Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Cursos de servicio para la Facultad de Ingeniería
Taller 3 de Cálculo Diferencial (2555130-2555131)

1 8 0 3

Importante: La siguiente lista de ejercicios debe asumirse como práctica de los conceptos vistos en clase, según este cronograma. Los temas necesarios para poder resolver los ejercicios se pueden revisar en el texto guía (Stewart, J. Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Cengage Learning. Octava edición), El cual está disponible para consulta en línea mediante el acceso al enlace proporcionado anteriormente o el QR mostrado en la imagen, ingresando el usuario y la contraseña del portal universitario.

Ejercicios clase 19

1. Para las funciones dadas, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en el punto indicado.

   a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

   b) $f(x) = \sin(x)$ en $x = \pi$.

   c) $f(x) = \sec(x)$ en $x = \pi$.

   d) $f(x) = (x+1)^2$ en $x = 0$.

2. Para las funciones dadas a continuación, calcular $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$. ¿Qué se puede afirmar acerca de $f'(0)$?

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

3. Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

   y responda las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

   a) ¿$g(x)$ es continua en $x = 1$?

   b) ¿$g(x)$ es diferenciable en todos los reales?

   c) Si la respuesta del ítem anterior fue afirmativa, encuentre una fórmula para $g'(x)$.

4. Para las funciones dadas, use la definición de derivada para determinar la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

   a) $f(x) = (x+1)^3$ en $x = 1$.

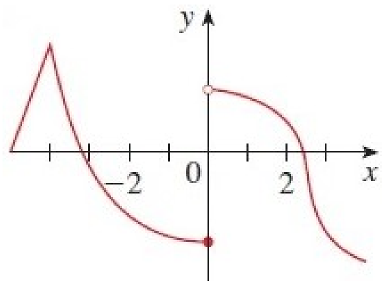
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

   c) $f(x) = \tan(x)$ en $x = \pi$.

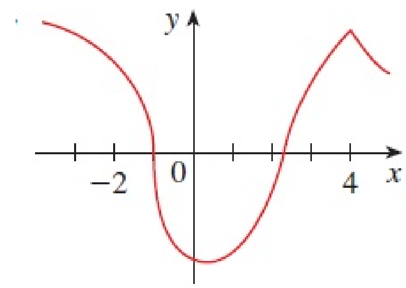
   d) $f(x) = \cos(x) + x$ en $x = 0$.

Ejercicios clase 20

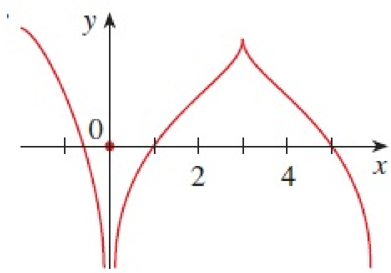
1. Se proporciona la gráfica de f. Establezca, con argumentos, los números en que f no es derivable.



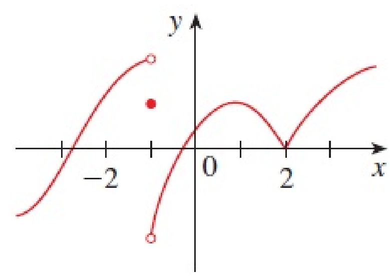
a)



c)



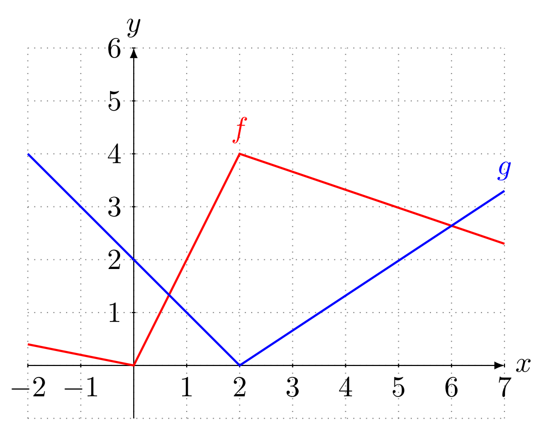
b)



d)

2. Resuelva los siguientes problemas.

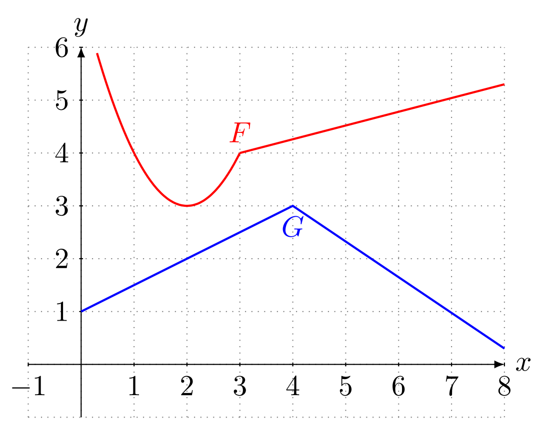
   a) Si f y g son funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.



   i. Encuentre $u'(1)$

   ii. Encuentre $v'(5)$

   b) Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran.



   i. Encuentre $P'(2)$

   ii. Encuentre $Q'(7)$

c) Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$, $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes.

i. $(fg)'(5)$

ii. $(f/g)'(5)$

iii. $(g/f)'(5)$

d) Considere que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

i. $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$

ii. $h(x) = f(x)g(x)$

iii. $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x \cos(x)$

b) $f(x) = 2^x e^x + \ln(x)$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{5x}\right)^2$

d) $f(x) = \csc(x)\sec(x)$

e) $f(x) = \dfrac{4}{3\pi}\operatorname{sen} x + \dfrac{4}{5\pi}\cos x$

f) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

g) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + x\cos x$

h) $f(x) = \left(\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{-1}$

i) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\cos(x)}$

Ejercicios clases 21 y 22

1. Encuentre la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \cos^2(x)$

b) $f(x) = e^{x^2 - x}$

c) $f(x) = e^{at}\cos(bt)$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

e) $f(x) = \sin(\tan(2x))$

f) $f(x) = e^{\sin(2x)} + \sin(e^{2x})$

g) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

h) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

i) $f(x) = \sqrt{\tan^{-1}(x)}$

2. ¿En qué puntos de la curva $y = \sqrt{1 + 2x}$, la recta tangente es perpendicular a la recta $6x + 2y = 1$?

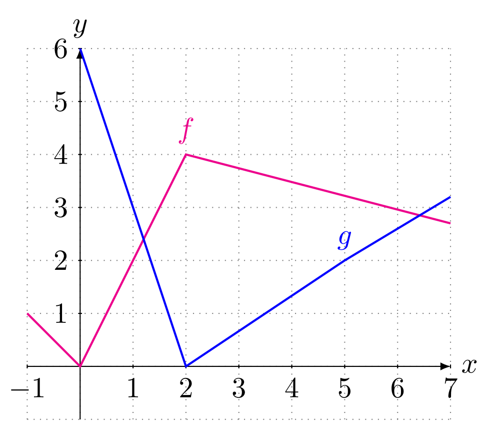
3. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ y $g'(5) = 6$, halle $F'(5)$.

4. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Halle, si existe, las siguientes derivadas. Si no existe, expliqué por qué.

i $u'(1)$

ii $v'(1)$

iii $w'(1)$



5. Use la regla de la cadena para demostrar que $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln(a)$

6. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

   a) $x^2 + xy + y^2 = 3,\ (1,1)$
   b) $y\,\mathrm{sen}(2x) = x\cos(2y),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
   c) $x^3y^2 = -2xy - 3,\ (-1,-3)$
   d) $x^4 = 8(x^2 - y^2),\ (2, -\sqrt{2})$

7. Halle y'' usando derivación implícita.

   a) $\mathrm{sen}(y) + \cos(x) = 1$
   b) $xy + e^y = e$

8. Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición:

$$f(t) = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t,\ t \geq 0$$

   a) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?
   b) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

9. Un resorte que cuelga del techo vibra hacia arriba y hacia abajo. Su posición vertical en el tiempo t está dada por:

$$f(t) = 4\sin(3t),\ t \geq 0$$

   a) Calcule la velocidad del resorte en el tiempo t.
   b) ¿Cuál es la velocidad máxima del resorte? ¿Cuál es su ubicación cuando alcanza su velocidad máxima?

Ejercicios clases 23 y 24

1. Aplique derivación logarítmica para hallar la derivadas de las funciones.

   a) $y = x^{\cos x}$
   b) $y = \sqrt{x^x}$
   c) $y = (\cos x)^x$
   d) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$
   e) $y = (\mathrm{sen}\,x)^{\ln x}$
   f) $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$
   g) $y = (\ln x)^{\cos x}$
   h) $y = (1 - \sqrt{x})^{\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}}$
   i) $y = \sqrt[x]{5\,\mathrm{sen}\,x}$

2. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un bateador le pega a la bola y corre hacia la primera base a una velocidad de 24 pies/seg. ¿ Con qué velocidad cambia su distancia a la segunda base cuando está a la mitad del camino de la primera?

3. Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando este es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

4. Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un tanque, que tiene forma de cono invertido, a una tasa de 3π m^3/min. Si el tanque tiene un radio de 2.5 m y una altura de 10 m ¿qué tan rápido varía el nivel del aceite cuando este ha alcanzado 8 m de profundidad?

5. Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2 : 00 p. m.?

6. De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo, al caer forma un montículo de arena cónico en el piso, cuya altura siempre es igual al diámetro de la base. ¿Qué tan rápido aumenta la altura cuando el diametro del montículo de arena alcanza 4 pies?

7. La luz de un faro, que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a 1 kilómetro del punto que está enfrente del faro?

8. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 millas/h y la otra camina hacia el noreste a 2 millas/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

9. Un atleta corre alrededor de una pista circular de 100 m de radio a una velocidad constante de 7 m/s. Un amigo del atleta esta parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ellos cuando esta es de 200 m?