

Universidad de Antioquia
 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
 Instituto de Matemáticas
 Cursos de servicio para la Facultad de Ingeniería
 Taller 2 de Cálculo Diferencial (2555130-2555131)



1803



Importante: La siguiente lista de ejercicios debe asumirse como práctica de los conceptos vistos en clase, según este [cronograma](#). Los temas necesarios para poder resolver los ejercicios se pueden revisar en el texto guía ([Stewart, J. Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Cengage Learning. Octava edición](#)), El cual está disponible para consulta en línea mediante el acceso al enlace proporcionado anteriormente o el QR mostrado en la imagen, ingresando el usuario y la contraseña del portal universitario.

Ejercicios clase 13

1. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

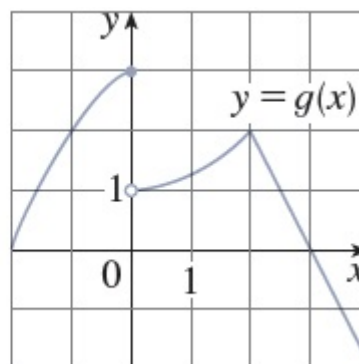
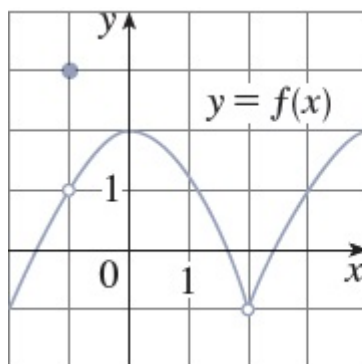
c) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)g(x)]$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 f(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

f) $f(-1) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$



2. Para cada uno de los siguientes numerales, utilice la gráfica de f para determinar el valor de cada cantidad, si existe. En caso de no existir, explique por qué.

i. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

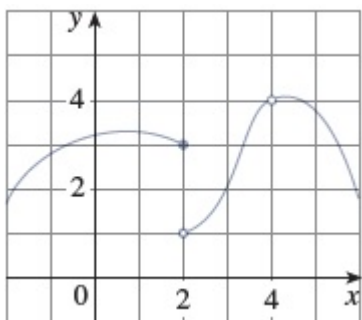
iv. $f(2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

vi. $f(4)$



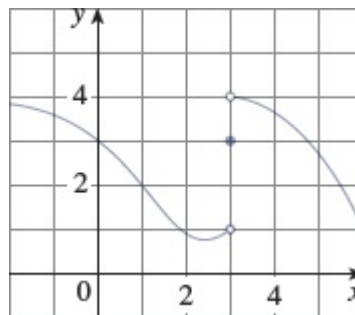
i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

v. $f(3)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$



i. $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x)$

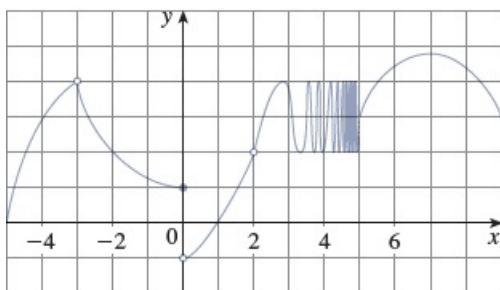
vi. $h(0)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$

vii. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

iv. $h(-3)$

viii. $\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x)$



i. $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$

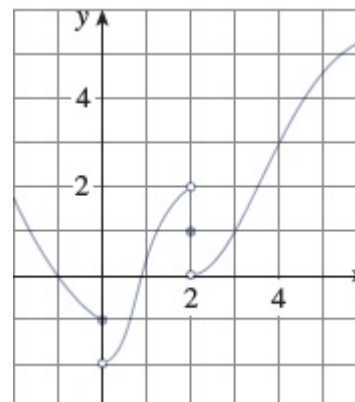
iv. $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$

ii. $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$

v. $g(2)$

iii. $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$

vi. $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$



3. Suponga que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$. Encuentre:

a) $\lim_{x \rightarrow b} [6f(x) + 5g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow b} [4g(x) - 7x]$

b) $\lim_{x \rightarrow b} (3f(x))g(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{5f(x) + 3x^2}{5g(x) - 4x}$

4. De acuerdo a la información suministrada responda cada una de las preguntas.

a) Si $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

- b) Si $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ encuentre $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$.
- c) Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- d) Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- e) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

5 Calcule cada uno de los siguientes límites algebraicos.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 3)(\sqrt{x} - 1)}{2x^2 + x - 3}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x^2} - 1}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^5}{x^5 - 1}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 + \sqrt{x}} - 2}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x + a)^2} - \sqrt[3]{a^2}}{x}$ |

Ejercicios clase 14

1. Calcule los siguientes límites trigonométricos.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^2}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + a) - \sin(a)}{x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc(2x)}{\cot x}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(3x)}{\sin(5x)}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(4x)}{\cos(3x) - 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x + 1)}{x^2 + 4x + 3}$ | l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan x}$ |

2. Use el teorema del encaje para resolver los siguientes límites.

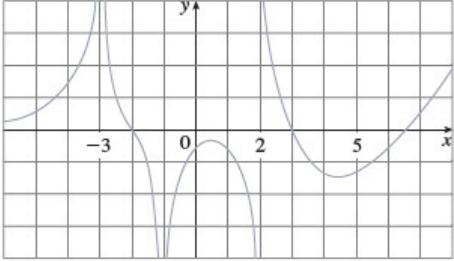
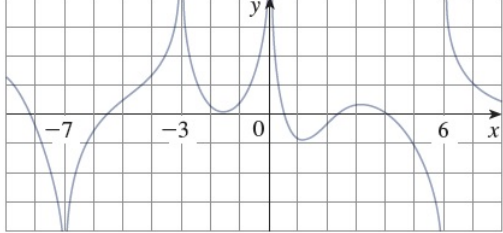
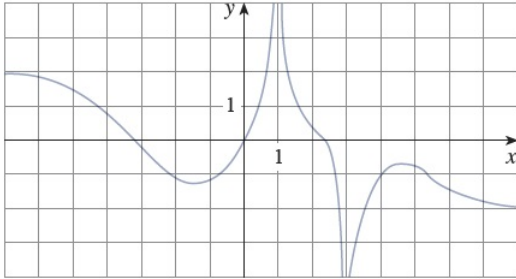
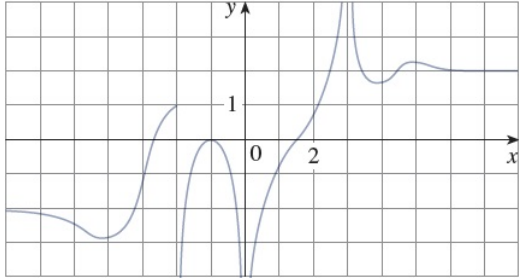
- a) Si $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$ para $-1 \leq x \leq -1$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- b) Si $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ para toda x , encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- c) Suponga que $6 - x^2 < \frac{3x \sin x}{1 - \cos x} < 6$ para x cercano a cero. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$.
- d) Suponga que $12x^2 - x^4 < 24 - 24 \cos x < 12x^2$ para x cercano a cero. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

3. Para cada función proporcionada, realice los cálculos solicitados.

<p>Sea</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$ <p>Cálculo</p> <p>i. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ vii. $f(1)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ viii. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ix. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ iv. $f(-1)$ x. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ xi. $f(2)$ vi. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ xii. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$</p>	<p>Sea</p> $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2 - x^2, & 1 < x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$ <p>Cálculo</p> <p>i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ vii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ viii. $f(0)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ix. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ iv. $f(1)$ x. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ xi. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ vi. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ xii. $f(2)$</p>
<p>Sea</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ <p>Cálculo</p> <p>i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ vii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ viii. $f(1)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ix. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ iv. $f(0)$ x. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ xi. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ vi. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ xii. $f(3)$</p>	<p>Sea</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x) \cot(5x)}{x \cot(4x)}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{ x-1 }, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{(x+3) x-2 }{x-2}, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ <p>Cálculo</p> <p>i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ vii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ viii. $f(1)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ix. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ iv. $f(0)$ x. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ xi. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ vi. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ xii. $f(2)$</p>

Ejercicios clase 15

1. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

<p>i. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$</p> <p>ii. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$</p> <p>iii. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$</p> 	<p>iv. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$</p> <p>v. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$</p> <p>vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> 
<p>i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> <p>ii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$</p> <p>iii. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$</p> 	<p>iv. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$</p> <p>v. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$</p> <p>vi. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$</p> 

2. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(4x)}{\cos(3x) - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \csc x$

f) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{x-5}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x^2-25)$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x)$

j) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{1}{x} \sec x$

k) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$

3. Encuentre el límite o justifique adecuadamente que no existe.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos(3x))$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x^7)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(1 + x^2) - \ln(1 + x)]$$

4. Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva.

$$a) y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$b) y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$c) y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Ejercicios clase 16

1. Encuentre los números en los que f es discontinua.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x & -1 \leq x < 1 \\ 1/x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ 3 - x & 1 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & x > 4 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \leq 0 \\ 2 - x & 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & x > 2 \end{cases}$$

2. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para todo x .

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x > 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 3 \\ ax + b & 3 < x < 5 \\ x^2 + 2 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} ax & x < 3 \\ b & x = 3 \\ -2x + 9 & x > 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ ax + b & -2 < x < 2 \\ 2x - 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 3x + 6a, & x < -3 \\ 3ax - 7b & -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & x > 3 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} ax - b & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ 2ax + b & x > 1 \end{cases}$$

3. Si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ y $g(x)$ es continua en $x = 3$, encuentre el valor de

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} g(f(x))$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{[f(x)]^2 - 8g(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2g(x) - g(3)|}{f(x)}$$

4. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe al menos una raíz en cada una de las ecuaciones en el intervalo especificado

$$a) x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$$

$$b) \ln x = x - \sqrt{x}, \quad (2, 3)$$

$$c) \sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$$