CLASE 3

TEOREMA: Consecuencias de las Propiedades de ORDEN del campo $\mathbb{R}$

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. **Transitividad:** si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

2. si $a < b$ entonces $a \pm c < b \pm c$

EJEMPLO: Encontrar el conjunto solución que satisface la desigualdad:

$$-(1-x) \geq 2x-1$$

Estrategia: Despejar x!

$$-(1-x) \geq 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1+x \geq 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-1+x-x}_{0} \geq 2x-1-x$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \geq \underbrace{2x-x}_{x}-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \geq x-1$$

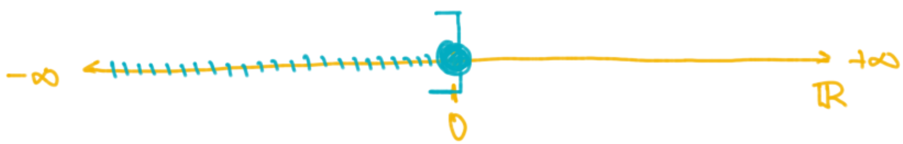
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-1+1}_{0} \geq x\underbrace{-1+1}_{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 0$$

Entonces el conjunto solución de los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la Desigualdad: $-(1-x) \geq 2x-1$ ES:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$$



3. si $a<b$ y $c>0$ entonces

$$a \cdot c < b \cdot c$$

EJEMPLO: Especificar el conjunto:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \leq 6\}$$

$$2x+3 \leq 6 \iff 2x+\underbrace{3-3}_{0} \leq 6-3$$

$$\iff 2x \leq 3 \iff \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x < \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$\iff x \leq \frac{3}{2}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \leq 6\} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

EJEMPLO: Determinar el conjunto solución de los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{7}{x} > 2$$

Note que: $x \neq 0$ y $x > 0$ pues si $x < 0$ entonces $\frac{7}{x} < 0$ y $\frac{7}{x}$ No podría ser mayor que 2.

Este hecho es importante, porque restringe la solución de la desigualdad para $x > 0$.

Ahora, como $x > 0$ entonces:

$$x \cdot \frac{7}{x} > x \cdot 2$$

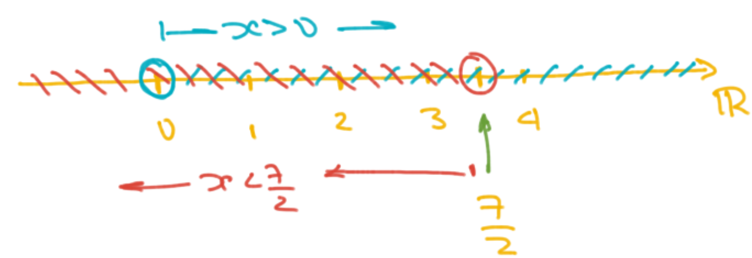
Nota que: No cambió el sentido de la desigualdad

Luego: $\cancel{x} \cdot \frac{7}{\cancel{x}} > x \cdot 2 \Leftrightarrow 7 > 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 7 > \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x \Leftrightarrow \frac{7}{2} > x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$

Por lo tanto el conjunto solución es la Intersección de los $x > 0$ y los $x < \frac{7}{2}$. Esto es:



$$S = (0, 7/2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \tfrac{7}{2}\}$$

↳ conjunto solución

EJEMPLO: Hallar el conjunto solución para la desigualdad:

$$4 < 3x-2 \le 10$$

$4 < 3x-2 \le 10 \Leftrightarrow 4+2 < 3x-2+2 \le 10+2$

$\Leftrightarrow 6 < 3x \le 12 \Leftrightarrow \frac{1}{3}6 < \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x \le \frac{1}{3}12$

$\Leftrightarrow 2 < x \le 4$

$$S = (2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \le 4\}$$

4. Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$

EJEMPLO: $1<2$. Sea $c=-3$ entonces

$\underbrace{(-3)\cdot 1}_{-3} > \underbrace{(-3)\cdot 2}_{-6}$ pero:

EJEMPLO: Determinar el conjunto solución para la desigualdad simultanea:

$$-2 \le 1-2x \le 3$$

$-2 \le 1-2x \le 3 \Leftrightarrow -2-1 \le 1-2x-1 \le 3-1$

$\Leftrightarrow -3 \le -2x \le 2$

$\Leftrightarrow (-1)(-3) \ge (-1)(-2x) \ge (-1)(2)$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \geq 2x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \leq 2x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{2}) \leq \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x \leq \frac{1}{2}3$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$S = \left[-1, \frac{3}{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\} =$$

EJEMPLO: Hallar el conjunto de soluciones de la desigualdad:

$$\frac{x}{x-3} < 4$$

¿ x puede tomar el valor de 3 ?

R/: No. Pues si $x=3$ entonces

$$\underbrace{\frac{3}{3-3}}_{\frac{3}{0}} < 4$$

$\frac{3}{0} \rightarrow$ La división por 0 No está definida!

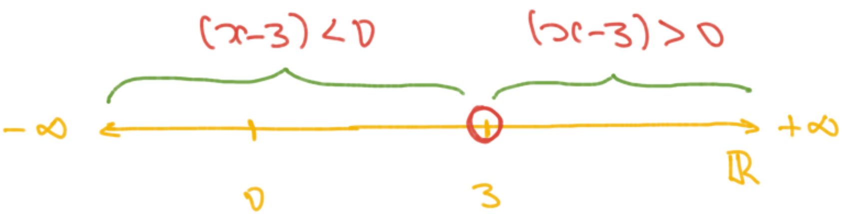
Así pues: $x=3$ No hace parte de la solución.

Ahora, para eliminar el denominador $(x-3)$ en la desigualdad:

$$\frac{x}{x-3} < 4$$

Debes considerar cómo se comporta el signo del factor $(x-3)$ a la izquierda y derecha de 3.

Veamoslo:



Por lo tanto:

- si $x<3$ entonces $x-3<0$

luego:

$$(x-3)\cdot\frac{x}{(x-3)} > (x-3)\cdot 4$$

cambia el sentido de la desigualdad

luego: $\cancel{(x-3)}\cdot\frac{x}{\cancel{(x-3)}} > 4(x-3)$

$\Leftrightarrow x > 4x-12 \Leftrightarrow \cancel{x}+12-\cancel{x} > 4x-\cancel{12}+\cancel{12}-x$

$\Leftrightarrow 12 > 4x-x \Leftrightarrow 12 > 3x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 12 > \frac{1}{3}\cdot 3x \Leftrightarrow 4 > x$

$\Leftrightarrow x < 4$

Entonces hemos llegado a que si $x<3$ necesariamente debe ser también $x<4$.

lo anterior, representa la Intersección de los conjuntos:

$(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ y

$(-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

por lo que:

$$(-\infty, 3) = (-\infty, 3) \cap (-\infty, 4)$$

Entonces los $x < 3$ son parte de la solución de la desigualdad

Ahora, Analicemos que ocurre

- si $x > 3$. En este caso, se tiene que $x - 3 > 0$, por lo que:

$$(x-3) \cdot \frac{x}{x-3} < (x-3) \cdot 4$$

No cambia el sentido de la desigualdad

Luego:

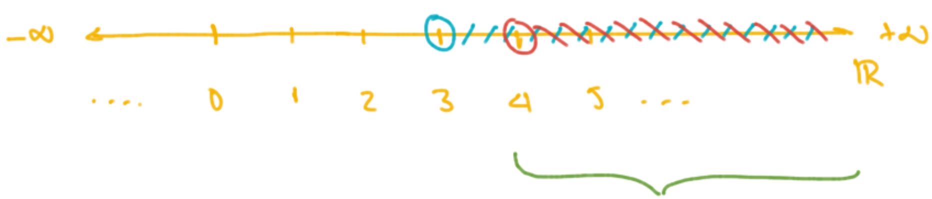
$$\cancel{(x-3)} \cdot \frac{x}{\cancel{(x-3)}} < 4(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x < 4x - 12 \Leftrightarrow x - x + 12 < 4x - 12 - x + 12$$

$$\Leftrightarrow 12 < 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 12 < \frac{1}{3} \cdot 3x$$

$\Leftrightarrow \quad 4 < x \quad \Leftrightarrow \quad x > 4$

Así pues: si $x > 3$ necesariamente debe ser $x > 4$; y esto es una intersección de los conjuntos:



$$(3,+\infty) \cap (4,+\infty) = (4,+\infty)$$

Entonces los $x > 4$ son parte de la solución de la desigualdad.

La solución total es:

$$S = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$$ ■

5. si $a < b$ y $c < d$ entonces

$$a + c < b + d$$

Note que:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \quad + \\ \hline a + c < b + d \end{array}$$

6. si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces

$$a \cdot c < b d$$

7. si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

8. $1 > 0$

Note que: $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$

pues si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.

TEOREMA:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

i) si $a \cdot b > 0$ entonces:

$$(\underbrace{\underbrace{a<0}_{S_1} \wedge \underbrace{b<0}_{S_2}}_{S_3}) \vee (\underbrace{\underbrace{a>0}_{S_4} \wedge \underbrace{b>0}_{S_5}}_{S_6})$$

$$S_1 \cap S_2 \qquad S_4 \cap S_5$$

$$S_3 \cup S_6$$

$$S_{TOTAL} = S_3 \cup S_6$$

ii) si $a \cdot b < 0$ entonces:

$$(a<0 \wedge b>0) \vee (a>0 \wedge b<0)$$

EJEMPLO:

Encontrar el conjunto solución para la desigualdad:

$$\underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(x+1)}_{b} > 0$$

SOLUCIÓN POR MÉTODO ANALÍTICO

si $(x-2)(x+1) > 0$ entonces:

$$(S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

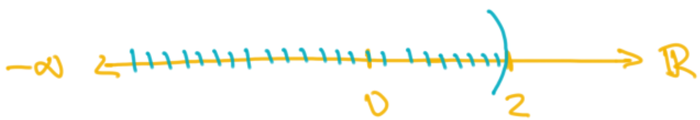
$$\underbrace{(\underbrace{x-2<0}_{S_1} \wedge \underbrace{x+1<0}_{S_2})}_{\text{caso 1}} \vee \underbrace{(\underbrace{x-2>0}_{S_3} \wedge \underbrace{x+1>0}_{S_4})}_{\text{caso 2}}$$

Caso 1: $\underbrace{x-2<0}_{S_1} \wedge \underbrace{x+1<0}_{S_2}$

S_1: $x-2<0 \Leftrightarrow x-2+2<0+2$

$\Leftrightarrow x<2$

Entonces: $S_1=(-\infty,2)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<2\}$

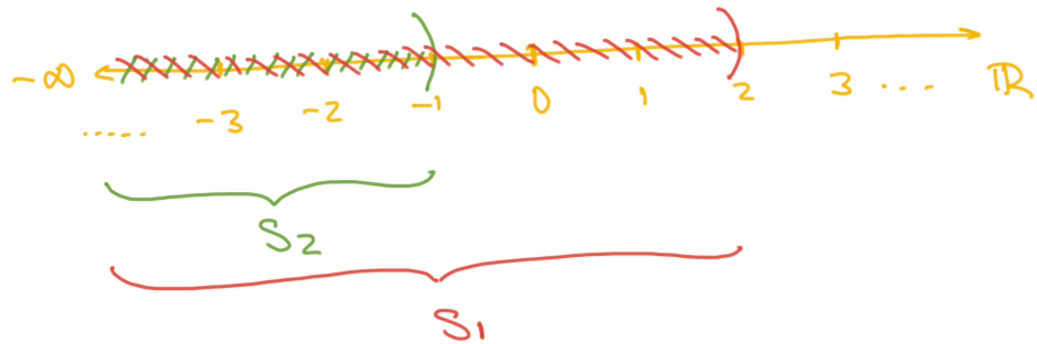


S_2: $x+1<0 \Leftrightarrow x+1-1<0-1$

$\Leftrightarrow x<-1$

Entonces: $S_2=(-\infty,-1)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1\}$

Ahora: $S_1\cap S_2$:



Entonces: $S_1\cap S_2 = S_2=(-\infty,-1)$

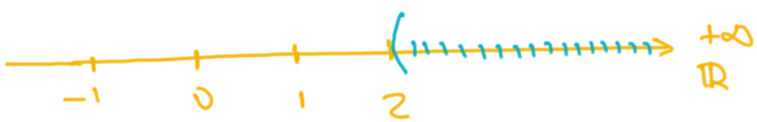
pues $S_2\subseteq S_1$

Caso 2: $\underbrace{x-2>0}_{S_3} \wedge \underbrace{x+1>0}_{S_4}$

S_3 : $x-2>0 \iff x-2+2>0+2$

$\iff x>2$

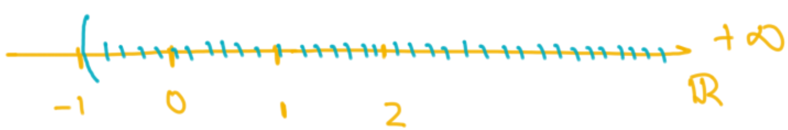
Entonces: $S_3 = (2,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}$



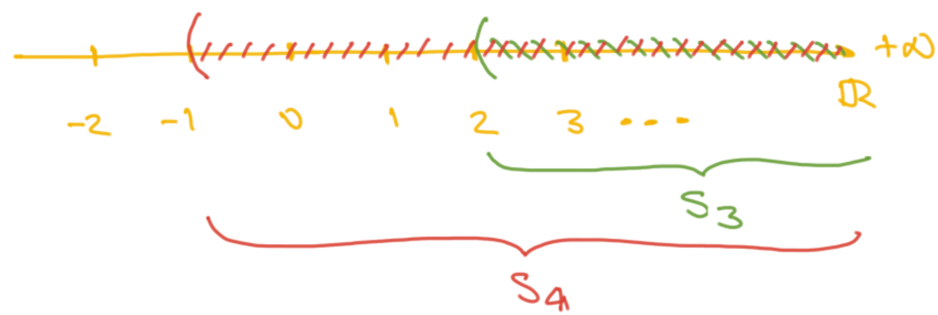
S_4 : $x+1>0 \iff x+1-1>0-1$

$\iff x>-1$

Entonces: $S_4 = (-1,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1<x\}$



Ahora: $S_3 \cap S_4$



Entonces: $S_3 \cap S_4 = S_3 = (2,+\infty)$

pues: $S_3 \subseteq S_4$

Finalmente:

$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

entonces: $S = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

SOLUCIÓN POR MÉTODO SIGNOS (CEMENTERIO)

Nuestro problema: $(x-2)(x+1) > 0$

Procedimiento:

1. Pasar todos los términos de la desigualdad a un lado de la misma, dejando el cero al otro lado.

2. Factorizar y simplificar completamente.

3. Hallar los ceros de los factores y situarlos en la Recta Real

4. La Recta Real queda dividida en varios intervalos abiertos.

En cada uno de ellos, analizar el signo de la desigualdad empleando un número real que esté al interior de cada intervalo

5. Chequear si los ceros de los factores hacen parte de la solución

6. Expresar la solución total, según el signo pedido.

Vamos a resolver nuestro problema:

$$(x-2)(x+1) > 0$$

con el Método de los signos, pero antes realizemos una ligera modifica-ción del problema para iniciar desde unos pasos más atrás!

Note que:

$$(x-2)(x+1) > 0 \iff (x-2)\cdot x + (x-2)\cdot 1 > 0$$
$$\iff x^2 - 2x + x - 2 > 0$$
$$\iff x^2 - x - 2 > 0$$
$$\iff x^2 > x + 2$$

Ahora, suponga que nos solicitan resolver la desigualdad:

$$x^2 > x + 2$$

Entonces, empleando el Método de los signos:

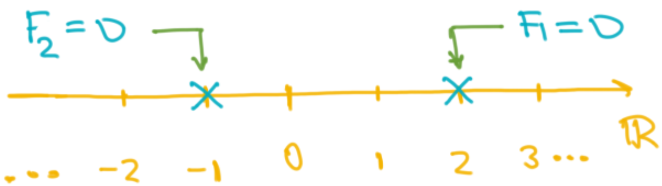
$$x^2 - x - 2 > x + 2 - x - 2$$
$$x^2 - x - 2 > 0$$

1. $x^2 - x - 2 > 0$

2. $\underbrace{\underbrace{(x-2)}_{F_1}\underbrace{(x+1)}_{F_2}}_{\text{Factores}} > 0$

3. $F_1: \quad x - 2 = 0 \iff x = 2$

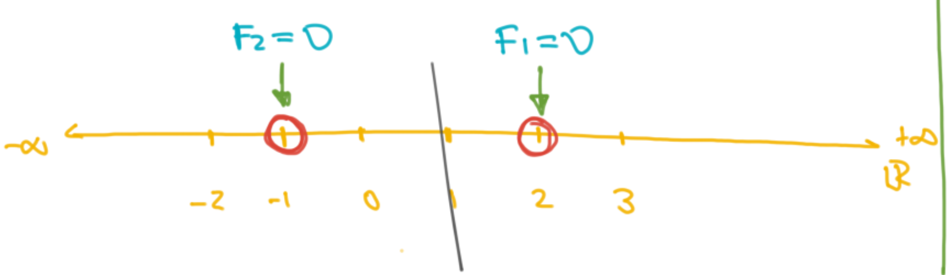
   $F_2: \quad x + 1 = 0 \iff x = -1$



4.

$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

5.



6: solución total:

$$S = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$