DD MM AA

Señales y sistemas

Parcial 1

Estudiante: Juan Carlos Salazar Moreno

Literal a: La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = A e^{j w_0 t}$$

$$x_2(t) = B e^{j 5 w_0 t}$$

con $w_0 = 2\pi/T$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$. Determine la distancia entre las dos señales.

Desarrollo literal A:

// Desarrollamos el binomio al cuadrado: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\rightarrow \frac{1}{T}\left[\underbrace{\int_T |x_1(t)|^2 dt}_{Ex_1} - 2\int_T x_1(t) \cdot x_2(t)\, dt + \underbrace{\int_T |x_2(t)|^2 dt}_{Ex_2}\right]$$

// Reemplazamos lo anterior en la integral dada:

$$\rightarrow \overline{P}x_1 = \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)|^2 dt$$

$$\overline{P}x_2 = \frac{1}{T}\int_T |x_2(t)|^2 dt$$

Potencias medias

Norma

$$\frac{1}{T}\int_T |x_1(t)-x_2(t)|^2 dt = \boxed{\overline{P}_{x1} - \frac{2}{T}\int_T x_1(t)\cdot x_2(t)\,dt + \overline{P}_{x2}} \quad ①$$

V/ De esta forma, podemos resolver las tres integrales:

$$\circ\ \overline{P}_{x1} = \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T (Ae^{j w_0 t}\cdot Ae^{-j w_0 t})\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T A^2 (e^{j w_0 t}\cdot e^{-j w_0 t})\,dt$$

Recordemos: $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$= \frac{A^2}{T}\int_T e^0\,dt = \frac{A^2}{T}\int_T 1\,dt = \frac{A^2}{T}\cdot t\Big|_0^T$$

$$\boxed{\overline{P}_{x1} = A^2}$$

$$\circ\ \overline{P}_{x2} = \frac{1}{T}\int_T |x_2(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T (Be^{j s w_0 t}\cdot e^{-j s w_0 t})\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T B^2\cdot e^0\,dt = \frac{B^2}{T}\int_T 1\,dt = \frac{B^2}{T}\cdot t\Big|_0^T$$

$$\boxed{\overline{P}_{x2} = B^2}$$

$$\circ\ -\frac{2}{T}\int_T (x_1(t)\cdot x_2(t))\,dt = -\frac{2}{T}\int_T (Ae^{j w_0 t}\cdot Be^{j w_0 t})\,dt$$

$$= -\frac{2}{T}\int_T (Ae^{j\frac{2\pi}{T}\cdot t}\cdot Be^{j s\frac{2\pi}{T}\cdot t})\,dt$$

$$= -\frac{2}{T}\int_T (A\cdot B\,(e^{j\frac{10\pi+2\pi}{T}t})\,dt$$

DD MM AA

$$= -\frac{2}{T} AB \int_T e^{j\frac{12\pi}{T}\cdot t}\, dt$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{T}{j12\pi}\cdot e^{j\frac{12\pi}{T}t}\right]\Big|_0^T$$

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{T}{j12\pi}e^{\frac{j12\pi}{T}\cdot T} - \frac{T}{j12\pi}e^{\frac{j12\pi\cdot 0}{T}}\right]$$

Recordemos que:

$$e^{j12\pi} = \cos(12\pi) + j\,\mathrm{sen}(12\pi) = 1$$

$$-\frac{2}{T}\int_T x_1(t)\cdot x_2(t)\, dt = -\frac{2AB}{T}\cdot 0 = \boxed{0}$$

✓/ Reemplazamos los resultados de las tres integrales en la expresión ①:

$$\rightarrow \bar{P}x_1 - \frac{2}{T}\int_T x_1(t)\cdot x_2(t)\, dt + \bar{P}x_3 = \boxed{A^2 + B^2}$$

✓/ Por último, hallamos la distancia entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como:

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T\to\infty}(A^2 + B^2)$$

$$\boxed{d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2}}$$

DD MM AA

Punto b: Cual es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con una frecuencia de 5KHz, aplicado a la señal continua $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\mathrm{sen}(1000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe un conversor adecuado.

Descarrollo literal B:

✓/ Se tiene la siguiente señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\mathrm{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

así que podemos obtener los siguientes datos:

$$\omega_1 = 1000\pi \; ; \quad F_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \; ; \quad T_1 = \frac{1}{500}$$

$$\omega_2 = 2000\pi \; ; \quad F_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000 \; ; \quad T_2 = \frac{1}{1000}$$

$$\omega_3 = 11000\pi \; ; \quad F_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500 \; ; \quad T_3 = \frac{1}{5500}$$

✓/ Procedemos a discretizar, recordando que $t = nT_s = \frac{n}{F_s}$

• Para x_1: $x_1[n] = 3\cos\left(1000\pi \cdot \frac{n}{5000}\right)$

$$x_1[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right)$$

$$\Omega_1 = \frac{5}{\pi} = 0{,}62 \rightarrow \text{No es un aliasing ya que:}$$

$$-\pi < \Omega_1 < \pi$$

DD MM AA

- Para X_2: $X_2[n] = 5 \operatorname{sen}\left(2000\pi \cdot \frac{n}{5000}\right)$

$$X_2[n] = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)$$

$\Omega_2 = \frac{2\pi}{5} = 1.2 \rightarrow$ No es un aliasing ya que:

$$-\pi < \Omega_2 < \pi$$

- Para X_3: $X_3[n] = 10 \cos\left(11000\pi \cdot \frac{n}{5000}\right)$

$$X_3[n] = 10 \cos\left(\frac{11\pi}{5} \cdot n\right)$$

$\Omega_3 = \frac{11\pi}{5} = 6.9 \rightarrow$ Es un aliasing ya que:

$$\Omega_3 > \pi$$

V/ De esta forma, la señal $X(t)$ discretizada queda como:

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right) + 10 \cos\left(\frac{11\pi}{5} \cdot n\right)$$

V/ El conversor de 5KHz no es adecuado ya que hay señales con la misma frecuencia ($X_1[n]$ y $X_2[n]$). Así que aplicamos el teorema de Nyquist para calcular la nueva frecuencia de muestreo Fs.

$$\boxed{F_s > 2 F_{max}}$$

$F_{max} = 11000\pi$ $\quad F = 5500$

$F_s > 2 \cdot 5500$

La nueva Fs mínima será 11000.

La señal discretizada aplicando Nyquist será:

$$\boxed{X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{11} \cdot n\right) + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{11} \cdot n\right) + 10 \cos(\pi \cdot n)}$$