

Universidad de Antioquia
 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
 Instituto de Matemáticas
 Cursos de servicio para la Facultad de Ingeniería
 Taller 1 de Cálculo Diferencial (255130-2555131)



1803



Importante: La siguiente lista de ejercicios debe asumirse como práctica de los conceptos vistos en clase, según este [cronograma](#). Los temas necesarios para poder resolver los ejercicios se pueden revisar en el texto guía (Stewart, J. [Cálculo de una variable trascendentes tempranas](#). Cengage Learning. Octava edición), El cual está disponible para consulta en línea mediante el acceso al enlace proporcionado anteriormente o el QR mostrado en la imagen, ingresando el usuario y la contraseña del portal universitario.

Ejercicios clase 1

1. Considere los intervalos $A = [-5, 4]$, $B = (-2, 7]$ y $C = (-3, 3)$, hallar:

a) $A \cap B$

b) $C \cup B$

c) $B - C$

2. Proporcione al menos un ejemplo en el que se refuten las afirmaciones dadas a continuación.

a) Si x, y y z son números reales tales que $xy < z$, entonces $x < \frac{z}{y}$.

b) Si $x < y$ entonces $x^2 < y^2$.

Ejercicios clase 2

1. Encuentre la solución general de cada desigualdad lineal y exprese el resultado como la unión de intervalos.

a) $\frac{2x}{3} + 5 < \frac{2x - 4}{4}$

b) $-1 < 3x - 5 \leq 6$

c) $-4 < 4x + 5 \leq \frac{3x}{5} + 8$

2. Encuentre la solución general de cada desigualdad no lineal y exprese el resultado como la unión de intervalos.

a) $(3 - x)(2 + x) > 0$

d) $(2x - 1)(x + 2) > (x + 3)(x - 2)$

b) $(x + 2)(x - 3) < 0$

e) $\frac{(x - 1)(x + 4)}{2 - x} \leq 0$

c) $9x^2 \geq 18x + 7$

f) $\frac{3}{2x - 2} \geq \frac{1}{2x + 1}$

3. Analiza cada problema práctico y explica por qué su solución requiere el uso de una desigualdad. Luego, resuelve cada desigualdad para encontrar la solución al problema.

- a) Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde m representa el número de millas recorridas por año y C es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre \$6400 y \$7100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

- b) En la cercanía de una fogata, la temperatura T en $^{\circ}\text{C}$ a una distancia de x metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{600000}{x^2 + 300}$$

¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 500°C ?

- c) Usando cálculo, se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 pies/s desde lo alto de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura h sobre el suelo t segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos a 32 pies sobre el suelo?

Ejercicios clase 3

1. Determine la solución general de cada una de las siguientes desigualdades que involucran valor absoluto y exprese el resultado como la unión de intervalos.

a) $|3x + 5| \geq 15$

d) $|3x - 1| \geq 2x + 5$

g) $|x^2 + 5x + 3| \leq 3$

b) $|x - 4| \leq 2 - x$

e) $3 < |2x - 3| < 5$

h) $|x^2 + 5x + 3| > 3$

c) $|x^2 - 2x| \leq 1$

f) $0 < |2x - 1| < 4$

i) $\left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| < 4$

2. Analiza cada problema práctico y explica por qué su solución requiere el uso de una desigualdad. Luego, resuelve cada desigualdad para encontrar la solución al problema.

- a) Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor, con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

i. Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grosor para el laminado.

ii. Resuelva la desigualdad que haya encontrado en la primer parte

- b) El promedio de estatura de hombres adultos es de 68.2 pulgadas y 95 % de ellos tiene una estatura h que satisface la siguiente desigualdad.

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \leq 2$$

Resuelva la desigualdad para hallar el intervalo de estaturas.

Ejercicios clase 4

1. Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

- | | |
|--|---|
| a) Tiene pendiente 3 y su intersección con el eje y es -2. | d) Su intersección con el eje y es 6 y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$. |
| b) Pasa por $(4, 5)$ y es paralela al eje x . | e) Pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$. |
| c) Pasa por $(4, 5)$ y es paralela al eje y . | |

2. Encuentre la pendiente y gráfique cada una de las siguientes rectas.

- | | | |
|----------------|--|-------------------|
| a) $x + y = 3$ | b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0$ | c) $3x - 4y = 12$ |
|----------------|--|-------------------|

3. Para cada uno de los siguientes ejercicios, determine el modelo lineal que representa el problema y utilice dicho modelo para encontrar la solución solicitada.

- a) Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15$$

donde T es la temperatura en grados centígrados y t corresponde a años desde 1950.

- ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección con el eje T ?
 - Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en el año 2050.
- b) La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra x dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número y de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
- Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el costo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas).
 - ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección con el eje x y el punto de intersección con el y de la gráfica?
- c) Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

donde y se mide en dólares.

- Trace la gráfica de la ecuación lineal.
- ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección con el eje y de la gráfica?

4. Usar los conceptos básicos de rectas y el plano cartesiano para resolver los siguientes problemas.

- Demostrar que $(1, 1)$, $(7, 4)$, $(5, 10)$ y $(-1, 7)$ son los vértices de un paralelogramo.
- Demostrar que $(-3, -1)$, $(3, 3)$ y $(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
- Determinar si los siguientes puntos son colineales (están sobre una misma recta):

i. $(1, 1), (3, 9), (6, 21)$

ii. $(-1, 3), (1, 7), (4, 15)$

- d) Encuentre la ecuación de la mediatriz perpendicular al segmento de recta que une los puntos $(1, 4)$ y $(7, -2)$.
- e) Demuestre que si los puntos de intersección con los ejes coordenados x y y de una recta son números a y b , con $a, b \neq 0$, entonces la ecuación de la recta se puede escribir como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejercicios clase 5 y 6

1. Evalúe la función en los valores indicados.

a) $f(x) = x^3 + 2x$; $f(-2), f(1), f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)$.

b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; $f(2), f(-2), f(a), f(a-1), f(-x)$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1; \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 $f(-4), f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1), f(0), f(25)$.

2. Examinar cuidadosamente cada uno de los siguientes problemas aplicados y responder las preguntas planteadas. Justificar las respuestas y determinar el dominio apropiado para cada función, asegurando que la solución sea coherente con el contexto del problema.

- a) El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

- i. Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
- ii. ¿Qué representan sus respuestas a la primera parte?
- iii. Encuentre $C(0)$. (Este número representa los costos fijos).
- b) Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra, y D y h se miden en millas.

- i. Encuentre $D(1)$ y $D(2)$.
- ii. ¿A qué distancia máxima un observador puede usted ver desde la cubierta de la Torre CN de Toronto, la cual tiene una altura de 1135 pies? (1 milla es igual a 5280 pies).
- iii. Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?
- c) En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x :

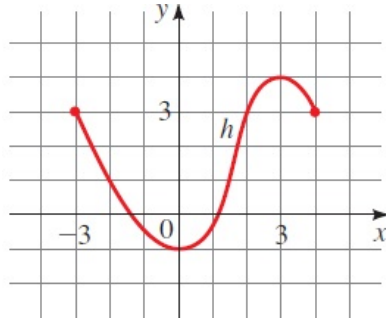
$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 10000 \\ 0.08x & \text{si } 10000 < x \leq 20000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20000 < x \end{cases}$$

- i. Encuentre $T(5000), T(12000), T(25000)$.
- ii. ¿Qué representan sus repuestas en la primera parte?

3. Observar la gráfica de la función proporcionada y, con base en ella, responder adecuadamente cada ítem.

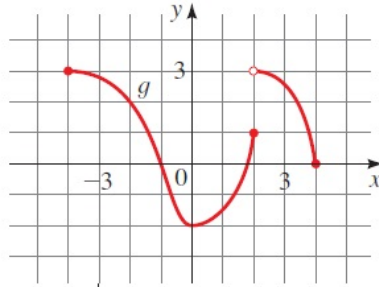
a) Se da la gráfica de una función h :

- Encuentre $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.
- Encuentre el dominio y rango de h .
- Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) = 3$.
- Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) \leq 3$.



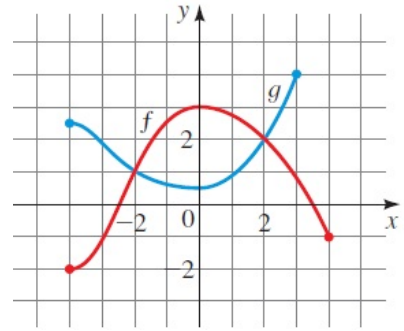
b) Se da la gráfica de una función g :

- Encuentre $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.
- Encuentre el dominio y rango de g .



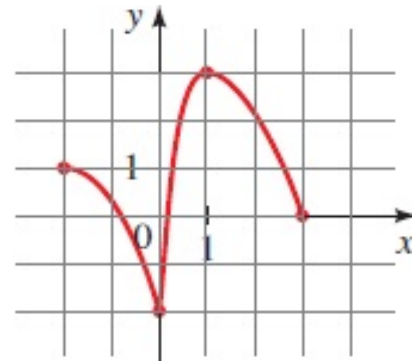
c) Se dan la gráfica de las funciones f y g :

- ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $g(0)$?
- Encuentre el dominio y rango de f .
- ¿Cuál es mayor, $f(-3)$ o $g(-3)$?
- ¿Para cuáles valores de x es $f(x) = g(x)$?



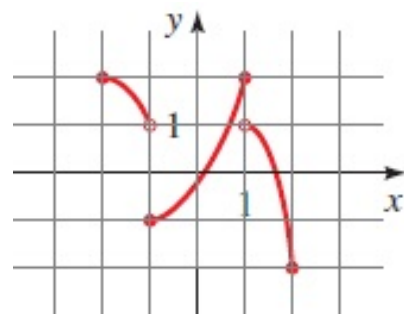
d) Se da la gráfica de una función g :

- Encuentre $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$ y $g(4)$.
- Encuentre el dominio y rango de g .



e) Se da la gráfica de una función g :

- Encuentre $g(-2)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(2)$ y $g(4)$.
- Encuentre el dominio y rango de g .



4. Determinar el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + x - 6}$

c) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

Ejercicios clase 7

1. Dada una función f , y las transformaciones indicadas aplicadas a su gráfica (en el orden dado), escribir la función que representa la gráfica final.

a) $f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; desplazar 1 unidad a la derecha.

c) $f(x) = |x|$; reflejar en el eje y y desplazar hacia arriba 1 unidad.

d) $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje x .

e) $f(x) = x^3$; alargar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha

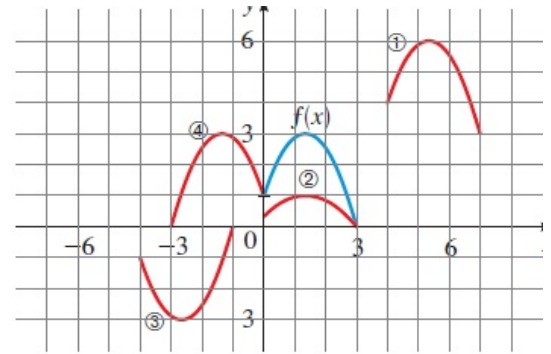
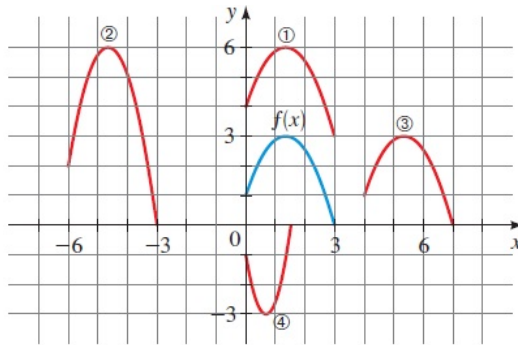
2. Dada la gráfica de $y = f(x)$, asociar cada ecuación con su gráfica correspondiente.

a) i. $y = f(x - 4)$ iii. $y = f(x) + 3$

ii. $y = 2f(x + 6)$ iv. $y = -2f(x)$

b) i. $y = f(x - 4)$ iii. $y = f(x) + 3$

ii. $y = 2f(x + 6)$ iv. $y = -2f(x)$



3. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f .

a) i. $y = f(x - 2)$

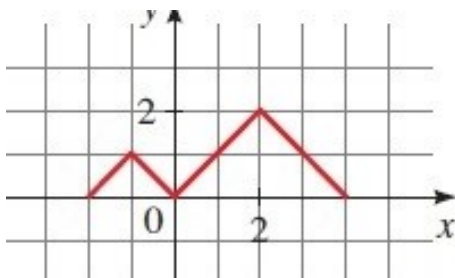
ii. $y = 2f(x)$

iii. $y = f(-x)$

iv. $y = f(x) - 2$

v. $y = -f(x) + 3$

vi. $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



b) i. $y = f(2x - 2)$

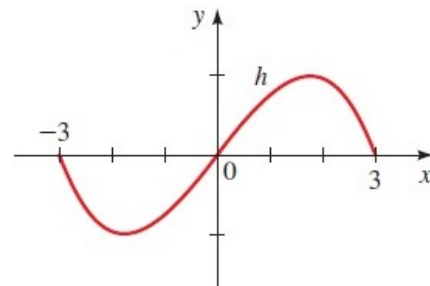
ii. $y = 2f(2x - 3) + 2$

iii. $y = 5 - f(-x - 3)$

iv. $y = 3f(-2x + 1) - 3$

v. $y = -2f(3x - 1) + 3$

vi. $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



4. Trazar la gráfica de la función utilizando transformaciones de funciones.

a) $f(x) = -3|2x - 1| + 5$

c) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

e) $f(x) = 3|-x + 2| + 2$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 14$

d) $f(x) = 2 - \sqrt{-2x - 3}$

f) $f(x) = 3 - 2(x - 1)^3$

Ejercicios clase 8 y 9

1. Encuentre $f \pm g$, fg , f/g , $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

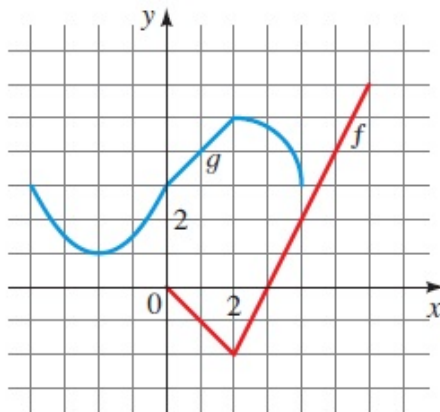
a) $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x - 4$, $g(x) = |x + 4|$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$

2. Use las gráficas de f y g para evaluar la expresión.



a) $f(g(2))$

b) $g(f(0))$

c) $(g \circ f)(4)$

d) $(f \circ g)(0)$

e) $(g \circ g)(-2)$

3. Determinar la función inversa en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

c) $f(x) = \ln(4x + 3)$

e) $f(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$

b) $f(x) = e^{2x-1}$

d) $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 3}$

f) $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x}$

4. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

i. Encuentre f^{-1} . ¿Cómo se relaciona con f ?

ii. Identifique la gráfica de f y explique su respuesta en el anterior ítem.

5. Use transformaciones de funciones para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3e^{2x+1}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-4}\right) + 2$

6. Resuelva cada uno de los siguientes problemas aplicados:

a) Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.

- i. Determine la inversa de esta función y explique su significado.
 - ii. ¿Cuándo la población alcanzará 50000 bacterias?
- b) Cuando el flash de una cámara se apaga, la batería comienza a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

Donde la capacidad de carga máxima es Q_0 y t se mide en segundos.

- i. Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
- ii. ¿Cuanto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90 % de la capacidad si $a = 2$?

Ejercicios clase 10

1. Use transformaciones de funciones para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sin^{-1}(3x + 1)$

c) $f(x) = 3 \cos^{-1}(2 - 3x) - \frac{\pi}{3}$

b) $f(x) = -2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1$

d) $f(x) = 2 \tan^{-1}(2x + 1)$