

3. Gün

2. Ders:

Stokastik modellerin formüle edilmesi



Bulaşıcı hastalık dinamiklerinin R'de modellenmesi üzerine kısa kurs

Ankara, Türkiye, Eylül 2025

Dr Juan F Vesga

Oturumun amaçları

- Stokastik modellerin nasıl formüle edileceğini öğrenmek
- Stokastikliğin bölmeli ve birey tabanlı modellere nasıl dahil edildiğini öğrenmek
- Deterministik modellerle metodolojik farkı anlamak

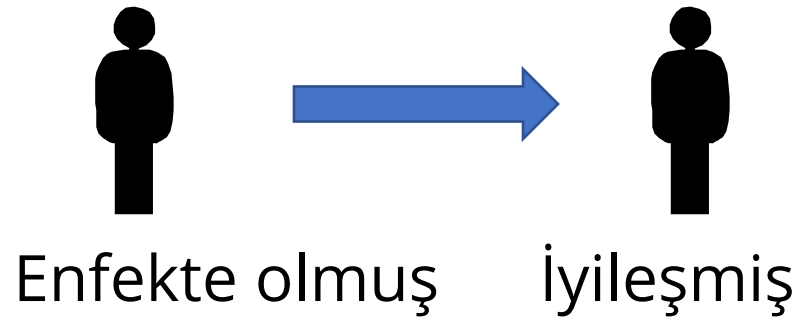
Stokastik model formülasyonları

- Birey tabanlı/aracı tabanlı modeller
 - Her bir bireyi ve her birinin başına gelen olayları simüle eder
 - Daha gerçekçi ayrıntılar içerebilir ancak simüle edilmesi yavaş olabilir
- Popülasyon tabanlı veya bölmeli modeller
 - Yalnızca her bir bölmedeki toplam birey sayısının kaydını tutar
 - Bu gruptaki bireylerin başına gelen olayların sayısını simüle eder
 - Simüle edilmesi daha hızlıdır

Tehlike

- Tehlike, birim zamanda bir olayın meydana gelme olasılığıdır.
- Deterministik modelde kullanılan anlık kişi başına orana eşdeğerdir.

Örneğin, enfekte bir kişi bir tehlikeye veya σ iyileşme oranına sahipse:

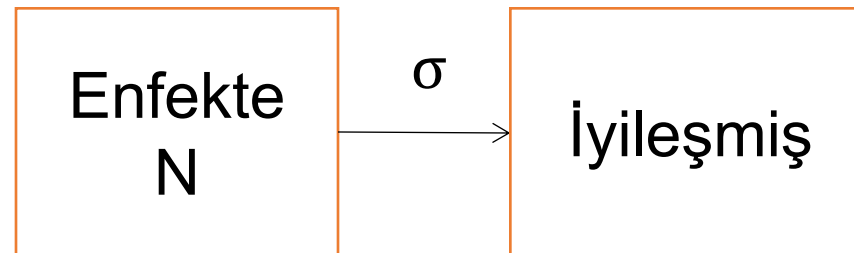


dt zamanında iyileşme olasılığı küçük dt için **σdt** 'dir.

Tehlike

- Elimizde hepsi özdeş (konuştuğumuz sürece göre) N tane birey varsa **binom dağılım** belirli bir süredeki olay sayısının dağılımını tanımlar.
- Olasılığı p olan bir şeyin N sayıda denemesi, başarı sayısı binom dağılımlı rastgele bir sayıdır:

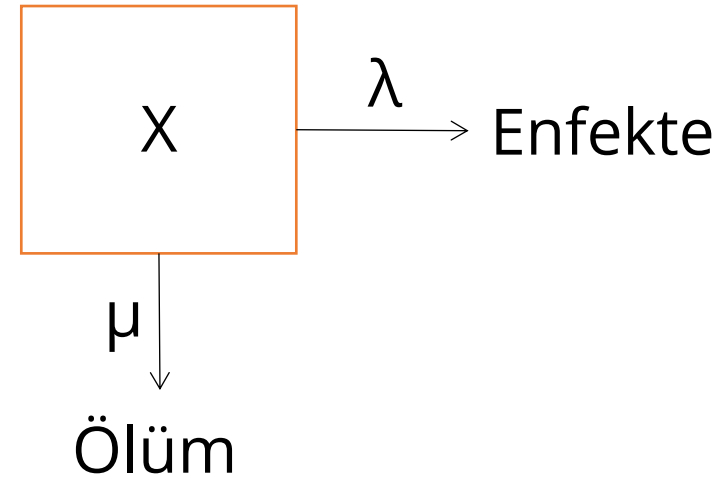
$\text{Binom}(p, N)$



dt zamanında iyileşenlerin sayısı $\text{Binom}(\sigma dt, N)$ 'den elde edilir

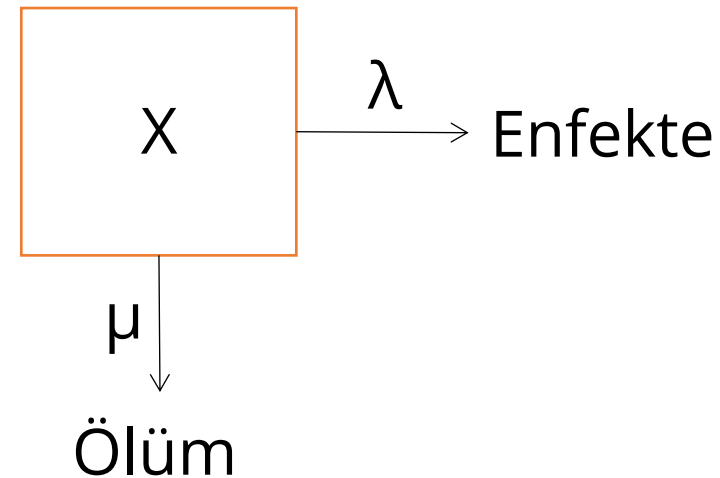
Rakip Tehlikeler

- Enfekte olan (oran: λ) ancak aynı zamanda ölme ihtimali bulunan (oran: μ) duyarlı birey popülasyonunu düşünün.
- Ama ikisini aynı anda yapamazlar!
- dt zamanında kaç ölür, kaç enfekte olur?



Rakip Tehlikeler

- Başına herhangi bir olay gelenlerin toplam sayısını bulmak için
- farklı olayların oranlarını ekleyebiliriz.
- Ardından her birinin başına iki olaydan hangisinin geldiğine karar verebiliriz.



Toplam olay sayısı: $H_1 + H_2 = \text{Binomial}((\mu + \lambda) dt, X)$

H_1 ve H_2 olarak ayrılır: $H_1 = \text{Binomial}\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, H_1 + H_2\right)$

Basit enfeksiyon süreci

Stokastik model tamamen iki şeye göre tanımlanır:

- **Popülasyonun durumu**. Ör. duyarlı, enfekte, iyileşmiş durumdaki bireylerin sayısı.
- Tüm **olası olaylar** ve bunların oranları. Ör. enfeksiyon oranı, ölüm oranı, iyileşme oranı vb.

Mevcut durum için:

Popülasyon: S özdeş duyarlı bireyler,
 I özdeş enfekte bireyler.

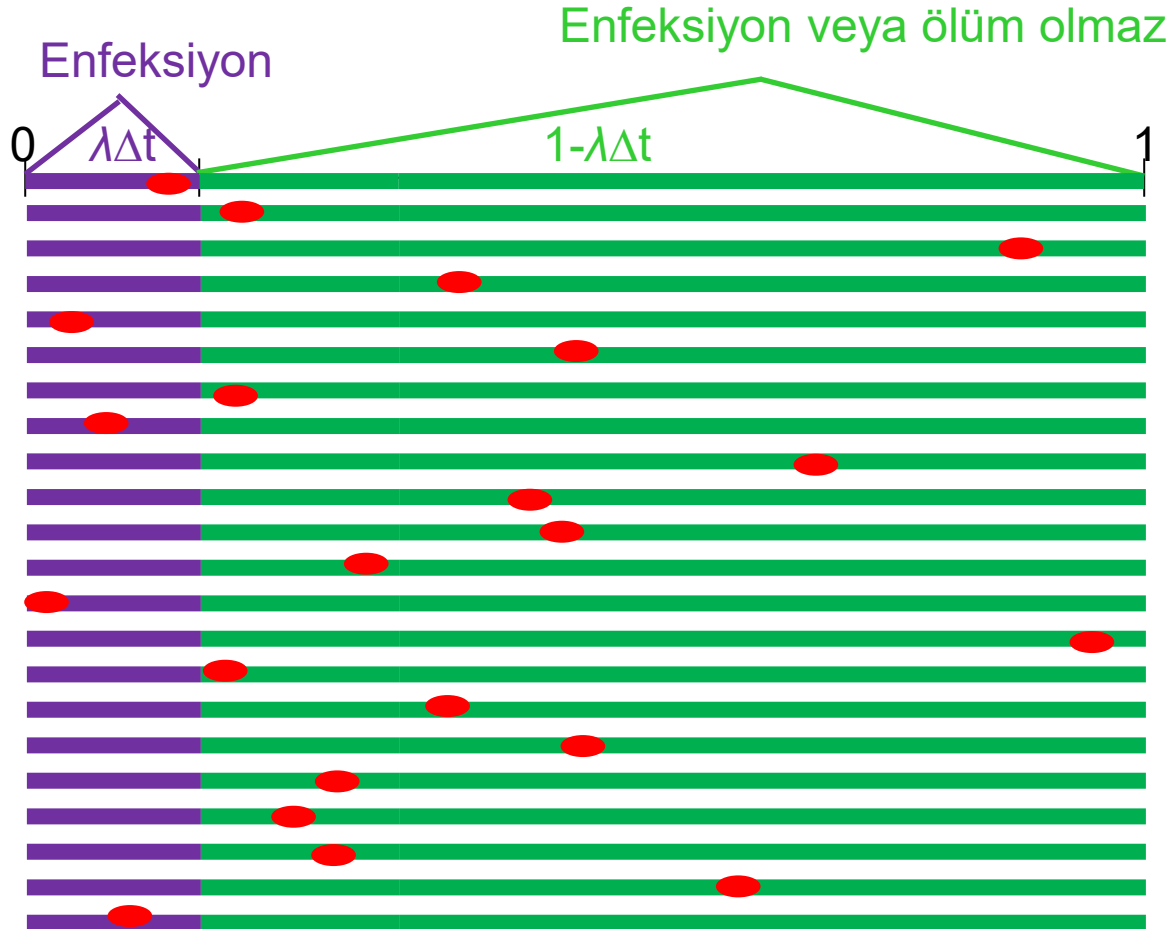
Ad	Popülasyonun başına gelen olay	Oran/birey
Enfeksiyon	$S \rightarrow S - 1, I \rightarrow I + 1$	λ
iyileşme	$I \rightarrow I - 1$	σ

Bireysel tabanlı modeller

- Her bir bireyi ayrı olarak ele alır.
- *Senkronize* güncelleme durumu için küçük güncelleme zaman adımı (dt) seçin.
- Bireyin başına yalnızca bir olay gelebilir - enfekte olmak (oran λ)
- Her zaman adımında, her bir bireysel rastgele seçilmiş sayı p için (0 ila 1 arasında eşit olarak dağıtılmış).
 - $p < \lambda dt$ ise birey enfekte olur böylece $S \rightarrow S-1, I \rightarrow I+1$ olur.
 - $p > \lambda dt$ - hiçbir şey olmaz.

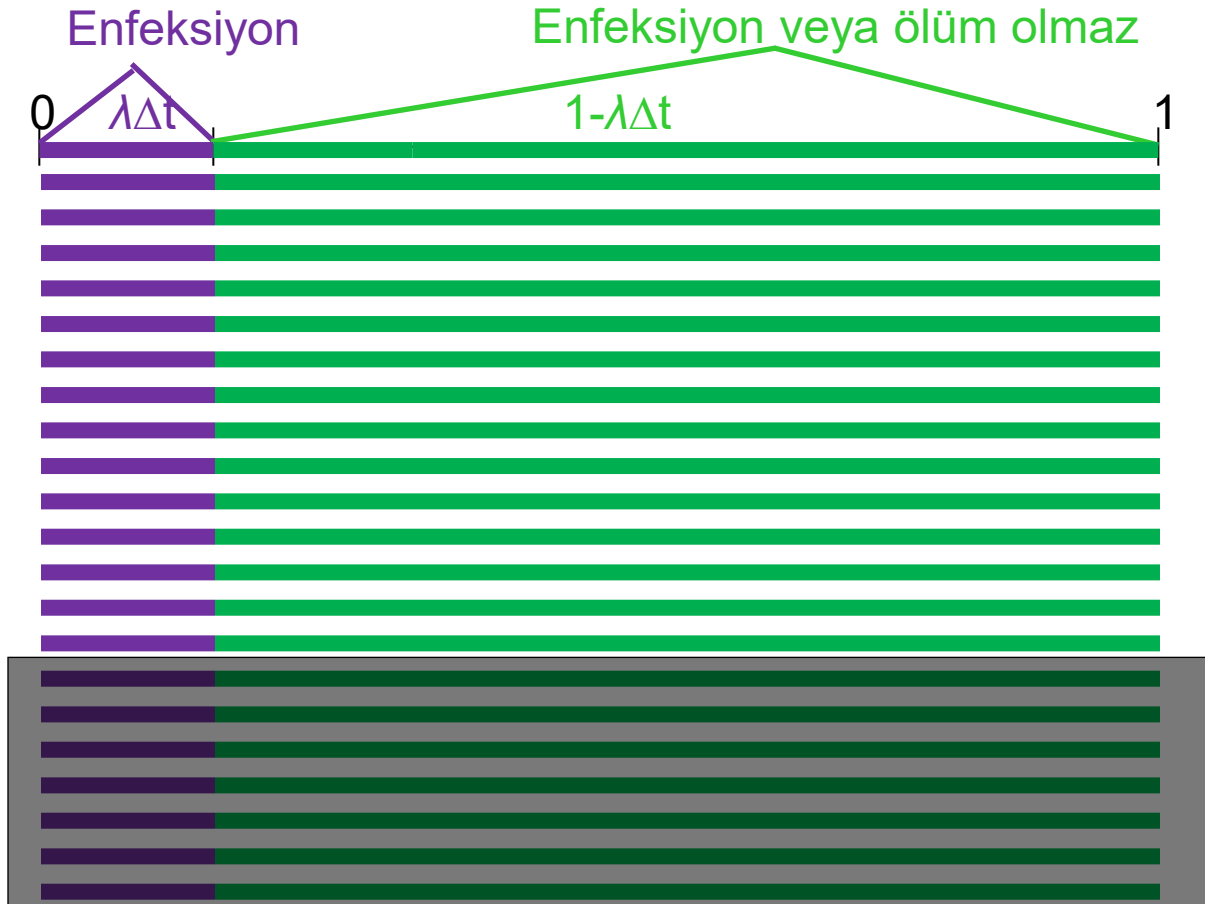


Çoklu bireyler-IBM



Her duyarlı birey 'özdeşdir'
Her biri için rastgele bir sayı
üretebilir (22 rastgele sayı)
ve enfeksiyon veya ölüm
olup olmadığını bulabilir
ör. 5 yeni enfeksiyon, 17'si
değişmemiş

Çoklu bireyler-Bölme



- 22 birey, birey başına enfeksiyon olasılığı $\lambda\Delta t$
- 'başarı' sayısını bulmak için Binom dağılımı kullanın,
- Enfeksiyonlar = Binom($\lambda\Delta t, S$) = 7 enfeksiyon (örneğin)

SEIR

Duyarlı	$\frac{dX}{dt} = -R_0\nu\frac{X}{N}Y$
Maruz Kalan	$\frac{dW}{dt} = R_0\nu\frac{X}{N}Y - \sigma W$
Enfekte	$\frac{dY}{dt} = \sigma W - \nu Y$


SEIR

Duyarlı	$\frac{dX}{dt} = -R_0 \nu \frac{X}{N} Y$
Maruz Kalan	$\frac{dW}{dt} = R_0 \nu \frac{X}{N} Y - \sigma W$
Enfekte	$\frac{dY}{dt} = \sigma W - \nu Y$

Duyarlı	$X(t + \delta t) = X(t) - \iota(t)$
Maruz Kalan	$W(t + \delta t) = W(t) + \iota(t) - \kappa(t)$
Enfekte	$Y(t + \delta t) = Y(t) + \kappa(t) - \rho(t)$
İnsidans	$\iota(t) = \text{Binomial}\left(R_0 \nu \frac{1}{N} Y(t) \delta t, X(t)\right)$
İnsidans	$\kappa(t) = \text{Binomial}(\sigma \delta t, W(t))$
İyileşme	$\rho(t) = \text{Binomial}(\nu \delta t, Y(t))$

SEIR

Duyarlıdan
maruza kalanlara
geçenlerin sayısı



Duyarlı

$$\frac{dX}{dt} = -R_0 \nu \frac{X}{N} Y$$

Maruz Kalan

$$\frac{dW}{dt} = R_0 \nu \frac{X}{N} Y - \sigma W$$

Enfekte

$$\frac{dY}{dt} = \sigma W - \nu Y$$

Duyarlı
Maruz Kalan
Enfekte

$$X(t + \delta t) = X(t) - \iota(t)$$

$$W(t + \delta t) = W(t) + \iota(t) - \kappa(t)$$

$$Y(t + \delta t) = Y(t) + \kappa(t) - \rho(t)$$

İnsidans

$$\iota(t) = \text{Binomial}\left(R_0 \nu \frac{1}{N} Y(t) \delta t, X(t)\right)$$

insidans

$$\kappa(t) = \text{Binomial}(\sigma \delta t, W(t))$$

iyileşme

$$\rho(t) = \text{Binomial}(\nu \delta t, Y(t))$$

SEIR

Duyarlı	$\frac{dX}{dt} = -R_0 \nu \frac{X}{N} Y$
Maruz Kalan	$\frac{dW}{dt} = R_0 \nu \frac{X}{N} Y - \sigma W$
Enfekte	$\frac{dY}{dt} = \sigma W - \nu Y$

Duyarlıdan
maruza kalanlara
geçenlerin sayısı

Duyarlı
Maruz Kalan
Enfekte

İnsidans

insidans

iyileşme

$$X(t + \delta t) = X(t) - \iota(t)$$

$$W(t + \delta t) = W(t) + \iota(t) - \kappa(t)$$

$$Y(t + \delta t) = Y(t) + \kappa(t) - \rho(t)$$

$$\iota(t) = \text{Binomial}\left(R_0 \nu \frac{1}{N} Y(t) \delta t, X(t)\right)$$

$$\kappa(t) = \text{Binomial}(\sigma \delta t, W(t))$$

$$\rho(t) = \text{Binomial}(\nu \delta t, Y(t))$$

oran

Özet

- Stokastik etkiler aşağıdaki hususları değerlendirirken önemlidir
 - Kalıcılık
 - Küçük popülasyonlarla uğraşırken (salgının başlangıcı ve sonu)
 - Veya uzaysal yayılım.
- $R_0 < 1$ olsa bile tesadüfen salgınlar olabilir
- $R_0 > 1$ olsa bile tesadüfen salgın olmayabilir
- Stokastik modellerin programlanması nispeten basit, analiz edilmeleri zordur

Ekstra materyaller

Stokastik olayların dağılımıyla ilgili daha fazla yayın okumak için

Yardımcı kaynaklar

Kitaplar:

Renshaw, E., *Modelling biological populations in space and time*, Cambridge Univ. press, 1991

Bailey, N.T.J., *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*, 2nd edition, Griffin, 1975

Makaleler:

Bartlett, M. S. (1957). "Measles periodicity and community size." J. Roy. Stat. Soc. A **120**: 48-70.

Bolker, B. M. and B. T. Grenfell (1995). "Space, persistence and dynamics of measles epidemics." Proc. Roy. Soc. Lond. B **348**: 308-320.

Jansen, V. A. A., N. Stollenwerk, et al. (2003). "Measles outbreaks in a population with declining vaccine uptake." *Science* 301(5634): 804-804.

Farrington, C. P., M. N. Kanaan, et al. (2003). "Branching process models for surveillance of infectious diseases controlled by mass vaccination." Biostatistics **4**(2): 279-295.

Gelişmiş: Binom ile Poisson karşılaştırması

- Poisson dağılımı, küçük bir zaman adımında meydana gelecek olayların sayısını simüle eder = $\text{Poisson}(\omega\Delta tN(t))$
- Binom formülasyon $\text{Binom}(\omega\Delta t, N(t))$, her biri $\omega\Delta t$ ile yaklaşık olarak bulunan başarı **ihtimaline** sahip $N(t)$ sayıda deneme bulunduğunu söyler, kaç başarılıdır?
 - Olay sayısı insanlardan fazla olamaz
 - Çok fazla olay olmayacağı için küçük zaman adımları önemli değildir
 - Çoklu rakip tehlike olduğunda katlı terimleri hesaplar

Popülasyon simülasyonları

Bireysel tabanlı modeller çok yavaş olabilir ve hesaplama süresi N olarak artar.

Olaylar bağımsızsa Δt sabit zamanında i olay tipi sayısı, binom dağılımdan örnekleme yapılarak simüle edilebilir (ayrıca Poisson dağılımından örnekleme yapılarak da simüle edilebilir). S popülasyon boyutunda i olay tipi sayısı aşağıdaki denkleme göre verildiğinden

$$k \sim \text{Binomial}(\lambda \Delta t, S)$$

Birbiriyle rekabet eden çoklu olaylar bulunduğunda binom veya multinom yaklaşımları birden fazla Poisson dağılımından yapılan örneklemeyi kullanmaktan daha iyi sonuç verir ve daha tutarlı model formülasyonuna izin verir.

Gelişmiş: Senkron ile asenkron modellerin karşılaştırması

- *Senkron*: her bir zaman adımında meydana gelebilecek tüm olayları simüle eder.
- *Asenkron*: sonraki olayın zamanını simüle eder ve o zaman noktasına kadar ilerler,
- Özellikle birey tabanlı simülasyonlarda her birinin gerçekleşme olasılığının düşük olduğu çok sayıda olası olay varsa asenkron bir modele sahip olmak daha verimli olabilir