Plano perpendicular a la intersección de dos planos

Juan Vicente Vía Baylet

30 de abril de 2020

Resumen

Vamos a ver una manera de resolver un ejercicio en donde se busca el plano perpendicular a la intersección entre dos planos y que pase por un punto dado. Esta resolución cumple con las condiciones de que no se usen matrices y de que no se use el producto vectorial.

1. El problema

Se consideran los planos $\Pi \to 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \to 2x + 2y - z = 6$. Hallar la ecuación de un plano que sea ortogonal a $\Pi \cap \Pi'$ y que pase por $(4, 2, -1)$.

2. La solución

NOTA: En https://www.geogebra.org/3d/a3scf54u se puede ver este problema y su solución en un gráfico 3D interactivo.

2.1. Bautismos

Para solucionar un problema es generalmente útil comenzar asegurándose de que las cosas estén bien identificadas y tengan un nombre. Entonces...

Vamos a llamar $\Lambda^{\cap}$ a la recta intersección $\Pi \cap \Pi'$. Nuestra misión es encontrarla para que nos ayude a llegar al plano buscado.

Vamos a llamar $\Pi^{\perp}$ al plano buscado, el único entre los infinitos planos perpendiculares a $\Lambda^{\cap}$ que pasa por el punto $(4, 2, -1)$.

Tengamos presentes además las ecuaciones que definen los planos originales del problema:

$$\Pi \to 4x - y + 3z = 2 \tag{1}$$
$$\Pi' \to x + 2y - z = 6 \tag{2}$$

Vamos a referirnos frecuentemente a estas ecuaciones como **la ecuación (1)** y **la ecuación (2)**

2.2. Método

1. Primero vamos a encontrar la intersección $\Lambda^{\cap}$ de los dos planos: Π y Π':
2. Luego vamos a encontrar la ecuación de los planos ortogonales a $\Lambda^{\cap}$ y entre ellos seleccionar $\Pi^{\perp}$, el que pasa por $(4, 2, -1)$.

2.3. La intersección $\Lambda^{\cap}$

Como la intersección $\Lambda^{\cap}$ está en ambos planos Π y Π' sus puntos deben cumplir simultáneamente con las ecuaciones que los definen, es decir:

$$\Lambda^{\cap} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ para los cuales se cumplen } \begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Eso es una recta. Vamos a expresar la recta en forma paramétrica. Buscamos entonces $x = f_x(\lambda)$, $y = f_y(\lambda)$ y $z = f_z(\lambda)$ a partir de la anterior restricción que nos permitan calcular los puntos de esta recta intersección $\Lambda^{\cap}$ en función de un parámetro λ.

2.3.1. Operaciones para poner x, y y z en función de λ. Obtención de la forma paramétrica de la recta de intersección $\Lambda^{\cap}$.

Recordemos que partimos de

$$\Lambda^{\cap} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ para los cuales se cumplen } \begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Decidimos tomar λ como parámetro y hacemos $\lambda = x$. Obtenemos así directamente la primera de las ecuaciones paramétricas de $\Lambda^{\cap}$, la de x:

$$x = \lambda \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\text{Por la ecuación (2)} & 2x + 2y - z &= 6 \\ &\text{Despejamos } z & z &= 2x + 2y - 6 \\ &\text{Usando (3)} & z &= 2\lambda + 2y - 6 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\text{Por la ecuación (1)} & 4x - y + 3z &= 2 \\ &\text{Usando (3)} & 4\lambda - y + 3z &= 2 \\ &\text{Usando (4)} & 4\lambda - y + 3(2\lambda + 2y - 6) &= 2 \\ &\text{Distribuyendo} & 4\lambda - y + 6\lambda + 6y - 18 &= 2 \\ &\text{Agrupando y sumando} & 10\lambda + 5y - 18 &= 2 \\ &\text{Aislando } y & 5y &= 2 + 18 - 10\lambda \\ &\text{Agrupando y sumando} & 5y &= -10\lambda + 20 \\ &\text{Dividiendo por 5} & y &= -2\lambda + 4 \end{aligned} \tag{5}$$

Sólo queda z para resolver

$$\begin{aligned} &\text{Por la ecuación (4)} & z &= 2\lambda + 2y - 6 \\ &\text{Usando (5)} & z &= 2\lambda + 2(-2\lambda + 4) - 6 \\ &\text{Distribuyendo} & z &= 2\lambda - 4\lambda + 8 - 6 \\ &\text{Agrupando y sumando} & z &= -2\lambda + 2 \end{aligned} \tag{6}$$

Resumiendo: en las ecuaciones (3), (5) y (6) hemos hallado la forma de obtener las coordenadas de los puntos de $\Lambda^{\cap}$ en función del parámetro λ:

$x = \lambda$

$y = -2\lambda + 4$

$z = -2\lambda + 2$

Entonces $\Lambda^{\cap} = (x,y,z), \lambda \in \mathbb{R}^3$ para los cuales se cumple: $\forall\lambda \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 4 \\ z = -2\lambda + 2 \end{cases}$

Por fin llegamos a nuestra recta intersección $\Lambda^{\cap}$:

$$\Lambda^{\cap} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall\lambda \in \mathbb{R} : (x = \lambda, y = -2\lambda + 4, z = -2\lambda + 2)\} \tag{7}$$

2.3.2. Forma vectorial de $\Lambda^\cap$ en función de λ

Si tomamos $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (0, 4, 2)$ y $\vec{v} = (1, -2, -2)$ el conjunto de ecuaciones anterior se puede expresar como:

$$\vec{x} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$$

O, en la extraña notación de los profesores de tu alumna ($\vec{x} = [\vec{v}] + \vec{u}$)‘:

$$\vec{x} = [(1, -2, -2)] + (0, 4, 2)$$

2.3.3. Geogebra me da otra ecuación

Si. Claro. Sería una casualidad que de la misma. Todo depende de una decisión personal: de donde sacamos el parámetro λ. Lo que hizo Geogebra es tomar z como parámetro, no x como -tan inteligentemente- hiciste vos.

La recta que obtiene Geogebra al intersecar los planos Π y Π' es $(1{,}67, 0{,}67, -1{,}33) + \lambda(-5, 10, 10)$ que se puede expresar como $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) + \lambda(-5, 10, 10)$.

Analicemos esta situación. En primer lugar, como siempre, pongamos nombres a las cosas:

$$\vec{x} = (x, y, z), \vec{u} = (0, 4, 2), \vec{v} = (1, -2, -2), \vec{w} = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}), \vec{z} = (-5, 10, 10) \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nuestra recta } \Lambda^\cap : \quad \vec{x} = \vec{u} + \lambda_1\vec{v} \tag{8}$$

$$\text{y la de Geogebra } \Lambda^G : \quad \vec{x} = \vec{w} + \lambda_2\vec{z} \tag{9}$$

Pero ambas ecuaciones (8) y (9) aluden a la misma recta. Es decir que $\Lambda^\cap = \Lambda^G$.

¿Porqué? Porque se cumplen dos condiciones:

La primera condición es que **cada vector director es combinación lineal del otro**. Si hacemos las cuentas veremos que $\vec{v} = -\frac{1}{5}\vec{z}$. Es decir que ambos están “apuntando a la misma dirección” (Aunque con distinto sentido, pero esto es irelevante, sólo un poco molesto).

La segunda condición es que **ambos puntos de paso $\vec{u}$ y $\vec{w}$ están en la misma recta**. Si restamos $\vec{u}$ a $\vec{w}$ obtenemos $\vec{d} = (\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ que es el vector director de la recta que ambos definen. A simple vista encontramos que:

$$\vec{d} \text{ es una combinacion lineal de } \vec{v} \qquad \vec{d} = \frac{5}{3}\vec{v}$$

$$\vec{d} \text{ es tambien es una combinacion lineal de } \vec{z} \qquad \vec{d} = -\frac{1}{3}\vec{z}$$

Es decir que **la diferencia entre los puntos de paso se puede expresar como una combinación lineal** de cualquiera de los directores.

Este resultado era una condición obligatoria para llegar a la conclusión de que ambos puntos están en $\Lambda^\cap$ y también en Λ^G. Y así poder afirmar que $\Lambda^\cap = \Lambda^G$.

Gráficamente lo podemos ver en https://www.geogebra.org/3d/a3scf54u.

2.3.4. Verificación de que $\Lambda^\cap$ es realmente la intersección entre Π y Π'

Sabemos que para cada x, para cada y y para cada z en $\Lambda^\cap$ también se cumplen las condiciones impuestas por los planos $\Pi \to 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \to 2x + 2y - z = 6$. Esto se debe, recordemos, al hecho de que, al ser $\Lambda^\cap$ la intersección entre dichos planos sus puntos están en ambos. Cualquiera que sea λ se deben cumplir, entonces, todas las ecuaciones involucradas en las definiciones de $\Lambda^\cap$, Π y Π'.

Comencemos verificando el plano $\Pi \to 4x - y + 3z = 2$. Usando la definición hallada de $\Lambda^\cap$ podemos reemplazar las coordenadas por sus correspondientes funciones de λ:

$$\begin{aligned} 4x - y + 3z &= 2 \\ 4(\lambda) - (-2\lambda + 4) + 3(-2\lambda + 2) &= 2 \\ 4\lambda + 2\lambda - 6\lambda + 6 - 4 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

El reemplazo de las coordenadas en el plano $\Pi \to 4x - y + 3z = 2$ por las funciones de $\Lambda^\cap$ nos llevó por buen camino. Ahora podemos afirmar, sin temor a equivocarnos, que $2 = 2$. ¿Podemos decir lo mismo en el caso del plano $\Pi' \to 2x + 2y - z = 6$? Veamos:

$$\begin{aligned}
2x + 2y - z &= 6 \\
2(\lambda) + 2(-2\lambda + 4) - (-2\lambda + 2) &= 6 \\
2\lambda - 4\lambda + 8 + 2\lambda - 2 &= 6 \\
2\lambda - 4\lambda + 2\lambda + 8 - 2 &= 6 \\
6 &= 6
\end{aligned}$$

¡Perfecto! Matamos tres pájaros de un tiro: No solo verificamos que $\Lambda^\cap = \Pi \cap \Pi'$ sino que además aprendimos que $2 = 2$ y $6 = 6$.

2.3.5. Conclusión de la búsqueda de la intersección $\Lambda^\cap$

$$\Lambda^\cap = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} : (x = \lambda, y = -2\lambda + 4, z = -2\lambda + 2)\}$$

2.4. Plano tangente $\Pi^\perp$ a la intersección $\Lambda^\cap$

2.4.1. Obtención de la ecuación que define a $\Pi^\perp$

Podemos expresar nuestra recién encontrada $\Lambda^\cap$ de la siguiente manera, si tomamos $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (0, 4, 2)$ y $\vec{v} = (1, -2, -2)$:

$$\vec{x} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$$

O, en la extraña notación de los profesores de tu alumna ($\vec{x} = [\vec{v}] + \vec{u}$)‘:

$$\vec{x} = [(1, -2, -2)] + (0, 4, 2)$$

Prestemos atención al hecho de que $\vec{v} = (1, -2, -2)$ es el vector **director** de $\Lambda^\cap$ y el vector **normal** a infinitos planos que llenan el espacio $\mathbb{R}^3$. Esos planos tienen en común una ecuación que vamos a encontrar a continuación.

Recordemos que la ecuacion general del plano es $ax + by + cz = d$. De ella podemos extraer el vector $\vec{c} = (a, b, c)$. Y entonces podemos expresar la ecuación general del plano como $\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = d$. Si llamamos $\vec{x}$ a (x, y, z) podemos expresar dicha ecuación como $\langle \vec{x}, \vec{c} \rangle = d$. En el origen, que es el lugar en donde $d = 0$, queda claro por qué el vector $\vec{c}$ de los coeficientes se llama vector **normal** al plano.

Si buscamos un plano ortogonal a nuestra $\Lambda^\cap$, entonces, ya conocemos sus coeficientes (a, b, c) porque son los los valores del vector director de $\Lambda^\cap$ que son $(1, -2, -2)$. Es decir $a = 1$, $b = -2$ y $c = -2$.

Podemos reemplazarlos entonces en la ecuacion general para ir avanzando en nuestra búsqueda:

$$\begin{aligned}
ax + by + cz &= d \\
(1)x + (-2)y + (-2)z &= d \\
x - 2y - 2z &= d
\end{aligned}$$

Ok. Los infinitos planos normales a $\Lambda^\cap$ se especifican con la ecuación que tienen en común ($x - 2y - 2z = d$). Recordemos que x, y y z son las variables independientes, pueden tener cualquier valor en $\mathbb{R}^3$, aunque solo aquellos valores que cumplen $x - 2y - 2z = d$ hacen que el punto que definen esté en el plano determinado por un cierto valor de d.

¿Cual es, entonces, el valor de d que determina el plano $\Pi^\perp$ buscado?

Afortunadamente, por la definición del problema (”...y que pase por $(4, 2, -1)$”), tenemos un punto que sabemos que está en $\Pi^\perp$. Vamos a usarlo entonces para que queden determinados x, y y z en la ecuación de los planos ortogonales a $\Lambda^\cap$ y así quede aislada la única incógnita, d.

$$
\begin{aligned}
x - 2y - 2z &= d \\
d &= x - 2y - 2z \\
d &= (4) - 2(2) - 2(-1) \\
d &= 4 - 4 + 2 \\
d &= 2
\end{aligned}
$$

Conocemos ahora la única incógita que nos quedaba (d), sabemos ahora que su valor es 2, por lo tanto nuestro plano $\Pi^{\perp}$ es:

$$\Pi^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 2\} \tag{10}$$

2.4.2. Verificación de que $\Pi^{\perp} \perp \Lambda^{\cap}$

Es directa y bastante obvia, el vector director de $\Lambda^{\cap}$ es $\vec{v} = (1, -2, -2)$ que coincide con el vector normal de $\Pi^{\perp} \to x - 2y - 2z = -2$ que es $(1, -2, -2)$.

2.4.3. Verificación de que $(4, 2, -1) \in \Pi^{\perp}$

$$
\begin{aligned}
x - 2y - 2z &= 2 \\
(4) - 2(2) - 2(-1) &= 2 \\
4 - 4 + 2 &= 2 \\
2 &= 2
\end{aligned}
$$

Eso ya lo sabíamos.

2.4.4. ¿Es (4,2,-1) la intersección de $\Pi^{\perp}$ y $\Lambda^{\cap}$?

Veamos:

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda \\
y &= -2\lambda + 4 \\
z &= -2\lambda + 2 \\
x - 2y - 2z &= 2
\end{aligned}
$$

se tienen que cumplir todas en $\Pi^{\perp} \cap \Lambda^{\cap}$

Aislamos y encontramos el valor de λ reemplazando, en la ecuación del plano $\Pi^{\perp}$, las coordenadas por sus correspondientes funciones de λ:

$$
\begin{aligned}
x - 2y - 2z &= 2 \\
\lambda - 2(-2\lambda + 4) - 2(-2\lambda + 2) &= 2 \\
\lambda + 4\lambda - 8 + 4\lambda - 4 &= 2 \\
(1 + 4 + 4)\lambda &= 2 + 8 + 4 \\
9\lambda &= 14 \\
\lambda &= \frac{14}{9}
\end{aligned}
$$

Ahora que sabemos λ de $\Pi^{\perp} \cap \Lambda^{\cap}$ podemos obtener sus coordenadas.

$$x = \lambda$$
$$x = \frac{14}{9} \qquad x = \frac{14}{9}$$
$$y = -2\lambda + 4$$
$$y = -2\frac{14}{9} + 4 \qquad y = \frac{8}{9}$$
$$z = -2\lambda + 2$$
$$z = -2\frac{14}{9} + 2 \qquad z = -\frac{10}{9}$$

Llamemos P_i a la intersección $\Pi^{\perp} \cap \Lambda^{\cap}$. Acabamos de obtener:

$$P_i = (\frac{14}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{10}{9}) \tag{11}$$

¿Está bien hecha la cuenta? Veamos si $P_i \in \Pi^{\perp}$

$$x - 2y - 2z = 2$$
$$(\frac{14}{9}) - 2(\frac{8}{9}) - 2(-\frac{10}{9}) = 2$$
$$\frac{14}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} = 2$$
$$\frac{18}{9} = 2$$
$$2 = 2$$

Efectivamente $P_i \in \Pi^{\perp}$. Por lo tanto la respuesta a la pregunta ¿(4,2,-1)=$\Pi^{\perp} \cap \Lambda^{\cap}$? es **no**, $(4, 2, -1)$ no es la intersección de $\Pi^{\perp}$ y $\Lambda^{\cap}$, ese honor le corresponde a $(\frac{14}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{10}{9})$.

3. Respuesta

Siendo $\Pi \to 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' \to 2x + 2y - z = 6$ y $\Lambda^{\cap} = \Pi \cap \Pi'$.

Buscábamos $\Pi^{\perp} \mid \Pi^{\perp} \perp \Lambda^{\cap}, (4, 2, -1) \in \Pi^{\perp}$.

Lo encontramos. Es: $\Pi^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = 2\}$. Está en la ecuación (10).

Misión cumplida.

Índice