¿Para qué sirve el Cálculo?

En la ciencia, ingeniería, economía, e incluso en la psicología, con frecuencia se desea describir o **modelar** el comportamiento de algunos fenómenos o sistemas en términos matemáticos. Este proceso de modelado incluye:

i. Identificación de las variables que son responsables de los cambios en el sistema.
ii. Un conjunto razonable de suposiciones acerca del sistema.

Esto da como resultado una descripción matemática del sistema que es lo que se conoce como **Modelo Matemático,** y en muchos casos es una ecuación diferencial. Por ejemplo:

- **Caída libre de un cuerpo**

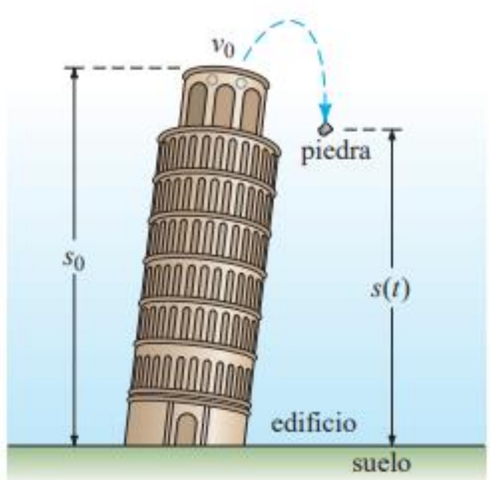


FIGURA Posición de la piedra medida desde el nivel del suelo.

La segunda ley del movimiento de Newton indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a o, más exactamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

Supongamos ahora que se arroja una roca hacia arriba desde el techo de un edificio como se muestra en la figura. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la roca respecto al suelo al tiempo t? La aceleración de la roca es la segunda derivada

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

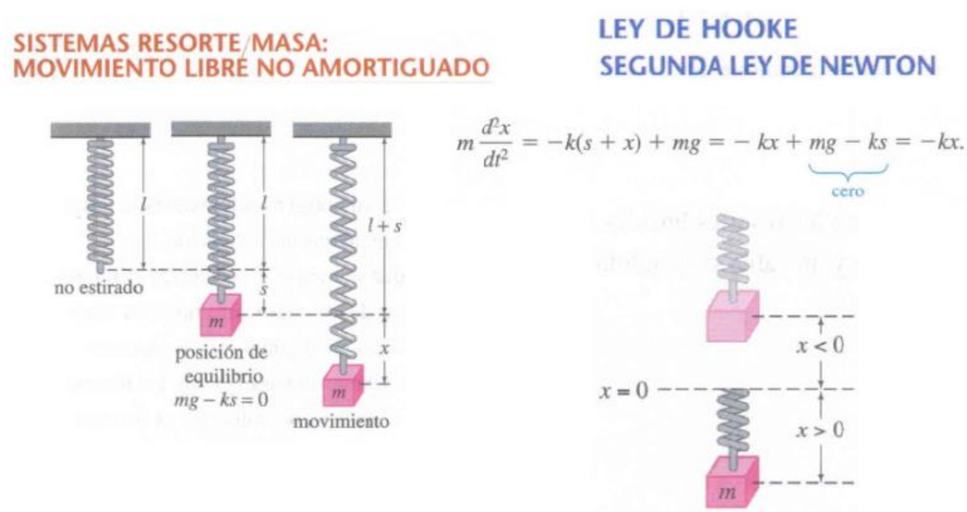
Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva y que no hay otra fuerza, además de la fuerza de la gravedad, que actúe sobre la roca, entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg$$

O bien:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

- **Sistema Masa y Resorte:**



Para determinar (modelar) el desplazamiento vertical $x(t)$ de una masa sujeta a un resorte se usan dos leyes empíricas diferentes:

i. La segunda Ley de Newton: La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo en movimiento es $F = ma$
ii. La Ley Hooke: La fuerza de restitución de un resorte estirado es proporcional a su alargamiento $s + x$, esto es, la fuerza de restitución es: $k(s + x)$, donde $k > 0$ es una constante.

Cuando el sistema está en movimiento, la fuerza neta que actúa sobre la masa es $F = -kx$, por lo que la ecuación diferencial del movimiento vertical de la masa está dado por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

O bien:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

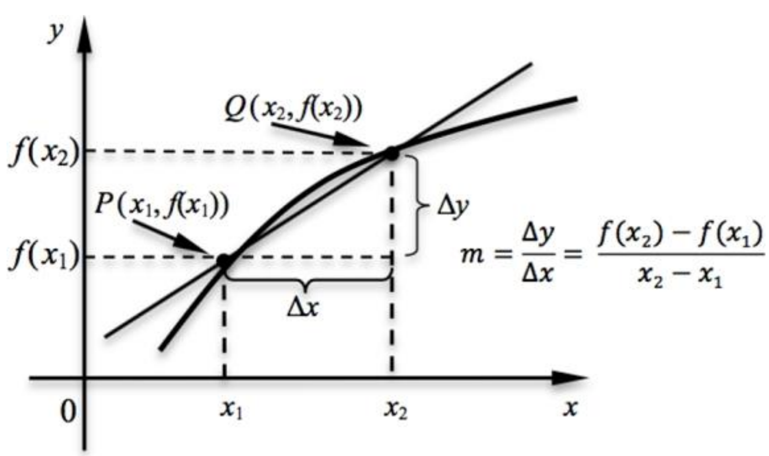
Donde $w^2 = {}^{k}/_{m}$

¿Qué es el Cálculo?

Antes de abordar esta pregunta, veamos que es una **razón de cambio**.

Considérese una función $y = f(x)$. La razón de cambio se define como el cociente de diferencias:

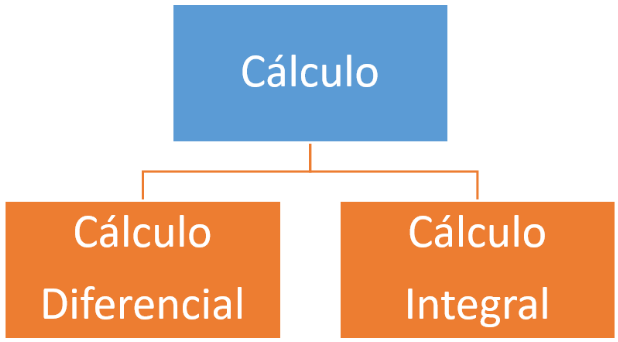
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



En términos geométricos la razón de cambio se interpreta como la pendiente de la recta secante a la curva f que corta a ésta en los puntos P y Q (Ver

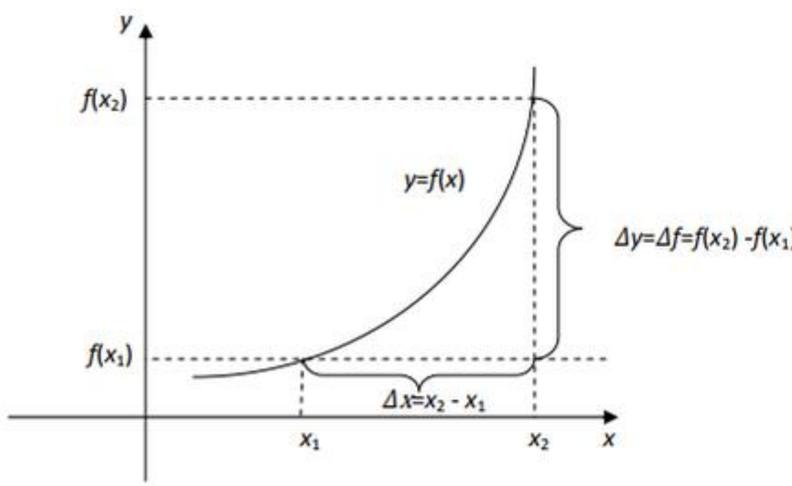
Figura). Pendiente, velocidad y rapidez son conceptos estrechamente vinculados, se consideran como casos particulares de razones de cambio.

En este sentido, el cálculo se compone de dos áreas:



Cálculo Diferencial: Investiga las propiedades de las razones de cambio de variables relacionadas mediante ecuaciones.

Gráficamente:



Como $\Delta x = x_2 - x_1$, podemos despejar $x_2 = x_1 + \Delta x$, y

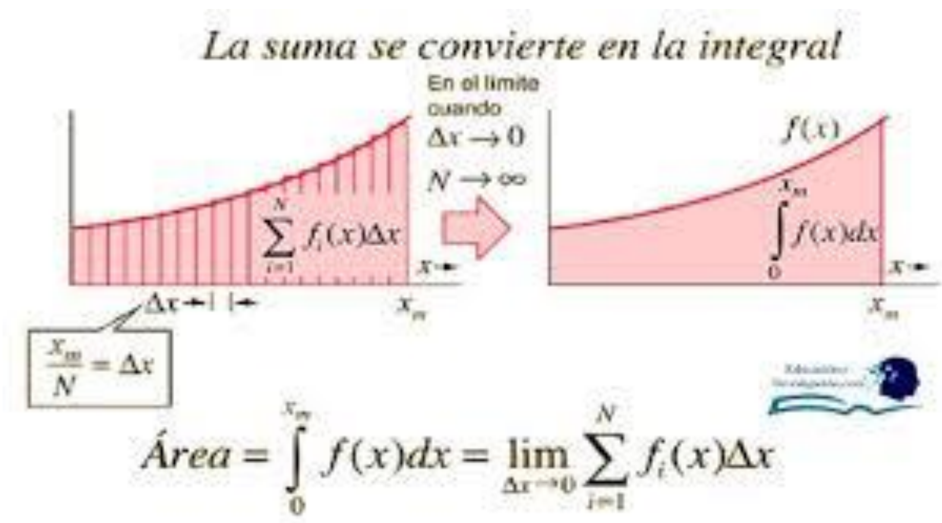
$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ por lo que la razón de cambio media resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Objetivos:

1. Comprender que son las razones de cambio
2. Escribir ecuaciones diferenciales

Cálculo Integral: Proporciona métodos para recuperar las variables originales a partir de sus razones de cambio (método de Integración).



Objetivo:

3. Aprender a resolver ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial

El cálculo es el estudio de las razones de cambio de variables relacionadas mediante ecuaciones para escribir y resolver ecuaciones diferenciales que explican fenómenos naturales.

Teoría (Intuitiva) de Conjuntos y Conjunto Numéricos

Conjunto: Es una colección bien definida de objetos que satisfacen una propiedad. Se denotaran por letras capitales: *A, B, C,…, S, T,…*

Objetos: Son elementos que pueden o no pertenecer a un conjunto. Se denotaran por letras minúsculas: *a, b, c, x, y, z,…*

✓ Entonces **¿qué es un conjunto numérico?** Según lo anterior, es una colección bien definida de números que satisfacen una propiedad. Por ejemplo, el conjunto de los Números Naturales, denotado por el símbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

A continuación, se presenta un resumen breve de algunas de las cuestiones que se asumirán respecto a los conjuntos:

1. Un conjunto A está formado por elementos.
2. Símbolo de pertenencia $\in$
   a. Si un elemento x está en un conjunto A se escribe: $x \in A$.
   b. Si x no está en A, se escribe: $x \notin A$.

   Por ejemplo, en el conjunto de los Números Naturales, $1 \in \mathbb{N}$, pero $0 \notin \mathbb{N}$.

3. Un conjunto está **<u>bien definido</u>**, significa que si A es un conjunto y a es un objeto, entonces:
$$a \in \mathrm{A} \vee a \notin \mathrm{A}$$
Por lo tanto, no se debe decir: *"considérese el conjunto el conjunto de algunos números naturales"*, pues no es claro si $2 \in \mathrm{A}$ o $2 \notin \mathrm{A}$.
4. Existe sólo un conjunto sin elementos. Es el **Conjunto Vacío** que se denota por $\emptyset$.
5. Si A es un conjunto cualquiera, $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$. Nota, más adelante se presentará la definición de un subconjunto de un conjunto.

6. Un conjunto se define de dos formas:
   a. Por Extensión (forma estándar): Listando sus elementos. Consiste en encerrar en llaves las designaciones de los elementos, separados por comas, por ejemplo: $A = \{a, b, c\}$
   b. Por Comprensión: Especificando una propiedad $P(x)$ que caracterice a los elementos del conjunto A. La propiedad $P(x)$ debe ser significativa e inequívoca, es decir, debe permitir que el conjunto A quede bien definido. La notación es: $A = \{x \mid P(x)\}$ que se lee como *"el conjunto de todas las x tal que la propiedad $P(x)$ es verdadera"*. Por ejemplo:
      - $\{2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par } \leq 8\} = \{2x \mid x = 1, 2, 3, 4\}$
      - $\{1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

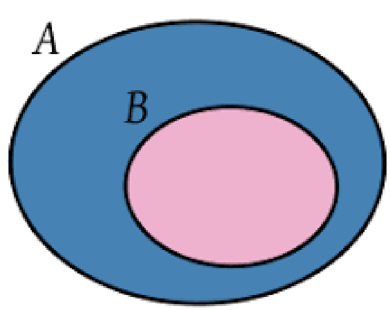
   Nota: $P(x)$ es un enunciado acerca de x que puede expresarse enteramente en términos de los símbolos: $\in$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\exists$, $\forall$, llaves, y variables x, y, z, A, B,…

Definición: Subconjunto

Sean A y B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto del conjunto B, denotado por $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ o $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$, si todo elemento en A está en B. En símbolos:

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \quad \underbrace{si\ y\ solo\ si}_{Sii} \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Gráficamente:



Ejemplo: El Conjunto de los Números Enteros, denotado por el símbolo $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} := \left\{\cdots, -3, -2, -1, 0, \underbrace{1, 2, 3, \cdots}_{\mathbb{N}}\right\}$$

Observa que: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Además, $\mathbb{N}$ es subconjunto propio de $\mathbb{Z}$.

Al conjunto de los números naturales también se le conoce como el conjunto de los números enteros positivos, y se denota por $\mathbb{Z}^{+}$, es decir: $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+}$. Por otra parte, el conjunto de los números enteros negativos se denota por $\mathbb{Z}^{-}$.

$$\mathbb{Z}^{-} := \{\cdots, -4, -3, -2, -1\}$$

Otros dos subconjuntos interesantes de $\mathbb{Z}$ son el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Un número entero se dice que es par si se puede expresar en la forma $2k$ siendo k un entero. Por ejemplo, 50 es par, pues $50 = 2 \cdot 25$, siendo $k = 25$.

Por otra parte, Un número entero se dice que es impar si se puede expresar en la forma $2k + 1$ siendo k un entero. Por ejemplo, 51 es impar, pues $50 = 2 \cdot 25 + 1$, siendo $k = 25$.

Si P e I representan los conjuntos de los números pares e impares, respectivamente, entonces:

$$P := \underbrace{\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}}_{Extensión} = \underbrace{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{Comprensión}$$

$$I := \underbrace{\{\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots\}}_{Extensión} = \underbrace{\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{Comprensión}$$

Note que $0 \in P$ y $0 \notin I$, es decir, el cero es un entero par.

Es claro que P e I son subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

Definición: Subconjunto Propios e Impropios

Sean A y B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto propio del conjunto B, si $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ pero existe al menos un elemento en B que no está en A. En este caso escribimos que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ o que $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$ para expresar que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ pero que $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$.

Por otra parte, como $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}$ se dice que B es un subconjunto impropio de B.

Nota: En otras palabras, Si B es un conjunto cualquiera, entonces B es un subconjunto impropio de B y cualquier otro subconjunto de B es un subconjunto propio de B.

Ejemplo: El conjunto de los enteros pares es un subconjunto propio $\mathbb{Z}$. Ídem para el conjunto de los enteros impares.

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2, 3\}$. Entonces S tiene 8 subconjuntos, a saber:

1. Propios: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
2. Impropio: S mismo.

Definición: Conjunto Iguales

Sean A y B conjuntos. Se dice que los conjuntos A y B son iguales, denotado por $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, si ellos contienen los mismos elementos. En símbolos:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \quad \text{sii} \quad (\forall x)[x \in A \ \Rightarrow x \in B \ \wedge \ x \in B \ \Rightarrow x \in A\,]$$

Nota: En otras palabras, para probar que dos conjuntos A y B son iguales, se debe mostrar que: $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ y que $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.

Ejemplo: $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+}$

Definición: Propiedades la Igualdad e Inclusión entre conjuntos.

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Entonces:

i. $A = A$
ii. $A = B \ \Rightarrow B = A$
iii. $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$
iv. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
v. $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Otro conjunto numérico de interés es el Conjunto de los Números Racionales, denotado por el símbolo $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \neq 0\right\}$$

A los elementos de $\mathbb{Q}$ se les conoce como ***fracciones***, es decir, $\frac{m}{n}$ es una fracción, y en donde, m se le llama numerador y n denominador. Note que se exige el denominador sea distinto de cero, pues la división por cero no está definida.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales la suma o diferencia entre ellos, sigue la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Mientras que el producto de dos fracciones sigue la regla:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Por ejemplo:

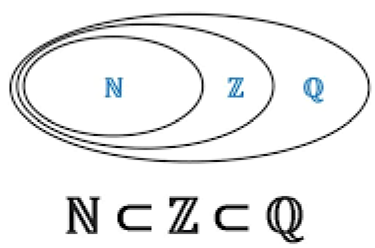
$$\frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{15 + 2}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{15 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Por otra parte note que si $m \in \mathbb{Z}$, entonces $m = \frac{m}{1}$, siendo $1 \in \mathbb{Z}$ y, además, $1 \neq 0$; luego $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$, es decir, $m \in \mathbb{Q}$. Entonces hemos llegado a que si $m \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Q}$, y como m es un entero arbitrario, esto significa que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (por favor revisita la definición de inclusión de conjuntos para asegurarte que esto es verdadero). Es decir, el conjunto de los números enteros está contenido en conjunto de los números racionales.

En este punto tenemos que: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Gráficamente:

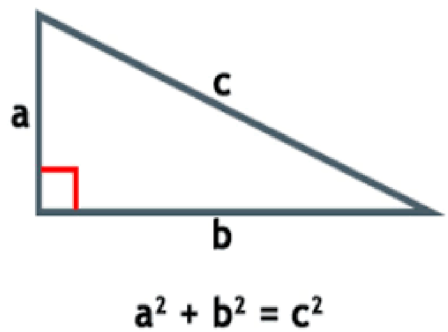


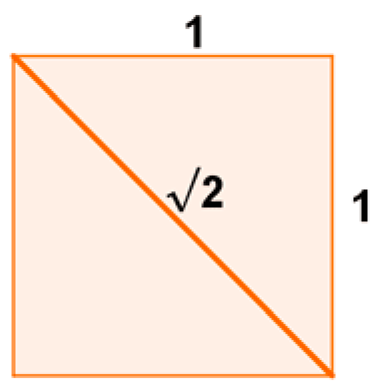
Las fracciones puede ser:

- ✓ Decimales Conmensurables: Por ejemplo:
  - $\frac{1}{2} = 0.5$
  - $\frac{1000}{100} = 10$
  - $\frac{236}{100} = 2.36$
  - $\frac{3251}{1000000} = 0.003251$
- ✓ Decimales Inconmensurables Periódicos: Por ejemplo:
  - $\frac{1}{3} = 0.3333 \cdots = 0.\overline{3}$

- $\frac{13}{22} = 0.590909 \cdots = 0.59\overline{09}$
- $\frac{61}{111} = 0.549549549 \cdots = 0.5\overline{495}$

No obstante, los racionales no son todos los números. En la antigua Grecia (S-VI a. de c.), los pitagóricos no solo sabían que el cuadrado de la hipotenusa de una triangulo rectángulo es la suma de los cuadrados de los catetos (Ver Figura), sino que también descubrieron que la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede ser expresada como la razón entre dos números enteros positivos (Ver Figura), es decir, no existe un número racional p tal que $p^2 = 2$.





Para probar lo anterior, tengamos presente que dos números enteros m y n, no ambos cero, son primos relativos cuando el máximo común divisor de ambos es 1, en símbolos, $gcd(m,n) = 1$. Por ejemplo, 3 y 6 no son primos relativos desde que $gcd(3,6) = 3$, pero 7 y 12 si son primos relativos porque el $gcd(7,12) = 1$.

En efecto, si existiera un número $p \in \mathbb{Q}$ donde $p = \frac{m}{n}$, siendo $m, n \in \mathbb{Z}$ enteros primos relativos con $n \neq 0$, tal que $p^2 = 2$; entonces:

$$m^2 = 2n^2$$

Pero esto implica que m^2 en un entero par ¿por qué?. Como $m^2 = m \cdot m$ y m^2 es par, entonces m es un entero par ¿por qué?; luego, el entero m es de la forma $m = 2k$ para algún entero k; por lo tanto, $m^2 = 4k^2$. Reemplazado esta expresión en $m^2 = 2n^2$ se deduce que $n^2 = 2k^2$ y, por lo tanto n^2 es entero par y, en consecuencia, n es un entero par. Es decir que, los enteros m y n son ambos números pares y, por lo tanto, el numero 2 divide tanto a m como a n, luego el $gcd(m, n) > 1$; pero esto contradice el supuesto de que m y n son primos relativos, es decir que, $gcd(m, n) = 1$. En conclusión, no existe un número racional p tal que $p^2 = 2$.

Con base en lo anterior, podemos expresar el siguiente teorema:

Teorema: No existe un número racional p tal que $p^2 = 2$.

Nota que, la demostración del teorema anterior es una prueba por contradicción o reducción al absurdo. Esta técnica de demostración se esquematiza a continuación:

Proposición: $P \Rightarrow Q$

Prueba:

Se asume que P y $\neg Q$ son verdaderos.

<< Se presenta una explicación de lo que esto significa >> $\longleftarrow$ Aplicar definiciones y/o otros resultados…

Se aplican técnicas de:

- ✓ Algebra
- ✓ Lógica
- ✓ Otras técnicas

<< Se llega a una contradicción de la forma S y $\neg S$ >>

Por lo tanto, $P \Rightarrow Q$ ¡es un enunciado verdadero!

Otro conjunto numérico de interés es el Conjunto de los Números Irracionales, denotado por el símbolo $\mathbb{Q}^*$. En símbolos:

$$\mathbb{Q}^* := \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

En otras palabras, los números irracionales son aquellos números que no son racionales. Son ejemplo de números irracionales:

- $\sqrt{2} = 1.41421356 \cdots$
- $\sqrt{3} = 1.73205080 \cdots$
- $e = 2.7172818284 \cdots$
- $\pi = 3.1415926535 \cdots$

Note que los irracionales en su representación decimal son Inconmensurables NO Periódicos. Así que otra forma de definir al conjunto de los números irracionales es:

$$\mathbb{Q}^* := \{x \mid x \; es \; un \; numero \; inconmensurable \; no \; periodico\}$$

Ahora, antes de presentar el conjunto de los Números Reales, veamos algunas ***operaciones entre conjuntos*** que sirven para construir nuevos conjuntos a partir de unos conjuntos dados. Conviene resaltar que, estas operaciones se basan en los significados de los símbolos o conectores lógicos: $\vee$, $\wedge$, y $\neg$.

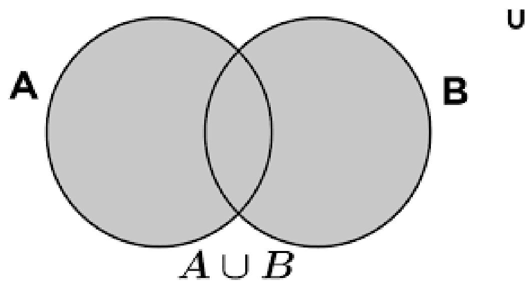
Definición: La Unión de Conjuntos

Sean A y B conjuntos. La Unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que están o bien en A, e en B, o en ambos A y B. En símbolos:

$$\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B \}$$

En otras palabras: $x \in A \bigcup B$ *si y solo si* $x \in A$ *o* $x \in B$.

Gráficamente:



En este punto debemos analizar que se quiere decir con $x \in A \ \vee \ x \in B$. La disyunción $\vee$ que significa la letra "o" se usa de forma inclusiva, es decir, se permite que x pueda estar en ambos conjuntos. En la terminología legal, este sentido inclusivo se denota por "y/o".

Por ejemplo, denotamos por $\mathbb{N}_0$ a la unión de $\mathbb{N}$ con el singulete $\{0\}$; es decir, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Del mismo modo, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. Ídem, $\mathbb{Z} = P \cup I$ donde P e I son los conjuntos de los entero pares e impares, respectivamente.

Otro ejemplo de la unión de conjuntos seria el siguiente: Considere los intervalos reales $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$, entonces $(-\infty, 0) \bigcup \ [0, +\infty) = \mathbb{R}$

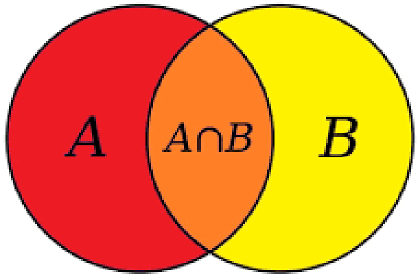
Definición: La Intersección de Conjuntos

Sean A y B conjuntos. La Intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos A y B. En símbolos:

$$\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B \}$$

En otras palabras: $x \in A \cap B$ *si y solo si* $x \in A$ *y* $x \in B$.

Gráficamente:



Definición: Conjuntos Disyuntos

Sean A y B conjuntos. Se dice que A y B son conjuntos disyuntos si ellos no tienen elementos en común. En otras palabras, A y B son disyuntos si y solo si $A \cap B = \emptyset$.

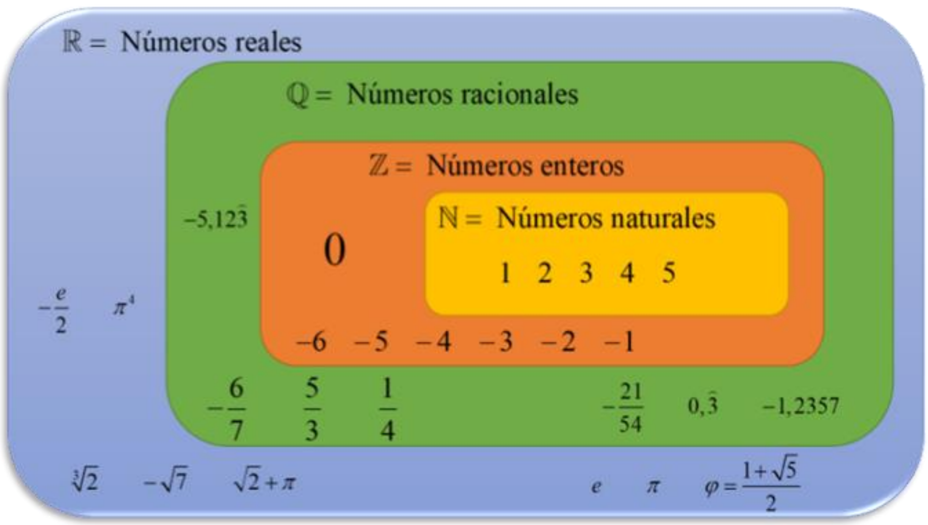
Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ son disyuntos, es decir, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$. Pues si este no fuese el caso, significaría que existe al menos un x tal que $x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^*$, lo que haría que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* \neq \emptyset$. Luego si $x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^*$ es porque $x \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{Q}^*$; pero si $x \in \mathbb{Q}^*$ significa, por definición de los irracionales que $x \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto se tendría una contradicción lógica pues $x \in \mathbb{Q}$ y $x \notin \mathbb{Q}$ son ambos enunciados verdaderos. Luego no es posible que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* \neq \emptyset$, y por lo tanto, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ deben ser conjuntos disyuntos.

Considere nuevamente los intervalos reales $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$. Se tiene que $(-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \emptyset$, pero si se considera la siguiente intersección $(-\infty, 0] \cap [0, +\infty)$ el resultado sería el singulete $\{0\}$; mientras que la intersección de $(-\infty, 1) \cap [0, +\infty)$ sería el intervalo semi-abierto por la derecha $[0, 1)$.

Ahora hemos llegado al conjunto de interés en este curso, el ***Conjunto de los Números Reales*** denotado por el simbolo $\mathbb{R}$. Es conjunto se define como:

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$$

Es decir, los números reales se clasifican en dos tipos, racionales e irracionales. Gráficamente:



Nota que, en la gráfica anterior, la parte "azul" corresponde al conjunto de los números irracionales.

Antes de continuar el conjunto de los números reales, veamos otras dos operaciones entre conjuntos útiles:

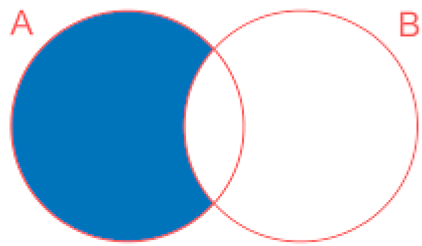
Definición: La diferencia de Conjuntos

Sean A y B conjuntos. La Diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que están en A pero que no están en B. En símbolos:

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

En otras palabras, si $x \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ si y solo si $x \in A$ y $x \notin B$.

Gráficamente:



Nota: la diferencia entre conjuntos también se denota por $\mathrm{A}-\mathrm{B}$.

Por ejemplo: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*$, y a su vez, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}$.
Por ejemplo, que sería : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Si lo piensas bien sería algo así como:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1)$$

Otra forma de construir un nuevo conjunto a partir de unos dados, nos lo brinda la siguiente definición:

Definición: Producto Cartesiano

Sean A y B conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de A y B, denotado por $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. En símbolos:

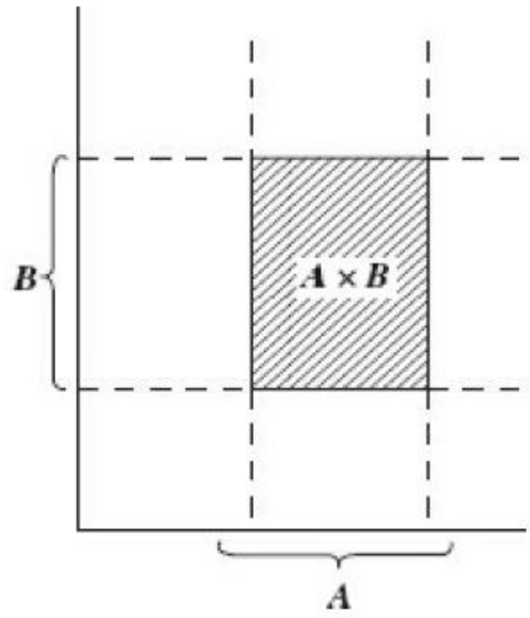
$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} \coloneqq \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

En otras palabras, si $(a, b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$ si y solo si $a \in A$ y $b \in B$.

Recuerda que, por definición, un par ordenado es el conjunto:

$$(a,b) = \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$$

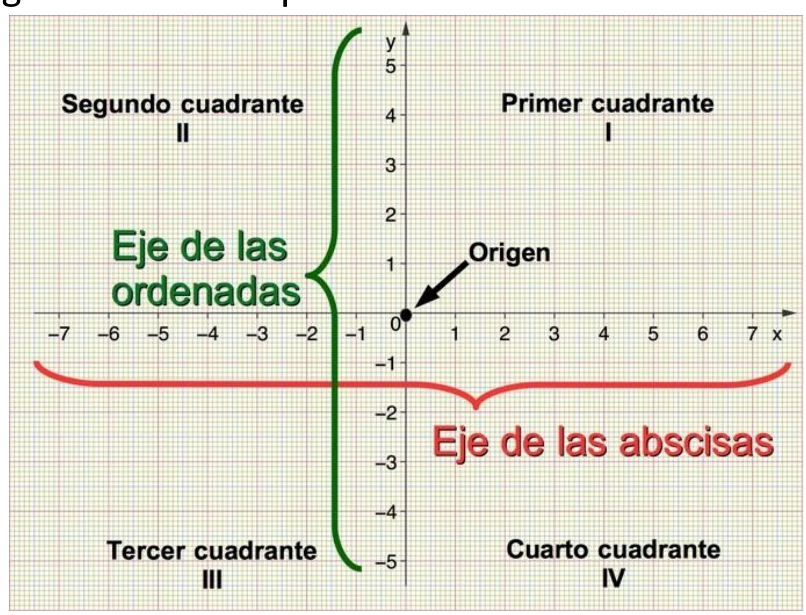
El siguiente diagrama ilustra el producto cartesiano de dos conjuntos A y B:



Por ejemplo, el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{R}^2$ y representa el plano cartesiano real correspondiente al conjunto de pares ordenados:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

El siguiente diagrama ilustra el plano cartesiano real:



Note que:

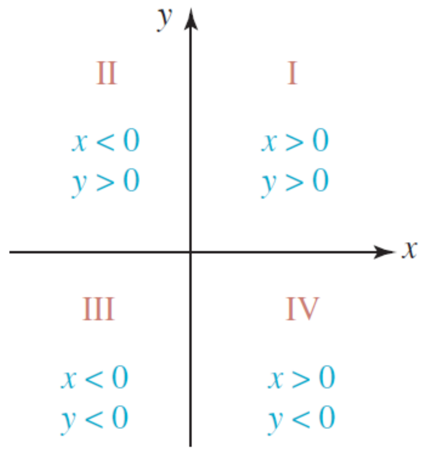
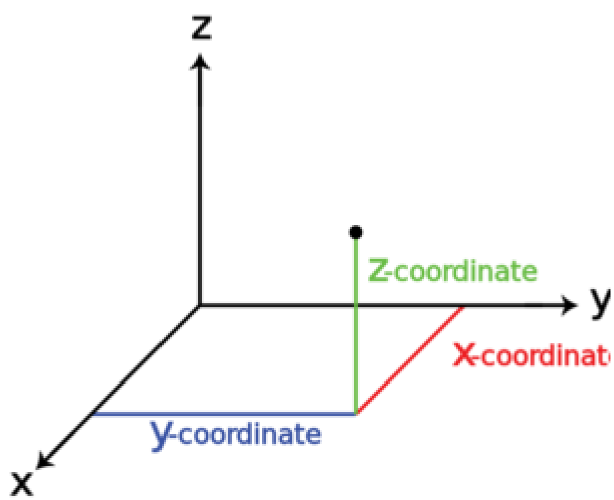


FIGURA Signos algebraicos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes

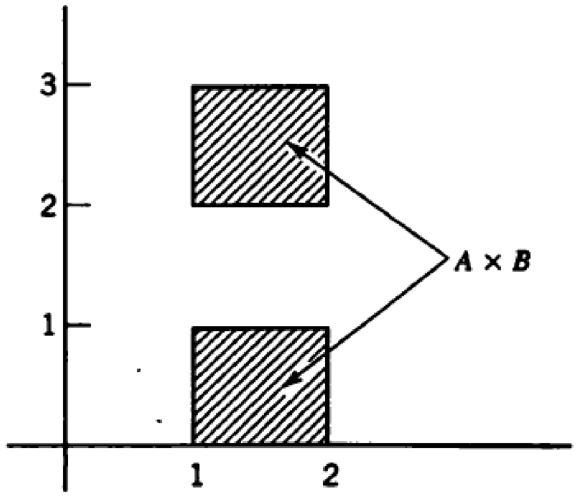
Siguiendo con esta dinámica, entonces el espacio real es el conjunto:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Cuyo diagrama se ilustra a continuación:



Otro ejemplo, sería el siguiente, si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ que es lo mismo que el intervalo cerrado $[1, 2]$, y $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1 \ \vee 2 \leq y \leq 3\}$ que es lo mismo que la unión de los intervalos cerrados $[0, 1] \cup [2, 3]$; entonces el producto cartesiano $A \times B$ sería:



Por ultimo tenemos el conjunto de los Números Complejos denotado por el símbolo $\mathbb{C}$ que, si bien es muy importante, no abordaremos en este curso:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Note que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.