CLASE 4

VALOR ABSOLUTO
& NOCIÓN DISTANCIA

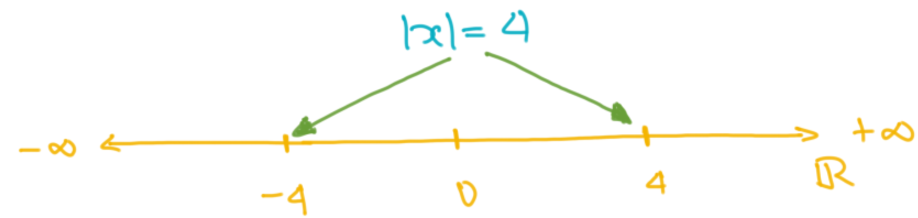
DEFINICIÓN: Valor Absoluto

El Valor Absoluto de un número real x, denotado por $|x|$, se define como:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

- si $x = 4 \Rightarrow |x| = |4| = 4$
- si $x = 0 \Rightarrow |x| = |0| = 0$
- si $x = -4 \Rightarrow |x| = |-4| = -(-4) = 4$



Geométricamente:

$|x|$ Representa la distancia de un número $x \in \mathbb{R}$ respecto al cero!

→ Note que: $|x| = |x - 0|$

EJEMPLO: Escribir $|x-5|$ sin símbolos de valor absoluto.

$$|x-5| = \begin{cases} \bullet\ x-5, & \text{si } x-5 \geq 0 \\ \bullet\ -(x-5), & \text{si } x-5 < 0 \end{cases}$$

Esto es:

$$|x-5| = \begin{cases} \bullet\ x-5, & \text{si } x \geq 5 \\ \bullet\ -x+5, & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

EJEMPLO: Resolver $|x-5| = 4$

$$|x-5| = 4 \iff \begin{cases} x-5 = 4 & \text{si } x \geq 5 \\ -x+5 = 4 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

i) $x-5=4$, si $x \geq 5 \implies x=1$

ii) $-x+5=4$, si $x<5 \implies x=9$

DEFINICIÓN: Distancia entre dos números

Sean $a,b \in \mathbb{R}$. La distancia entre a y b es:

$$d(a,b) := |a-b|$$

TEOREMA: Propiedades Valor Absoluto

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $a > 0$. Entonces:

1. $|x| \geq 0$

EJEMPLO: $|u-4| = -3$?

No tiene sentido porque

$$|u-4| \geq 0$$

2. $|x| = 0$ $\underbrace{\text{si y solo si}}_{\Longleftrightarrow}$ $x = 0$

EJEMPLO: Cuál es el valor de u que satisface que $|4u-2| = 0$

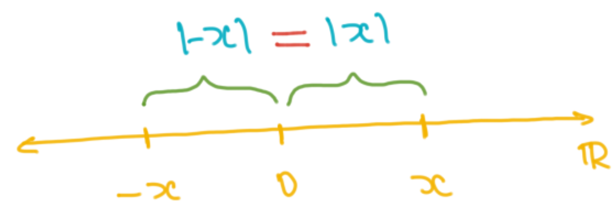
si $|4u-2| = 0$ si y solo si $4u-2 = 0$

si y solo si $4u = 2$

si y solo si $u = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

si y solo si $u = \frac{1}{2}$

3. $|x| = |-x|$



4. $|x| = a$ si y solo si $\underbrace{x = a \vee x = -a}_{x = \pm a}$

5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

EJEMPLO: Resolver $|7x| = 4 - x$

Note que: $|7x| = |7| \cdot |x| = 7 \cdot |x|$

Luego: $|7x| = 4 - x \iff 7|x| = 4 - x$

y $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

caso 1: si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

$7|x| = 4 - x \iff 7 \cdot x = 4 - x$

$\iff 7x + x = 4 - x + x \iff 8x = 4$

$\iff \frac{1}{8} 8x = \frac{1}{8} 4 \iff x = \frac{1}{2}$

caso 2: si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$7|x| = 4 - x \iff 7(-x) = 4 - x$

$\iff -7x = 4 - x \iff -7x + 7x = 4 - x + 7x$

$\iff 0 = 4 + 6x \iff -4 + 0 = -4 + 4 + 6x$

$\iff 6x = -4 \iff x = -\frac{2}{3}$

El conjunto solución de $|7x| = 4 - x$

es: $S = \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$

7. $|x| = |y|$ si y solo si $\underbrace{x=y}_{S_1} \vee \underbrace{x=-y}_{S_2}$

$S_1 \cup S_2$

EJEMPLO: Despejar x de $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$

Debe ser claro que $x \neq 2$.

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5 \iff \frac{|x+2|}{|x-2|} = 5$$

$$\iff \cancel{|x-2|}\cdot\frac{|x+2|}{\cancel{|x-2|}} = |x-2|\cdot 5$$

$$\iff |x+2| = 5|x-2|$$

$$\iff |x+2| = |5|\,|x-2|$$

$$\iff |x+2| = |5(x-2)|$$

$$\iff |x+2| = |5x-10|$$

$$\iff \underbrace{x+2=5x-10}_{S_1} \vee \underbrace{x+2=-(5x-10)}_{S_2}$$

$S_1 \cup S_2$

CASO 1: si $x+2=5x-10$

$$\iff x+2-x+10 = 5x-10-x+10$$

$$\iff 12 = 4x \iff x = 3 \iff S_1 = \{3\}$$

CASO 2: si $x+2=-5x+10$

$$\iff 6x = 8 \iff x = \frac{4}{3} \iff S_2 = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

SOLUCION TOTAL: $S = S_1 \cup S_2 = \left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$

g. $|x|^2 = x^2$

EJEMPLO: Despejar x de $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$

$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5 \iff \left|\frac{x+2}{x-2}\right|^2 = 5^2$

$\iff \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 = 25 \iff \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2} = 25$

$\iff \cancel{(x-2)^2}\,\frac{(x+2)^2}{\cancel{(x-2)^2}} = 25\cdot(x-2)^2$

$\iff (x+2)^2 = 25(x-2)^2$

RECUERDA QUE: $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$\iff x^2+4x+4 = 25(x^2-4x+4)$

$\iff x^2+4x+4 = 25x^2-100x+100$

$\iff 25x^2-100x+100-x^2-4x-4 = 0$

$\iff 24x^2-104x+96 = 0$

$\iff 8(3x^2-13x+12) = 0$

$\iff 3x^2-13x+12 = 0$

$\iff (3x-4)(x-3) = 0$

$\iff 3x-4=0 \lor x-3=0$

$\iff x = \frac{4}{3} \lor x = 3$

Solución total: $S = \{\frac{4}{3}, 3\}$

RECUERDA: $|x|^2 = x^2$

entonces: $|x| = \sqrt{x^2}$

DEFINICIÓN: Valor Absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces: $|x| = \sqrt{x^2}$

Note que: De la definición anterior:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

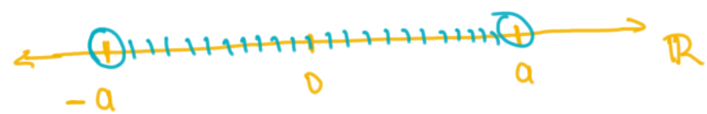
Se sigue que:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = \pm x}$$

TEOREMA:

Sea $a > 0$.

1. $|x| < a \iff -a < x < a$

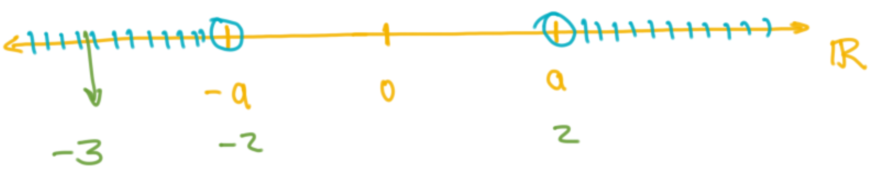


2. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

TEOREMA:

Sea $a > 0$.

1. $|x| > a \iff \underbrace{x < -a}_{S_1} \vee \underbrace{x > a}_{S_2}$ ($S_1 \cup S_2$)



$|-3| = 3 > 2$

2. $|x| \geq a \iff \underbrace{x \leq -a}_{S_1} \vee \underbrace{x \geq a}_{S_2}$ ($S_1 \cup S_2$)

EJEMPLO: Resolver $|3x+2| > 5$

$$|3x+2| > 5 \iff \underbrace{3x+2 < -5}_{\text{caso 1}} \vee \underbrace{3x+2 > 5}_{\text{caso 2}}$$

caso 1: $3x+2 < -5 \iff 3x+2-2 < -5-2$

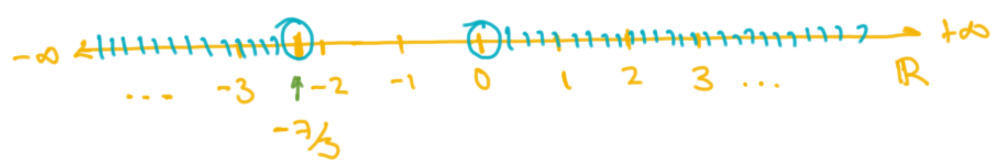
$\iff 3x < -7 \iff \frac{1}{3} \cdot 3x < \frac{1}{3}(-7)$

$\iff x < -\frac{7}{3} \iff S_1 = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$

caso 2: $3x+2 > 5 \iff 3x+2-2 > 5-2$

$\iff 3x > 3 \iff \frac{1}{3} \cdot 3x > \frac{1}{3} \cdot 3$

$\iff x > 1 \iff S_2 = (1, +\infty)$



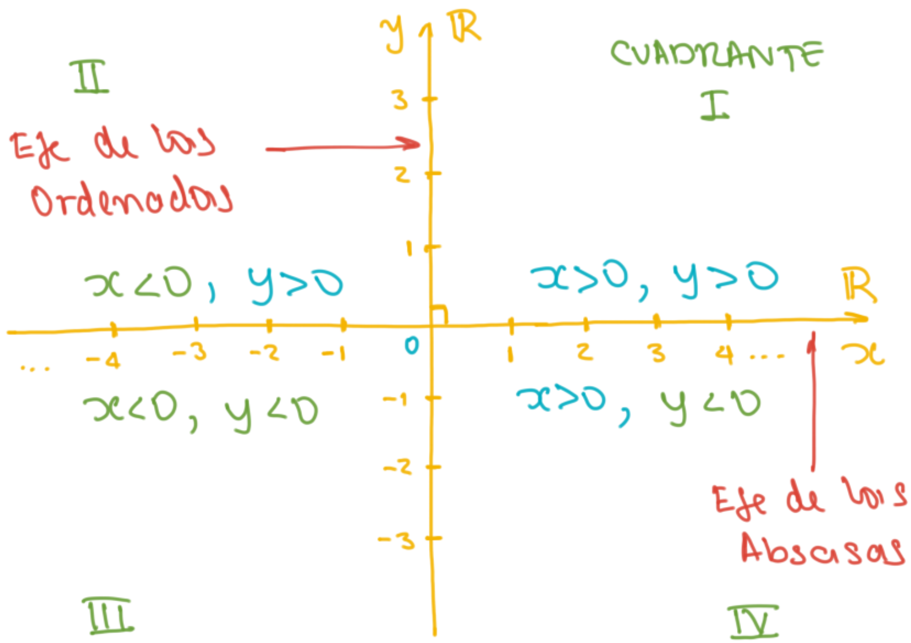
SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

RECUERDA:

Abscisa

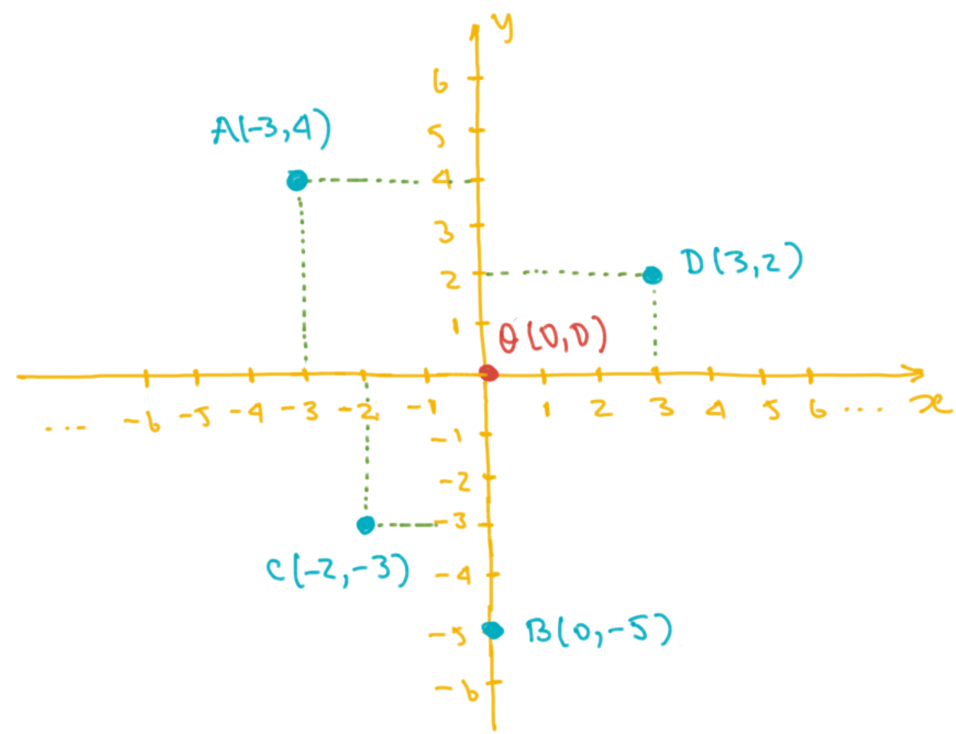
Ordenada

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



EJEMPLO: Cómo graficar puntos en el Plano Cartesiano

Graficar los puntos: $A(-3,4)$, $B(0,-5)$, $C(-2,-3)$, $D(3,2)$, y el $O(0,0)$



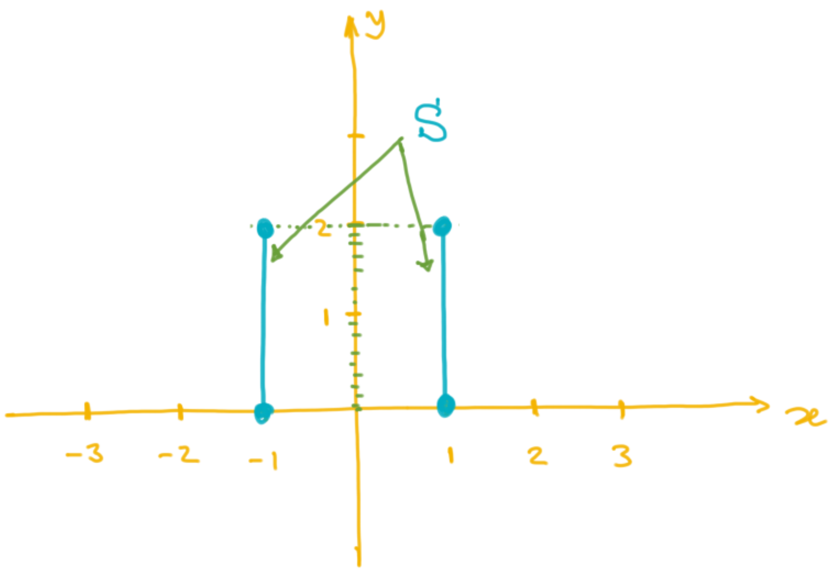
EJEMPLO: Graficar en $\mathbb{R}^2$ el siguiente conjunto:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

Note que si $(x,y) \in S$ entonces

$\underbrace{|x| = 1}$ y $0 \leq y \leq 2$

$\hookrightarrow$ significa que $x = \pm 1$



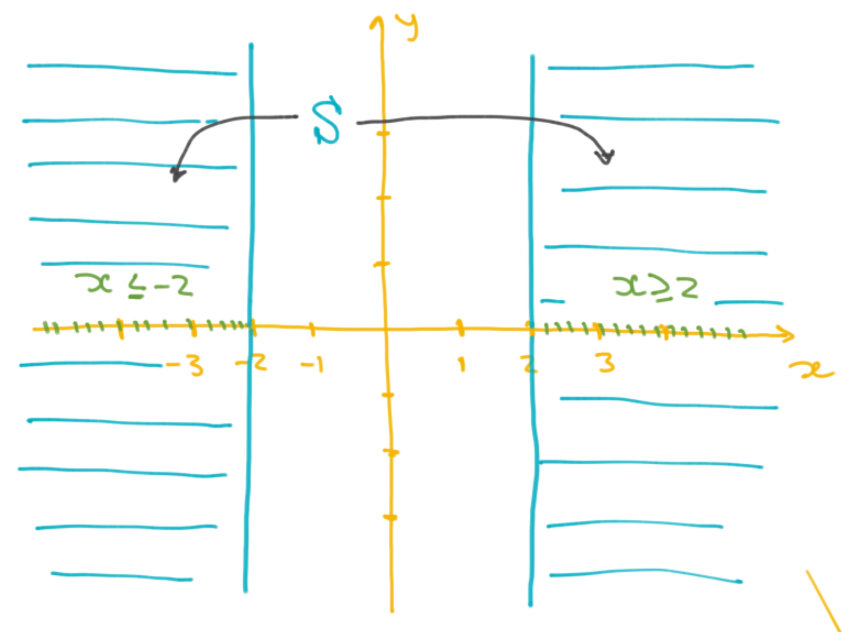
EJEMPLO: Graficar en $\mathbb{R}^2$ el siguiente conjunto:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 2\}$$

Note que si $(x,y) \in S$ entonces:

$|x| \geq 2 \iff x \leq -2 \vee x \geq 2$

También note que No Hay restricciones para y.

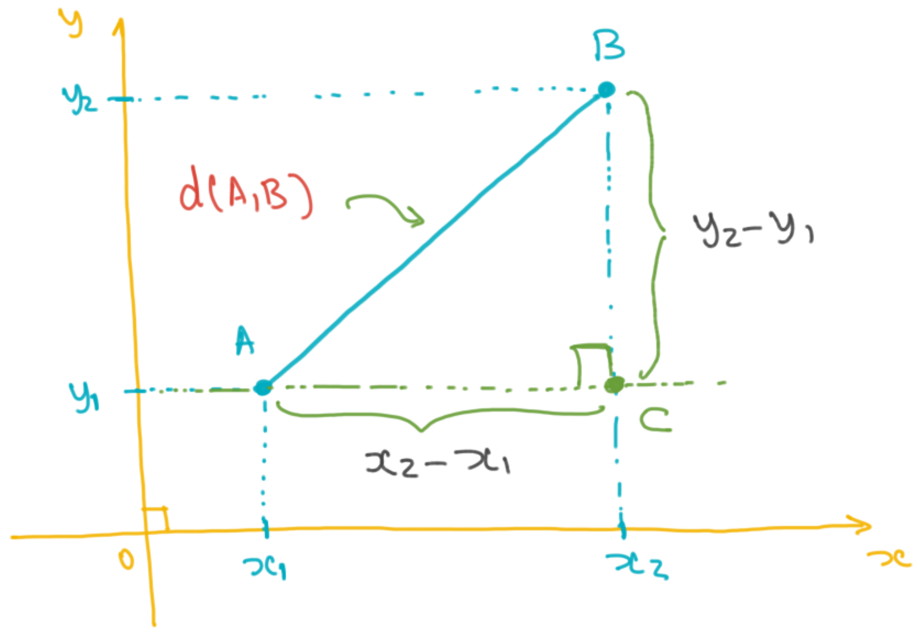


DEFINICIÓN: Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

La distancia entre A y B ésta dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$



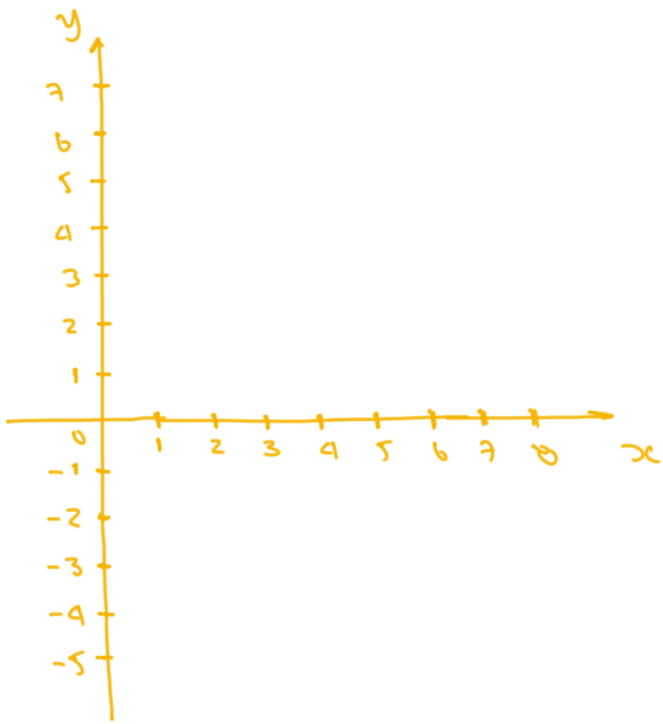
ΔACB es triángulo rectángulo.

por el teorema de pitagoras.

$$[d(A,B)]^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)$$

EJEMPLO: Distancia entre dos puntos

Determinar la distancia entre $A(8,-5)$ y $B(3,7) \in \mathbb{R}^2$.



$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

Supongamos que: $\begin{cases} A(x_1, y_1) = (8,-5) \\ B(x_2, y_2) = (3,7) \end{cases}$

EJERCICIOS:

1. Determinar si los puntos $A(7,1)$, $B(-4,-1)$ y $C(4,5)$ son los vértices de un Triángulo Rectangulo

2. Determinar si los puntos $A(-2,4)$, $B(-5,1)$ y $C(-6,5)$ son los vértices de un Triángulo Isósceles.

DEFINICIÓN: Fórmula para el punto Medio de un segmento de Recta

Sean $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Las coordenadas del Punto Medio del segmento de Recta $\overline{AB}$ está dado por:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$