1/3} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3} \cdot b^{1/3} + b^{2/3}}$

luego:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2} = \frac{1}{(x-2)} \cdot \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{(x-2)}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}}{x^{2/3} + x^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2} = \underbrace{\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}}$$

éste límite ya no tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$

por lo que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \left[x^{2/3} + x^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3} \right]}$$

$$= \frac{1}{2^{2/3} + 2^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{2^{2/3} + 2^{2/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Asd gre:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

EJEMPLO: Evaluar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

Éste límite tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ pues:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-8)=0 \quad y \quad \lim_{x\to 2}(2x^2-3x-2)=0$$

pero: $\begin{cases} x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4) \\ 2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1) \end{cases}$

Me gustaría que notaras que:

El número 2, que es donde estamos evaluando el límite es tanto una raíz de los polinomios que figuran tanto en el numerador como en el denominador del cociente del límite, es por ésta razón que $(x-2)$ es factor común de ambos polinomios.

De conformidad con lo anterior.

$$\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(2x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x+4}{2x+1}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x+1}}_{\text{No es Indeterminado } \frac{0}{0}}$$

Así que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1)}$$

$$= \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 \cdot 2 + 1}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{12}{5}$$