

## En este capítulo

- 1.1 Enunciados y valor de verdad
  - 1.2 Propositiones simples y compuestas
  - 1.3 Propositiones lógicamente equivalentes
  - 1.4 Argumentos
  - 1.5 Cuantificadores
  - 1.6 Conjuntos y elementos
  - 1.7 Cardinalidad y tipos de conjuntos
  - 1.8 Operaciones con conjuntos
  - 1.9 Conjuntos y técnicas de conteo
- Ejercicios de repaso



**Un conjunto es una colección de elementos que comparten una característica; por ejemplo, la afición por un deporte o por un equipo deportivo**

\* El autor de este capítulo sobre lógica y conjuntos es el profesor Amado Reyes, de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, y de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

■ **Conjuntos** La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se usa en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo xvi fue **François Viète** (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió muchas obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales imprimió y distribuyó por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viète era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  etcétera. Viète, que sabía escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias:  $x$ ,  $x$  *quadratum* (cuadrado),  $x$  *cubum* (cubo), etcétera. Además, extendió el uso de las letras del alfabeto para representar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que emplearon para construir una serie completa de términos.

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales sobre conjuntos que un plan de estudios de bachillerato suele incluir.

## 1.1 Enunciados y valor de verdad

■ **Lógica** La lógica es la rama del conocimiento que trata los métodos de razonamiento mediante reglas y técnicas, con el fin de determinar si un argumento es válido. El tema que nos ocupa es el de la lógica usada en matemática. Aquí trabajamos con elementos básicos llamados *proposiciones*.

### Definición 1.1.1 Proposiciones

Una **proposición** es un enunciado u oración declarativa de la cual se puede afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

### Definición 1.1.2 Valor de verdad

La veracidad o falsedad de una proposición es lo que se llama su **valor de verdad**.

### EJEMPLO 1 Proposiciones

La expresión “la Tierra es redonda” es una proposición. Puede notarse que su valor de verdad es verdadero, ya que se conoce con certeza que la Tierra es redonda. ≡

### EJEMPLO 2 Proposiciones y valor de verdad verdadero

La expresión “ $2 + 3 = 5$ ”, que se lee “dos más tres es igual a cinco”, es una proposición con valor de verdad verdadero, ya que en el sistema numérico decimal (que usa el número 10 como referencia) se conoce con certeza que  $2 + 3 = 5$ . ≡

### EJEMPLO 3 Proposiciones y valores de verdad

La expresión “ $1 + 1 = 5$ ”, que se lee “uno más uno es igual a cinco”, es una proposición con valor de verdad falso, ya que se conoce con certeza que  $1 + 1 \neq 5$  ( $\neq$  se lee “diferente de”).

¿Por qué la expresión  $3 - x = 5$  es una oración declarativa, pero no es una proposición?  $3 - x = 5$  no es una proposición porque no sabemos su valor de verdad a menos que asignemos un valor a la variable  $x$ . Si asignamos a  $x$  el valor  $-2$ , entonces  $3 - x = 5$  se convierte en una proposición con valor de verdad verdadero, ya que  $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ . Pero si le asignamos el valor  $6$ , por ejemplo, entonces  $3 - x = 5$  se convierte en una proposición con valor de verdad falso, ya que  $3 - 6 \neq 5$ .

¿Por qué la expresión “¿Habla usted español?” no es una proposición? ≡

La expresión, “¿habla usted español?” no es una proposición porque no es un enunciado declarativo sino interrogativo.

¿Por qué la expresión “tome dos aspirinas” no es una proposición? Porque se trata de un enunciado imperativo, es una orden, no es un enunciado declarativo.

## ■ Postulados o axiomas y teoremas

### Definición 1.1.3 Axioma

Un **axioma** o postulado es una proposición inicial que se presupone verdadera. El conjunto de postulados de los cuales se desprenden las demás proposiciones de un sistema se llama **conjunto de postulados del sistema**. En éste, uno de los axiomas no debe ser deducible de los otros.

### EJEMPLO 4 Axiomas

Uno de los postulados de la geometría euclidiana es el de la recta: “Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene”.

Este postulado o axioma forma parte de un conjunto de postulados del sistema que plantea la geometría de Euclides, estudiada desde la escuela elemental. ≡

### EJEMPLO 5 Axioma

En nuestro estudio de geometría aceptamos cierta la proposición: “Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto”.

Éste es otro ejemplo de los postulados o axiomas sobre los que se apoya el sistema geométrico euclidiano. ≡

### Definición 1.1.4 Teorema

Un **teorema** es cualquier proposición que se desprende de otra proposición o proposiciones dadas por supuestas o previamente demostradas dentro del sistema. Así, un teorema es una proposición cuya veracidad requiere ser demostrada a partir de otras.

### EJEMPLO 6 Teorema

El teorema del triángulo isósceles establece que “si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes”.

Este teorema se demuestra a partir de otras proposiciones, entre las cuales se cuenta uno de los postulados para congruencia de triángulos (lado-ángulo-lado,  $L \triangleleft L$ ). ≡

◀ La característica básica de un postulado o axioma es el hecho de ser independiente de otras proposiciones.

◀ En estas notas tratamos básicamente con el análisis de la veracidad de las proposiciones en forma general, es decir, con el cálculo proposicional.

## 1.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los enunciados 1 a 15 indique en cada caso si el enunciado es o no es una proposición. Justifique su respuesta. En caso de ser una proposición, establezca su valor de verdad.

1. Julio César fue presidente de la República Dominicana.
2.  $2 + 2 = 4$
3. Si la Tierra es plana, entonces  $2 + 2 = 4$
4. ¿En tu casa o en la mía?
5. ¡Ayúdeme, por favor!
6. La matemática es importante.
7. Existen dos soluciones para la ecuación  $x^2 + 4 = 20$ , y ambas soluciones son enteras.
8. Si  $x$  es cualquier número entero, entonces  $x^2$  es un número entero positivo.
9. Vé en su busca.
10.  $x$  es mayor que  $y$ .

11. 15 es un número primo.
12.  $a + b = 1.7$
13. La población de la República Dominicana es de siete millones.
14. Las mesas son cuadradas.
15. ¿Bello día?

## 1.2 Proposiciones simples y compuestas

Sin pretender dar una definición precisa de variable podemos afirmar que en matemática se usan las literales  $x, y, t, \dots$  para representar números reales, y estas literales se llaman **variables**. Las variables pueden combinarse mediante las operaciones corrientes para producir otras expresiones variables más complejas. En lógica, las literales  $p, q, r, \dots$  denotan variables que pueden sustituirse con proposiciones.

### EJEMPLO 1 Variables

La variable proposicional  $p$  puede sustituirse con la proposición “El sol brilla todo el día”; en este caso:

$p$ : El sol brilla todo el día

y la variable proposicional  $q$  puede reemplazarse con la proposición “Hace frío”; aquí:

$q$ : Hace frío



Las proposiciones  $p$  y  $q$  que se combinan mediante algún conectivo lógico para formar una proposición compuesta se llaman **proposiciones simples**.



### Definición 1.2.1 Conectivos lógicos

Los **conectivos lógicos** son símbolos usados para combinar proposiciones, con lo que se producen otras, llamadas **proposiciones compuestas**.

## CONECTIVOS FUNDAMENTALES

Los conectivos fundamentales usados en este capítulo son:

- a)  $\sim$  negación
- b)  $\wedge$  conjunción
- c)  $\vee$  disyunción inclusiva
- d)  $\underline{\vee}$  disyunción exclusiva
- e)  $\rightarrow$  condicionante
- f)  $\leftrightarrow$  bicondicionante

■ **Negación** La **negación** de una proposición es una nueva proposición que tiene un valor de verdad opuesto, es decir, si  $p$  es verdadera, la negación de  $p$  es falsa. Se denota con  $\sim p$  y se lee **no  $p$** .

### EJEMPLO 2 Negación

Si  $p$ : El río está sucio, entonces

$\sim p$ : No es verdad que el río está sucio

o simplemente:

$\sim p$ : El río no está sucio.



◀ La característica fundamental de la negación es que es una proposición cuyo valor de verdad es contrario al valor de verdad de la proposición dada. Así, si la proposición  $p$  es verdadera, entonces  $\sim p$  es falsa y viceversa.

### Definición 1.2.2 Tabla de verdad

El arreglo que nos permite tener los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama una **tabla de verdad**.

La tabla de verdad para la negación de  $p$  está dada por:

$p$	$\sim p$
V	F
F	V

donde V significa verdadera y F falsa.

### EJEMPLO 3

La proposición

$$p: 2 + 3 > 1$$

es una proposición verdadera. Pero la proposición

$$\sim p: \text{no es verdad que } 2 + 3 > 1 \quad \text{o} \quad \sim p: 2 + 3 \leq 1$$

es una proposición falsa.



■ **Conjunción** La **conjunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$  mediante la conjunción ( $\wedge$ ). Esta proposición se denota con  $p \wedge q$  y se lee “ $p$  y  $q$ ”.

#### EJEMPLO 4

Si  $p$ : “La silla es alta” y  $q$ : “El mantel es blanco”, entonces la proposición “La silla es alta y el mantel es blanco” se expresa así:  $p \wedge q$ . ≡

Es natural que el valor de verdad de una proposición compuesta dependa de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

La característica fundamental de la conjunción es que su valor de verdad es verdadero sólo en el caso en que las proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad verdadero. La tabla de verdad de una conjunción es la siguiente:

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Note que cada línea de la tabla registra el valor de verdad de la conjunción para valores particulares de las proposiciones simples que la forman.

#### EJEMPLO 5 Conjunción

Si sabemos que “El día está lluvioso” es una aseveración verdadera, pero que la aseveración “El carro es nuevo” es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de la aseveración “El día está lluvioso y el carro es nuevo”?

**Solución** Si  $p$ : “El día está lluvioso” y  $q$ : “El carro es nuevo”, entonces la proposición “El día está lluvioso y el carro es nuevo” se escribe como  $p \wedge q$ .

Ahora sabemos que  $p$  es verdadero (V) y  $q$  es falso (F); basta leer la tabla de la conjunción en la línea donde  $p$  es V y  $q$  es F para tener el valor de  $p \wedge q$ , la cual es falsa. Así, procedemos del mismo modo para las demás posibilidades. ≡

■ **Disyunción inclusiva** La **disyunción inclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$  mediante la disyunción inclusiva ( $\vee$ ). Esta proposición se representa  $p \vee q$  y se lee “ $p$  o  $q$ ”.

#### EJEMPLO 6 Disyunción inclusiva

Si  $p$ : “Está lloviendo” y  $q$ : “ $3 < 5$ ”, entonces la proposición “Está lloviendo o  $3 < 5$ ” se expresa  $p \vee q$ . ≡

La característica fundamental de la disyunción inclusiva es que su valor de verdad es falso sólo en el caso en que las dos proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad falso. En todos los otros casos la disyunción inclusiva tiene valor de verdad verdadero. La siguiente es la tabla de verdad de una disyunción inclusiva.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

#### EJEMPLO 7 Disyunción inclusiva

Si  $p$ : “El libro es nuevo”, es verdadera, en tanto que  $q$ : “El joven es inteligente”, es falsa, determine el valor de verdad de la proposición “El libro es nuevo o el joven es inteligente”.

**Solución** La proposición “El libro es nuevo o el joven es inteligente” puede expresarse como  $p \vee q$ . Puesto que  $p$  es V y  $q$  es F, la segunda fila de la tabla de la disyunción inclusiva muestra que el valor de verdad para  $p \vee q$  es V.  $\equiv$

■ **Disyunción exclusiva** La **disyunción exclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$  mediante la disyuntiva exclusiva ( $\vee$ ). Esta proposición se denota por  $p \vee q$  y se lee “o  $p$  o  $q$ ”.

#### EJEMPLO 8 Disyunción exclusiva

Si  $p$ : “El vaso es bonito” y  $q$ : “La leche está adulterada”, entonces la proposición “O el vaso es bonito o la leche está adulterada”, se expresa  $p \vee q$ .  $\equiv$

La característica fundamental de la disyunción exclusiva es que su valor de verdad es verdadero sólo cuando las proposiciones que la componen tienen valores de verdad contrarios. En los otros casos la disyunción exclusiva tiene valor de verdad falso. La tabla de verdad de una disyunción exclusiva es la siguiente:

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

#### EJEMPLO 9 Disyunción exclusiva

Si  $p$ : “Antonio va a la fiesta”, es falsa y  $q$ : “Luisa va al cine”, es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición “O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine”.

**Solución** La proposición “O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine” se puede expresar como  $p \vee q$ . Puesto que  $p$  es F y  $q$  es V, la tercera fila en la tabla de la disyunción exclusiva muestra que el valor de verdad para  $p \vee q$  es V.  $\equiv$

■ **Condiciona** La **condiciona** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$  mediante la condicionante ( $\rightarrow$ ). Esta proposición se denota por  $p \rightarrow q$  y se lee “si  $p$  entonces  $q$ ”.

### EJEMPLO 10 Condicional

Si  $p$ : “ $2 + 3 = 5$ ” y  $q$ : “La universidad es bonita”, la proposición “si  $2 + 3 = 5$ , entonces la universidad es bonita”, se expresa con  $p \rightarrow q$ . ≡

En la estructura  $p \rightarrow q$ , la proposición que está antes de la flecha se llama el **antecedente** y la que está después de la flecha se llama el **consecuente**.

La característica fundamental de la condicional es que su valor de verdad es falso sólo cuando el consecuente es falso y el antecedente es verdadero. En los demás casos la condicional es verdadera. La siguiente es la tabla de verdad de una condicional:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

### EJEMPLO 11 Condicional

Si  $p$ : “ $3^2 = 9$ ”, es verdadera y  $q$ : “2 es par”, es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición “Si  $3^2 = 9$ , entonces 2 es par”.

**Solución** Esta proposición se puede expresar como  $p \rightarrow q$ . Puesto que  $p$  es V y  $q$  es V, la primera fila en la tabla de verdad de la condicional muestra que  $p \rightarrow q$  es verdadera (V). ≡

Existen varias formas de leer la condicional  $p \rightarrow q$ ; enumeramos a continuación algunas de ellas:

Si  $p \rightarrow q$  es una condicional dada, entonces la recíproca de  $p \rightarrow q$  es la condicional  $q \rightarrow p$ . Asimismo, la contrapositiva de  $p \rightarrow q$  es la condicional  $\sim q \rightarrow \sim p$  y la inversa es  $\sim p \rightarrow \sim q$ .

- 
- a) Si  $p$  entonces  $q$
  - b)  $p$  implica  $q$
  - c)  $q$  si  $p$
  - d)  $p$  sólo si  $q$
  - e)  $p$  es condición suficiente para  $q$
  - f)  $q$  es condición necesaria para  $p$

Si construimos las tablas de verdad para  $p \rightarrow q$  y la contrapositiva  $\sim q \rightarrow \sim p$ , vemos que las dos tablas coinciden en las columnas finales.

■ **Bicondicional** La **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$  mediante la bicondicionante ( $\leftrightarrow$ ). La proposición resultante se representa con  $p \leftrightarrow q$  y se lee “ $p$  si y sólo si  $q$ ”.

### EJEMPLO 12 Bicondicional

Si  $p$ : “El triángulo es equilátero”, y  $q$ : “El triángulo es equiángulo”, entonces la proposición “El triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo”, se expresa  $p \leftrightarrow q$ . ≡




La característica fundamental de la bicondicional es que su valor de verdad es verdadero sólo en los casos en que  $p$  y  $q$  tengan valores de verdad iguales (ambos V o ambos F). En los demás casos la bicondicional es falsa. La tabla de verdad de una bicondicional es la siguiente:

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otra forma de leer  $p \leftrightarrow q$  es diciendo que  $p$  es equivalente a  $q$  o que  $p$  es una condición necesaria y suficiente para  $q$ , y  $q$  es una condición necesaria y suficiente para  $p$ .

### EJEMPLO 13 Bicondicional

Si  $p$ : “ $15 - 8 < 4$ ” es falsa y  $q$ : “3 es un número primo” es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición “ $5 - 8 < 4$  si y sólo si 3 es un número primo”.

**Solución** La proposición “ $5 - 8 < 4$  si y sólo si 3 es un número primo” se puede expresar como  $p \leftrightarrow q$ . Puesto que  $p$  es F y  $q$  es V, la tercera fila en la tabla de verdad de la bicondicional muestra que  $p \leftrightarrow q$  es falsa (F). 

Las proposiciones compuestas pueden combinarse o conectarse con otras para formar proposiciones aún más complejas. Es claro que el valor de verdad de una proposición, por compleja que sea, depende de los valores de verdad de las proposiciones que las componen en sus formas más simples.

Para hacer la tabla de verdad de una proposición asignamos una columna a cada proposición que interviene, sea ésta simple o compuesta, normalmente comenzando con las más simples y progresando en el orden de complejidad de las proposiciones componentes.

El número de filas de la tabla queda dado por la potencia  $2^n$ , donde  $n$  es el número de proposiciones en la forma más simple que entran a formar la proposición dada. Para asignar los valores de verdad a dichas proposiciones se procede de esta forma: la primera columna se llena asignando valores V a la mitad de las filas y valores F a la segunda mitad. La segunda columna se llena asignando valores V a un cuarto de las filas, valores F al segundo cuarto, valores V al tercer cuarto y valores F al último cuarto. La tercera columna se llena asignando valores V a un octavo de las filas, valores F al segundo octavo, valores V al tercer octavo, etcétera. Así, se continúa hasta que terminen las columnas de las proposiciones más simples. Las columnas de las otras proposiciones se llenan a partir de las columnas de las proposiciones más simples que éstas.

### EJEMPLO 14 Formación de una tabla de verdad

Determine la tabla de verdad de la proposición  $(p \wedge q) \wedge r$ .

**Solución** Tomemos las proposiciones  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $(p \wedge q)$  y  $(p \wedge q) \wedge r$  interviniendo en este caso; así, la tabla tendrá cinco columnas, una para cada proposición, incluida la proposición dada.

Por otro lado, tenemos tres proposiciones en sus formas más simples:  $p$ ,  $q$  y  $r$ , así que el número de filas de la tabla es  $2^3 = 8$ . Procedemos a llenar la tabla:

$p$	$q$	$r$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F



### EJEMPLO 15 Valor de verdad

Si sabemos que la proposición  $p$  es verdadera, la proposición  $q$  falsa y la proposición  $r$  verdadera, ¿cuál será el valor de verdad de la proposición  $(p \wedge q) \wedge r$ ?

**Solución** La solución a este problema es muy fácil de obtener, ya que podemos leer en la tercera fila y en la última columna para determinar que cuando  $p$  es V,  $q$  es F y  $r$  es V, la proposición  $(p \wedge q) \wedge r$  es F.



### EJEMPLO 16 Tabla de verdad

Determine la tabla de verdad para la proposición  $\sim p \vee q$ .

**Solución** Las proposiciones representadas son  $p$ ,  $q$ ,  $\sim p$ ,  $\sim p \vee q$ . Así, la tabla tendrá cuatro columnas. Las proposiciones en sus formas más simples, representadas en la proposición dada, son dos:  $p$  y  $q$ ; por tanto, el número de filas de la tabla es  $2^2 = 4$  filas. La tabla es la siguiente:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V



## 1.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 5, escriba cada una de las proposiciones dadas en forma simbólica.

- “Luis es estudiante y Juan es zapatero”.
- “El domingo es un día feriado o José ha sido expulsado”.
- “Si  $2 + 2 = 4$ , entonces  $3 + 3 = 8$ ”.
- “O  $3 + 4 = 7$  o la Tierra es plana”.
- “Antonio es hijo de Luis si y sólo si Luis es el padre de Antonio”.

En los problemas 6 a 10, escriba la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

6.  $p \rightarrow (q \wedge r)$
7. “Si  $2 + 2 = 5$ , entonces  $2 + 4 = 8$ ”.
8. “Si la Tierra es plana, entonces Julio César fue el primer presidente de Estados Unidos”.
9. “Si los cuadrados tienen tres lados, entonces los triángulos tienen cuatro lados”.
10. “Si un hexágono tiene seis lados, entonces la Luna es de queso”.

En los problemas 11 a 20, suponga que  $p$ :  $7 < 9$ ,  $q$ : El Sol es un astro frío y  $r$ : La temperatura está por debajo de cero.

Escriba las proposiciones indicadas.

11.  $p \vee q$
12.  $p \wedge q$
13.  $\neg p \rightarrow q$
14.  $p \rightarrow \neg q$
15.  $(r \wedge p) \rightarrow q$
16.  $[(p \vee q) \wedge (q \wedge r)] \rightarrow r$
17.  $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
18.  $\neg(p \vee r) \vee q$
19.  $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$
20.  $\neg q \leftrightarrow r$

En los problemas 21 a 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

21.  $\neg(p \wedge q)$
22.  $\neg p \vee \neg q$
23.  $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24.  $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge \neg q)$
25. Escriba en forma simbólica el enunciado: “Un número  $p$  es real y no racional siempre que  $p$  sea un irracional” y construya su tabla de verdad.

En los problemas 26 a 30, considere la proposición:

$$[(\neg p \wedge q) \vee (p \vee r) \rightarrow [(p \vee \neg q) \vee (p \vee \neg r)]]$$

e indique cuál es el valor de verdad de esta proposición para cada uno de los casos dados.

26.  $p$  es falso,  $q$  es falso,  $r$  es falso.
27.  $p$  es falso,  $q$  es falso,  $r$  es verdadero.
28.  $p$  es verdadero,  $q$  es falso,  $r$  es verdadero.
29.  $p$  es verdadero,  $q$  es verdadero,  $r$  es falso.
30.  $p$  es verdadero,  $q$  es verdadero,  $r$  es verdadero.

En los problemas 31 a 35, considere las proposiciones  $p$ : un byte tiene 7 bits,  $q$ : una palabra consta de 2 bytes,  $r$ : un bit es un 0 o un 1. Si se sabe que  $p$  es falso y  $q$  y  $r$  son verdaderos, escriba enunciados para las proposiciones dadas en cada caso, y determine si el enunciado es verdadero o falso.

31.  $p \wedge q$
32.  $p \vee r$
33.  $\neg(p \wedge q)$
34.  $\neg p \vee \neg q$
35.  $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \vee r)]$

En los problemas 36 a 40, considere:

$p$ : Panamá está en América Central.

$q$ : Colombia está al sur de Venezuela.

$r$ : Quito es la capital de Ecuador.

Observe que  $p$  y  $r$  son verdaderas, pero  $q$  es falsa. Escriba las proposiciones dadas en forma simbólica y determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa.

36. “Panamá está en América Central y Colombia está al sur de Venezuela.”
37. “Colombia no está al sur de Venezuela.”
38. “Colombia está al sur de Venezuela y Quito es la capital de Ecuador, o Panamá no está en América Central.”
39. “Quito no es la capital de Ecuador ni Panamá está en América Central.”
40. “Si Panamá está en América Central y Colombia no está al sur de Venezuela, entonces ni Panamá está en América Central ni Quito es la capital de Ecuador.”

## 1.3 Proposiciones lógicamente equivalentes

Considere las tablas de verdad de las proposiciones:

a)  $q \vee (r \wedge s)$

$q$	$r$	$s$	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

b)  $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

c)  $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

### Definición 1.3.1 Tautología

Una **tautología** es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero (V), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. En la tabla c) se muestra que  $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$  es una tautología.

### Definición 1.3.2 Contradicción

Una **contradicción** es una proposición cuyo valor de verdad es falso (F), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla b) se muestra que  $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$  es una contradicción.

**Definición 1.3.3 Contingencia**

Una **contingencia** es una proposición que toma valores de verdad verdaderos en unos casos y falsos en otros, según los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla *a*) se muestra que  $q \vee (r \wedge s)$  es una contingencia.

**Definición 1.3.4 Proposiciones equivalentes**

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante la bicondicional se obtiene una proposición que es una tautología. Para indicar que dos proposiciones  $P(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots)$  son lógicamente equivalentes escribimos:  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$  o  $P \Leftrightarrow Q$ .

En la tabla *c*) se muestra que las proposiciones  $p \wedge q$  y  $q \wedge p$  son lógicamente equivalentes, ya que  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$  es una tautología. Podemos escribir  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ .

A continuación enumeramos algunas tautologías e implicaciones lógicas (este concepto se define en la próxima sección) de interés en las aplicaciones. Cabe señalar que la contradicción se representa con  $C$ .

1.  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$  Doble negación
2. *a)*  $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$   
*b)*  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$  Leyes conmutativas  
*c)*  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
3. *a)*  $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$  leyes asociativas  
*b)*  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
4. *a)*  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$  leyes distributivas  
*b)*  $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
5. *a)*  $(p \vee p) \Leftrightarrow p$  leyes de la idempotencia  
*b)*  $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
6. *a)*  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$   
*b)*  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$  leyes de De morgan  
*c)*  $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$   
*d)*  $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
7. *a)*  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$  Implicación  
*b)*  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
8. *a)*  $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$   
*b)*  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$
9. *a)*  $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$   
*b)*  $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$
10.  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  Equivalencia
11.  $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$  Ley de exportación
12.  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow C]$  Reducción al absurdo
13.  $p \Rightarrow (p \vee q)$  Adición
14.  $(p \wedge q) \Rightarrow p$  Simplificación

15.  $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$  Modus ponens
16.  $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$  Modus tollens
17.  $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$  Silogismo disyuntivo
18.  $p \Rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$
19.  $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$  Transitividad de  $\leftrightarrow$
20.  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$  Transitividad de  $\rightarrow$  o silogismo hipotético
21. a)  $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$   
 b)  $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$   
 c)  $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
22. a)  $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$   
 b)  $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$  Dilemas constructivos
23. a)  $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)]$   
 b)  $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)]$  Dilemas destructivos

## 1.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 9, clasifique cada una de las proposiciones dadas como una contingencia, como una tautología o como una contradicción, según corresponda.

1.  $p \vee \sim(p \wedge q)$
2.  $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
3.  $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
4.  $[p \wedge (q \vee r)] \wedge [q \wedge (p \vee r)]$
5.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
6.  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
7.  $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8.  $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
9.  $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas 10 a 14, indique si el par de proposiciones dadas en cada caso es un par de proposiciones lógicamente equivalentes.

10.  $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)], [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$
11.  $p \rightarrow q, \sim(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
12.  $p \wedge q, \sim(\sim p \vee \sim q)$
13.  $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r), p \rightarrow (q \vee r)$
14.  $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), (\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

## 1.4 Argumentos

Un **argumento** es una relación entre un conjunto de proposiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  llamadas **premisas** y otra proposición  $q$  llamada la **conclusión**. Un argumento se denota por:

$$p_1, p_2, \dots, p_n \therefore q \quad (\therefore \text{ se lee por tanto})$$

Se dice que un argumento es válido si las premisas dan como consecuencia la conclusión; más formalmente tenemos la definición siguiente.

**Definición 1.4.1 Argumento**

Un argumento  $p_1, p_2, \dots, p_n \therefore q$  es válido si  $q$  es verdadero cada vez que las premisas  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sean verdaderas.


**Definición 1.4.2 Falacia**

Un argumento que no es válido se llama **falacia**.

**EJEMPLO 1 Argumento**

El argumento  $p, p \rightarrow q \therefore q$  es válido. Este argumento se llama **modus ponendo ponens** o, más corto, **modus ponens**. La demostración de esta regla se obtiene directamente de la tabla:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que en la primera fila de la tabla  $q$  es verdadero cuando  $p$  y  $p \rightarrow q$  lo son; el argumento es válido. 

**EJEMPLO 2 Falacia**

El argumento  $p \rightarrow q, q \therefore p$  es una falacia, ya que en la tercera línea de la tabla anterior se tiene que  $p$  es falso cuando  $p \rightarrow q$  y  $q$  son verdaderos.

Observemos que las proposiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición  $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  es verdadera. De esta manera, el argumento  $p_1, p_2, \dots, p_n \therefore q$  es válido si y sólo si  $q$  es verdadera siempre que  $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  sea verdadera o de forma equivalente, si y sólo si la proposición

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$


es una tautología. 

**EJEMPLO 3 Argumento**

Un principio fundamental del razonamiento lógico dice: “Si  $p$  implica  $q$  y  $q$  implica  $r$ , entonces  $p$  implica  $r$ ”. En otras palabras, el argumento  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$  (ley del silogismo) es válido.

Para comprobarlo sólo debemos mostrar por medio de una tabla de verdad que la proposición  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$  es una tautología.

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observe que en los casos donde  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow r$  son verdaderas, entonces  $p \rightarrow r$  es verdadera; el argumento es válido. 


Es importante señalar que la validez del argumento no depende de los valores de verdad o del contenido de los enunciados que aparecen en el argumento, sino solamente de la estructura formal del argumento.

#### EJEMPLO 4 Argumento

Considere el argumento

- a)  $p \rightarrow q$ : Si un hombre es soltero, es infeliz
  - b)  $q \rightarrow r$ : Si un hombre es infeliz, muere joven
  - c)  $\therefore p \rightarrow r$ : Los solteros mueren jóvenes
- Éste es un argumento de la forma

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r \text{ (silogismo)}$$

el cual ya sabemos que es válido. Observe que en este ejemplo,  $p$ : Él es soltero  $q$ : Él es infeliz y  $r$ : Él muere joven. 

Decimos que una proposición  $P(p, q, \dots)$  implica lógicamente una proposición  $Q(p, q, \dots)$ , denotada por:

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots),$$

si  $Q(p, q, \dots)$  es verdadera cada vez que  $P(p, q, \dots)$  sea verdadera.

#### EJEMPLO 5 Implicación de proposiciones

La proposición  $p$  implica lógicamente la proposición  $p \vee q$ . Para ver esto consideremos la tabla:

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Note que  $p \vee q$  es verdadera cada vez que  $p$  es verdadera. 



Ahora sabemos que si  $Q(p, q, \dots)$  es verdadera cada vez que  $P(p, q, \dots)$  sea verdadera, entonces el argumento

$$P(p, q, \dots) \therefore Q(p, q, \dots)$$

es válido y, recíprocamente, el argumento  $P(p, q, \dots) \therefore Q(p, q, \dots)$  es válido si y sólo si el enunciado  $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$  es siempre verdadero, es decir, si es una tautología. Estas ideas se pueden resumir de la manera siguiente:

Para proposiciones cualesquiera  $P(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots)$  los tres enunciados siguientes son equivalentes:

- a)  $P(p, q, \dots)$  implica lógicamente a  $Q(p, q, \dots)$
- b) El argumento  $P(p, q, \dots) \therefore Q(p, q, \dots)$  es válido.
- c) La proposición  $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$  es una tautología.

Note que si  $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots) \rightarrow P(p, q, \dots)$ , entonces  $P(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots)$  deben tener la misma tabla de verdad y, por tanto,  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$ .

Es importante notar que prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos de condicionales del tipo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

A los  $p_1, p_2, \dots, p_n$  se les llama **hipótesis** y a  $q$  se le llama **conclusión**. Demostrar un teorema significa probar que el condicional es verdadero. Observe que no se pretende demostrar que  $q$  (la conclusión) es verdadero, sino que  $q$  será verdadero siempre que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sean verdaderos. De aquí que las demostraciones matemáticas comienzan frecuentemente con el enunciado “suponga que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son verdaderos” y concluye con el enunciado “por tanto,  $q$  es verdadero”.

Cuando una condicional  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$  es una tautología, entonces siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados que componen  $q$  o de los  $p_i$ . En este caso, el argumento

$$p_1, p_2, \dots, p_n \therefore q$$

o

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

es universalmente válido, sin importar qué enunciados reales se sustituyan por las variables en  $q$  y en los  $p_i$ . La validez depende de la forma de los enunciados y no de sus valores de verdad. Por ello, estos argumentos universalmente válidos están representados por métodos generales de razonamiento correcto, llamados *reglas de inferencia*. Los pasos de la demostración matemática de un teorema deberán seguirse de la aplicación de reglas de inferencia y una demostración matemática debe iniciarse con la hipótesis, seguir a través de varios pasos, cada uno justificado por alguna regla de inferencia, y llegar a la conclusión. Ya vimos que el argumento  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$  es universalmente válido y, por tanto, es una regla de inferencia.

Damos a continuación algunas reglas de inferencia de gran utilidad:

1.  $P$   
 $\therefore P \vee Q$     **adición**
2.  $P \wedge Q$   
 $\therefore P$     **simplificación**
3.  $P$   
 $P \rightarrow Q$   
 $\therefore Q$     **modus ponens**
4.  $P \rightarrow Q$   
 $\sim Q$   

---

 $\therefore \sim P$     **modus tollens**
5.  $P \vee Q$   
 $\sim P$   
 $\therefore Q$     **silogismo disyuntivo**
6.  $P \rightarrow Q$   
 $Q \rightarrow R$   
 $\therefore P \rightarrow R$     **silogismo hipotético**
7.  $P$   
 $Q$   

---

 $\therefore P \wedge Q$     **conjunción**

## 1.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 10, muestre en cada caso si el argumento es válido.

1.  $p \leftrightarrow q, q \therefore p$
2.  $\sim p \rightarrow q, p \therefore \sim q$
3.  $\sim p \rightarrow q, q \therefore p$
4.  $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \therefore r \rightarrow \sim p$
5.  $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow \sim q \therefore p \rightarrow \sim r$
6. Si estudio, no reprobaré matemática. Si no juego basquetbol, entonces estudio. Pero reprobaré la matemática. Por tanto, jugué basquetbol.
7. Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7. O 5 no es primo, o 2 divide a 7. Pero 5 es primo.
8. Las rosas son rojas.  
Las rosas son azules.  
Por tanto, las rosas son rojas si y sólo si son azules.

9. Si trabajo, no puedo estudiar.  
O trabajo, o paso matemática.  
Pasé la matemática.  
Por tanto, estudié.

10.  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \therefore p \leftrightarrow q$

En los problemas 11 a 18, efectúe la demostración requerida.

11. Demuestre que  $p \leftrightarrow q$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .
12. Demuestre que  $p \leftrightarrow \sim q$  no implica lógicamente a  $p \rightarrow q$ .
13. Demuestre que  $p \wedge q$  implica lógicamente a  $p$ .
14. Demuestre que  $\sim p$  implica lógicamente a  $p \rightarrow q$ .
15. Demuestre que  $p \vee q$  no implica lógicamente a  $p$ .
16. Dado  $p, p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow r$ , pruebe  $r$ .
17. Dado  $p \wedge \sim q, p \rightarrow r$  y  $r \rightarrow (s \vee q)$ , pruebe  $s$ .
18. Dado  $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r$ , pruebe  $p \leftrightarrow r$ .

## 1.5 Cuantificadores

A diferencia de las proposiciones que hemos estudiado hasta ahora, el enunciado  $x \geq 3$  no es verdadero ni falso. Cuando la variable  $x$  se sustituye por ciertos valores, por ejemplo 7, la proposición resultante es verdadera, en tanto que para otros valores de  $x$ , por ejemplo 2, la proposición es falsa. Éste es un ejemplo de un enunciado abierto, el cual viene a ser una proposición sólo cuando las variables son sustituidas por los nombres particulares de los objetos. Si un enunciado abierto se llama  $P$  y las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , escribimos  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , y en el caso de una sola variable, escribimos  $P(x)$ .

El enunciado “ $x_1$ , es igual a  $x_1 + x_3$ ” es un enunciado abierto con tres variables. Si lo representamos con  $P(x_1, x_2, x_3)$ , entonces  $P(7, 3, 4)$  es verdadero, ya que  $7 = 3 + 4$ , pero  $P(1, 2, 3)$  es falso.

### Definición 1.5.1 Conjunto de verdad

La colección de objetos que al emplearlos en lugar de las variables en un enunciado abierto lo convierten en una proposición verdadera se llama el **conjunto de verdad** del enunciado.

Antes de determinar el conjunto de verdad es necesario saber cuáles objetos están disponibles para que se les tenga en cuenta. Es decir, debemos haber especificado un universo de discurso. Simbolizamos con  $A$  el conjunto universo.

### EJEMPLO 1 Conjunto universo

Sea  $Q(x)$  el enunciado “ $x^2 = 4$ ”. Si tomamos el conjunto de los números reales ( $R$ ) como el universo de discurso, el conjunto de verdad de  $Q(x)$  es  $\{2, -2\}$ . Si el universo fuera el conjunto de los números naturales, entonces el conjunto de verdad sería  $\{2\}$ .  $\equiv$

Recordemos que un enunciado abierto  $P(x)$  no es una proposición, pero  $P(a)$  sí lo es para cualquier  $a$  en el universo de discurso. Otra forma de construir una proposición a partir de  $P(x)$  es modificándola mediante un cuantificador.

### Definición 1.5.2 Cuantificador universal

Dado un enunciado abierto  $P(x)$  con variables  $x$ , el enunciado  $\forall x, P(x)$  se lee “para todo  $x$ ,  $P(x)$ ” y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para  $P(x)$  es el universo completo. El símbolo  $\forall$  se llama **cuantificador universal**.

### Definición 1.5.3 Cuantificador existencial

El enunciado  $\exists x, P(x)$  se lee “existe  $x$  tal que  $P(x)$ ” y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para  $P(x)$  no es vacío. El símbolo  $\exists$  se llama el **cuantificador existencial**.

### EJEMPLO 2 Cuantificador existencial

Suponga que el universo es el conjunto de los números reales; entonces

- a)  $\exists x, x \geq 3$  es verdadero, pero  $\forall x, x \geq 3$  es falso  
b)  $\exists x, |x| > 0$  es verdadero, pero  $\forall x, |x| > 0$  es falso  
c)  $\exists x, x^2 = -1$  es falso, pero  $\forall x, x + 2 > x$  es verdadero.

≡

### EJEMPLO 3 Cuantificador existencial

Halle una negación de “cada número real positivo tiene un inverso multiplicativo”.

**Solución** Sea el universo el conjunto de todos los números reales; el enunciado puede representarse por

$$\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1$$

La negación es  $\sim(\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$ . Esto puede escribirse de las maneras siguientes:

- a)  $\exists x, \sim(x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$   
b)  $\exists x, (x > 0 \wedge \sim(\exists y) xy = 1)$   
c)  $\exists x, (x > 0 \wedge \forall y, xy \neq 1)$

Esta última se lee: “Existe un número positivo  $x$  para el que no hay inverso multiplicativo”.

≡

### EJEMPLO 4 Cuantificador existencial

En el universo de los números naturales, la proposición  $\exists!x, x$  es un número par positivo y primo; es verdadero, ya que el único elemento del conjunto de verdad es el 2.

≡

### EJEMPLO 5 Cuantificador existencial

El enunciado  $\exists!x, x^2 = 4$  es verdadero si el conjunto universo es el de los números naturales, pero es falso cuando el universo es el conjunto de los números enteros, pues este universo tiene dos números, el 2 y el  $-2$ , que cumplen con la condición  $x^2 = 4$ .

≡

Dado un enunciado abierto  $P(x)$ , la proposición  $\exists!x, P(x)$  se lee “existe un único  $x$  tal que  $P(x)$ ”. El enunciado  $\exists!x, P(x)$  es verdadero cuando el conjunto de verdad consta exactamente de un elemento del universo.



El lector habrá podido notar que un enunciado abierto o predicado se convierte en una proposición cuando intervienen tantos cuantificadores como variables posee dicho enunciado abierto.



### Notas del aula

Las dos equivalencias siguientes son de gran utilidad en las aplicaciones:

- a)  $\sim\forall x, P(x)$  equivale a  $\exists x, \sim P(x)$   
b)  $\sim\exists x, P(x)$  equivale a  $\forall x, \sim P(x)$

## 1.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, considere los enunciados abiertos o predicados dados.

$P(x, y)$ :  $x$  es más rápido que  $y$

$Q(x, y)$ :  $y$  es más alto que  $x$

$R(x)$ :  $x$  pesa más de 200 libras

Escriba las expresiones siguientes:

1.  $P(x, \text{José})$
2.  $Q(\text{Miguel, Luis}) \wedge R(\text{Juan})$
3.  $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$
4.  $Q(x, y) \rightarrow R(x)$

5.  $P(\text{Miguel, José}) \vee [Q(\text{Miguel, José}) \wedge R(\text{José})]$
6.  $\forall x, \forall y Q(x, y) \rightarrow P(x, y)$
7.  $\forall x, P(x, \text{José}) \leftrightarrow R(x)$
8.  $\exists x, R(x) \wedge \forall y P(x, y)$
9.  $\exists y, \forall x, P(x, y) \rightarrow R(x)$
10.  $\forall y, R(\text{Miguel}) \supseteq Q(\text{Miguel}, y)$

En los problemas 11 a 15, escriba los predicados siguientes en forma simbólica:

11. “No todas las piedras preciosas son bonitas”.
12. “Existe un número positivo que es el menor”.
13. “Nadie ama a todo el mundo”.
14. “Existe un único presidente de Colombia”.

15. “Existe un número que es más grande que cualquier solución conocida para el problema o no hay solución”.
16. En forma simbólica, escriba la negación de los predicados dados en el ejercicio anterior.

En los problemas 17 a 21, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

17.  $\forall m, \exists n, 2n = m$  ( $A$  = enteros positivos).
18.  $\forall x, \exists y, xy = 1$  ( $A$  = números reales).
19.  $\exists x, \exists y, xy = 1$  ( $A$  = números reales).
20.  $\exists x, \forall y, (x + y)^2 = x^2 + y^2$  ( $A$  = números reales).
21.  $\exists! x, \forall y, x + y = y$  ( $A$  = números reales).

## 1.6 Conjuntos y elementos

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien desarrolló la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas. La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión a la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, la teoría de los grupos, etcétera.

Supóngase que el proceso mental que une objetos según una característica particular brinda un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al **conjunto**.

En general representamos los elementos con letras minúsculas  $a, b, c, \dots, x, y, z$  y los conjuntos con letras mayúsculas  $A, B, \dots$ . Cuando un elemento  $a$  pertenece al conjunto  $A$  se denota por:

$$a \in A \text{ (“} a \text{ pertenece a } A \text{”)}$$

El símbolo  $\in$  representa la relación fundamental de la teoría de conjuntos, la relación de pertenencia. Ésta es la relación entre un elemento y un conjunto. Para expresar que el elemento  $a$  no pertenece al conjunto  $A$  se representa con:

$$a \notin A \text{ (“} a \text{ no pertenece a } A \text{”)}$$

### Definición 1.6.1 Conjuntos y elementos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas  $A, B, \dots$ . Los objetos que componen el conjunto se denominan **elementos** o miembros y se denotan con letras minúsculas  $a, b, \dots$ .

Si la característica particular que observamos en una colectividad es la de estar en el mismo curso de matemática, entonces esa colectividad constituye un conjunto y cada uno de los compañeros de clase de matemática es un elemento del conjunto.

Hay dos formas de escribir los conjuntos; la primera de ellas sigue el principio de **extensión**, por el cual podemos determinar el conjunto enumerando todos sus elementos. La segunda sigue el principio de **comprensión** o **abstracción**, por el cual es posible determinar un conjunto identificando sus elementos mediante una propiedad común a ellos.

**Definición 1.6.2 Descripción de conjuntos por extensión y por comprensión**

Para escribir un conjunto **por extensión**, se enumeran todos sus elementos separándolos con comas y luego se encierran entre llaves {...}.

Para escribir un conjunto **por comprensión** se elige un elemento arbitrario  $x$  y se señala que cumple la propiedad  $P(x)$ . Finalmente, se encierra toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x \mid x P(x)\}$$

que se lee “ $A$  es el conjunto de todos los elementos  $x$  tales que los  $x$  cumplen la propiedad  $P(x)$ ” ( $\mid$  se lee “tal que”).

**EJEMPLO 1 Conjuntos**

El conjunto de los primeros cinco números enteros positivos puede escribirse por extensión:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pero también se puede escribir por comprensión:

$$A = \{x \mid x \text{ es uno de los primeros cinco enteros positivos}\}$$

Escribimos un conjunto **por extensión** cuando tiene un número reducido de elementos, y lo escribimos **por comprensión** cuando tiene un número grande de elementos.

**EJEMPLO 2 Notación de conjuntos por extensión**

Escriba por extensión el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal del español}\}$$

**Solución**  $A = \{a, e, i, o, u\}$

**EJEMPLO 3**

Escriba por comprensión el conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

**Solución**  $A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo par menor que } 12\}.$

**Definición 1.6.3 Conjuntos iguales**

Decimos que dos conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar  $A$  y  $B$  son iguales se escribe:

$$A = B$$

**EJEMPLO 4 Conjuntos iguales**

Los conjuntos

$$A = \{x \mid x^2 = 4\}$$

y

$$B = \{x \mid x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$$

son iguales, ya que tienen los mismos elementos:  $A = \{-2, 2\}$ ,  $B = \{-2, 2\}$ ;  $A = B$ .  $\equiv$

## 1.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, escriba los conjuntos dados por extensión, cuando sea posible.

1.  $A = \{x \mid x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$
2.  $B = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra agricultor}\}$
3.  $C = \{x \mid x \text{ es un número entero comprendido entre } -1 \text{ y } 1\}$
4.  $D = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$
5.  $E = \{x \mid x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x = 3\}$
6.  $F = \{x \mid x \text{ es un número positivo par}\}$
7.  $G = \{x \mid x \text{ es un múltiplo entero de } 5\}$
8.  $H = \{x \mid x \text{ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con } P\}$ .
9.  $I = \{x \mid x \text{ es el rector de su universidad}\}$
10.  $J = \{x \mid x \text{ es uno de sus profesores}\}$

En los problemas 11 a 20, escriba por comprensión los conjuntos dados.

11.  $A = \{a, e, i, o, u\}$
12.  $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$
13.  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$
14.  $D = \{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\}$
15.  $E = \{4, 9, 16, \dots\}$
16.  $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
17.  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
18.  $H = \{-2, 2\}$
19.  $I = \{\text{Santo Domingo}\}$
20.  $J = \{\}$

## 1.7 Cardinalidad y tipos de conjuntos

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

### EJEMPLO 1 Conjunto finito

El conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  es un conjunto finito, pues tiene un número finito de elementos, seis.  $\equiv$

### EJEMPLO 2 Conjunto infinito

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo}\}$$

es un conjunto infinito, ya que dado cualquier número entero positivo podemos obtener el próximo añadiendo la unidad. Este proceso puede repetirse un número arbitrariamente grande de veces; el proceso nunca termina, por tanto, el número de elementos no es finito.  $\equiv$

El concepto de número de elementos de un conjunto finito es de mucha importancia en las aplicaciones de la teoría de conjuntos.

### Definición 1.7.1 Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito es lo que se llama la **cardinalidad** de dicho conjunto. La **cardinalidad** de un conjunto finito  $A$  se denota por:

$$\text{Card}(A) \text{ o } |A|$$

Muchos autores usan la expresión  $\#A$  para indicar dicha cardinalidad.

### Definición 1.7.2 Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos finitos  $X$  y  $Y$  se dicen ser **equipotentes** si tienen exactamente el mismo número de elementos.

La cardinalidad de un conjunto finito  $A$  es el número entero que representa el número de elementos del conjunto  $A$ . Como hemos dicho, para cualquier conjunto finito  $A$ , su cardinalidad se representa con  $\text{Card}(A)$  o  $|A|$ .

#### EJEMPLO 3 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto  $A = \{h, i, j, k, l, n\}$  es 6, ya que  $A$  tiene seis elementos; por tanto,  $\text{Card}(A) = 6$ . ≡

#### EJEMPLO 4 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$B = \{x \mid x \text{ es un número primo y par}\}$$

es 1, ya que hay un solo número primo que es par, el 2; por ende,  $\text{Card}(B) = 1$ . ≡

#### EJEMPLO 5 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$C = \{a, b, a, a, b\}$$

es 2, ya que  $C$  sólo tiene dos elementos distintos; así,  $\text{Card}(C) = 2$ . ≡

Los conjuntos  $A = \{a, a, b\}$ ,  $B = \{a, b\}$  y  $C = \{b, a\}$  son iguales. Observe que cambiar el orden de los elementos del conjunto no hace que el conjunto varíe; además, cuando algún elemento aparece repetido se cuenta una sola vez.

Por razones técnicas de las aplicaciones se hace necesario considerar el conjunto que carece de elementos. Este conjunto se llama el conjunto **vacío** y se denota por  $\{\}$  o  $\emptyset$ .

#### EJEMPLO 6 Conjunto vacío

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad}\}$$

carece evidentemente de elementos. Por tanto,  $A$  es un conjunto vacío, es decir,

$$A = \{\} \text{ o } A = \emptyset$$
 ≡



**Definición 1.7.3 Conjunto vacío**

El **conjunto vacío** es el que carece de elementos. Se denota por  $\{\}$  o  $\emptyset$ .

El lector puede notar que si  $\emptyset = \{x | P(x)\}$ , la propiedad  $P(x)$  es tal que ningún objeto la satisface.

**Definición 1.7.4 Conjunto unitario**

Un conjunto  $A$  es un **conjunto unitario** si tiene un solo elemento.

**EJEMPLO 7 Conjunto unitario**

El conjunto  $A$  dado por  $A = \{x | x \text{ es una capital de Perú}\}$  es evidentemente un conjunto unitario, ya que hay una sola capital en Perú. Por tanto,  $A$  es un conjunto unitario.  $\equiv$

Note que si  $A = \{x | P(x)\}$  es un conjunto unitario, entonces la propiedad  $P(x)$  que define el conjunto es satisfecha por un solo objeto.

**Definición 1.7.5 Conjunto universal**

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**. Éste se denota por  $U$ .

**EJEMPLO 8 Conjunto universal**

Si trabajamos con conjuntos de comunidades humanas, entonces en Colombia un buen conjunto universal es el de los colombianos que viven en el país.  $\equiv$

**Definición 1.7.6 Subconjunto**

Si cada elemento de un conjunto  $A$  es también elemento de un conjunto  $B$ , entonces se dice que  $A$  es un subconjunto de  $B$ . Se dice también que  $A$  está contenido en  $B$  o que  $B$  contiene a  $A$ . La relación de subconjunto viene dada por:

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A$$

Si  $A = B$ , entonces  $A \subset B$  y  $B \subset A$  son verdaderos.

Si  $A$  es un subconjunto de  $B$ , pero  $A$  y  $B$  no son iguales, entonces decimos que  $A$  es un subconjunto propio de  $B$ .

Si  $A$  no es un subconjunto de  $B$ , es decir, si al menos un elemento de  $A$  no pertenece a  $B$ , escribimos  $A \not\subset B$ .

**EJEMPLO 9 Subconjuntos**

Considere los conjuntos  $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$  y  $C = \{1, 5\}$ .

Observe que todos los elementos del conjunto  $C$  están en el conjunto  $A$ ; por tanto  $C \subset A$ . Asimismo, podemos observar que  $C \subset B$ . Sin embargo, no todos los elementos de  $B$  están en  $A$ , por lo que podemos decir que  $B \not\subset A$ . Además,  $A \not\subset B$ ,  $A \not\subset C$  y  $B \not\subset C$ .  $\equiv$

En los conjuntos dados del ejemplo anterior se advierte que  $C \subset B$ , pero  $B \not\subset C$ . Sin embargo tenemos que:

$$B \not\subset A \quad \text{y} \quad A \not\subset B$$

es decir,  $B$  no es un subconjunto de  $A$  ni  $A$  es subconjunto de  $B$ . En este caso decimos que los conjuntos  $A$  y  $B$  son **no comparables**.

Advertencia



Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , si  $A \subset B$ , entonces es posible que  $A = B$ . Si  $A \subset B$ , pero  $A \neq B$ , entonces se dice que  $A$  es un subconjunto propio de  $B$ .

En muchos casos se usa  $A \subseteq B$  para indicar simplemente que  $A$  es un subconjunto de  $B$  y  $A \subset B$  para denotar que  $A$  es un subconjunto propio de  $B$ .

Si  $A \subset B$ , se dice simplemente que  $A$  es un subconjunto de  $B$  y que  $B$  es un superconjunto para  $A$ . Si lo que interesa es señalar que  $A$  es un subconjunto propio de  $B$ , se expresa de manera categórica.

Para conjuntos  $A$  y  $B$  cualesquiera se tiene:

- a)  $\emptyset \subset A \subset U$
- b)  $A \subset A$
- c) Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , entonces  $A \subset C$
- d)  $A = B$  si y sólo si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

El inciso d) indica que para comprobar que  $A = B$  debemos verificar dos cosas: primero, que  $A \subset B$  y segundo que  $B \subset A$ .

Si  $A$  y  $B$  no tienen elementos en común, entonces se dice que  $A$  y  $B$  son **disjuntos**.

Para conjuntos  $A$  y  $B$  no vacíos se tiene que:

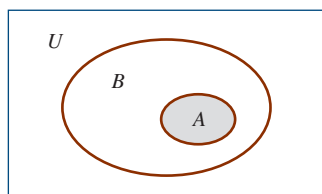
- a)  $A = B$  significa que  $\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$
- b)  $A \subset B$  significa que  $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$
- c)  $A$  y  $B$  disjuntos significa que  $\forall x, \sim(x \in A \wedge x \in B)$

Advertencia

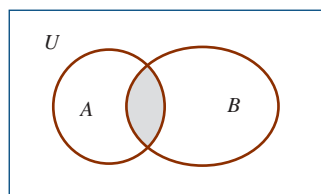


Puesto que  $\forall x, x \in A \rightarrow x \in A$ , se tiene que  $A \subset A$ . Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

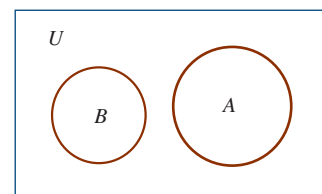
Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos se lleva a cabo con los llamados **diagramas de Venn** (figuras 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3). Estos diagramas son figuras planas cerradas; normalmente, el conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos mediante discos incluidos en el rectángulo.



**FIGURA 1.7.1**  $A$  es un subconjunto de  $B$ ,  $A \subset B$ .



**FIGURA 1.7.2**  $A$  y  $B$  tienen unos elementos en común, otros no.



**FIGURA 1.7.3**  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos.

■ **Familia de conjuntos y conjunto potencia** Considere el conjunto  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ . El objeto 3 es un elemento del conjunto  $A$ , pero 3 no se visualiza como un conjunto; sin embargo  $\{3\}$  no es un elemento de  $A$ , pero es un subconjunto de  $A$ . En símbolos podemos decir que:

$$3 \in A \quad \text{y que} \quad \{3\} \subset A$$

Supóngase que deseamos formar un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos; estaríamos en presencia de una colección de conjuntos o **familia de conjuntos**. Así, si  $A_1, A_2, A_3$  son conjuntos, el conjunto que los tiene como sus elementos es la familia de conjuntos

$$F = \{A_1, A_2, A_3\}$$

Aquí  $A_1 \in F$ , pero  $\{A_1\} \subset F$ .  $A_1$  es un elemento de  $F$ , pero  $\{A_1\}$  es el subconjunto de  $F$  que consta de un elemento,  $A_1$ .

#### EJEMPLO 10 Familia de conjuntos

El conjunto  $A = \{1, 2, 4, 8\}$  no es una familia de conjuntos, ya que sus elementos no son conjuntos.

El conjunto  $F = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}\}$  es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos.

Asimismo, el conjunto  $F = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$  es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos. ≡

Cuando debemos utilizar una sucesión de conjuntos los distinguimos mediante subíndices, de esta forma:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Los subíndices son elementos de un conjunto fijado de antemano; para el desarrollo de estas ideas usaremos el conjunto de los números enteros positivos  $N$  como conjunto de índices. Por ejemplo, el conjunto de  $A_3$  es el conjunto que ocupa el tercer lugar en la sucesión, asimismo para el resto de elementos de la sucesión. Estos conjuntos de la sucesión determinan una familia de conjuntos dada por:

$$F = \{A_i \mid i \in I \subset N\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

donde  $i$  toma los valores 1, 2, 3, ... hasta un número natural  $n$  si la familia es finita.

#### EJEMPLO 11 Familia de conjuntos

Si  $A_1 = \{1, 3, 5\}$ ,  $A_2 = \{3, 7\}$ ,  $A_3 = \{1, 5, 9\}$ ,  $A_4 = \{3, 9\}$ , entonces podemos formar varias familias de conjuntos, una de las cuales es:

$$F = \{A_1, A_2, A_4\}$$

o

$$F = \{\{1, 3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}\} \quad \equiv$$

Dado un conjunto  $A$  cualquiera podemos elegir algunos subconjuntos de  $A$  para formar una familia de conjuntos. Así, los elementos de dicha familia serán subconjuntos de  $A$ .

#### EJEMPLO 12

Dado  $A = \{3, 8, 9\}$ , tomemos algunos subconjuntos de  $A$ ; digamos  $A_1 = \{3\}$ ,  $A_2 = \{9\}$ ,  $A_3 = \{3, 9\}$ ,  $A_4 = \{8, 9\}$ . El conjunto

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

o

$$F = \{\{3\}, \{9\}, \{3, 9\}, \{8, 9\}\}$$

es una familia de subconjuntos del conjunto  $A$  dado.



### Definición 1.7.7 Conjunto potencia

Dado un conjunto  $A$  cualquiera, la familia de conjuntos cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de  $A$  se llama **conjunto potencia** de  $A$ . El conjunto potencia de  $A$  se denota por  $\wp(A)$ .

La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto finito  $A$  es  $2^n$ , donde  $n$  es la cardinalidad de  $A$  (número de elementos de  $A$ ).

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto dado  $A$ , procedemos de esta manera:

- a)  $\emptyset$  y  $A$  son subconjuntos de  $A$ .
- b) Formamos todos los subconjuntos de  $A$  con un elemento.
- c) Formamos todos los subconjuntos de  $A$  con dos elementos.
- .
- .
- .

Así sucesivamente hasta tener  $2^n$  subconjuntos de  $A$ , incluido  $\emptyset$  y  $A$ .

### EJEMPLO 13 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia de  $A = \{a, b, c\}$ .

**Solución** El número de elementos de  $\wp(A) = 2^3 = 8$ . Ahora,

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$



En el ejemplo anterior podemos notar que, por citar un caso,  $\{a, b\} \in \wp(A)$ , no obstante,  $\{a, b\} \subset A$ . Asimismo, podemos decir que  $\{\{a, b\}\} \subset \wp(A)$ .

Note que los elementos de una familia de conjuntos son conjuntos, pero los subconjuntos de una familia de conjuntos son familias de conjuntos.

### EJEMPLO 14 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia del conjunto  $A = \{0, 1\}$ .

**Solución** El número de elementos de  $\wp(A)$  es  $2^2 = 4$ :

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Observe que  $\{1\} \in \wp(A)$ , pero  $\{\{1\}\} \subset \wp(A)$ .



## 1.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

- En los problemas 1 a 20 de los ejercicios 1.6, determine el número de elementos de los conjuntos finitos. Si el conjunto es infinito escriba  $\infty$ .
- Enumere los conjuntos unitarios del ejercicio 1.
- Enumere los conjuntos vacíos del ejercicio 1.

En los problemas 4 a 8, escriba lo que se indica.

- Un conjunto cuya cardinalidad sea 3.
- Un conjunto cuya cardinalidad sea 1.
- Un conjunto cuya cardinalidad sea 0.
- Un conjunto cuya cardinalidad sea 10.
- Un conjunto infinito.

En los problemas 9 a 11, considere  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ;  $A = \{1, 4, 9\}$ ,  $B = \{x \mid x \in U \text{ y } x \text{ es un cuadrado}\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{2, 3, 5, 7\}$  y determine lo que se pide.

- Cuáles conjuntos son subconjuntos de los otros.
- Cuáles conjuntos son subconjuntos propios de otros.
- Los pares de conjuntos que son disjuntos.

En los problemas 12 y 13 compruebe:

- Que si  $A \subset B$ , pero  $A$  y  $B$  son disjuntos, entonces  $A = \emptyset$ .
- Que si  $A \subset B$  y  $C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$ , entonces  $C = A$ .

En los problemas 14 a 23, complete en cada caso el espacio en blanco con el símbolo apropiado ( $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\varsubsetneq$ ) para que la proposición sea verdadera.

- 2 \_\_\_\_\_  $\{x \mid x \text{ es un número primo}\}$ .
- 2 \_\_\_\_\_  $\{1, \{2\}, 2\}$ .
- $\{\{2\}\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, \{2\}, 2\}$ .
- $\{2, 3\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$ .
- $\{\{1, 2\}\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$ .
- $\{p\}$  \_\_\_\_\_  $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{p\}\}$ .
- $\{1\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$ .
- $\{q\}$  \_\_\_\_\_  $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{\{p\}\}\}$ .
- $\{1, 2\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, 2, 3\}$ .
- $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$  \_\_\_\_\_  $\{1, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, 5\}$ .

En los problemas 24 a 35, suponga  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $C = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par menor que } 10\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ , y dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes.

- $A \subset B$
- $B \subset A$
- $C \subset A$
- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset C$
- $C \subset B$
- $A = C$

- $B = C$
- $B$  y  $C$  comparables
- $A$  y  $B$  comparables
- $A$  y  $B$  comparables

En los problemas 36 a 45, dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

- $\emptyset \in A, \forall A$
- $\emptyset \subset A, \forall A$
- $A \subset U, \forall A$
- $A \in U, \forall A$
- $U \not\subset A, \forall A$
- $U \in A, \forall A$
- $\emptyset = \{\emptyset\}$
- $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- $\emptyset \in U$

En los problemas 46 a 50, determine el conjunto potencia de los conjuntos dados.

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$
- $\{1, 2, 3\}$
- $\{a, b, c, d, e\}$
- $\{0, 1\}$

En los problemas 51 a 55, señale cuáles de las familias dadas son conjunto potencia de algún conjunto y determine dicho conjunto.

- $\{\emptyset, \{a\}\}$
- $\{\{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 0, 1\}\}$

En los problemas 56 a 65, suponga  $A = \{1, 3, 5\}$  y dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

- $\emptyset \subset \wp(A)$
- $\emptyset \in \wp(A)$
- $\{1, 3\} \subset \wp(A)$
- $\{1, 2\} \in \wp(A)$
- $\{3, 5\} \subset A$
- $\{3, 5\} \subset \wp(A)$
- $3 \in A$
- $\{1\} \subset \wp(A)$
- $2 \in A$
- $\{5\} \in \wp(A)$

## 1.8 Operaciones con conjuntos

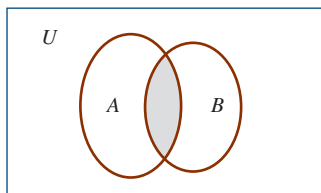
Uno de los hechos más interesantes acerca de la teoría de conjuntos es que las operaciones básicas de esta teoría se corresponden de forma muy estrecha con las estructuras lógicas que obtenemos al utilizar conectivos.

■ **Intersección de conjuntos** La intersección de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. La intersección de  $A$  y  $B$  se denota por  $A \cap B$ , y en lenguaje lógico el conjunto puede escribirse como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

La operación de intersección de conjuntos comparte muchas propiedades con el conectivo  $\wedge$ .

En los diagramas de Venn, la intersección de  $A$  y  $B$  se representa por la región sombreada en la **FIGURA 1.8.1**.



**FIGURA 1.8.1** Intersección de los conjuntos  $A$  y  $B$ .

### PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para la intersección de dos conjuntos  $A$  y  $B$ .  $U$  representa el conjunto universal.

- a)  $A \cap B = B \cap A$ , propiedad conmutativa.
- b)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ , propiedad asociativa.
- c)  $A \cap U = A$ , propiedad de la existencia de la identidad.
- d)  $\emptyset \cap A = \emptyset$ , propiedad de la existencia de un elemento absorbente.

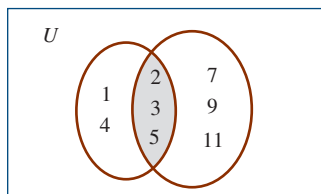
### EJEMPLO 1 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$  determine el conjunto intersección de  $A$  y  $B$ .

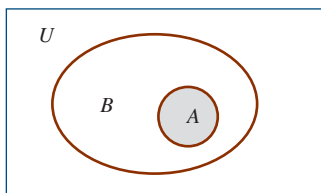
**Solución** Los elementos que están o pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$  son 2, 3, 5; por tanto

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

En la **FIGURA 1.8.2** se muestra la intersección de estos conjuntos. Observe que la parte sombreada contiene precisamente los elementos que pertenecen a  $A \cap B$ . ≡



**FIGURA 1.8.2**



**FIGURA 1.8.3**  $A \cap B = A$

Si  $A \subset B$ , entonces  $A \cap B = A$ , como puede notarse en la **FIGURA 1.8.3**.

Muchas veces es necesario calcular la intersección de tres conjuntos  $A, B, C$ . Sin embargo, es bueno que se destaque que la operación de intersección siempre se lleva a cabo entre dos conjuntos; para realizar la intersección de tres conjuntos, es decir, para determinar el conjunto formado por los elementos comunes de  $A, B$  y  $C$ , primero se busca la intersección de  $A$  y  $B$ ; el resultado buscado es la intersección de  $A \cap B$  con  $C$ . Si  $D = A \cap B$ , entonces,

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = D \cap C$$

## EJEMPLO 2 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{b, c, d, e\}$ ,  $B = \{c, e, h, f, k\}$  y  $C = \{a, b, e, h\}$ , determine  $A \cap B \cap C$

**Solución** Primero se busca  $A \cap B$ :

$$D = A \cap B = \{c, e\}$$

Luego se calcula  $A \cap B \cap C = D \cap C = \{e\}$ . Por tanto,

$$A \cap B \cap C = \{e\}$$

Gráficamente la solución es:

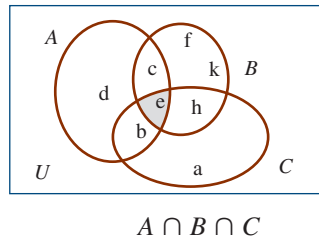


FIGURA 1.8.4

Si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  es una sucesión de conjuntos, podemos calcular su intersección (el conjunto de los elementos comunes a todos los conjuntos) tomándolos dos a dos en la expresión:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

o más breve  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

## EJEMPLO 3 Intersección de conjuntos

Dada la sucesión de conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{3, 5, 7, 9\}, A_3 = \{1, 3, 5, 11, 13\}$$

determine  $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ .

**Solución** Si ponemos  $D_{12} = A_1 \cap A_2$ , entonces

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3$$

Ahora,  $D_{12} = A_1 \cap A_2 = \{3\}$ . Por tanto,

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3 = \{3\} \cap \{1, 3, 5, 11, 13\} = \{3\} \quad \equiv$$

■ **Unión de conjuntos** La unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$  consta de todos los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ . La unión de  $A$  y  $B$  se denota por  $A \cup B$ . En lenguaje lógico podemos escribir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Note que si extraemos un elemento de  $A \cup B$ , éste puede estar sólo en  $A$ , o sólo en  $B$ , o ser un elemento común a  $A$  y a  $B$ .

La representación gráfica de  $A \cup B$  se expresa por una de las situaciones descritas en las FIGURAS 1.8.5 a 1.8.7, en las que la región sombreada en cada caso corresponde al conjunto  $A \cup B$ .

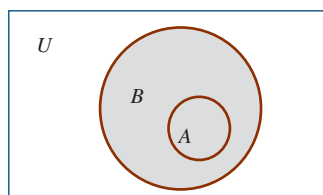


FIGURA 1.8.5

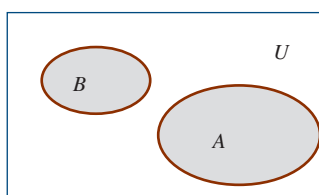


FIGURA 1.8.6

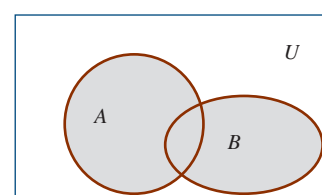


FIGURA 1.8.7

#### EJEMPLO 4 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{b, c, f, g, h\}$ , determine el conjunto  $A \cup B$ .

**Solución** Puesto que en  $A \cup B$  deben estar representados tanto los elementos de  $A$  como los de  $B$ , tenemos que  $A \cup B$  es la unificación de  $A$  con  $B$ , es decir, ponemos juntos los elementos de  $A$  con los de  $B$ :

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

La situación gráfica del ejemplo anterior es la siguiente:

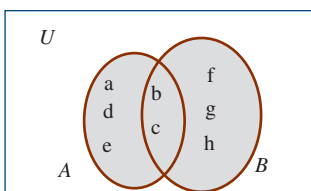


FIGURA 1.8.8

#### PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

Las siguientes propiedades se cumplen para la unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$ .  $U$  representa el conjunto universal.

- a)  $A \cup B = B \cup A$ , propiedad conmutativa.
- b)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ , propiedad asociativa.
- c)  $A \cup \emptyset = A$ , propiedad de la existencia de la identidad.
- d)  $A \cup U = U$ , propiedad de la existencia del conjunto absorbente.

En muchas circunstancias necesitamos obtener la unión de más de dos conjuntos; pero la unión es una operación entre dos conjuntos, de ahí que necesitemos recurrir a la propiedad asociativa para poder obtener un conjunto  $A \cup B \cup C$ , cuando  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conjuntos dados.

Para calcular  $A \cup B \cup C$ , primero obtenemos  $A \cup B$  y luego unimos este resultado con el conjunto  $C$ . Si

$$D = A \cup B$$

$$\text{entonces } A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C.$$



### EJEMPLO 5 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$  y  $C = \{2, 6, 8\}$ , determine  $A \cup B \cup C$ .

**Solución** Primero calculamos  $D = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$  y luego calculamos  $D \cup C$  para obtener  $A \cup B \cup C$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

En la figura se muestra la representación gráfica correspondiente.

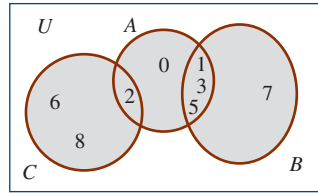


FIGURA 1.8.9

Si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  es una sucesión de conjuntos, entonces la unión de ellos se define por:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \text{ o bien, } \bigcup_{i=1}^n A_i$$

donde las uniones de conjuntos se realizan dos a dos.

### EJEMPLO 6 Unión de conjuntos

Dados  $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A_2 = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $A_3 = \{2, 4, 6, 8\}$ , determine  $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ .

**Solución**  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^3 A_i$  se obtiene calculando en primer lugar el conjunto  $D_{12} = A_1 \cup A_2$ , y luego el resultado se une con  $A_3$ :

$$D_{12} = A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Ahora,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = D_{12} \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

En la FIGURA 1.8.10 se muestra la representación gráfica respectiva.

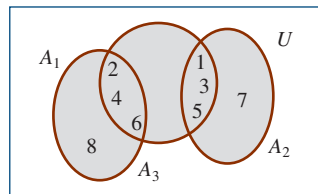


FIGURA 1.8.10

### PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

- a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.
- b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.

■ **Diferencia de conjuntos** La **diferencia** entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  o el complemento relativo de  $B$  respecto a  $A$  es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a  $A$  pero no a  $B$ . La diferencia entre  $A$  y  $B$  se denota por  $A - B$ . En lenguaje de la lógica  $A - B$  se representa como:

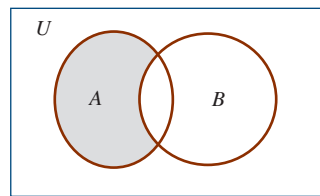
$$A - B = \{x | x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

El complemento de un conjunto  $A$ , que se denota por  $A'$  o por  $A^c$ , es el conjunto  $U - A$ , que puede describirse como:

$$A' = U - A = \{x \in U | \sim(x \in A)\}$$

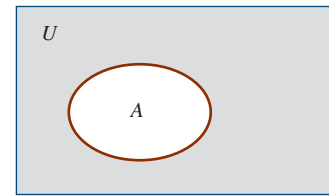
La operación de tomar complementos es similar a la operación de negación en lógica.

En las **FIGURAS 1.8.11** y **1.8.12** se muestra las representaciones gráficas de la diferencia de conjuntos y la de tomar complementos.



$A - B$

**FIGURA 1.8.11** Diferencia de conjuntos



$A' = U - A$

**FIGURA 1.8.12** Complemento de conjuntos

Los hechos siguientes son verdaderos respecto a conjuntos y sus complementos:

- a)  $A \cap A' = \emptyset, \forall A$
- b)  $A \cup A' = U, \forall A$

#### PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes, llamadas *leyes de De Morgan*, se cumplen para conjuntos  $A$  y  $B$  que son subconjuntos del conjunto universal  $U$ :

- a)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- b)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .

#### EJEMPLO 7 Diferencia de conjuntos

Dados  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  y  $B = \{c, d, e, f, g, h\}$ , determine el conjunto  $A - B$ .

**Solución** El conjunto  $A - B$  está formado por todos los elementos de  $A$  que no lo son de  $B$ , así que los elementos de  $A - B$  son  $a, b$ . Por tanto:

$$A - B = \{a, b\}$$



#### EJEMPLO 8 Diferencia de conjuntos

Dados el conjunto universal  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  y el conjunto  $A = \{3, 8, 9\}$ , determine  $A'$ .

**Solución** El complemento de  $A$  es el conjunto formado por todos los elementos de  $U$  que no son elementos de  $A$ :

$$A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\} \quad \equiv$$

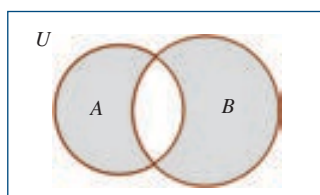
■ **Diferencia simétrica de conjuntos** La **diferencia simétrica** de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto formado por los elementos de la unión de  $A$  y  $B$ , eliminando los elementos de la intersección de  $A$  y  $B$ . La diferencia simétrica de  $A$  y  $B$  se denota por  $A \Delta B$ . Usando el lenguaje lógico podemos expresar  $A \Delta B$  como

$$A \Delta B = \{x | x \in A \cup B\}$$

Note que de acuerdo con la descripción dada para la diferencia simétrica, podemos escribir:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ o } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

En la **FIGURA 1.8.13** se muestra gráficamente la situación que describe  $A \Delta B$ .



**FIGURA 1.8.13**  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Cabe señalar lo siguiente:

- a) Si  $A$  y  $B$  son disjuntos, entonces  $A \Delta B = A \cup B$ .
- b) Si  $A \subset B$ , entonces  $A \Delta B = B - A$ .
- c) Si  $A \supset B$ , entonces  $A \Delta B = A - B$ .
- d)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ , ley asociativa para la diferencia simétrica.
- e)  $A \Delta B = B \Delta A$ , ley conmutativa para la diferencia simétrica.
- f) Si  $A \Delta B = A \Delta C$ , entonces  $B = C$ , ley de cancelación para la diferencia simétrica.
- g)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ , ley distributiva de la intersección respecto a la diferenciación simétrica.

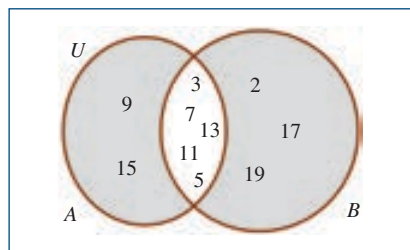
#### **EJEMPLO 9** Diferencia simétrica de conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$  y  $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ , determine  $A \Delta B$ .

**Solución** Sabemos que en  $A \Delta B$  entran todos los elementos de  $A$  y  $B$  que no son comunes a  $A$  y a  $B$ ; por tanto,

$$A \Delta B = \{1, 2, 9, 15, 17, 19\}$$

En la **FIGURA 1.8.14** se muestra gráficamente este resultado. ≡



**FIGURA 1.8.14**  $A \Delta B$

Las operaciones con conjuntos cumplen las leyes del álgebra de conjuntos, que son las siguientes.

#### LEYENDAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

##### Leyes idempotentes

1a.  $A \cup A = A$

1b.  $A \cap A = A$

##### Leyes asociativas

2a.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2b.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

##### Leyes conmutativas

3a.  $A \cup B = B \cup A$

3b.  $A \cap B = B \cap A$

##### Leyes distributivas

4a.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4b.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

##### Leyes de identidad y absorción

5a.  $A \cup \emptyset = A$

5b.  $A \cap U = A$

6a.  $A \cup U = U$

6b.  $A \cap \emptyset = \emptyset$

##### Ley involutiva

7a.  $(A^c)^c = A$

##### Leyes del complementario

8a.  $A \cup A^c = U$

8b.  $A \cap A^c = \emptyset$

9a.  $U^c = \emptyset$

9b.  $\emptyset = U$

##### Leyes de De Morgan

10a.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

10b.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

En muchas ocasiones se presentan situaciones en las que es necesario realizar varias operaciones simultáneamente. Para trabajar o calcular estas expresiones hay que ser cuidadosos al aplicar las operaciones fundamentales con conjuntos, así como las leyes de estas operaciones.

#### EJEMPLO 10 Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, e, f, g\}$ ,  $C = \{a, b, h, k\}$ , determine los conjuntos siguientes, donde  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$ :

a)  $(A - B)' \cap C$

b)  $(A \Delta C) \cup A'$

**Solución** a)  $A - B = \{b, c, d\}$ ,  $(A - B)' = \{a, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$

$$(A - B)' \cap C = \{a, h, k\}$$

$$b) A - C = \{c, d\}, C - A = \{h, k\}, A \Delta C = \{c, d, h, k\}$$

$$A' = \{e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$$

$$(A \Delta C) \cup A' = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$$



## 1.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 20, suponga  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ ,  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{d, e, f, g\}$ ,  $C = \{e, f, g, h, i\}$ ,  $D = \{a, c, e, g, i\}$ ,  $E = \{b, d, f, h\}$ ,  $F = \{a, e, i\}$ , y determine lo que se indica.

1.  $A \cup B$
2.  $A \cap B$
3.  $C \cap D$
4.  $E \cup F$
5.  $A \cap C$
6.  $A \cap C$
7.  $C \cup D$
8.  $E \cap F$
9.  $A'$
10.  $B'$
11.  $B - A$
12.  $E' \cap F'$
13.  $A - B$
14.  $(E \cup F)'$
15.  $A \cap (B \cup C)$
16.  $(A \cap B) \cup (A \cup C)$
17.  $(A \cap D) - B$
18.  $(A - E)'$
19.  $(C \cup A) - E'$
20.  $(B \cup F)' \cup A$

En los problemas 21 a 30, suponga los conjuntos  $K = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $L = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , y determine lo que se indica.

21.  $K'$
22.  $(K \cup L)'$
23.  $(M' \cap K)$
24.  $K \Delta M'$
25.  $(K - L)' \Delta M$
26.  $(M' - K') - L$
27.  $U' - \emptyset'$
28.  $U \Delta L$

$$29. (U')' \Delta \emptyset$$

$$30. (K \Delta L) - M$$

En los problemas 31 a 40, suponga que los conjuntos  $A, B, C$  son cualesquiera,  $U$  el conjunto universo y  $\emptyset$  el conjunto vacío, y simplifique las expresiones dadas.

31.  $(A \cap U) \cup \emptyset$
32.  $(A - U) \cap (B - \emptyset)$
33.  $(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A)$
34.  $A \cap (A \cup B)$
35.  $(B \cup U) \cap (A \cap U)$
36.  $(A \cap A')'$
37.  $U \cap U$
38.  $A \Delta U$
39.  $B \Delta \emptyset$
40.  $(B \Delta U)'$

En los problemas 41 a 50, suponga dados los conjuntos  $A, B$  y  $C$  no vacíos; use diagramas de Venn para ilustrar los resultados obtenidos al efectuar las operaciones indicadas en las expresiones dadas.

41.  $A \cup B$
42.  $A \cap B$
43.  $A - B$
44.  $A \Delta B$
45.  $(A' \cap B') \cap C'$
46.  $B' \cup A'$
47.  $A' \cap B$
48.  $(A \cup B)' \cap (A \cup C)'$
49.  $(A' \Delta B') \cap C'$
50.  $A \cap B'$

En los problemas 51 a 56, si sabemos que un conjunto  $G$  es subconjunto de un conjunto  $A$  no vacío, determine la veracidad de los enunciados dados.

51.  $A \cap G = G$
52.  $G \cup A = A$

53.  $(G - A) \supset A$   
 54.  $(G - A) \supseteq G$   
 55.  $G \Delta A = A \cup G$   
 56.  $(A - G) \cap A = (A - G)$

En los problemas 57 a 62, considere los conjuntos

$A_1 = \{2, 3, 5\}$ ,  $A_2 = \{1, 4\}$ ,  $A_3 = \{1, 2, 3\}$ ,  $A_4 = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  
 $A_5 = \{3, 5, 8\}$ ,  $A_6 = \{1, 7\}$ ,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , y  
 determine lo que se indica.

57.  $\bigcup_{i=1}^6 A_i$

58.  $\bigcup_{i=3}^5 A_i'$

59.  $\bigcap_{i=4}^6 A_i$

60.  $\bigcap_{i=2}^4 (A_i - A_{i+1})$

61.  $\bigcap_{i=2}^4 A_i' \Delta \bigcap_{i=2}^4 A_i$

62.  $\wp\left(\bigcap_{i=2}^3 A_i\right)$

En los problemas 63 a 67, considere conjuntos  $A$  y  $B$  cualesquiera y realice las demostraciones propuestas.

63. Demuestre que  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ .  
 64. Demuestre que  $(A \cup B) \cap B' = A$  si y sólo si  $A \cap B = \emptyset$ .  
 65. Demuestre que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $U$ , entonces  $A \cap B' = A$  si y sólo si  $A \cap B = \emptyset$ .  
 66. Demuestre que  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .  
 67. Demuestre que  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

## 1.9 Conjuntos y técnicas de conteo

Una de las ideas más importantes en la aplicación de la teoría de conjuntos está relacionada con el proceso de contar. Se cuenta el número de elementos de un conjunto, el número de maneras en que un proceso puede ocurrir, etcétera. En esta sección consideramos la solución de estos problemas a partir de la relación que expresa el número de elementos en la unión de conjuntos. En el tratamiento del problema entran dos situaciones: primero, cuando los conjuntos que intervienen son disjuntos, y segundo, cuando no lo son.

■ **Caso de pares de conjuntos disjuntos** Parece razonable esperar que la cardinalidad de  $A \cup B$ ,  $|A \cup B|$  sea igual a  $|A| + |B|$ , ya que la unión de  $A$  y  $B$  se obtiene juntando los elementos de  $A$  con los de  $B$ . Éste es el caso cuando  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos, ya que cuando contamos sus elementos sabemos que cada uno viene de  $A$  o de  $B$ , pero no de los dos al mismo tiempo. Esto desemboca en el principio de conteo siguiente.

### PRINCIPIO DE CONTEO I: CON CONJUNTOS DISJUNTOS

Si  $A$  y  $B$  son disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

### EJEMPLO 1 Conteo

Sea  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{a, b, c\}$ ; determine  $|A \cup B|$ .

**Solución** Por ser  $A$  y  $B$  disjuntos, al contar los elementos de  $A \cup B$ , cada elemento se cuenta una sola vez; por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 2 + 3 = 5$$

Es claro que puesto que  $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$ , se tiene que  $|A \cup B| = 5$ . ≡

■ **Caso de pares de conjuntos no disjuntos** Si  $A$  y  $B$  no son disjuntos, entonces el problema de determinar el número de elementos de  $A \cup B$  es menos sencillo. Si contamos los elemen-

tos de  $A$  y los elementos de  $B$ , y sumamos los números que resultan de estas cuentas tratando de obtener el número de elementos de  $A \cup B$ , encontramos que algunos de los elementos han sido contados dos veces. Los elementos de la intersección de  $A$  y  $B$  se contaron dos veces, una vez cuando contamos los de  $A$  y una segunda vez cuando contamos los de  $B$ ; de ahí que para que cada elemento de  $A \cup B$  sea contado una sola vez debemos restar el número de elementos de  $A \cap B$  a la suma del número de elementos de  $A$  y de  $B$ .

### PRINCIPIO DE CONTEO II: CON CONJUNTOS NO DISJUNTOS

Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos cualesquiera, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Observe que la última relación también se cumple cuando  $A$  y  $B$  son disjuntos, es decir,  $A \cap B = \emptyset$ , ya que  $|\emptyset| = 0$ .

#### EJEMPLO 2 Conteo

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{3, 4, 5\}$ , entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } A \cap B = \{3\}$$

En este caso  $|A| = 3$ ,  $|B| = 3$ ,  $|A \cap B| = 1$ ; por tanto  $|A \cup B|$ , como se puede comprobar contando los elementos de  $A \cup B$ . ≡

#### EJEMPLO 3 Conteo

Suponga que  $A$  y  $B$  son tales que  $A = 5$ ,  $B = 8$  y  $|A \cup B| = 11$ . Determine  $|A \cap B|$ .

**Solución** Si llamamos  $x$  al número  $|A \cap B|$ , entonces por la fórmula sabemos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - x$$

es decir,  $11 = 5 + 8 - x$  y de aquí se tiene

$$x = 13 - 11 = 2$$

por tanto  $|A \cap B| = 2$ . ≡

#### EJEMPLO 4 Conteo

De un total de 35 programadores entrevistados para un trabajo, 25 conocían Visual Basic, 28 conocían Java y dos no conocían ninguno de estos dos lenguajes; ¿cuántos conocían ambos lenguajes?

**Solución** Puesto que dos de ellos no conocían lenguaje alguno, se tiene que los que conocían por lo menos un lenguaje eran:

$$35 - 2 = 33$$

Ahora, si  $A$  = el conjunto de los que conocían Visual Basic,  $B$  = el conjunto de los que conocían Java, entonces  $A \cup B$  = el conjunto de los que conocían por lo menos uno de estos lenguajes, y  $A \cap B$  = el conjunto de los que conocían ambos lenguajes.

Puesto que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

se tiene que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

pero  $|A| = 25$ ,  $|B| = 28$ ,  $|A \cup B| = 33$ ; por tanto:

$$|A \cap B| = 25 + 28 - 33 = 20$$

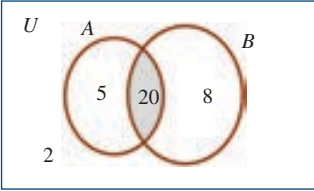
20 personas conocían ambos lenguajes. ≡

Si en el problema anterior quisiéramos saber el número de personas que conocen sólo Visual Basic, tendríamos que restarle al número de los que conocen Visual Basic al número de los que conocen Visual Basic y Java, es decir,

$$|A| - |A \cap B| = 25 - 20 = 5$$

Asimismo, para conocer el número de personas que conocían sólo Java, tendríamos que restar al número de los que conocían Java el número de los que conocían Visual Basic y Java, es decir,

$$|B| - |A \cap B| = 28 - 20 = 8$$



**FIGURA 1.9.1** Diagrama de Venn para el ejemplo 4

Si  $U$  = el conjunto de todos los entrevistados (35), entonces el diagrama de la **FIGURA 1.9.1** muestra la distribución de los conjuntos implicados en el problema.

■ **Caso de la unión de tres conjuntos** El trabajo de conteo para los casos en los que intervienen tres conjuntos es tan sencillo como el trabajo con dos conjuntos. Observe que:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

pero

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

y

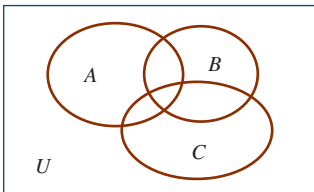
$$|A \cup (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

por tanto:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Observe cómo se utilizan las leyes asociativa para la unión de conjuntos y distributiva de la intersección respecto a la unión de conjuntos en la obtención de esta última relación.

Del diagrama de la **FIGURA 1.9.2** podemos deducir varios hechos interesantes:



**FIGURA 1.9.2**

a) El número de elementos que sólo están en A:

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

b) El número de elementos que están sólo en B:

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

c) El número de elementos que están sólo en C:

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

d) El número de elementos que están en  $A \cap B$ , pero no en C:

$$|A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

e) El número de elementos que están en  $A \cap C$ , pero no en B:

$$|A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$



f) El número de elementos que están en  $B \cap C$ , pero no en  $A$ :

$$|B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

g) El número de elementos que están en  $A$  o en  $B$ , pero no en  $C$ :

$$|A \cup B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

h) El número de elementos que están en  $A$  o en  $C$ , pero no en  $B$ :

$$|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

i) El número de elementos que están en  $B$  o en  $C$  pero no en  $A$ :

$$|B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

j) El número de elementos de  $A \cup B \cup C$  puede ser distinto al número de elementos del universo  $U$ .

### EJEMPLO 5 Aplicación de conteo de conjuntos

Una encuesta entre 100 estudiantes arrojó lo siguiente:

- 32 estudian matemática.
- 20 estudian física.
- 45 estudian biología.
- 15 estudian matemática y biología.
- 7 estudian matemática y física.
- 10 estudian física y biología.
- 30 no estudian ninguna de las tres asignaturas.

- a) Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres asignaturas.  
 b) Encuentre el número de estudiantes que cursan una y sólo una de las tres asignaturas.

**Solución** Supongamos  $M$  = el conjunto de los que estudian matemática,  $F$  = el conjunto de los que estudian física y  $B$  = el conjunto de los que estudian biología. Entonces,

$$|M| = 32, |F| = 20, |B| = 45, |M \cap F| = 7, |M \cap B| = 15, |F \cap B| = 10$$

- a) Es claro que los que intervinieron en la encuesta constituyen el universo  $U$ , de aquí que  $U = 100$ . Asimismo, los que estudian alguna de las tres asignaturas están representados por  $M \cup F \cup B$  y los que no estudian ninguna de las asignaturas son 30 personas; de ahí que:

$$|M \cup F \cup B| = 100 - 30 = 70$$

El número de estudiantes que toman las tres asignaturas constituyen el conjunto  $|M \cap F \cap B|$ ; de ahí que como

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|$$

se tiene que

$$|M \cap F \cap B| = |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B|$$

es decir

$$70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 = 5$$

Así que los que estudian las tres asignaturas son cinco estudiantes.

b) El número de los que estudian sólo matemática está dado por:

$$|M| - |M \cap F| - |M \cap B| + |M \cap F \cap B| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$$

Los que estudian sólo física son:

$$|F| - |M \cap F| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

Los que estudian sólo biología son:

$$|B| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$$

Así que los que estudian una y sólo una de las asignaturas son:

$$15 + 8 + 25 = 48$$



### EJEMPLO 6 Aplicación de conteo de conjuntos

En una encuesta sobre los medios de transporte urbano más comunes, a cada persona se le pregunta si el taxi, el autobús o el auto privado es el medio más usado para ir al trabajo. Se permite más de una respuesta. El resultado de la encuesta es el siguiente:

- 0 personas opinaron a favor del taxi.
- 35 personas opinaron a favor del autobús.
- 100 personas opinaron a favor del auto privado.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del autobús.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del auto privado.
- 20 personas opinaron a favor del autobús y del carro privado.
- 5 personas opinaron a favor de los tres medios de transporte.

¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

**Solución** Supongamos  $A$  = los que opinaron a favor del taxi,  $B$  = los que opinaron a favor del autobús y  $C$  = los que opinaron a favor del auto privado. Entonces, si suponemos que todos los encuestados respondieron la entrevista, se tiene que  $A \cup B \cup C$  es el conjunto de los que respondieron y es a la vez el conjunto universo  $U$ . Asimismo,  $|A \cap B| = 15$ ,  $|A \cap C| = 15$ ,  $|B \cap C| = 20$ ,  $|A \cap B \cap C| = 5$ . Ahora,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 30 + 35 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5 = 120 \end{aligned}$$

Por tanto, 120 personas respondieron a la encuesta.



## 1.9 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 6, suponga que  $|B| = 12$ ,  $|C| = 11$ ,  $|D| = 8$ ,  $|B \cup C| = 20$ ,  $|B \cup D| = 20$  y  $|D \cap C| = 3$  y determine lo que se indica.

1.  $|B \cap C|$
2.  $|B - D|$
3.  $|D \cup C|$

4.  $|B \cap D|$
5.  $|B - C|$
6.  $|B \Delta D|$

En los problemas 7 a 10, suponga que  $|A| = 35$ ,  $|B| = 23$ ,  $|C| = 28$ ,  $|A \cap B| = 15$ ,  $|A \cap C| = 13$ ,  $|B \cap C| = 11$ ,  $|A \cup B \cup C| = 52$ , y determine lo que se indica.

7.  $|A \cap B \cap C|$
8.  $|(A \cap C) - B|$
9.  $|(A \cap B) - C|$
10.  $|(A \cap C) - A|$
11. En una encuesta de 60 personas se encontró que 25 leen revistas políticas, 26 leen revistas científicas y 26 leen revistas de entretenimiento. Se determinó, además, que nueve personas leen revistas políticas y de entretenimiento, once leen revistas políticas y científicas, ocho leen revistas científicas y de entretenimiento y ocho no leen revista alguna.
  - a) Determine el número de personas que leen los tres tipos de revistas.
  - b) Determine el número de personas que leen exactamente un tipo de revistas.
12. Una encuesta hecha a 100 músicos populares mostró que 40 de ellos usaban guantes en la mano izquierda y 39 usaban guantes en la mano derecha. Si 60 de ellos no usaban guantes, ¿cuántos usaban guantes en la mano derecha solamente?, ¿cuántos usaban guantes en la mano izquierda solamente?, ¿cuántos usaban guantes en ambas manos?
13. En la clase de educación física se inscribieron 200 estudiantes; se les preguntó si querían trotar o nadar como únicas dos alternativas. Decidieron trotar 85 de ellos, 60 también aceptaron nadar. En total, ¿cuántos tomaron natación?, ¿cuántos tomaron natación pero no aceptaron trotar?
14. De 30 estudiantes en una clase de matemática, 26 aprobaron el primer examen parcial y 21 aprobaron el segundo examen parcial. Si dos estudiantes reprobaron ambos exámenes, ¿cuántos aprobaron ambos exámenes?
15. Un total de 60 clientes potenciales visitaron una tienda de artículos para computadoras. De ellos, 52 compraron algún artículo; 20 compraron papel, 36 compraron discos com-
- pactos y doce compraron tóner para impresoras. Si seis compraron papel y discos, nueve compraron discos y cintas y cinco compraron papel y tóner, ¿cuántos compraron los tres artículos?
16. Un total de 35 sastres fueron entrevistados para un trabajo; 25 sabían hacer trajes, 28 sabían hacer camisas, y dos no sabían hacer ninguna de las dos cosas. ¿Cuántos sabían hacer trajes y camisas?
17. A principios de la década de 1960 se hizo una encuesta a 120 residentes de una ciudad latinoamericana sobre su interés en los tres equipos del área más cercana a la ciudad. De éstos, 40 seguían al equipo A, 28 seguían al equipo B y 31 al equipo C; 23 seguían al A y al B; 19 seguían al equipo B y al equipo C, 25 seguían al equipo A y al equipo C y 18 personas seguían a los tres equipos. ¿Cuántas de estas personas no seguían a equipo alguno?, ¿cuántos seguían al equipo A y al equipo C, pero no al equipo B?
18. De 1 200 estudiantes de primer año en una universidad, 582 tomaron educación física, 627 tomaron español, 543 tomaron matemática, 217 tomaron educación física y español, 307 tomaron educación física y matemática, 250 tomaron matemática y español, 122 tomaron los tres cursos. ¿Cuántos no tomaron ninguno de los tres cursos?
19. En una encuesta aplicada a 260 estudiantes se obtuvieron los datos siguientes: 64 toman un curso de matemática, 94 toman un curso de computación, 58 toman un curso de administración, 28 toman cursos de matemática y administración, 26 toman cursos de matemática y computación, 22 toman cursos de administración y computación, y 14 toman los tres cursos.
  - a) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta no toman ninguno de los tres cursos?
  - b) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta toman sólo el curso de computación?

## Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Postulados o axiomas

Teoremas

Proposiciones

Simple

Compuestas

Conectivos lógicos

Negación

Conjunción

Disyunción inclusiva

Disyunción exclusiva

Condicional

Bicondicional

Tabla de verdad

Cuantificadores

Universal

Existencial

Enunciado abierto

Conjuntos y elementos

Cardinalidad

Familias de conjuntos

Conjunto potencia

Operaciones con conjuntos

Unión

Intersección

Complemento

Diferencia

Diferencia simétrica

Diagramas de Venn

Técnicas de conteo

En los problemas 1 y 2, establezca la proposición recíproca inversa y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

1. “Si  $2 + 2 = 4$ , entonces no soy el rey de Inglaterra.”
2. “Si tengo tiempo y no estoy cansado, iré a la tienda.”

En los problemas 3 y 4, considere que la proposición “estudiaré matemática” se representa por la letra  $p$ , la proposición “iré al cine” por la letra  $q$  y la proposición “estoy de buen humor” por la letra  $r$ , y escriba en lenguaje simbólico los enunciados siguientes:

3. “Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine.”
4. “No iré al cine y estudiaré matemática.”

En los problemas 5 al 8, clasifique las proposiciones siguientes como contingencias, contradicciones o tautologías.

5.  $p \wedge p$
6.  $q \vee (q \wedge p)$
7.  $(p \wedge q) \vee r \rightarrow q$
8.  $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \sim q)$

En los problemas 9 y 10, determine en cada caso si el par de proposiciones son lógicamente equivalentes.

9.  $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10.  $p \vee (p \wedge q), p$

En los problemas 11 y 12, suponga que el universo de discurso está formado por todos los números enteros; diga cuál es el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas, escriba su negación en cada caso, así como su valor de verdad.

11.  $\forall x, x$  dividido por 2 es un entero.
12.  $\exists x, \exists y, xy = 1$

En los problemas 13 y 14, construya la tabla de verdad para cada una de las proposiciones dadas.

13.  $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
14.  $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

En los problemas 15 y 16, diga si los pares de proposiciones dadas están formados por proposiciones lógicamente equivalentes.

15.  $(p \vee r) \wedge (q \rightarrow r), (p \rightarrow q) \rightarrow r$
16.  $\sim q, (p \vee q) \rightarrow p$

En los problemas 17 y 18, diga si el argumento dado en cada caso es válido o es una falacia.

17. Si llegué en auto al trabajo, entonces llegué cansado a él. Llegué cansado al trabajo. Por tanto, manejé camino al trabajo.

18. Si trabajo duro y tengo talento, entonces seré un músico. Si soy músico, entonces seré feliz. Por tanto, si no seré feliz, entonces no trabajé duro o no tuve talento.

En los problemas 19 a 21, considere la proposición  $\forall x, \forall y, x < y \rightarrow \exists z, x < z < y$

19. Escriba su negación.
20. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números reales o los racionales.
21. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números enteros positivos o los números enteros.
22. Describa los métodos que ha usado para hacer demostraciones y dé algunos ejemplos.

En los problemas 23 y 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

23.  $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24.  $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas 25 y 26, discuta (analice y opine) cada uno de los argumentos dados.

25. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por tanto, no obtendré el puesto o no trabajaré duro.
26. Un lógico dice a su hijo: “Si no terminas la cena, te irás directo a dormir y no verás televisión”. Terminó la cena y fue enviado directamente a la cama.

En los problemas 27 y 28, demuestre los teoremas dados por el método que considere apropiado.

27. Si  $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s$  y  $r \rightarrow t$ , entonces  $p \rightarrow (s \vee t)$
28. Si  $p \rightarrow (q \wedge r), (q \vee s) \rightarrow t$  y  $p \vee s$ , entonces  $t$ .

En los problemas 29 a 31, escriba el significado de los enunciados dados si se considera un universo de discurso  $A_1$  que consta de los miembros de un club y un universo  $A_2$  de líneas aéreas. Sea  $P(x, y)$  el predicado “ $x$  ha sido pasajero de  $y$ ”; escriba el significado de cada uno de los enunciados siguientes.

29.  $\forall x, \forall y, P(x, y) \leftrightarrow \forall y, \forall x P(x, y)$
30.  $\exists x, \exists y, P(x, y) \leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$
31.  $\exists x, \forall y, P(x, y) \rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

En los problemas 32 y 33, pruebe los enunciados dados por el modo de demostración que considere apropiado en cada caso.

32. “Si  $x$  es un número primo, entonces  $x + 7$  es un número compuesto”.
33. “Para todo número irracional  $t, t - 8$  es irracional.”

En los problemas 34 a 36, complete.

34. Si  $A \subset B$ , entonces

$$A \cup B = \quad A \cap B = \quad A - B =$$

35. Si  $A$  y  $B$  son disjuntos, entonces

$$A - B = \quad A \cap B = \quad B - A =$$

36. Si  $A = \emptyset$ , entonces

$$A \cup B = \quad A \cap B = \quad A \Delta B =$$

En los problemas 37 a 40, determine la cardinalidad de cada uno de los conjuntos dados.

37.  $A = \{x \mid x = 5n + 2, n \in \mathbb{N}\}$

38.  $B = \{x + 3 \mid 2 < x < 12, x \in \mathbb{N}\}$

39.  $C = \{2n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

40.  $D = \{x - 1 \mid 6 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$

En los problemas 41 a 46, dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

41.  $3 \in \{3\}$

42.  $5 = \{5\}$

43.  $\{6\} \subset \{\{6\}\}$

44.  $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

45.  $\emptyset \in \{2\}$

46.  $\{2\} \subseteq \{2\}$

En los problemas 47 a 52, considere  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  y efectúe las operaciones de conjuntos indicadas.

47.  $(A' - B) \cap C$

48.  $(B \Delta C)' \cup B$

49.  $(B' \cup A') \Delta C$

50.  $(C' \cap A) \cup B$

51.  $\wp(A) \cap \wp(C)$

52.  $(A \cup B) \cap C'$

En los problemas 53 y 54 demuestre que:

53.  $A \Delta A = \emptyset, \forall A$

54.  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C), \forall A, B, C$

En los problemas 55 a 58, considere  $U = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{0, 1\}$ ,  $A_3 = \{0, 3\}$ ,  $A_4 = \{1, 2, 3\}$ ,  $A_5 = \{0, 2, 3\}$  y determine lo que se indica.

55.  $\bigcup_{i=1}^3 A_i \Delta \bigcap_{i=1}^4 A_i$

56.  $\bigcap_{i=1}^5 A_i' \cup \left( \bigcup_{i=1}^2 A_i \right)$

57.  $\wp\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) - \wp\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i'\right)$

58.  $\bigcap_{i=1}^4 (A_i - A_{i+1})$

En los problemas 59 a 62, trace una representación en diagrama de Venn del resultado de las operaciones en cada caso.

59.  $(A \cup B) - (A \cap B)$

60.  $A - (B - C)$

61.  $A' \cup (B' - C)'$

62.  $(A' \cup B') \cap (C \cap B)$

En los problemas 63 a 66, considere conjuntos  $A, B, C$  de un cierto conjunto universal  $U$  y diga cuáles de las afirmaciones dadas son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de que una afirmación sea falsa, dé un ejemplo en el cual la afirmación no se cumpla.

63.  $(A \cup B) \subset A \cap B$  implica que  $A = B$

64.  $(A \cup \emptyset) \cup B = B \quad \forall A, B$

65.  $A \cap (\emptyset \cup B) = A$  siempre que  $A \subset B$

66.  $A \cup B = A' \cup B' \quad \forall A, B$

67. Un pueblo pequeño posee 300 automóviles para el transporte público de sus habitantes. Se sabe que 110 de estos autos tienen más de 20 años de edad, que 120 son de la Nissan y que 50 son de la Nissan con más de 20 años de edad. Determine el número de carros que:

- No son de la Nissan.
- No son de la Nissan y tienen más de 20 años.
- Son de la Nissan con 20 o menos años.
- No son de la Nissan y tienen 20 o menos años.
- Tienen 20 o menos años.

68. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 corren. Se sabe que 20 personas nadan y montan bicicleta, que 32 corren pero no montan bicicleta y 10 personas realizan las tres actividades.

- ¿Cuántas personas montan bicicleta pero no nadan ni corren?
- Si 21 personas corren y nadan, ¿cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

69. Al interrogar a una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al teatro, la danza o la poesía, se encontró que 125 prefieren el teatro, 180 prefieren la danza, 65 la poesía, 100 teatro y danza, 25 teatro y poesía, 40 danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 250 atletas tienen:

- Al menos una de estas tres preferencias.
- Ninguna de estas tres preferencias.
- Sólo una de estas tres preferencias.
- Cuando mucho una de estas tres preferencias.
- Exactamente dos de estas preferencias.

**70.** Una agencia de automóviles vendió durante un año 180 unidades con las características siguientes:

- 57 tenían transmisión mecánica.
- 77 tenían aire acondicionado.
- 45 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado.
- 10 tenían transmisión mecánica, pero no tenían aire acondicionado ni equipo de música.
- 28 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado, pero no tenían equipo de música.
- 90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas.
- 19 tenían aire acondicionado y equipo de música.

¿Cuántas de estas unidades tenían equipo de música?