

Modelo termodinámico de acreción en agujeros negros BTZ exóticos con temperaturas negativas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Mecánica Estadística

Carlos José Quimbay Herrera

A.F. Bermúdez, J.A. Rodríguez, N.E. Rivera

anfbermudezme@unal.edu.co, juarodriguezfr@unal.edu.co, neriveral@unal.edu.co

19 de Diciembre de 2021

Resumen

En este trabajo se analizan dos definiciones termodinámicas de entropía aplicadas a un agujero negro con propiedades exóticas el cual presenta temperaturas negativas. Se analizan las implicaciones termodinámicas de la temperatura negativa en ambas entropías y se interpreta los resultados en términos de intercambios de energía, almacenamiento de información y radiación. Para ello se usan dos definiciones matemáticas de entropía en relatividad general que presentan notables similitudes con las definiciones de entropía de Gibbs y de Boltzmann y se aplican a un modelo concreto de acreción en el cual el intercambio de energía se da a través del aumento de masa del agujero negro por asimilación de la masa de su disco de acreción el cual también le otorga momentum angular. Se obtiene como resultado un sistema que recrea las propiedades de un sistema de Spin con un límite superior para la energía, donde la descripción más adecuada para la temperatura es aquella que depende de la gravedad superficial de la singularidad, mientras que la descripción más adecuada de entropía es en donde esta depende del área superficial del horizonte de eventos. En la dinámica del modelo de acreción se encuentra que tanto la masa como el momentum angular aumentan progresivamente pero el radio de la singularidad disminuye mientras que el horizonte de eventos converge rápidamente hacia la ergósfera.

Palabras clave: Entropía de Gibbs, Entropía de Boltzmann, Temperatura Negativa, Agujeros Negros, Agujeros BTZ, Temperatura de Hawking, Entropía de Bekenstein, Horizonte de Eventos, Ergósfera, Singularidad Anular.

1 Introducción

1.1 Conflictos en la definición de Entropía

Se define la entropía de Boltzman como:

$$S_B(E) = k_B \ln \omega(E) + \text{constante} \quad (1)$$

Y la entropía de Gibbs como:

$$S_G(E) = k_B \ln \Omega(E) + \text{constante} \quad (2)$$

La temperatura de Gibbs pareciera que existe una temperatura asociada $T_G = (\partial S_G / \partial E)^{-1}$, pero es peligroso extrapolar de esto que la igualdad TG puede usarse para medir si los sistemas están en equilibrio térmico y esto puede conducir a resultados absurdos. Es por ello y por pruebas rigurosas matemáticas desarrolladas en las citas de este trabajo que la energía de Boltzman cumple todos los

requisitos que se esperan de una entropía termodinámica, mientras que la entropía de Gibbs no lo hace.

1.2 Entropía Negativa

La entropía negativa o también conocida como negentropía, es un término introducido por el físico Erwin Schrödinger en 1944 y se utiliza como una medida de distancia a la normalidad, esto quiere decir que es aquella entropía que un sistema exporta o libera para mantener bajos sus niveles de entropía.

En el año 2009 Mahulikar & Herwig redefinieron la neguentropía de un subsistema ordenado dinámicamente como el déficit de entropía relacionado al caos que rodea al subsistema ordenado. De esta manera, las unidades de la entropía negativa son $J/kg - K$.

En la teoría de la información, la entropía negativa se usa como medida de distancia de normalidad. la entropía negativa es siempre positiva, invariante a cambios lineales de coordenadas y se desvanece si y sólo si la señal es Gaussiana.

La neguentropía se define entonces como:

$$J(p_x) = S(\phi) - S(p_x) \quad (3)$$

Donde $S(\phi_x)$ es el diferencial de entropía de la densidad Gaussiana con la misma media y varianza, mientras que p_x y $S(p_x)$ es la entropía diferencial de p_x :

$$S(p_x) = - \int p_x(u) \log(p_x(u)) du \quad (4)$$

También esta relacionada con la entropía de redes, que es usada en el análisis de componentes independientes. La entropía negativa puede ser entendida intuitivamente como la información que puede ser guardada cuando se representa p_x de forma eficiente.

Se tiene también la formulación entrópica de la mecánica estadística con aplicaciones en biología molecular y en procesos termodinámicos no equilibrados:

$$J = S_{max} - S = -\phi = -k \ln(Z) \quad (5)$$

Donde J es la capacidad para la entropía de Gibbs, ϕ es el potencial de Massieu, Z es la función de partición y k es la constante de Boltzmann.

1.3 Eficiencia de Carnot mayor a uno

El ciclo de Carnot es un ciclo termodinámico ideal teórico propuesto por el físico francés Sadi Carnot en 1924. Este, proporciona un límite superior en la eficiencia de un sistema de refrigeración al crear una diferencia de temperatura mediante la aplicación de trabajo al sistema.

La eficiencia de Carnot se define como:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (6)$$

Donde W que es el trabajo es:

$$W = \oint P dV = \oint T dS = (T_H - T_C)(S_B - S_A) \quad (7)$$

Q_C es el calor extraído del sistema, Q_H es el calor introducido al sistema, T_C es la temperatura absoluta del deposito frío, T_H es la temperatura absoluta del deposito caliente, S_B es la entropía

máxima del sistema y S_A es la entropía mínima del sistema.

Esta eficiencia es menor que uno, sin embargo ninguna ley física prohíbe esto. Existe un punto donde parece que es posible hacer funcionar un motor en contacto con un solo baño de calor de temperatura negativa. Si bien esto es cierto, los baños de calor de temperatura negativa no ocurren naturalmente, por lo que no es posible aún hacer funcionar un motor de manera sostenible extrayendo calor de un solo depósito. Las temperaturas negativas no implican movimiento perpetuo.

1.4 Ejemplo: Sistemas de Spin

Hay un caso simple a considerar, el cual es un sistema de N_0 spins en un estado fundamental con energía cero y N_1 spins están en un estado excitado con energía ϵ . Se puede tomar los spins N_0 como down y los spins N_1 como up. Se construye entonces un arreglo de spins donde $\omega = N!/(N_0!N_1!)$. Entonces la energía y la entropía de Boltzmann se van a definir como:

$$\begin{aligned} E &= \epsilon N_1 \\ S &= \ln \omega = N \ln N - N_0 \ln N_0 - N_1 \ln N_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Si $N_0 = N - N_1$ la temperatura del sistema de spins es:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{(\ln N_0 + 1) - (\ln N_1 + 1)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{N_0}{N_1} \quad (9)$$

Luego, se obtiene la familia de resultados de Boltzmann:

$$N_1 = N_0 e^{-\epsilon/T} \quad (10)$$

Entonces

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e^{-\epsilon/T}}{1 + e^{-\epsilon/T}} \quad (11)$$

$$\frac{N_0}{N} = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon/T}} \quad (12)$$

Se tiene que la energía libre es $F = E - TS$, donde S :

$$S = -N_0 \ln(N_0/N) - N_1 \ln(N_1/N) \quad (13)$$

Luego:

$$F = \epsilon N_1 + T N_0 \ln \frac{N_0}{N} + T N_1 \ln \frac{N_1}{N} \quad (14)$$

Sustituyendo se obtiene que la energía libre es:

$$F = -T N \ln(1 + e^{-\epsilon/T}) \quad (15)$$

Se tiene entonces que

$$-\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = -\frac{N e^{-\epsilon/T}}{1 + e^{-\epsilon/T}} = -N_1 \quad (16)$$

Esto lo que quiere decir es que N_1 es la variable que describe la disposición de los spins. Por completez, la entropía en función de T y N es:

$$\frac{S}{N} = \frac{\epsilon}{T} \frac{e^{-\epsilon/T}}{1 + e^{-\epsilon/T}} + \ln(1 + e^{-\epsilon/T}) \quad (17)$$

Siguiendo la figura:

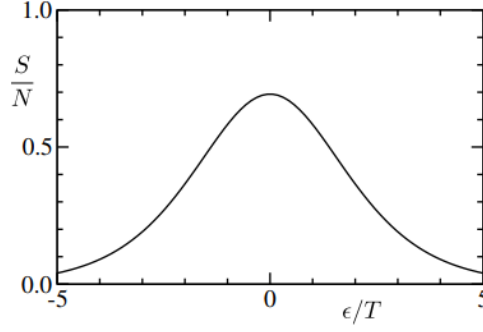


Figura 1: Gráfica de la ecuación anterior donde solo depende del radio ϵ/T . [1]

2 Marco Teórico

2.1 Agujeros Negros: Ecuación y Variables de estado

La Relatividad General es una teoría resultante de los intentos de diferentes físicos y matemáticos del siglo XX por unificar las principales teorías físicas más generales del momento (Gravitación y Relatividad Especial) resolviendo algunas paradojas mutuas entre estas (Tal como la aparente transmisión instantánea del campo gravitatorio). Es así como la unificación se resume en una *Ecuación de estado* general que guarda toda la información física de esta teoría; para la relatividad general, las ecuaciones de estado se conocen como las **Ecuaciones de Campo de Einstein** [2]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (18)$$

Las cuales son un conjunto de $4N$ ecuaciones diferenciales no lineales acopladas (donde N es la dimensión del espacio-tiempo) y la forma de resolverlas depende de las condiciones del problema o sistema que se considera, lo cual puede permitir reducir el número de variables y ecuaciones. En la época dorada de la cosmología y la Relatividad General se comenzaron a estudiar con gran detalle soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein imponiendo ciertas condiciones y suposiciones físicas, de forma que se obtuviese como solución una expresión conocida como *Métrica* o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual contiene toda la información necesaria para describir la geometría del espacio-tiempo alrededor del objeto y la cinemática de cualquier partícula alrededor de este objeto.

Una de estas soluciones exactas correspondió a la primera descripción de lo que hoy conocemos como “Agujero negro”, un objeto de escala cosmológica resultado del colapso gravitatorio de un objeto masivo con simetría esférica, tal como lo son las estrellas muy densas. Al estudiar diferentes tipos de distribución de masa con diferentes geometrías cercanas pero no iguales a la de una esfera, Werner Israel y Brandon Carter encontraron que tan sólo tres parámetros eran suficientes para describir la métrica de un agujero negro. lo que denominaron el *Teorema de no-pelo* [3][4][5] estos tres parámetros corresponden a propiedades intrínsecas tales como su Masa M , su Momento Angular J y su carga Q (Siendo este último un caso muy peculiar debido a la tendencia de los cuerpos cargados a neutralizarse en ausencia de campos externos). Al tomar los resultados del Teorema de no pelo, podemos establecer que las *Variables de estado* para un agujero negro son M, J, Q mientras que su ecuación de estado conlleva a una métrica que en términos generales está dada por la *Métrica de Kerr-Newman* [6]

$$ds^2 = -\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right)\rho^2 + (cdt - a\sin^2(\theta)d\phi)^2\frac{\Delta}{\rho^2} - ((r^2 + a^2)d\phi - acdt)^2\frac{\sin^2(\theta)}{\rho} \quad (19)$$

Esta métrica (representada en particular en coordenadas Boyer-Lindquist) donde (t, r, θ, ϕ) son coordenadas esféricas, representa la forma más general de agujero negro; es decir, un agujero negro masivo, rotante y cargado. Podemos ver que esta métrica es suficiente para caracterizar el estado del agujero negro y su evolución ya que los tres parámetros M, J, Q ya mencionados se encuentran implícitos en (19) teniendo en cuenta que se definen las siguientes escalas de longitud:

- $a = J/Mc$ es el *Parámetro de Spin*
- $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ es el radio de las coordenadas Boyer-Lindquist
- $\Delta = r^2 - r_s r + a^2 + r_Q^2$

Y además se definen los siguientes radios:

- $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ es el *Radio de Schwarzschild*
- $r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ es el radio de la carga eléctrica
- $r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{GQ^2}{c^4} - \frac{J^2}{M^2 c^2}}$ son los radios de los horizontes de sucesos

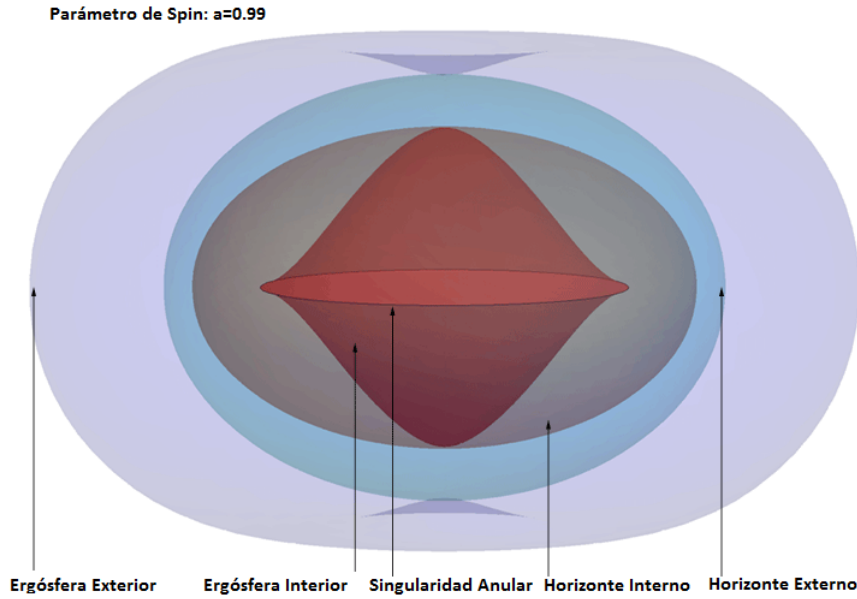


Figura 2: Superficies de un agujero de Kerr-Newman

2.2 Interpretación termodinámica de los agujeros negros: Entropía de Bekenstein-Hawking

De acuerdo a los desarrollos más generales encontrados en la sección anterior concluimos que *Conocer los parámetros intrínsecos M, J, Q de un agujero negro junto con su métrica es suficiente para describirlo completamente*. Es así como, después de haber llegado a esta descripción general se comenzaron a tomar estos resultados para estudiar propiedades geométricas de los agujeros negros pero también posibles propiedades termodinámicas. Es así como, entre las décadas de los 60's y 70' Bekenstein y Hawking descubrieron que estos sistemas exhiben características descritas por ecuaciones muy similares a las leyes de la termodinámica cuando esta descripción se hace cerca del horizonte de eventos, tanto así que mientras Bekenstein, interpretando el agujero negro como un sistema cerrado con frontera espacio-temporal que impide el intercambio de información con el exterior, logró describir su entropía en términos del área superficial del objeto [7]

$$S_{BH} = \frac{k_b A}{4l_p^2} \quad (20)$$

Donde el área del agujero de Kerr-Newman está dada por $A = 4\pi(r_+^2 + \frac{J^2}{M^2 c^2})$, $l_p^2 = \frac{G\hbar}{c^3}$ es la longitud de Planck y k_b la constante de Boltzmann. Por otro lado Stephen Hawking relacionó esta entropía con una temperatura característica para estos objetos la cual implica la posibilidad de un agujero negro de emitir radiación térmica debido a un mecanismo cuántico de producción espontánea de pares partícula-antipartícula cerca del horizonte de eventos [8] realizando el cálculo $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)\bigg|_J$:

$$T(M) = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c k_B} \quad (21)$$

Donde $\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$ es la aceleración gravitatoria superficial del agujero negro de Kerr-Newman [9]

Una característica aún más sorprendente de esta relación entre termodinámica y relatividad general se dio cuando Cai y Kim pudieron obtener las ecuaciones de FLRW¹ tan sólo aplicando la primera ley de la termodinámica al horizonte de eventos cosmológico incluso describiendo el efecto de la constante cosmológica como una expansión adiabática del universo [10] lo que significa que las ecuaciones de campo se podrían obtener a través de la termodinámica, sugiriendo así que la termodinámica podría ser incluso una teoría más allá de la relatividad general. La importancia de este resultado implica que así como los agujeros negros se pueden describir a través de las ecuaciones de campo de Einstein, también se podrían describir a través de las ecuaciones de estado de la termodinámica con las mismas variables de estado. Con esta idea en mente, Bardeen enunció junto con Hawking y Carter cuatro leyes termodinámicas para el horizonte de eventos de los agujeros negros considerándolos como un sistema termodinámico cerrado, leyes equivalentes a las leyes de la termodinámica clásica [11] las cuales, enunciadas en términos generales para los agujeros de Kerr-Newman son:

1. Ley cero: Temperatura homogénea

El horizonte de eventos es un horizonte de Killing, lo que implica que la aceleración gravitatoria superficial es constante e independiente de las coordenadas.

$$t^\mu \nabla_\mu \kappa = 0 \quad (22)$$

Esto significa que *La temperatura del agujero negro a lo largo de su horizonte de eventos es constante*. lo que es equivalente al equilibrio térmico

2. Primera ley: Conservación de la energía

Debido a que la energía está asociada a la cantidad de masa ($E = Mc^2$) y como el área del agujero negro depende de los tres parámetros $A = A(M, J, Q)$ entonces:

$$\begin{aligned} dA &= \left(\frac{\partial A}{\partial M}\right)dM + \left(\frac{\partial A}{\partial J}\right)dJ + \left(\frac{\partial A}{\partial Q}\right)dQ \\ dM &= TdS + \Omega dJ + \phi dQ \end{aligned} \quad (23)$$

Esta expresión claramente tiene una gran similitud con la expresión $dU = TdS - dW$ donde el trabajo está relacionado con la carga y el momento angular $dW = \Omega dJ + \phi dQ$ (Los cuales incluso se asocian a potenciales químicos). Además encontramos nuevas variables tales como la frecuencia angular $\Omega = \frac{J}{Mc} \left(r_+^2 + \frac{J^2}{M^2 c^2}\right)^{-1}$ y el potencial eléctrico $\phi = Qr_+ \left(r_+^2 + \frac{J^2}{M^2 c^2}\right)^{-1}$

3. Segunda Ley: Entropía creciente

Como la entropía de un sistema aislado es creciente, y un agujero negro sólo puede aumentar su masa y por consiguiente su área, entonces el área creciente de un agujero negro implica un crecimiento en su entropía:

¹Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, la métrica que describe en términos generales un universo de curvatura k arbitraria y con un ritmo de expansión arbitrario dado por Λ

$$dS_{Tot} = dS_{surr} + dS_{BH} \geq 0 \quad (24)$$

es decir, *La entropía de un agujero aislado puede ser sólo creciente*

4. Tercera Ley: Hipótesis de la censura cósmica

Cuando se intenta determinar bajo qué condiciones se anula la temperatura del agujero negro, la pregunta es equivalente a encontrar los valores de los parámetros que anulan la gravedad superficial

$$\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{GQ^2}{c^4} - \frac{J^2}{M^2 c^2} = 0 \quad (25)$$

Cuando este caso extremo se satisface, los radios de los horizontes interno y externo se igualan dejando la singularidad desnuda, para tal caso se requiere un momento angular tan alto que no se puede alcanzar por medio de ningún proceso físico.

Estas consideraciones generales son el estado del arte actual en cuanto a la termodinámica clásica de agujeros negros [12]; sin embargo aún persisten algunos problemas de interpretación respecto a la conexión que tiene esta descripción con el mundo de la mecánica cuántica; es por eso que un análisis más profundo que involucre la mecánica estadística podría conllevar a entender mejor cómo funciona la termodinámica en estos sistemas y de paso, dar primeros indicios de una conexión más profunda entre la mecánica cuántica y la relatividad general que nos pueda llevar a conectarlas mediante una teoría más general.

2.3 Agujero Negro BTZ

Esta serie de descubrimientos e investigaciones anteriormente expuestas en el marco de la termodinámica y la relatividad general han llevado a considerar sistemas simplificados (menor dimensionalidad) para comprender mejor estas características termodinámicas de sistemas cosmológicos e interpretar sus efectos físicos sin perder información fundamental y permitiendo encontrar soluciones más exactas a problemas específicos. Un modelo simplificado muy estudiado es el del agujero negro de Bañados-Teitelboim-Zanelli o BTZ el cual se obtiene en un espacio-tiempo de dimensión 2+1 (2 Dimensiones espaciales y una dimensión temporal) con constante cosmológica negativa [13].

Como ya se mencionó, el agujero negro BTZ se obtiene al imponer las condiciones de simetría axial y evolución estacionaria a las ecuaciones de campo de Einstein para las dimensiones radial y azimutal en coordenadas esféricas o cilíndricas de donde se obtiene la métrica BTZ:

$$ds^2 = \left(M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right)} + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2 \quad (26)$$

Donde las coordenadas $\{t, r, \phi\}$ son las coordenadas polares usuales con límites dados por $0 \leq t \leq \infty$, $0 \leq r \leq \infty$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. De dicha métrica se pueden obtener las regiones del agujero negro:

$$r_{erg} = \sqrt{Ml} \quad (27)$$

$$r_{\pm} = \sqrt{Ml} \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2}}{2}} \quad (28)$$

Se donde se obtienen las desigualdades $0 \leq r_- \leq r_+ \leq r_{erg}$. Esto nos permite incluso escribir la masa y el momento angular del agujero negro en términos de los radios exterior e interior de la siguiente manera:

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8Gl^2}$$

$$J = \frac{2r_+r_-}{8Gl}$$
(29)

Con lo cual, la métrica se re-escribe como:

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{l^2 r^2} dt^2 + \frac{l^2 r^2}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_+ r_-}{l r^2} dt \right)^2$$
(30)

A continuación podemos ver en la figura 3 las regiones que caracterizan a este agujero negro

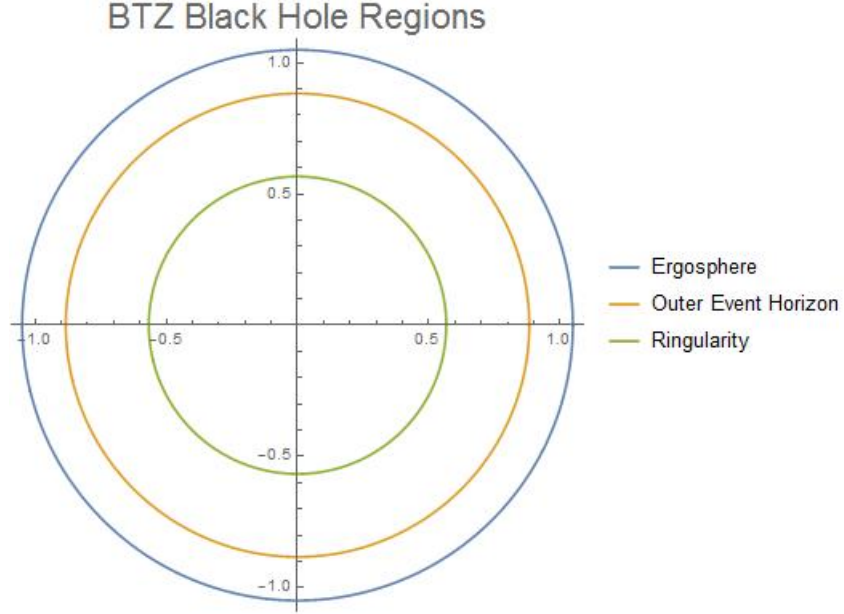


Figura 3: Regiones del agujero negro 2-Dimensional

3 Planteamiento del problema y metodología de trabajo

3.1 Problema

Los agujeros negros BTZ tienen propiedades muy similares a los de dimensión $(3+1)$ ampliamente estudiados en la astrofísica de agujeros negros; sin embargo al reducir una dimensión se obtienen otras propiedades termodinámicas interesantes cuando se consideran procesos de intercambio de energía interna que afectan los micro estados que describen al agujero BTZ. Lo que queremos es obtener esa descripción termodinámica relacionada con la entropía y las temperaturas negativas para posteriormente lograr una descripción cualitativa del significado físico de estas temperaturas negativas, todo apoyado con simulaciones computacionales que faciliten esta interpretación

3.2 Motivación y justificación

Cuando se estudian sistemas termodinámicos bajo esta nueva interpretación de la entropía y la temperatura, los ejemplos de sistemas considerados son tan limitados que casi en toda la literatura se encuentran los mismos dos o tres ejemplos relacionados con sistemas cuánticos. Sin embargo es posible extender estos análisis termodinámicos a sistemas macroscópicos (con efectos íntimamente relacionados a los de la escala cuántica) obteniendo resultados similares que podrían dar un mejor entendimiento de las consecuencias de adoptar una u otra definición.

3.3 Objetivo General

El objetivo de esta investigación es extender el rango de aplicaciones de la temperatura negativa a sistemas exóticos que se pueden encontrar en el dominio de los cuerpos masivos y los campos gravitacionales potentes, dominio en el que entran sistemas de escala cosmológica, Quásares, Estrellas de Neutrones y Agujeros Negros.

3.4 Objetivos Específicos

1. Construir un sistema con condiciones que recrean los sistemas de spin de dos niveles con temperatura negativa
2. Obtener la descripción termodinámica de las temperaturas y entropías del sistema
3. Realizar una simulación que describa la evolución y el intercambio de energía en el agujero negro BTZ
4. Identificar e interpretar los significados de la temperatura negativa, la entropía y la función de partición del sistema
5. (Opcional) Calcular la eficiencia del sistema similar al de una máquina de Carnot

3.5 Metodología

Dado que este trabajo requiere un alto manejo de herramientas teóricas, para comenzar la metodología será recopilar la mayor cantidad de información posible acerca de la termodinámica de agujeros negros en $(3+1)$ dimensiones y de agujeros negros exóticos en $(2+1)$ dimensiones, de manera que para comenzar halla una familiarización con las matemáticas necesarias (Análisis Tensorial) y la interpretación geométrica de sus resultados; posteriormente se escogerá sólo la bibliografía que puede aportar específicamente a los objetivos que se quieren alcanzar y con respecto a esta bibliografía se realizará el desarrollo teórico relacionado con la termodinámica; finalmente se propondrá un ejemplo concreto en el cual se construya un modelo fenomenológico para simularlo y analizarlo.

3.6 Resultados Esperados

Se espera obtener la temperatura negativa del agujero negro BTZ y una descripción igual desde la perspectiva de los micro-estados del sistema usando una descripción estadística, además de estudiar las posibles definiciones de entropía que resulten más útiles en el sentido de obedecer las leyes termodinámicas ya conocidas

3.7 Cronograma

# de objetivo específico	# de semanas
1	1/2
2	1
3	1
4	1/2

Cuadro 1: Cronograma para el desarrollo de proyecto.

3.8 Recursos Disponibles

- Recurso computacional Mathematica
- Curso M.Estadística 2021-2
- Bibliografía expuesta en este proyecto

4 Desarrollo y resultados de los objetivos específicos

4.1 Objetivo 1: Construcción del modelo termodinámico

Como vimos en la introducción, es necesario construir un sistema termodinámico que comparta una condición importante que se también se presenta en los sistemas de Spin: Poseer un espectro de energía con un límite superior; de manera que cuando esta condición se cumple es inevitable presentar una temperatura negativa sin importar si se usa la descripción de entropía de Gibbs o de Boltzmann.

Teniendo en cuenta lo que buscamos, en [17] encontramos que existen por lo menos tres sistemas exóticos distintos que exhiben propiedades similares en cuanto a que los tres satisfacen exactamente la misma métrica BTZ dada en (26), a saber:

- **Gravedad Topológica BCEA:** Teorías de gravedad modificada sin constante cosmológica [14]
- **Anti-de Sitter:** Agujeros negros en espacios Anti-de Sitter de curvatura constante y dimensión (4+1) [15]
- **Teorías Gravitacionales de Chern-Simons:** Son teorías que por medio de la acción describen sistemas con los estados del efecto Hall cuántico [16]

Estos sistemas no sólo satisfacen la métrica BTZ sino que describen un agujero negro de dos dimensiones que se pueden expandir/contrair. De la misma manera, los tres sistemas mencionados *admiten un intercambio entre masa y momento angular* descrito por las relaciones:

$$\begin{aligned} M &= \frac{xj}{l} \\ J &= xlm \end{aligned} \tag{31}$$

donde m y j representan la masa y el momento angular usuales que satisfacen las relaciones 29 donde el parámetro l está definido de manera que la constante cosmológica sea negativa, es decir $\Lambda := -\frac{1}{l^2}$ y finalmente x es un parámetro que depende de la forma en la que se relacionan los parámetros; usualmente se toma esta cantidad como $x = 1$

La razón para usar esta parametrización que permite este intercambio es que, en los agujeros negros usuales la masa usual m es una cota superior para el momentum angular j o incluso la suma del momento angular y la carga para agujeros negros de Kerr-Newman; esta cota la impone la hipótesis de la censura cósmica 25 para evitar que la singularidad quede desnuda ($\frac{xj}{l} \geq m$). Sin embargo, para el agujero negro que se expande y contrae, en el cual la masa usual y el momentum usual se intercambian, se obtiene un límite superior para la nueva masa M de la forma:

$$\begin{aligned} (lM)^2 - J^2 &= x^2[j^2 - (lm)^2] \leq 0 \\ M &\leq \frac{J}{l} \end{aligned} \tag{32}$$

Recordemos que en las leyes termodinámicas de los agujeros negros, la masa es el equivalente a la energía de cualquier otro sistema termodinámico.

Antes de continuar el desarrollo, es necesario realizar los cálculos correspondientes al área y la gravedad superficial del agujero en $2 + 1$ dimensiones. El cálculo del área superficial generalizada sabiendo que el determinante de la métrica 26 en unidades naturales ($k_b = G = \hbar = c = 1$) es $g = r^2$) da como resultado:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \sqrt{|g(r)|} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} r d\phi \\ A &= 2\pi r \end{aligned} \tag{33}$$

Como podemos observar, el área generalizada del agujero BTZ posee la fórmula del perímetro de un círculo de radio r ; esto tiene sentido ya que el área generalizada se define como la frontera $n - 1$ dimensional que encierra el volumen de dimensión n donde n es la dimensión espacial, y la frontera del círculo (esfera 2-dimensional) es el perímetro. Esto implica que, debido a que tenemos varios horizontes (r_{erg}, r_+, r_-) también tenemos varias áreas A_{erg}, A_+, A_- . Adicional a esto, la métrica 26 es estacionaria y de simetría axial lo que implica que tanto la forma general de la entropía de Bekenstein 20 como la temperatura de Hawking 21 siguen siendo validas para BTZ, de forma que también es necesario calcular la gravedad superficial:

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= -\frac{1}{2}\nabla^\mu\chi^\nu\nabla_\mu\chi_\nu \\ \kappa_+ &= \frac{r_+^2 - r_-^2}{r_+l^2}\end{aligned}\tag{34}$$

4.2 Objetivo 2: Temperatura y entropía del sistema

Como vimos, tenemos distintos horizontes lo que implica distintas áreas superficiales. Esta propiedad nos permite tener una elección arbitraria de temperaturas y momentos angulares donde, si se toma la primera ley termodinámica:

$$dM = \Omega_+ dJ + T_+ dS\tag{35}$$

donde la temperatura y la frecuencia angular son:

$$\begin{aligned}T_+ &= \frac{\hbar}{2\pi} \frac{(r_+^2 - r_-^2)}{l^2 r_+} \\ \Omega_+ &= \frac{r_-}{l r_+}\end{aligned}\tag{36}$$

Estas expresiones conllevan a una entropía que depende del radio interno del agujero y por lo tanto de su área generalizada interna:

$$S = x \frac{2\pi r_-}{4G\hbar}\tag{37}$$

Esta es la primer descripción que podemos lograr. Sin embargo esta expresión para la entropía posee un problema: depende del área del horizonte interno. Tanto en el caso de los agujeros de Kerr-Newman el horizonte de eventos interno posee problemas de estabilidad y no cumplen la hipótesis de la censura cósmica que está directamente relacionada con la tercera ley termodinámica; por lo tanto estos problemas de inestabilidad imposibilitan que esta entropía siga la segunda ley.

Por lo tanto, este sistema exige una re-definición de la entropía que sea consistente con las leyes de la entropía de agujeros negros; para esto se sugiere proponer que la entropía dependa del horizonte exterior (38) y con esto modificar la forma de la primera ley 35 para encontrar nuevas expresiones de la frecuencia angular y la temperatura que sean consistentes con la segunda ley, con lo que se obtiene (39):

$$S_{New} = x \frac{2\pi r_+}{4G\hbar}\tag{38}$$

$$dM = \Omega_- dJ + T_- S_{New}\tag{39}$$

Esto trae como consecuencia que la forma funcional de la temperatura y la frecuencia angular es:

$$\begin{aligned}T_- &= \frac{\hbar}{2\pi} \frac{(r_-^2 - r_+^2)}{l^2 r_-} \\ \Omega_- &= \frac{r_+}{l r_-}\end{aligned}\tag{40}$$

De acuerdo a estas nuevas definiciones (38) y (40) encontramos las siguientes propiedades:

- El teorema de área creciente de Hawking se obtiene aplicando la ecuación de Raychaudhuri², que en este caso nos da una condición para el área del horizonte no-singular externo $dA_+ \geq 0$ y por lo tanto esta vez sí se satisface la segunda ley termodinámica $dS_{New} \geq 0$. Este resultado es general para procesos cuasi-estacionarios en los que la acreción afecta la razón de cambio del área respecto a la masa, debido a que en general $\frac{dr_+}{dm} > 0$ y $\frac{dr_-}{dm} < 0$.
- Otra propiedad interesante que encontramos es que la velocidad angular tiene un límite inferior dado por $\Omega_- \geq \frac{1}{l}$ debido a que $r_+ \geq r_-$. Esto nos dice que la velocidad angular alcanza su mínimo valor en el caso extremo en que los dos horizontes se igualan y la velocidad angular diverge cuando el horizonte interior tiende a cero; por lo tanto, el sistema siempre se encuentra rotando.
- El aspecto más importante es que tanto la gravedad superficial como la temperatura asociada con el horizonte interno poseen valores negativos, como ya se mencionó, esto es consecuencia del límite superior para los niveles de energía (En este caso la masa)

4.3 Objetivo 3: Simulación

Para lograr una interpretación clara sobre la termodinámica del agujero consideraremos un modelo de acreción para el cual podamos analizar los procesos que afectan al agujero BTZ y la manera en como estos procesos afectan las variables termodinámicas. Es así como construiremos el modelo haciendo las siguientes suposiciones físicas:

- Supondremos que la tasa de aumento de masa del agujero negro es constante en el tiempo, es decir $dm/dt = c$, para que el agujero negro siempre tenga una fuente de masa acretada que podría aumentar su área como esperamos, y así, aumentar la entropía. Para simplificar, tomamos el factor constante como $c = 1$ entonces $m \approx t$. Veamos que esto concuerda con la condición cuasi-estática para el radio interno y externo, que es $dr_+/dm > 0$ y $dr_-/dm < 0$. En las siguientes imágenes, j es fijo mientras m aumenta; está claro cómo la singularidad anular se vuelve más pequeña mientras que el horizonte de eventos aumenta, por lo que se acerca a la ergósfera, que resulta ser un equivalente a un Agujero negro de Schwarzschild.

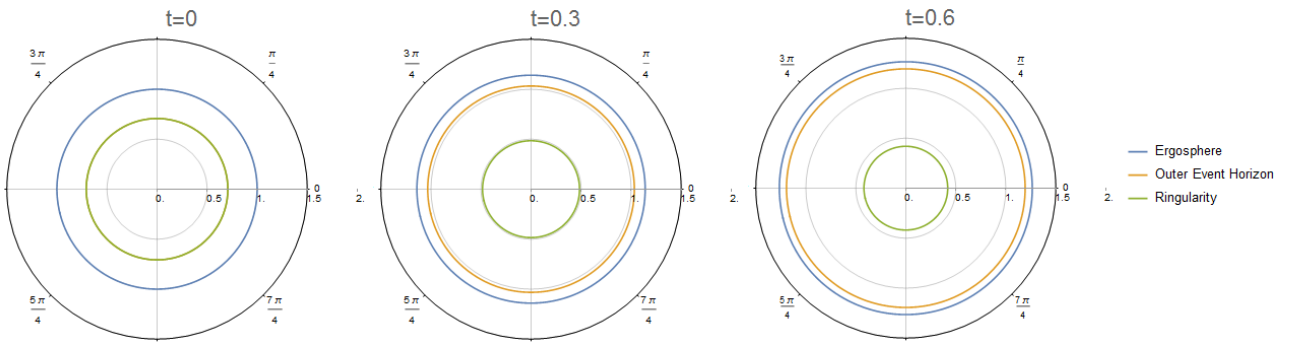


Figura 4: Evolución temporal de los horizontes cuando j es constante

- Supongamos que el momento angular aumenta logarítmica mente, puesto que para un disco de acreción que gira en la misma dirección del agujero negro la condición de crecimiento logarítmico impone un límite de velocidad angular que obliga a que el momento angular sea siempre menor que la masa; ya que es obligatorio en la condición dada por $j \neq m$. Tengamos en cuenta que, al fijar la masa y aumentar lentamente el momento angular, la singularidad anular se acerca al horizonte de eventos externo mientras que la ergósfera permanece constante y el proceso se detiene cuando la singularidad está a punto de exponerse fuera del horizonte de eventos.

²Lo cual está fuera del propósito de esta investigación pero se puede consultar en las fuentes citadas en esta sección

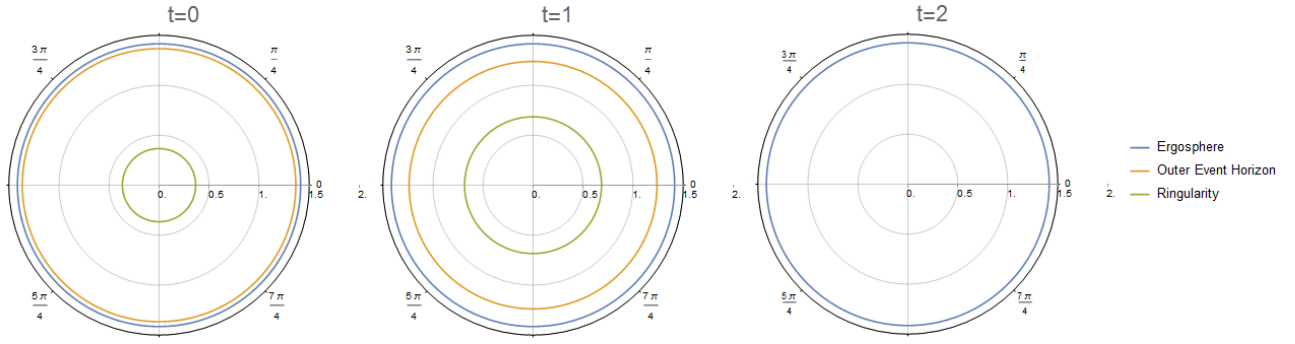


Figura 5: Evolución temporal de los horizontes cuando m es constante

- Por otro lado, recordemos que las constantes cosmológicas imponen un valor mínimo para la velocidad angular, que imponen también un valor mínimo para el momento angular y por tanto, un valor mínimo para la masa m que establecemos como 1; entonces, uniendo todas estas condiciones, obtenemos un momento angular dado por $j = 1 + \ln(m)$, por lo que, cuanto más masa gana el agujero negro, más lento es el aumento del momento angular. Este modelo se tomará para el análisis termodinámico realizado.

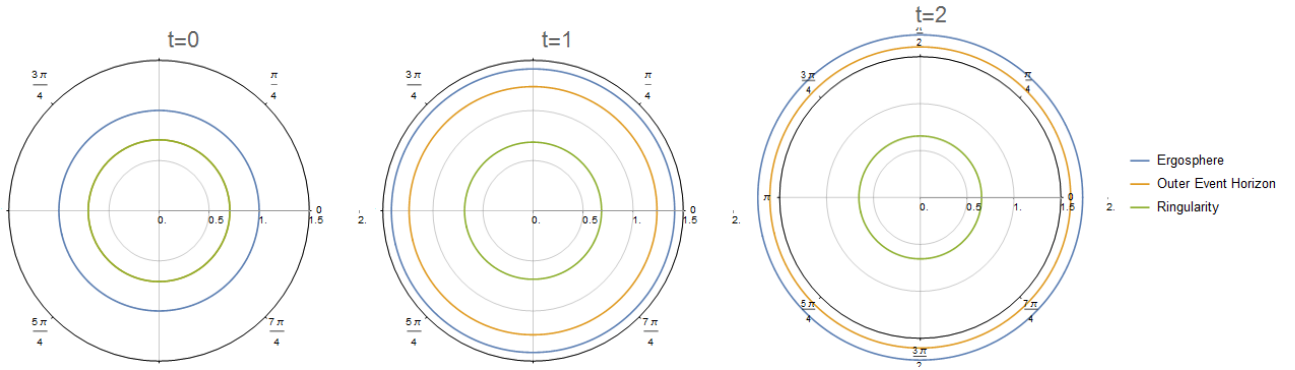


Figura 6: Evolución temporal del modelo termodinámico con crecimiento lineal de masa y crecimiento logarítmico de momentum angular

Otra forma de visualizar esta evolución es trazar cada radio como una superficie 3D que da conos concéntricos centrados alrededor del eje de temporal como se muestra en 7.

Ahora que hemos construido el modelo de acreción podemos describir la evolución temporal de nuestras cantidades termodinámicas. Primero consideremos las primeras definiciones que teníamos (36,37), en las que la temperatura dependía del horizonte externo pero la entropía dependía del horizonte interno, en estas encontramos que para nuestro modelo de acreción según la simulación 6 conforme hay crecimiento del horizonte del agujero, el radio de la singularidad anular disminuye haciendo que mientras la temperatura aumenta, la entropía decrezca y más aún, que la velocidad angular disminuya, como vemos en la figura 8:

La imagen que nos brinda esta primera aproximación termodinámica es totalmente inconsistente con la interpretación estándar que se tiene sobre los agujeros negros, sus fronteras y su almacenamiento de información. Para comenzar, El crecimiento de un agujero negro disminuye progresivamente su temperatura mientras que aquí se observa lo contrario; por otro lado la entropía suele asociarse con información almacenada en la frontera del agujero negro, es decir, en su horizonte de eventos, mientras que aquí la información se almacena en la singularidad y cada vez se pierde más información puesto que la entropía disminuye acercándose cada vez más al cero. Adicional a esto, nuestro modelo considera que el disco de acreción contribuye al momentum angular del agujero negro conforme la masa cruza su horizonte, sin embargo aquí también disminuye tendiendo a cero. Cuando relacionamos

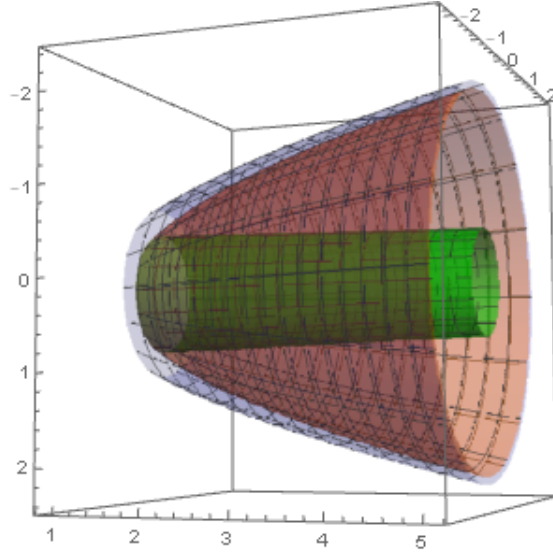


Figura 7: Vista 3D de la evolución temporal del modelo: En verde la singularidad anular, en rojo el horizonte de eventos y en azul la ergósfera

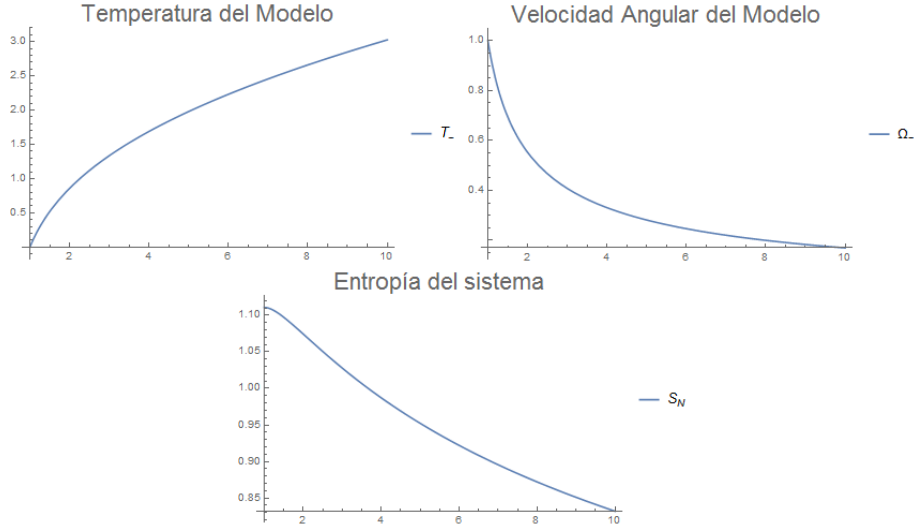


Figura 8: Evolución temporal de las cantidades termodinámicas según la primera definición

esto con lo expuesto en [1] estas características defectuosas que encontramos se relacionan con las mismas características problemáticas que exhibe la entropía de Gibbs la cual no cumple la segunda ley termodinámica.

Ahora vamos a adoptar la nueva descripción termodinámica dada por 38 y 40 en las cuales la entropía es proporcional al área del horizonte externo (es decir, al perímetro del horizonte de eventos) mientras que la temperatura depende de la gravedad superficial del horizonte interno (Es decir, la singularidad anular); de acuerdo a esto se obtienen las siguientes gráficas de evolución temporal:

En este caso podemos observar que esta nueva perspectiva es más consecuente con las propiedades termodinámicas que se espera encontrar en el sistema; lo primero que encontramos es que la segunda ley termodinámica se cumple en cuanto a que la razón de acreción de masa incrementa progresivamente el área del horizonte externo, de la misma manera la contribución del momento angular del disco de acreción aumenta el momento del agujero negro, ahora, como se esperaba se presentan temperaturas negativas correspondientes a la gravedad superficial de la singularidad. Debido a que se cumplen las leyes termodinámicas aunque el sistema presenta temperaturas negativas, podemos asociar esta

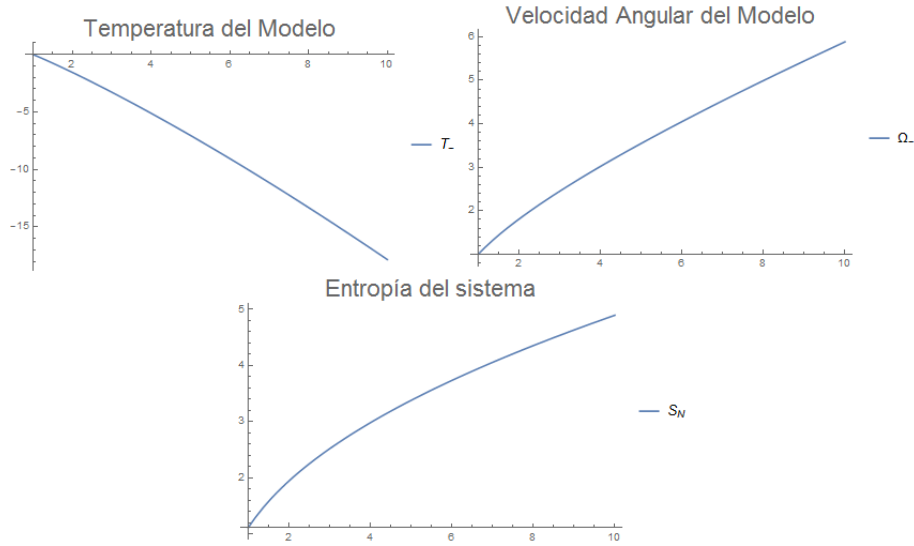


Figura 9: Evolución temporal de las cantidades termodinámicas según la primera definición

definición de entropía con la de Boltzmann para el caso de los sistemas de Spin descritos anteriormente

4.4 Objetivo 4: Interpretación estadística

Ahora, para analizar mejor el proceso detrás de la temperatura negativa consideramos el caso en el que el agujero negro mantiene su masa constante. Para dicho caso la temperatura β^{-1} tampoco cambia y la función térmica de partición \mathcal{Z} es la correspondiente a la de un ensamble canónico 19, de manera que podemos construir la energía libre de Helmholtz como:

$$F = -\frac{1}{\beta} \log(\mathcal{Z}) \quad (41)$$

$$F = M - S_{New}T_- - \Omega_-J$$

Donde Ω_-J es la energía perdida debido a la rotación, este factor juega el papel de un potencial químico como se esperaba encontrar y como sucede en el caso del agujero negro de Kerr-Newman. En el caso de nuestro modelo, esta función también es creciente ya que la temperatura negativa es la responsable de que la caída de masa incremente la energía útil disponible, la cual permite que el agujero negro pueda incrementar su momento angular. En particular este potencial químico es absorbido por los modos radiantes del agujero, responsables por la radiación de Hawking pero en este caso en el que la temperatura es negativa, los modos radiantes ceden esa energía para que el agujero gire (Ya que la temperatura negativa representa ese intercambio entre la energía interna y la entropía).

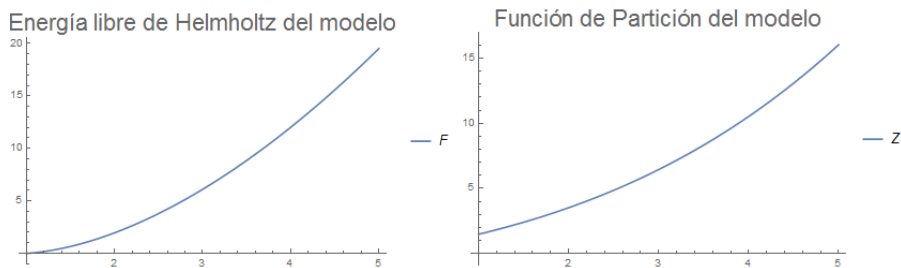


Figura 10: Gráfica de las funciones F y Z dependientes de la masa en el modelo de acreción

Referencias

- [1] Frenkel, D., Warren, P. B. (2015). *Gibbs, Boltzmann, and negative temperatures*. American Journal of Physics, 83(2), 163–170. doi:10.1119/1.4895828
- [2] Einstein, A. (1916). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen Der Physik, 354(7), 769–822. doi:10.1002/andp.19163540702
- [3] Israel, W. (1967). *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*. Physical Review, 164(5), 1776–1779. doi:10.1103/physrev.164.1776
- [4] Israel, W. (1968). *Event horizons in static electrovac space-times*. Communications in Mathematical Physics, 8(3), 245–260. doi:10.1007/bf01645859
- [5] Carter, B. (1971). *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom*. Physical Review Letters, 26(6), 331–333. doi:10.1103/physrevlett.26.331
- [6] Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., Torrence, R. (1965). *Metric of a Rotating, Charged Mass*. Journal of Mathematical Physics, 6(6), 918–919. doi:10.1063/1.1704351
- [7] Bekenstein, J. D. (1973). *Black Holes and Entropy*. Physical Review D, 7(8), 2333–2346. doi:10.1103/physrevd.7.2333
- [8] Hawking, S. W. (1974). *Black hole explosions?*. Nature, 248(5443), 30–31. doi:10.1038/248030a0
- [9] Chou, Y.-C. (2020). *A radiating Kerr black hole and Hawking radiation*. Heliyon, 6(1), e03336. doi:10.1016/j.heliyon.2020.e03336
- [10] Cai, R.-G., Kim, S. P. (2005). *First Law of Thermodynamics and Friedmann Equations of Friedmann–Robertson–Walker Universe*. Journal of High Energy Physics, 2005(02), 050–050. doi:10.1088/1126-6708/2005/02/050
- [11] Bardeen, J. M., Carter, B., Hawking, S. W. (1973). *The four laws of black hole mechanics*. Communications in Mathematical Physics, 31(2), 161–170. doi:10.1007/bf01645742
- [12] Ruiz, O., Molina, U., Vilorio, P. (2019). *Thermodynamic analysis of Kerr-Newman black holes*. Journal of Physics: Conference Series, 1219, 012016. doi:10.1088/1742-6596/1219/1/012016
- [13] Bañados, M., Teitelboim, C., Zanelli, J. (1992). *Black hole in three-dimensional spacetime*. Physical Review Letters, 69(13), 1849–1851. doi:10.1103/physrevlett.69.1849
- [14] Carlip, S., Gegenberg, J., Mann, R. B. (1995). *Black holes in three-dimensional topological gravity*. Physical Review D, 51(12), 6854–6859. doi:10.1103/physrevd.51.6854
- [15] Bañados, M. (1998). *Constant curvature black holes*. Physical Review D, 57(2), 1068–1072. doi:10.1103/physrevd.57.1068
- [16] Sahoo, B., Sen, A. (2006). *BTZ black hole with Chern-Simons and higher derivative terms*. Journal of High Energy Physics, 2006(07), 008–008. doi:10.1088/1126-6708/2006/07/008
- [17] Park, M.-I. (2007). *Thermodynamics of exotic black holes, negative temperature, and Bekenstein–Hawking entropy*. Physics Letters B, 647(5-6), 472–476. doi:10.1016/j.physletb.2007.02.036
- [18] Akbar, M. (2007). *Thermodynamic Interpretation of Field Equations at Horizon of BTZ Black Hole*. Chinese Physics Letters, 24(5), 1158–1161. doi:10.1088/0256-307x/24/5/009
- [19] Vargas Sánchez, A. (2017). *Study of the BTZ black hole*. Uniandes <http://hdl.handle.net/1992/19031>