

Plano perpendicular a la intersección de dos planos

Juan Vicente Vía Baylet

26 de abril de 2020

Resumen

Vamos a ver una manera de resolver un ejercicio en donde se busca el plano perpendicular a la intersección entre dos planos y que pase por un punto dado. Esta resolución cumple con las condiciones de que no se usen matrices y de que no se use el producto vectorial.

1. El problema

Se consideran los planos $\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \rightarrow 2x + 2y - z = 6$. Hallar la ecuación de un plano que sea ortogonal a $\Pi \cap \Pi'$ y que pase por $(4, 2, -1)$.

2. La solución

2.1. Bautismos

Para solucionar un problema es generalmente útil comenzar asegurándose de que las cosas estén bien identificadas y tengan un nombre. Entonces...

Vamos a llamar Λ^\cap a la recta intersección $\Pi \cap \Pi'$. Nuestra misión es encontrarla para que nos ayude a llegar al plano buscado.

Vamos a llamar Π^\perp al plano buscado, el único entre los infinitos planos perpendiculares a Λ^\cap que pasa por el punto $(4, 2, -1)$.

Tengamos presentes además las ecuaciones que definen los planos originales del problema:

$$\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2 \quad (1)$$

$$\Pi' \rightarrow x + 2y - z = 6 \quad (2)$$

Vamos a referirnos frecuentemente a estas ecuaciones como **la ecuación (1)** y **la ecuación (2)**

2.2. Método

1. Primero vamos a encontrar la intersección Λ^\cap de los dos planos: Π y Π' :
2. Luego vamos a encontrar la ecuación de los planos ortogonales a Λ^\cap y entre ellos seleccionar Π^\perp , el que pasa por $(4, 2, -1)$.

2.3. La intersección Λ^\cap

Como la intersección Λ^\cap está en ambos planos Π y Π' sus puntos deben cumplir simultáneamente con las ecuaciones que los definen, es decir:

$$\Lambda^\cap = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ para los cuales se cumplen } \begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Eso es una recta. Vamos a expresar la recta en forma paramétrica. Buscamos entonces $x = f_x(\lambda)$, $y = f_y(\lambda)$ y $z = f_z(\lambda)$ a partir de la anterior restricción que nos permitan calcular los puntos de esta recta intersección Λ^\cap en función de un parámetro λ .

2.3.1. Operaciones para poner x , y y z en función de λ . Obtención de la forma paramétrica de la recta de intersección Λ^\cap .

Recordemos que partimos de

$$\Lambda^\cap = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ para los cuales se cumplen } \begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Decidimos tomar λ como parámetro y hacemos $\lambda = x$. Obtenemos así directamente la primera de las ecuaciones paramétricas de Λ^\cap , la de x :

$$x = \lambda \tag{3}$$

Por la ecuación (2)

$$2x + 2y - z = 6$$

Despejamos z

$$z = 2x + 2y - 6$$

Usando (3)

$$z = 2\lambda + 2y - 6 \tag{4}$$

Por la ecuación (1)

$$4x - y + 3z = 2$$

Usando (3)

$$4\lambda - y + 3z = 2$$

Usando (4)

$$4\lambda - y + 3(2\lambda + 2y - 6) = 2$$

Distribuyendo

$$4\lambda - y + 6\lambda + 6y - 18 = 2$$

Agrupando y sumando

$$10\lambda + 5y - 18 = 2$$

Aislando y

$$5y = 2 + 18 - 10\lambda$$

Agrupando y sumando

$$5y = -10\lambda + 20$$

Dividiendo por 5

$$y = -2\lambda + 4 \tag{5}$$

Sólo queda z para resolver

Por la ecuación (4)

$$z = 2\lambda + 2y - 6$$

Usando (5)

$$z = 2\lambda + 2(-2\lambda + 4) - 6$$

Distribuyendo

$$z = 2\lambda - 4\lambda + 8 - 6$$

Agrupando y sumando

$$z = -2\lambda + 2 \tag{6}$$

Resumiendo: en las ecuaciones (3), (5) y (6) hemos hallado la forma de obtener las coordenadas de los puntos de Λ^\cap en función del parámetro λ :

$$x = \lambda$$

$$y = -2\lambda + 4$$

$$z = -2\lambda + 2$$

$$\text{Entonces } \Lambda^\cap = (x, y, z), \lambda \in \mathbb{R}^3 \text{ para los cuales se cumple: } \forall \lambda \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 4 \\ z = -2\lambda + 2 \end{cases}$$

Por fin llegamos a nuestra recta intersección Λ^\cap :

$$\Lambda^\cap = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} : (x = \lambda, y = -2\lambda + 4, z = -2\lambda + 2)\} \tag{7}$$

2.3.2. Forma vectorial de Λ^\cap en función de λ

Si tomamos $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (0, 4, 2)$ y $\vec{v} = (1, -2, -2)$ el conjunto de ecuaciones anterior se puede expresar como:

$$\vec{x} = \vec{u} + \lambda \vec{v}$$

O, en la extraña notación de los profesores de tu alumna ($\vec{x} = [\vec{v}] + \vec{u}$):

$$\vec{x} = [(1, -2, -2)] + (0, 4, 2)$$

2.3.3. Verificación de que Λ^\cap es realmente la intersección entre Π y Π'

Sabemos que para cada x , para cada y y para cada z en Λ^\cap también se cumplen las condiciones impuestas por los planos $\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \rightarrow 2x + 2y - z = 6$. Esto se debe, recordemos, al hecho de que, al ser Λ^\cap la intersección entre dichos planos sus puntos están en ambos. Cualquiera que sea λ se deben cumplir, entonces, todas las ecuaciones involucradas en las definiciones de Λ^\cap , Π y Π' .

Comencemos verificando el plano $\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2$. Usando la definición hallada de Λ^\cap podemos reemplazar las coordenadas por sus correspondientes funciones de λ :

$$\begin{aligned} 4x - y + 3z &= 2 \\ 4(\lambda) - (-2\lambda + 4) + 3(-2\lambda + 2) &= 2 \\ 4\lambda + 2\lambda - 6\lambda + 6 - 4 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

El reemplazo de las coordenadas en el plano $\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2$ por las funciones de Λ^\cap nos llevó por buen camino. Ahora podemos afirmar, sin temor a equivocarnos, que $2 = 2$. ¿Podemos decir lo mismo en el caso del plano $\Pi' \rightarrow 2x + 2y - z = 6$? Veamos:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 6 \\ 2(\lambda) + 2(-2\lambda + 4) - (-2\lambda + 2) &= 6 \\ 2\lambda - 4\lambda + 8 + 2\lambda - 2 &= 6 \\ 2\lambda - 4\lambda + 2\lambda + 8 - 2 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

¡Perfecto! Matamos tres pájaros de un tiro: No solo verificamos que $\Lambda^\cap = \Pi \cap \Pi'$ sino que además aprendimos que $2 = 2$ y $6 = 6$.

2.3.4. Conclusión de la búsqueda de la intersección Λ^\cap

$$\Lambda^\cap = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} : (x = \lambda, y = -2\lambda + 4, z = -2\lambda + 2)\}$$

2.4. Plano tangente Π^\perp a la intersección Λ^\cap

2.4.1. Obtención de la ecuación que define a Π^\perp

Podemos expresar nuestra recién encontrada Λ^\cap de la siguiente manera, si tomamos $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (0, 4, 2)$ y $\vec{v} = (1, -2, -2)$:

$$\vec{x} = \vec{u} + \lambda \vec{v}$$

O, en la extraña notación de los profesores de tu alumna ($\vec{x} = [\vec{v}] + \vec{u}$):

$$\vec{x} = [(1, -2, -2)] + (0, 4, 2)$$

Prestemos atención al hecho de que $\vec{v} = (1, -2, -2)$ es el vector **director** de Λ^\cap y el vector **normal** a infinitos planos que llenan el espacio \mathbb{R}^3 . Esos planos tienen en común una ecuación que vamos a encontrar a continuación.

Recordemos que la ecuación general del plano es $ax + by + cz = d$. De ella podemos extraer el vector $\vec{c} = (a, b, c)$. Y entonces podemos expresar la ecuación general del plano como $\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = d$. Si llamamos \vec{x} a (x, y, z) podemos expresar dicha ecuación como $\langle \vec{x}, \vec{c} \rangle = d$. En el origen, que es el lugar en donde $d = 0$, queda claro por qué el vector \vec{c} de los coeficientes se llama vector **normal** al plano.

Si buscamos un plano ortogonal a nuestra Λ^\cap , entonces, ya conocemos sus coeficientes (a, b, c) porque son los valores del vector director de Λ^\cap que son $(1, -2, -2)$. Es decir $a = 1$, $b = -2$ y $c = -2$.

Podemos reemplazarlos entonces en la ecuación general para ir avanzando en nuestra búsqueda:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ (1)x + (-2)y + (-2)z &= d \\ x - 2y - 2z &= d \end{aligned}$$

Ok. Los infinitos planos normales a Λ^\cap se especifican con la ecuación que tienen en común $(x - 2y - 2z = d)$. Recordemos que x , y y z son las variables independientes, pueden tener cualquier valor en \mathbb{R}^3 , aunque solo aquellos valores que cumplen $x - 2y - 2z = d$ hacen que el punto que definen esté en el plano determinado por un cierto valor de d .

¿Cual es, entonces, el valor de d que determina el plano Π^\perp buscado?

Afortunadamente, por la definición del problema ("...y que pase por $(4, 2, -1)$ "), tenemos un punto que sabemos que está en Π^\perp . Vamos a usarlo entonces para que queden determinados x , y y z en la ecuación de los planos ortogonales a Λ^\cap y así quede aislada la única incógnita, d .

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= d \\ d &= x - 2y - 2z \\ d &= (4) - 2(2) - 2(-1) \\ d &= 4 - 4 + 2 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Conocemos ahora la única incógnita que nos quedaba (d), sabemos ahora que su valor es 2, por lo tanto nuestro plano Π^\perp es:

$$\Pi^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 2\} \quad (8)$$

2.4.2. Verificación de que $\Pi^\perp \perp \Lambda^\cap$

Es directa y bastante obvia, el vector director de Λ^\cap es $\vec{v} = (1, -2, -2)$ que coincide con el vector normal de $\Pi^\perp \rightarrow x - 2y - 2z = -2$ que es $(1, -2, -2)$.

2.4.3. Verificación de que $(4, 2, -1) \in \Pi^\perp$

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 2 \\ (4) - 2(2) - 2(-1) &= 2 \\ 4 - 4 + 2 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Eso ya lo sabíamos.

2.4.4. ¿Es (4,2,-1) la intersección de Π^\perp y Λ^\cap ?

Veamos:

$$x = \lambda$$

$$y = -2\lambda + 4$$

$$z = -2\lambda + 2$$

$$x - 2y - 2z = 2$$

se tienen que cumplir todas en $\Pi^\perp \cap \Lambda^\cap$

Aislamos y encontramos el valor de λ reemplazando, en la ecuación del plano Π^\perp , las coordenadas por sus correspondientes funciones de λ :

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 2 \\ \lambda - 2(-2\lambda + 4) - 2(-2\lambda + 2) &= 2 \\ \lambda + 4\lambda - 8 + 4\lambda - 4 &= 2 \\ (1 + 4 + 4)\lambda &= 2 + 8 + 4 \\ 9\lambda &= 14 \\ \lambda &= \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Ahora que sabemos λ de $\Pi^\perp \cap \Lambda^\cap$ podemos obtener sus coordenadas.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ x &= \frac{14}{9} & x &= \frac{14}{9} \\ y &= -2\lambda + 4 \\ y &= -2\frac{14}{9} + 4 & y &= \frac{8}{9} \\ z &= -2\lambda + 2 \\ z &= -2\frac{14}{9} + 2 & z &= -\frac{10}{9} \end{aligned}$$

Llamemos P_i a la intersección $\Pi^\perp \cap \Lambda^\cap$. Acabamos de obtener:

$$P_i = \left(\frac{14}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{10}{9}\right) \quad (9)$$

¿Está bien hecha la cuenta? Veamos si $P_i \in \Pi^\perp$

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 2 \\ \left(\frac{14}{9}\right) - 2\left(\frac{8}{9}\right) - 2\left(-\frac{10}{9}\right) &= 2 \\ \frac{14}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} &= 2 \\ \frac{18}{9} &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Efectivamente $P_i \in \Pi^\perp$. Por lo tanto la respuesta a la pregunta ¿(4,2,-1)= $\Pi^\perp \cap \Lambda^\cap$? es **no**, (4, 2, -1) no es la intersección de Π^\perp y Λ^\cap , ese honor le corresponde a $\left(\frac{14}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{10}{9}\right)$.

3. Respuesta

Siendo $\Pi \rightarrow 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \rightarrow 2x + 2y - z = 6$ y $\Lambda^\cap = \Pi \cap \Pi'$.

Buscábamos $\Pi^\perp \mid \Pi^\perp \perp \Lambda^\cap, (4, 2, -1) \in \Pi^\perp$.

Lo encontramos. Es: $\Pi^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 2\}$. Está en la ecuación (8).

Misión cumplida.

Índice

1. El problema	1
2. La solución	1
2.1. Bautismos	1
2.2. Método	1
2.3. La intersección Λ^\cap	1
2.3.1. Operaciones para poner x , y y z en función de λ . Obtención de la forma paramétrica de la recta de intersección Λ^\cap	2
2.3.2. Forma vectorial de Λ^\cap en función de λ	3
2.3.3. Verificación de que Λ^\cap es realmente la intersección entre Π y Π'	3
2.3.4. Conclusión de la búsqueda de la intersección Λ^\cap	3
2.4. Plano tangente Π^\perp a la intersección Λ^\cap	3
2.4.1. Obtención de la ecuación que define a Π^\perp	3
2.4.2. Verificación de que $\Pi^\perp \perp \Lambda^\cap$	4
2.4.3. Verificación de que $(4, 2, -1) \in \Pi^\perp$	4
2.4.4. ¿Es $(4, 2, -1)$ la intersección de Π^\perp y Λ^\cap ?	5
3. Respuesta	5